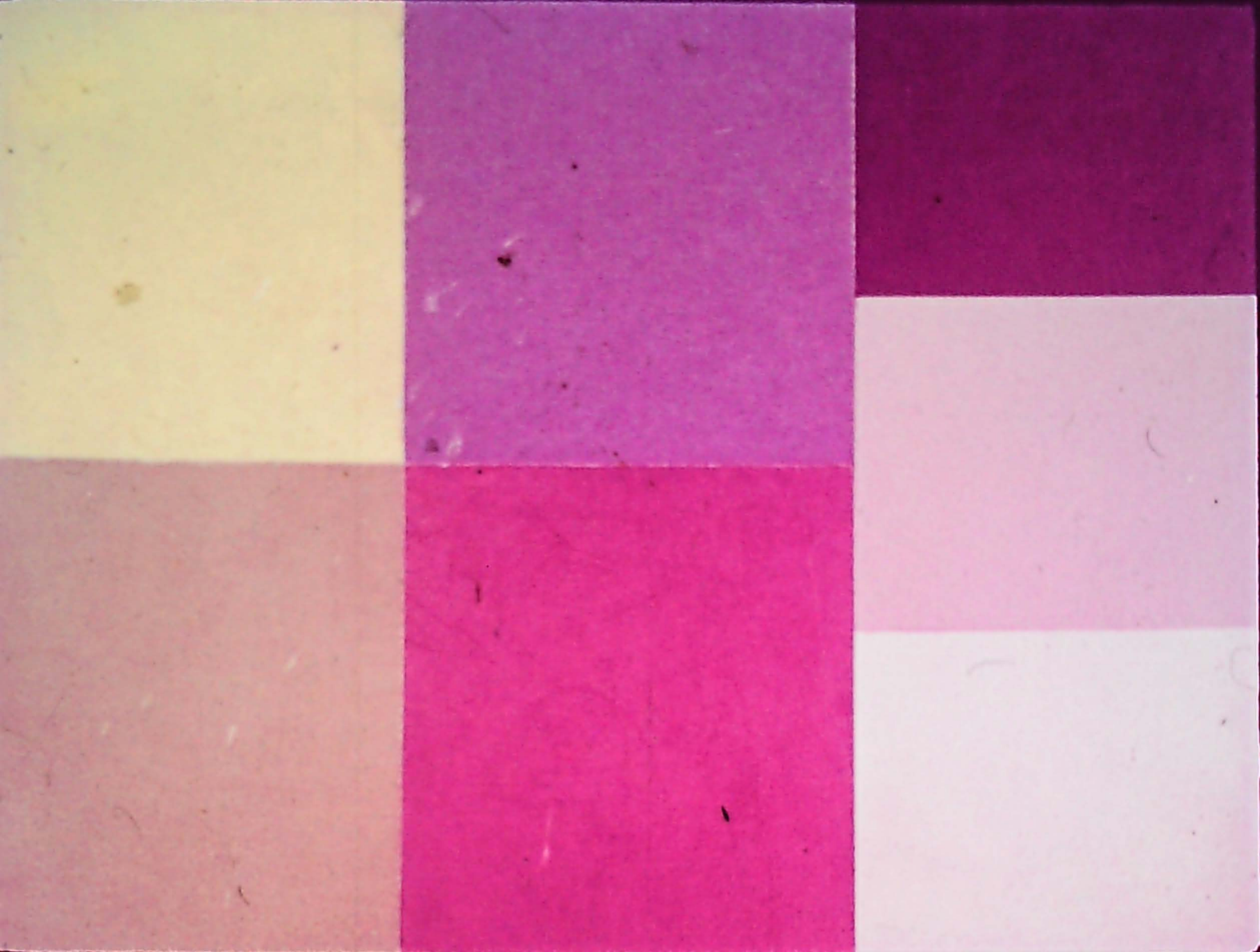


XII 1978

5 8 7

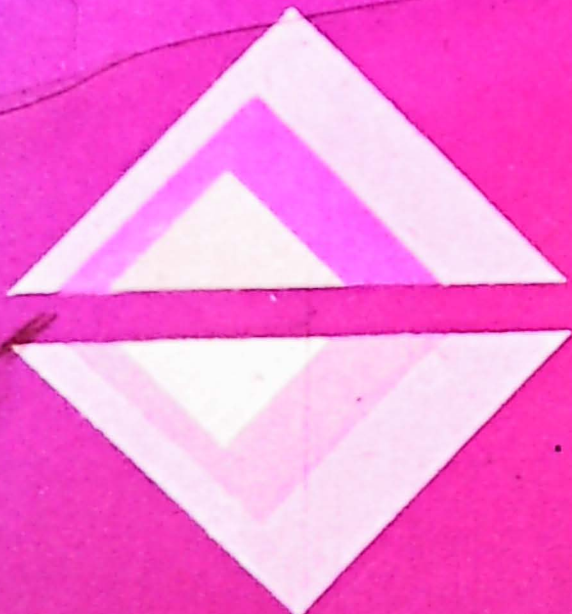
ТУ 19-32-73

1

2

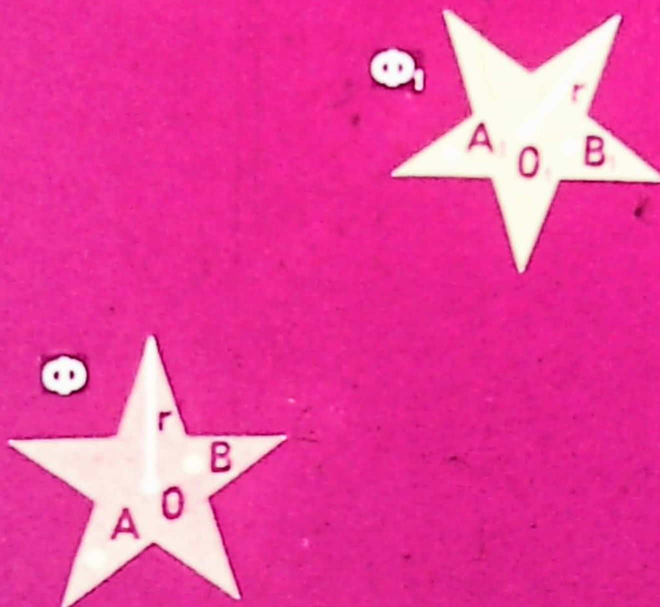
ДИАФИЛЬМ

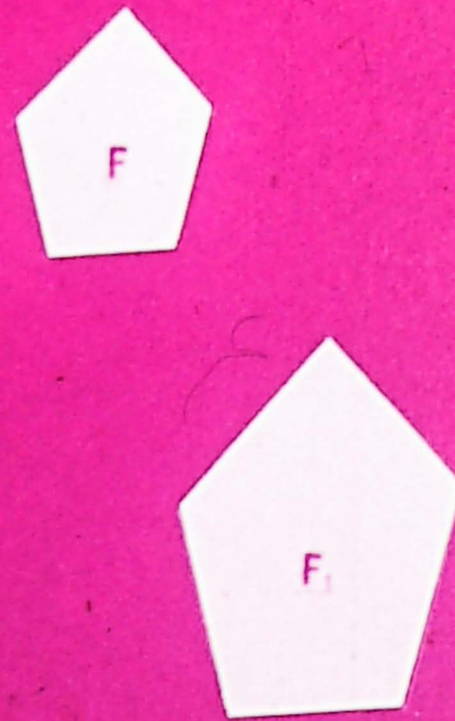
07—3—140



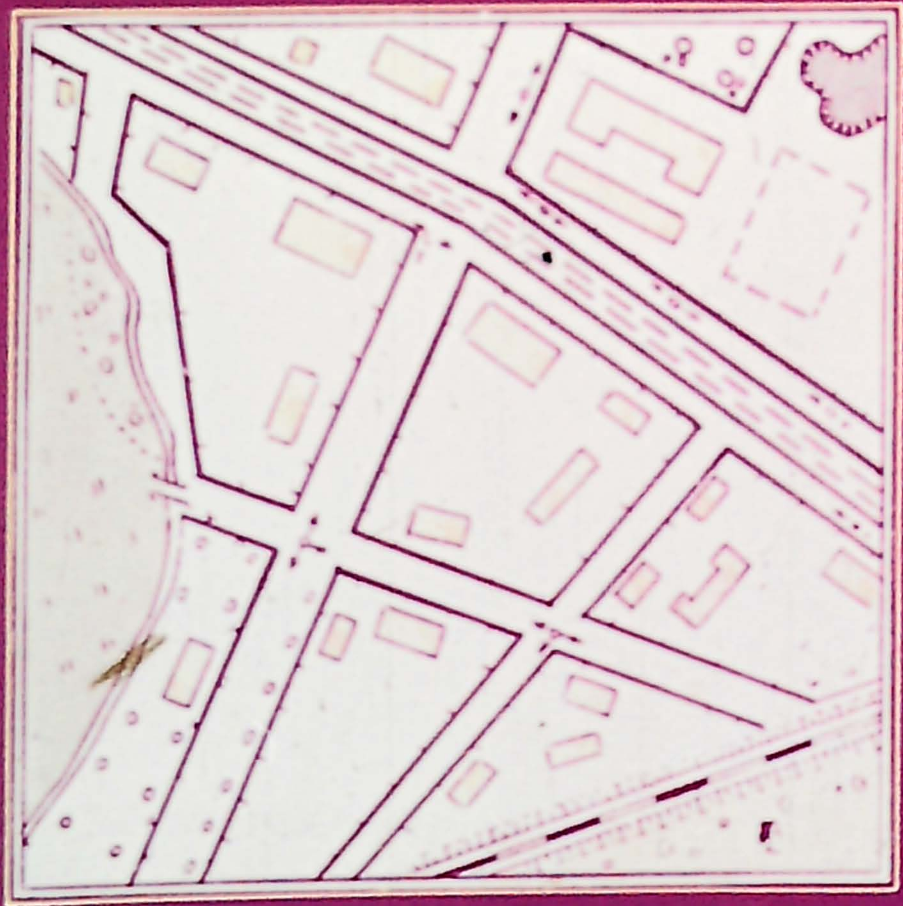
ПОДОБИЕ И ГОМОТЕТИЯ

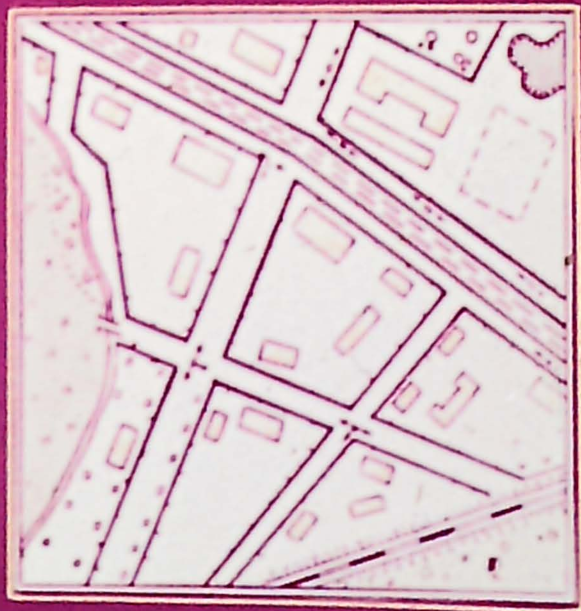
Подобие





Известно, что если $Ф \sim Ф_1$ и $|AB| = |A_1B_1|$, где A и B—произвольные точки фигуры $Ф$, A_1 и B_1—соответственные им точки фигуры $Ф_1$, то $Ф_1 \cong Ф$. Конгруэнтные фигуры имеют одинаковую форму и размеры. Конгруэнтны ли фигуры F и F_1? Что можно сказать о форме их?

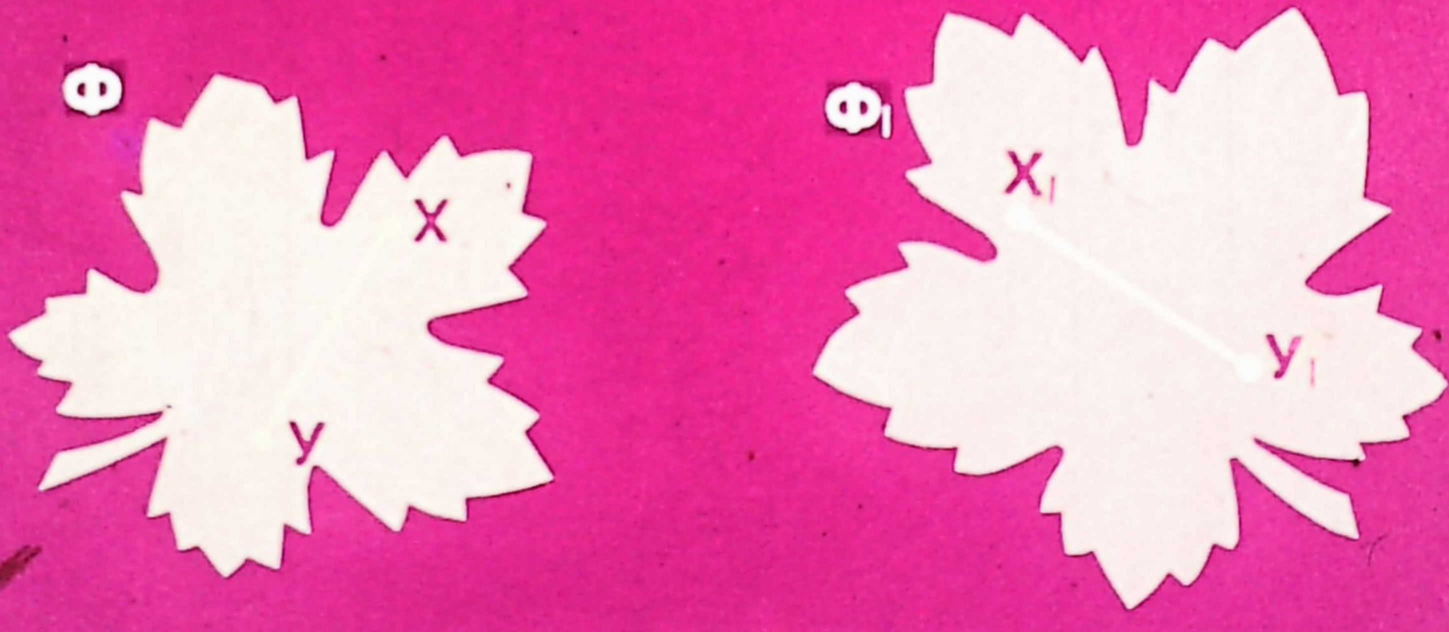




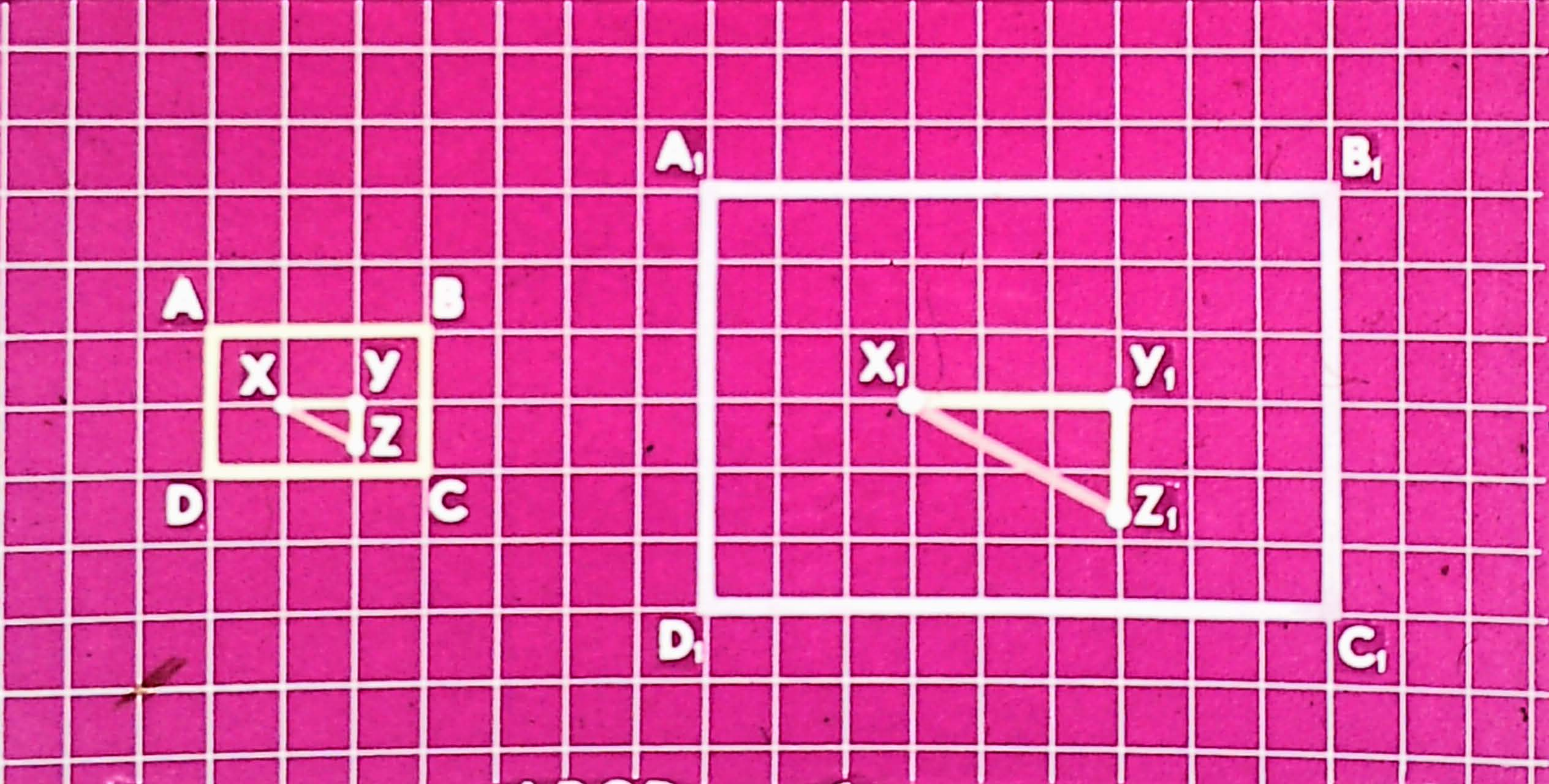
Часто встречаются фигуры одинаковой формы, но разных размеров. Таковы два плана части поселка, выполненные в разных масштабах,

и фотоснимки, напечатанные с одного негатива при разных увеличениях.

Изображенные здесь две фигуры также имеют одинаковую форму, но размеры их различны.
Фигуры, имеющие одну и ту же форму,—подобны.

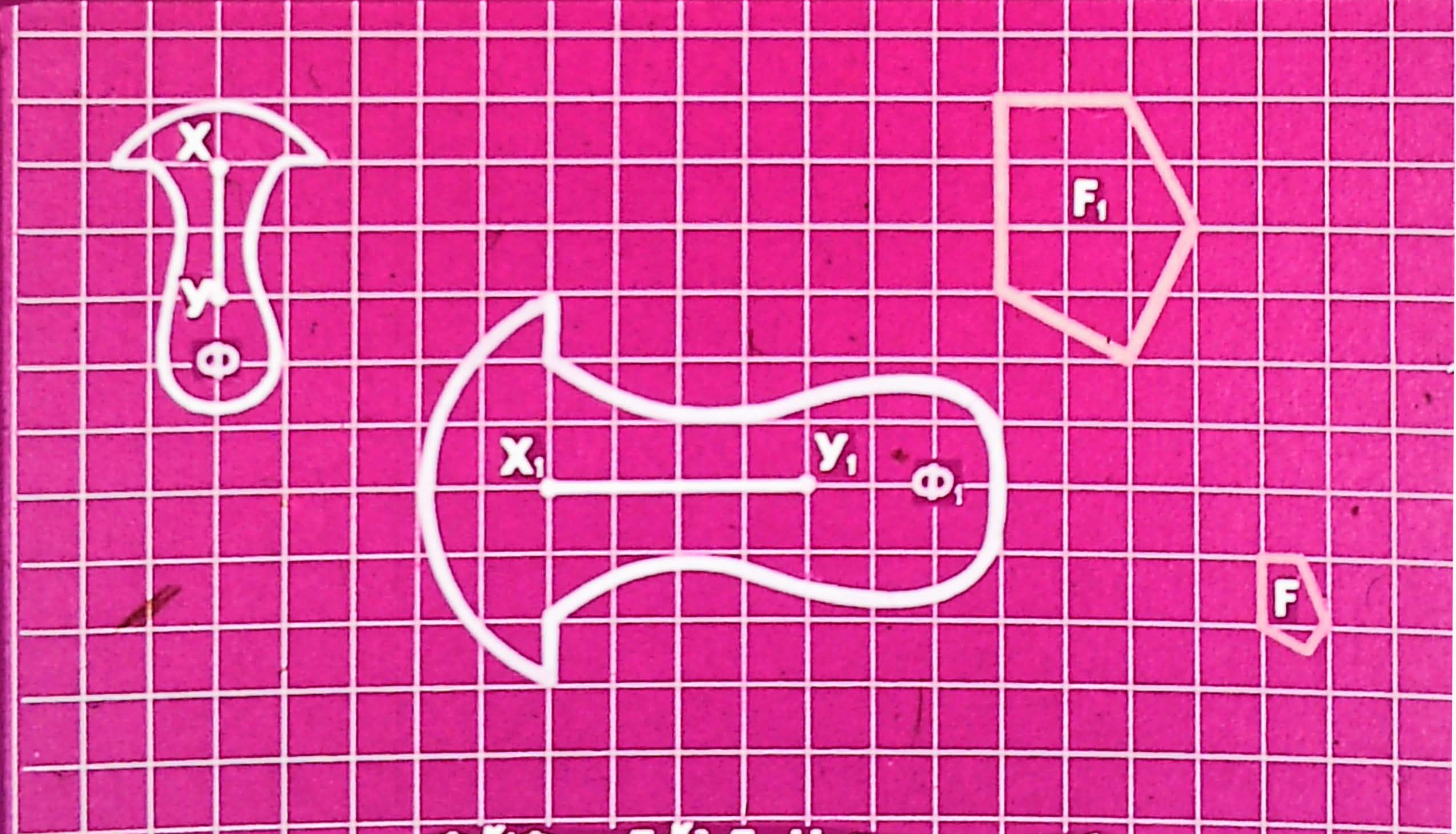


Если фигуру Ф можно отобразить на фигуру $Ф_1$ так, что для любых точек X и У первой фигуры отношение расстояния $|X_1 У_1|$ между их образами к расстоянию $|XУ|$ между самими точками X и У равно одному и тому же числу $K > 0$, то говорят, что фигура <u>$Ф_1$ подобна фигуре Ф с коэффициентом подобия</u> K. Обозначение: $Ф_1 \overset{K}{\simeq} Ф$.

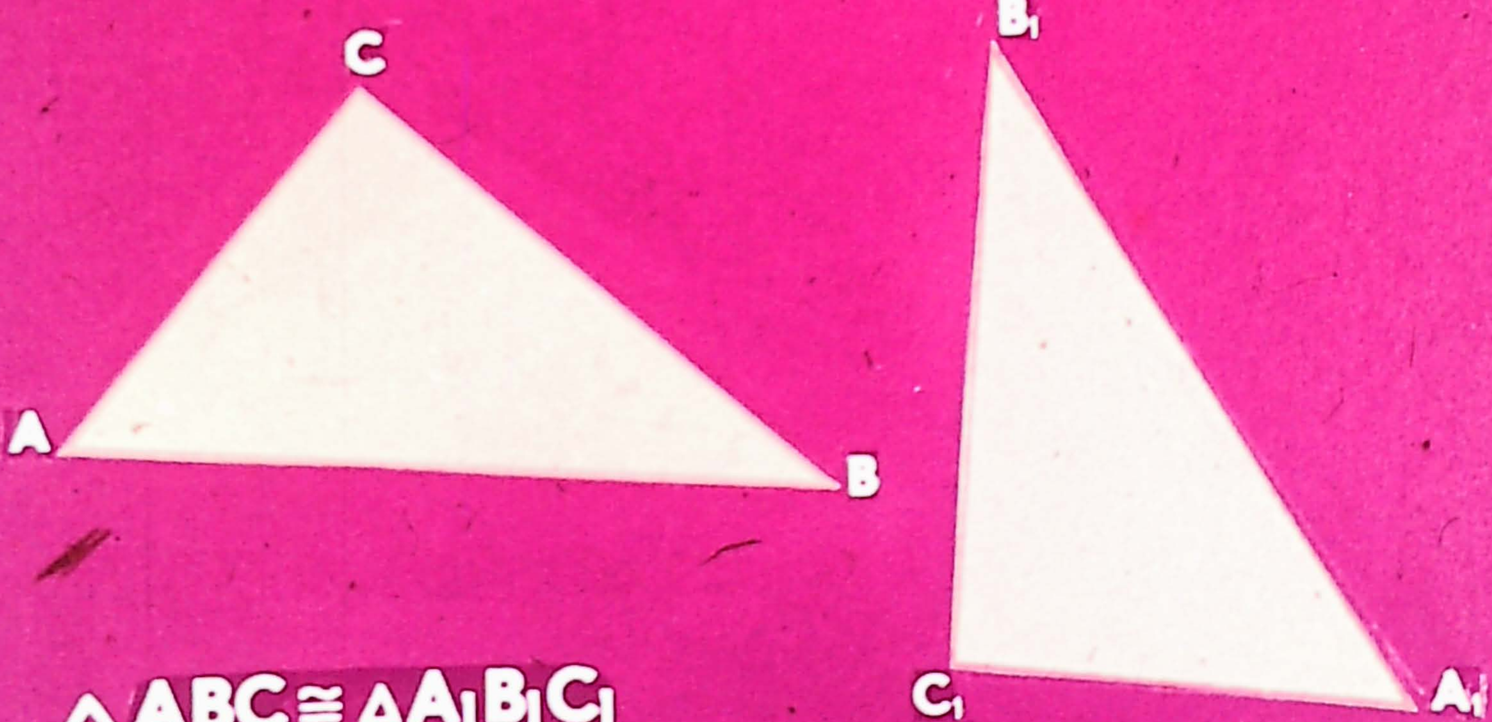


Прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ подобен прямоугольнику $ABCD$.
Здесь $\frac{|A_1B_1|}{|AB|}=\frac{|B_1C_1|}{|BC|}=\frac{|D_1C_1|}{|DC|}=\frac{|A_1D_1|}{|AD|}=3.$

Пусть X, Y, Z — произвольные точки прямоугольника $ABCD$, а X_1, Y_1, Z_1 — их образы в прямоугольнике $A_1B_1C_1D_1$. Имеем
$\frac{|X_1Y_1|}{|XY|}=\frac{|Y_1Z_1|}{|YZ|}=\frac{|X_1Z_1|}{|XZ|}=3.$

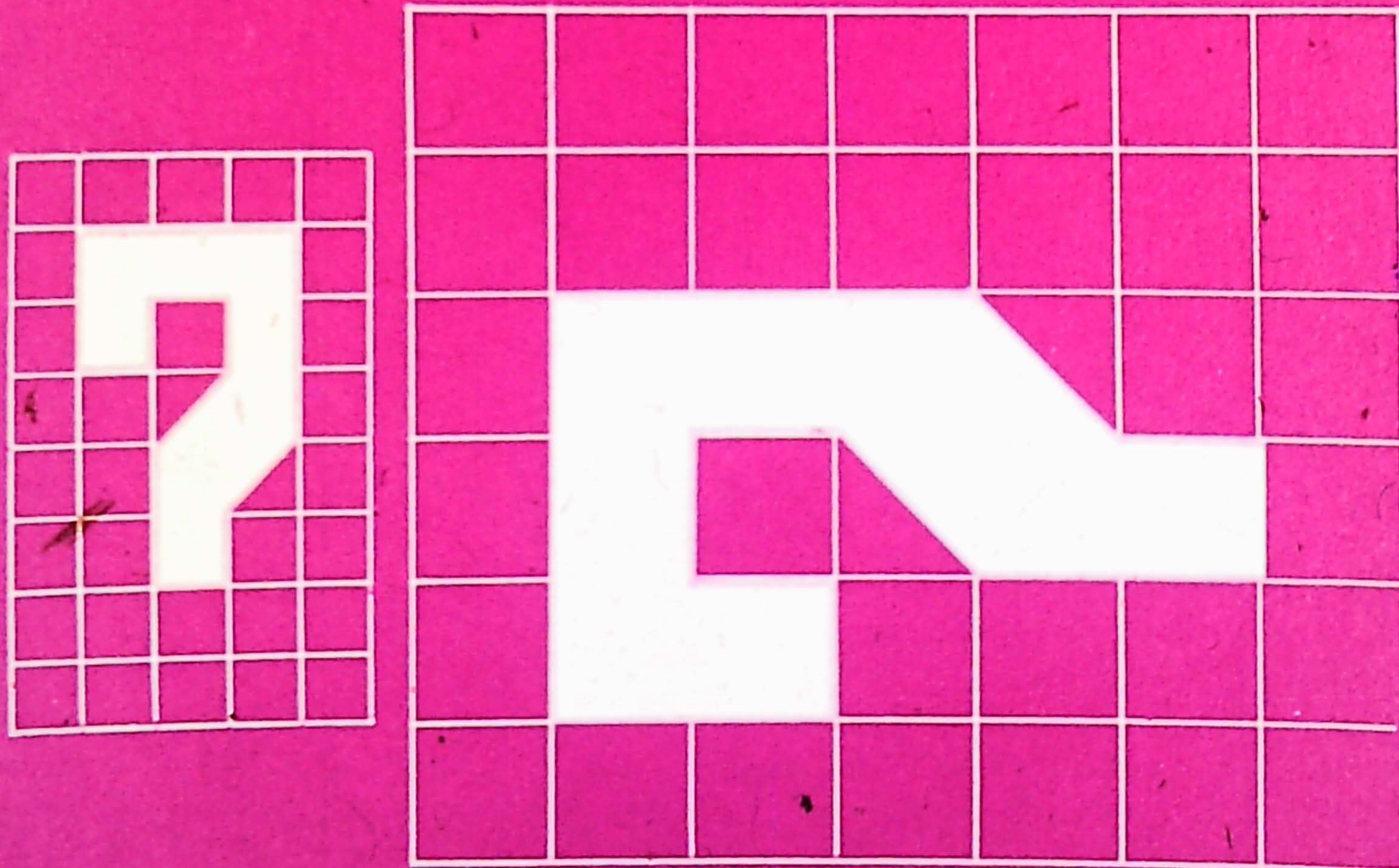


Известно, что $Ф_1 \overset{k_1}{\sim} Ф$ и $F_1 \overset{k_2}{\sim} F$. Найти по изображению на кадре коэффициенты подобия k_1 и k_2. Будут ли истинными высказывания $Ф \sim Ф_1$ и $F \sim F_1$? Если высказывания истинны, найти коэффициенты этих подобий.

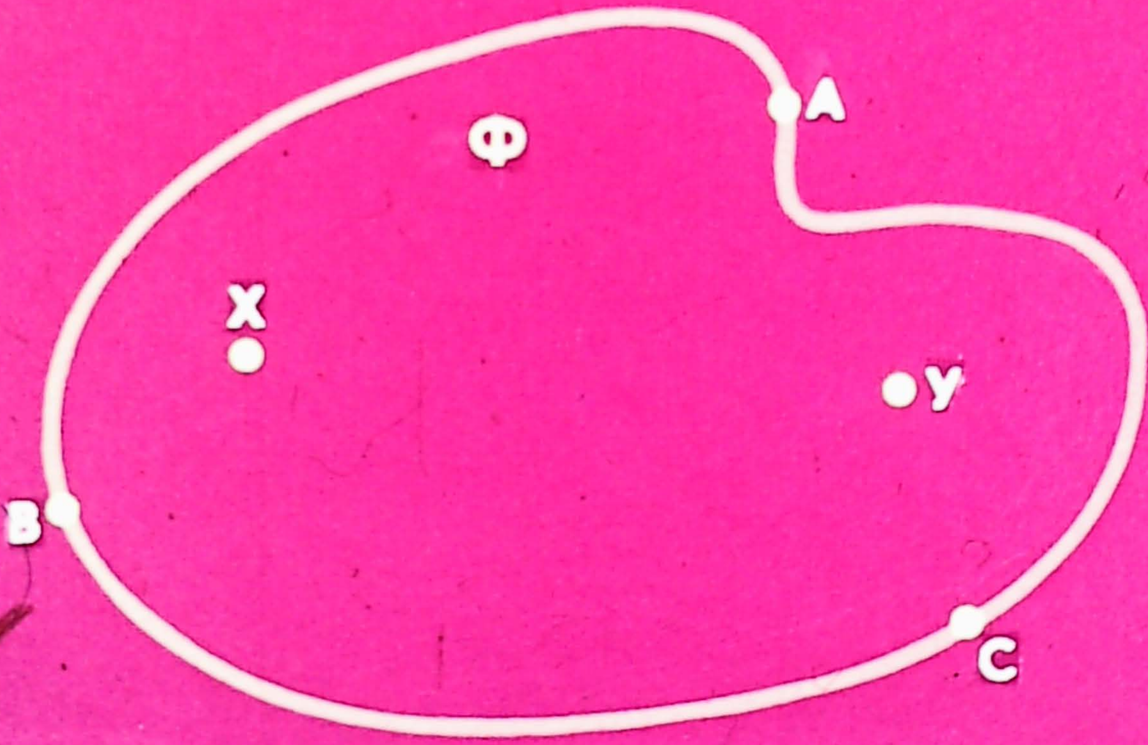


$\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$

Будут ли подобны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$? Если да, то чему равен коэффициент подобия?



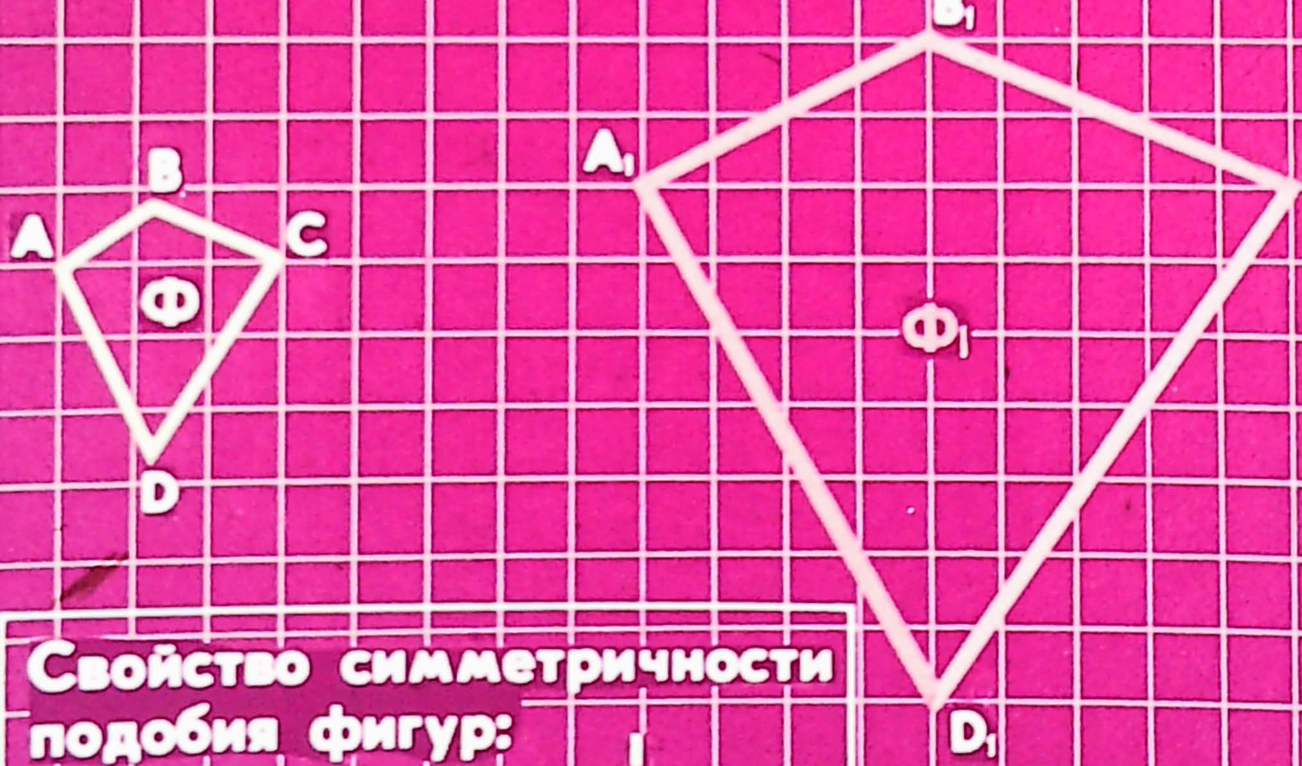
Объясните, почему фигуры, изображенные здесь, подобны?



Будет ли фигура Ф подобна самой себе? Ответ обосновать. Чему равен коэффициент подобия в этом случае?

Свойство рефлексивности подобия фигур:

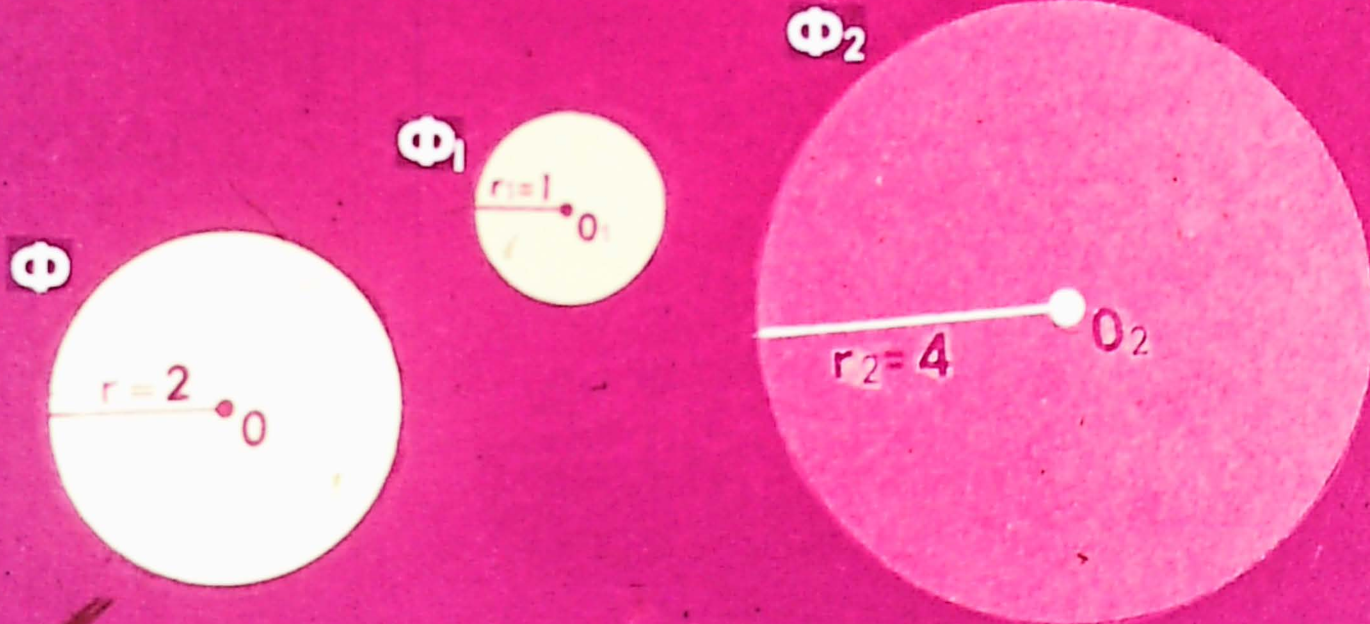
$$Ф \overset{1}{\sim} Ф$$



Свойство симметричности подобия фигур:

$$Ф_1 \overset{k}{\sim} Ф \Longrightarrow Ф \overset{\frac{1}{k}}{\sim} Ф_1$$

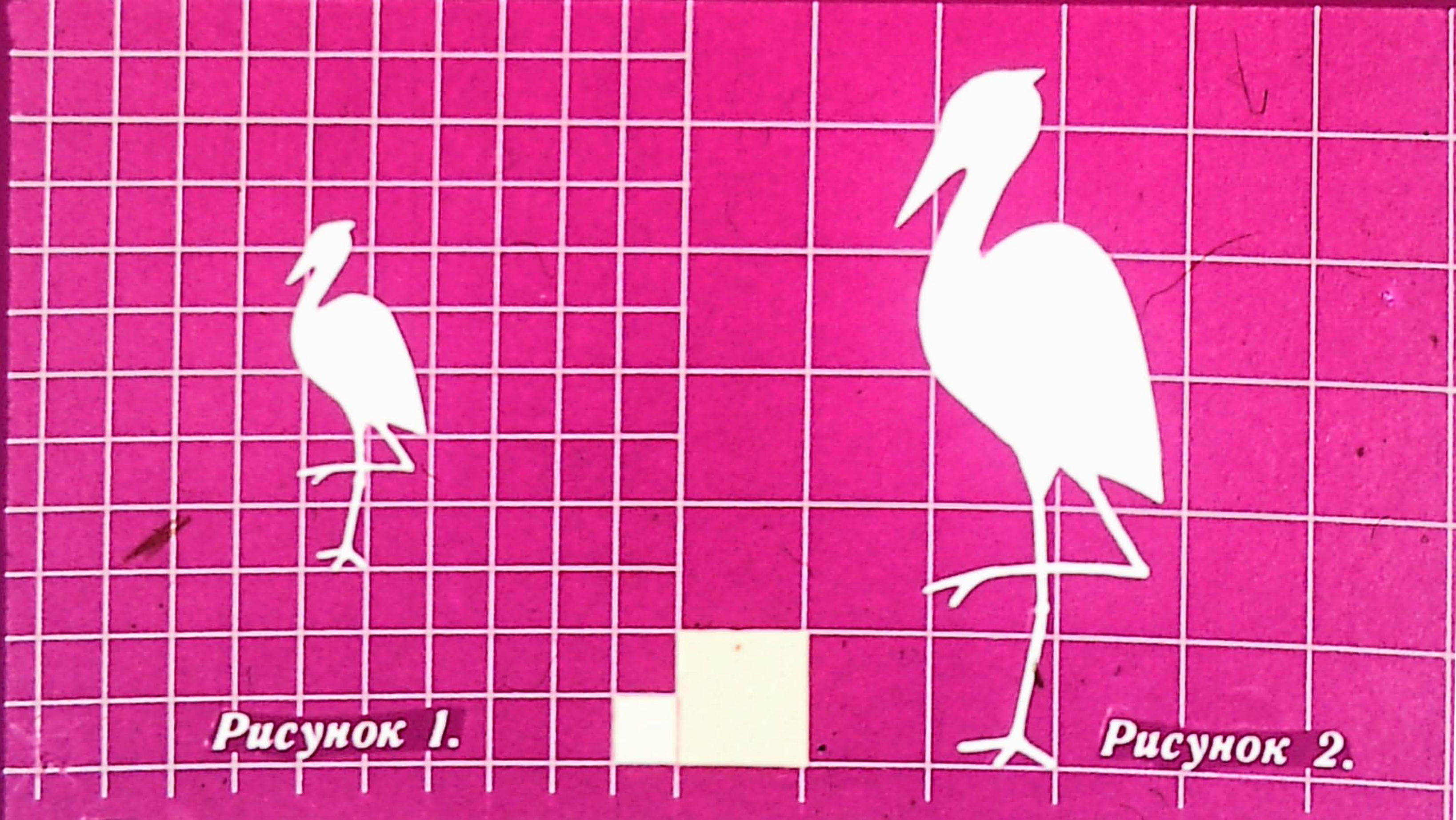
Если фигура $Ф_1$ подобна фигуре Ф с коэффициентом K, то фигура Ф подобна фигуре $Ф_1$ с коэффициентом $K_1 = \frac{1}{K}$. Вычислите K и K_1.



Если фигура $Ф_1$ подобна фигуре $Ф$ с коэффициентом K_1, а фигура $Ф_2$ подобна $Ф_1$ с коэффициентом K_2, то фигура $Ф_2$ подобна фигуре $Ф$ с коэффициентом $K=K_1K_2$. Найти K_1, K_2, K.

Свойство транзитивности подобия фигур:

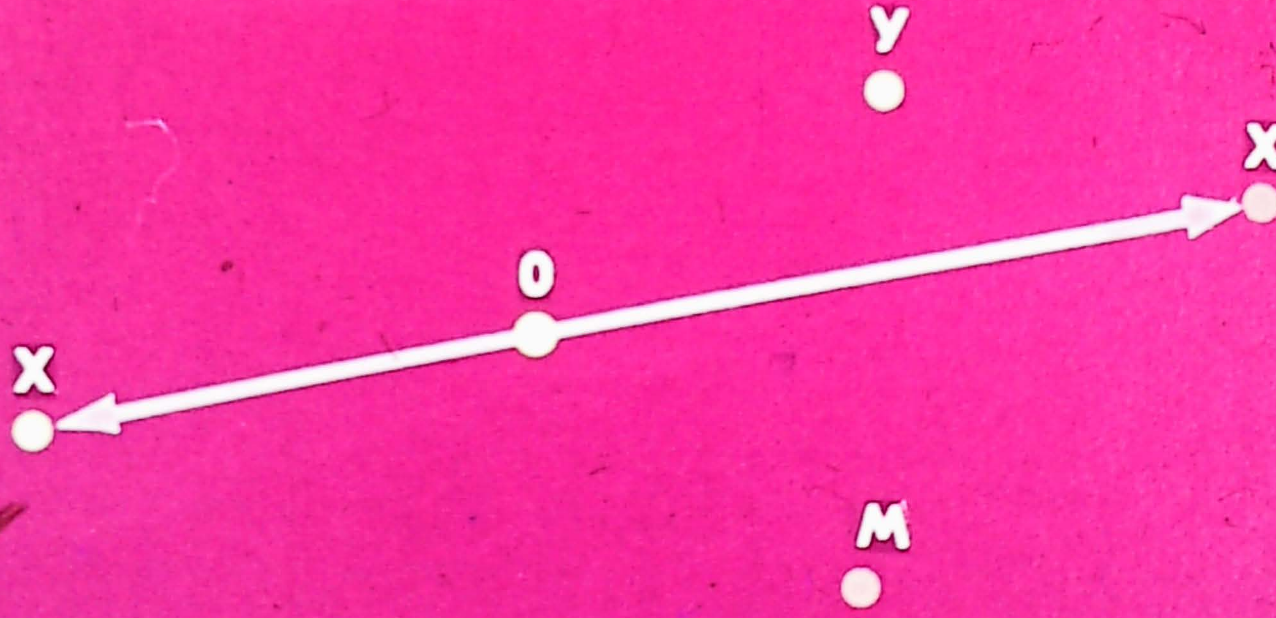
$$Ф_1 \overset{K_1}{\sim} Ф, \quad Ф_2 \overset{K_2}{\sim} Ф_1 \Rightarrow Ф_2 \overset{K_1 K_2}{\sim} Ф$$



На практике для копирования картин и портретов часто пользуются квадратной сеткой.

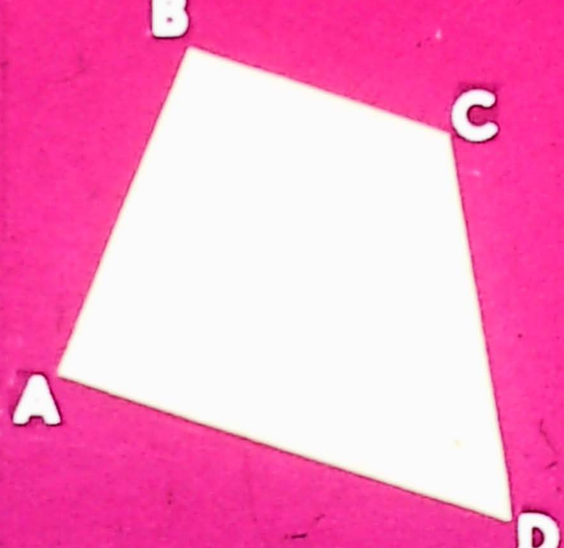
Рисунок 2 скопирован с рисунка 1 и увеличен в отношении 2:1, так как стороны квадратов сетки увеличены в этом же отношении.

Гомотетия

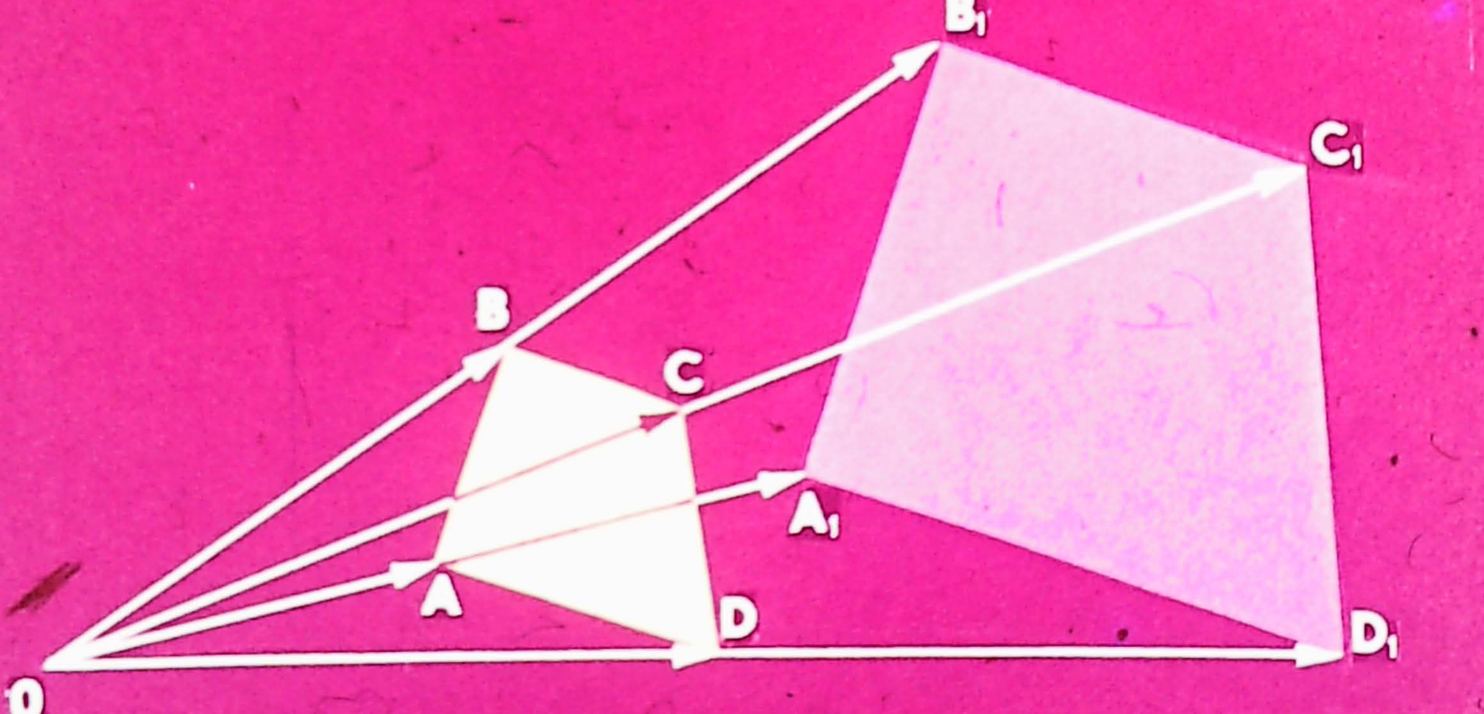


Произвольной точке X поставим в соответствие точку X_1 так, что $\overrightarrow{OX_1} = -2\overrightarrow{OX}$, где O — заданная точка плоскости. Является ли это соответствие отображением плоскости на себя?

Построить: 1) образ точки У; 2) точку, образом которой является точка М.



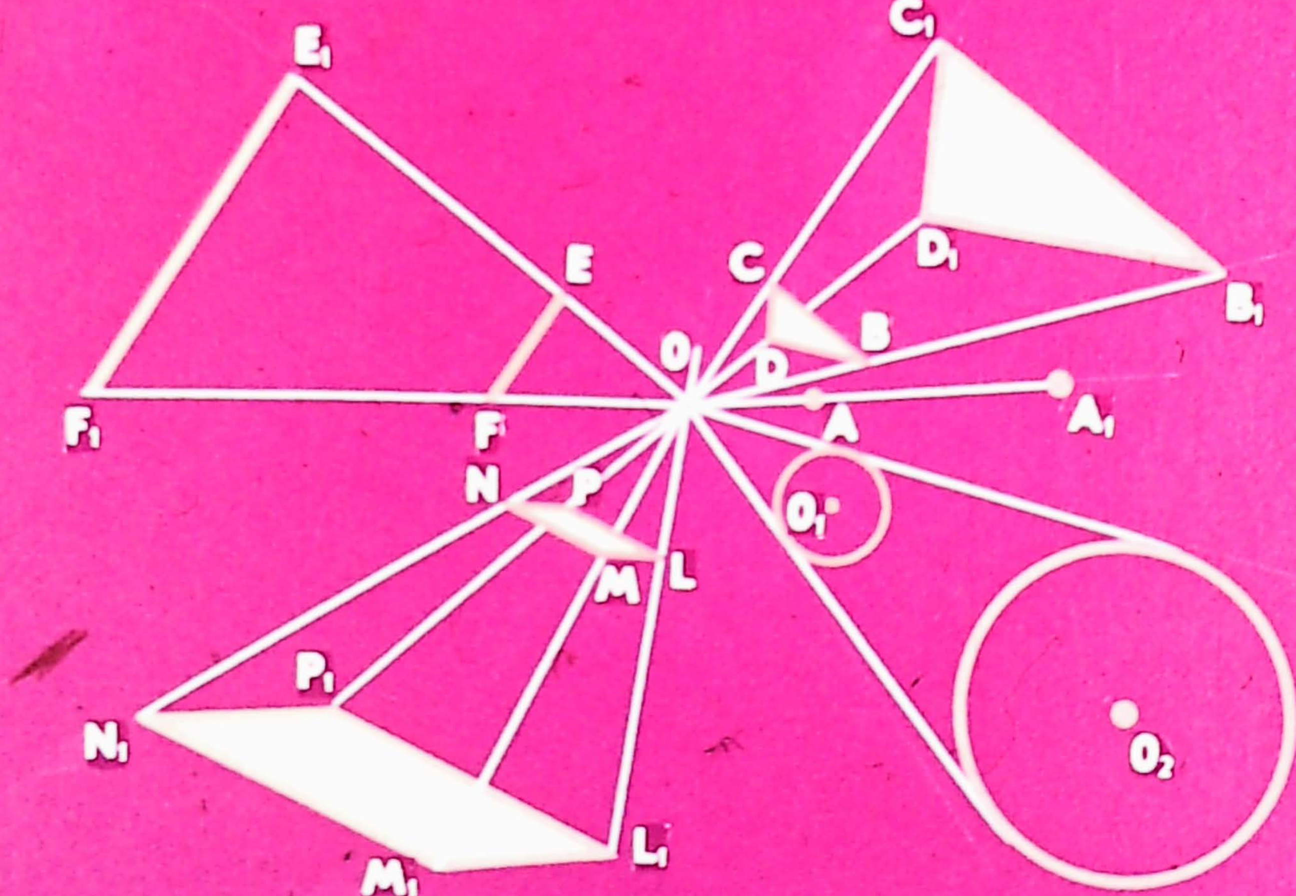
Задача. Построить четырехугольник, подобный данному, с коэффициентом подобия $K=2$.



Решение. Для построения возьмем произвольную точку O. Построим векторы $\overline{OA_1}=2\overline{OA}$, $\overline{OB_1}=2\overline{OB}$, $\overline{OC_1}=2\overline{OC}$, $\overline{OD_1}=2\overline{OD}$. Четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ будет подобен четырехугольнику $ABCD$. Построение здесь выполнено с помощью преобразования, которое называется гомотетией.

Отображение плоскости на себя, при котором образом произвольной точки X является такая точка X_1, что $\overrightarrow{OX_1} = K \cdot \overrightarrow{OX}$, называется гомотетией с центром O и коэффициентом K (K—положительное или отрицательное число).

Гомотетия с центром O и коэффициентом K обозначается H_O^K. $(X = H_O^K(X))$

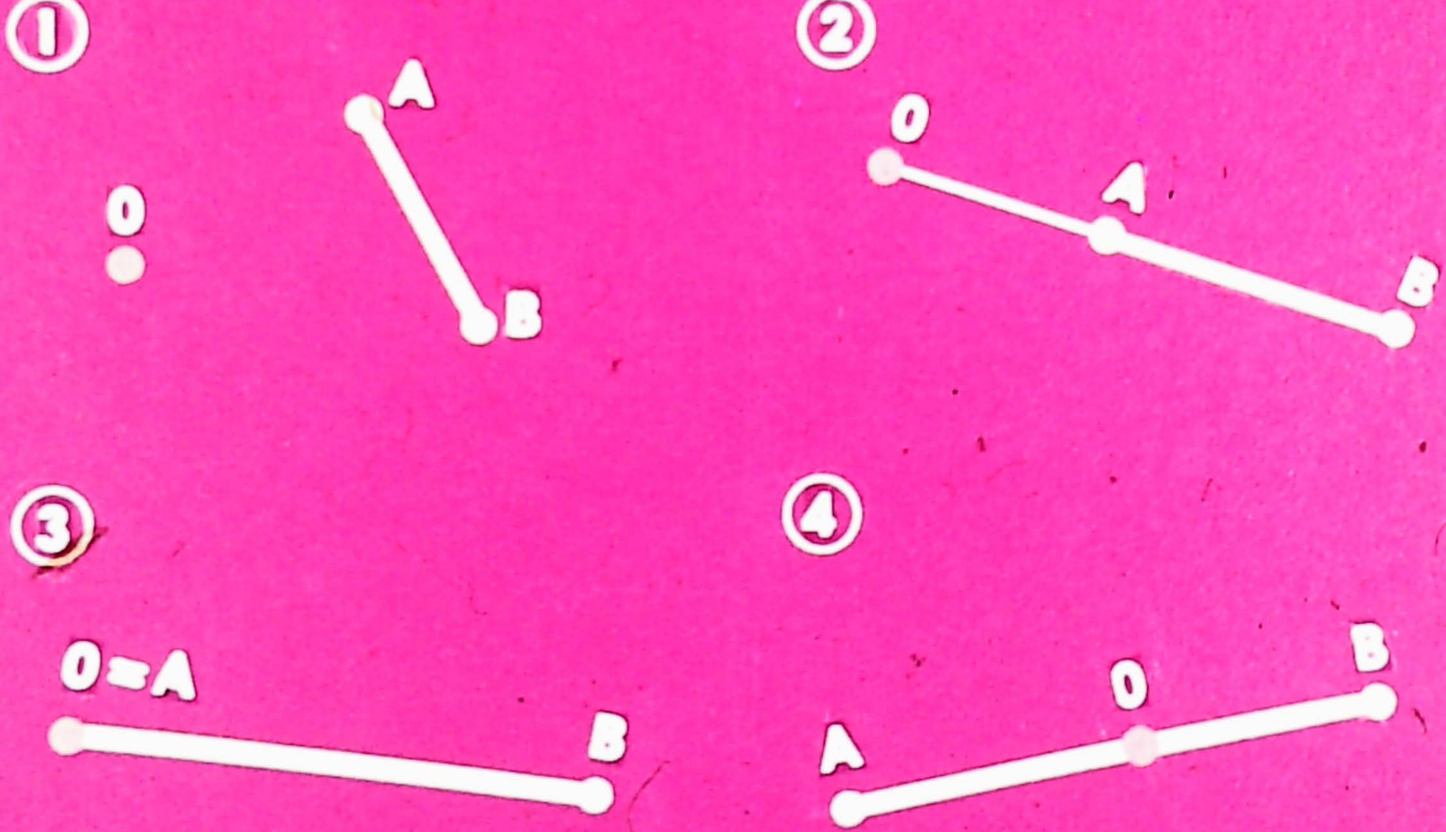


Здесь изображены образы точки A, окружности с центром O_1, параллелограмма MNPL, отрезка EF, треугольника CBD при гомотетии с центром O и коэффициентом K=3. Назовите их. Найдите H_O^3 (O).

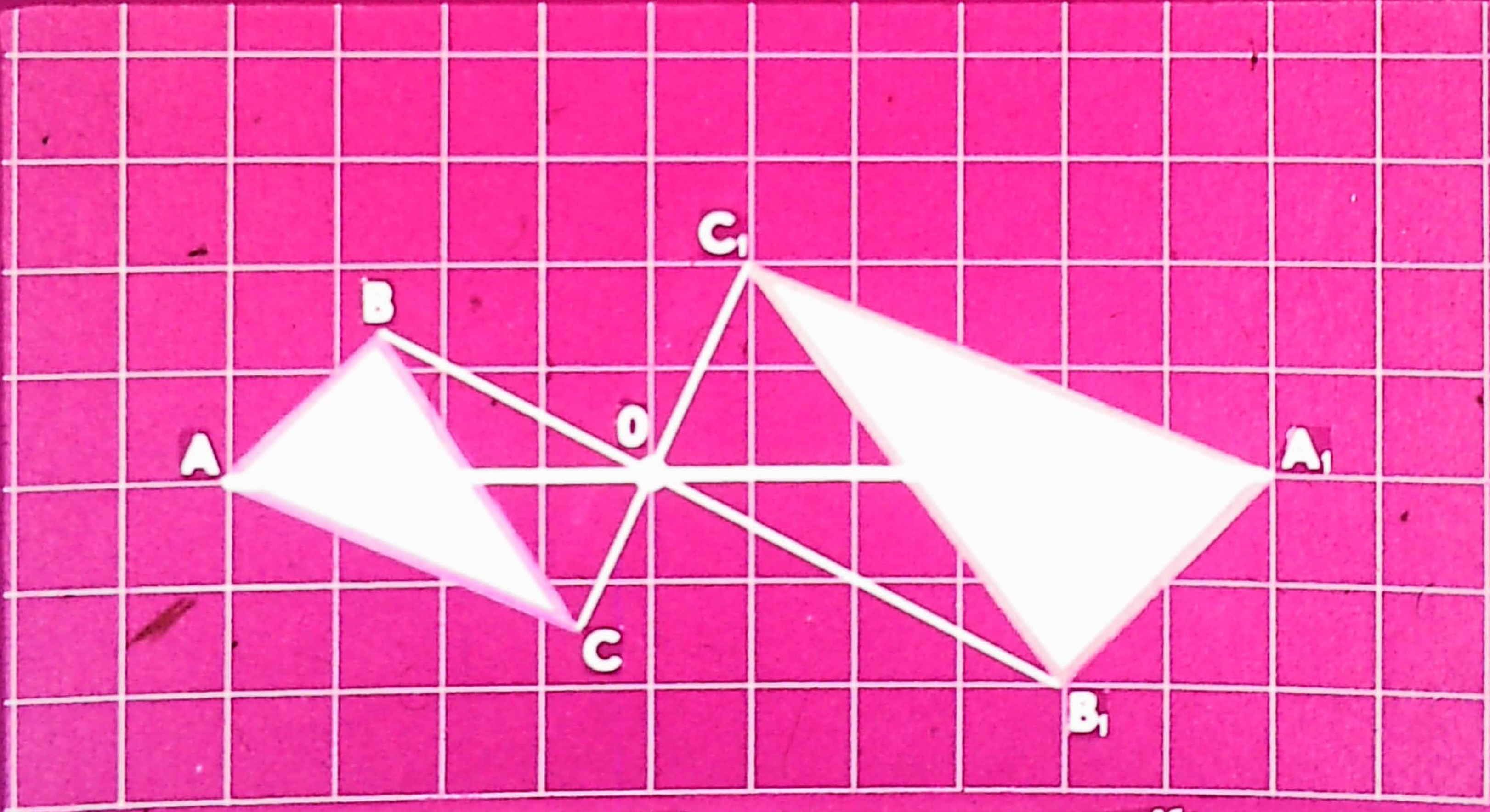
Гомотетия задана, если указаны ее центр и коэффициент гомотетии. Как построить образ точки А при гомотетии с центром О и

1) $K=-1$
2) $K=1$
3) $K=-\frac{1}{2}$
4) $K=2$
5) $K=-\frac{3}{2}$

Выполните построение.

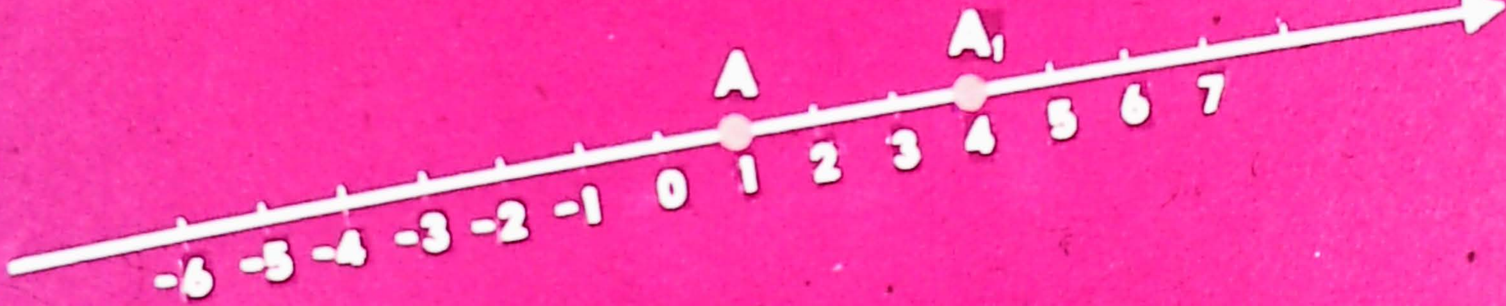


Построить отрезок, гомотетичный отрезку AB, в каждом из случаев 1—4, если коэффициент гомотетии K=2, а центр гомотетии—точка 0.



1. Определить коэффициент гомотетии K, если $H_O^K(\Delta ABC) = \Delta A_1B_1C_1$.
2. Определить коэффициент гомотетии K_1, если $H_O^{K_1}(\Delta A_1B_1C_1) = \Delta ABC$.

22



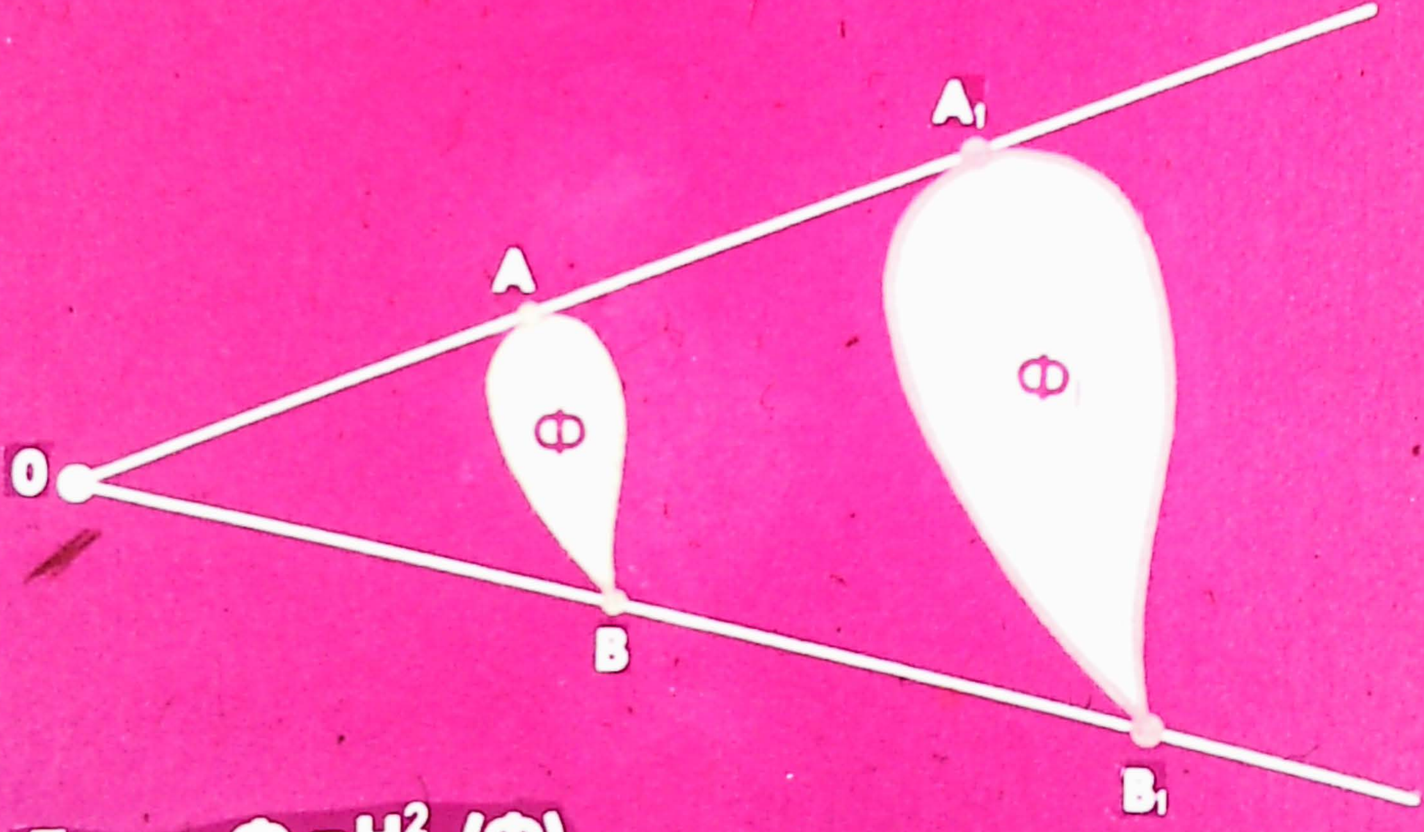
Найдите координату такой точки В, чтобы

1) $H_B^2(A) = A_1$

2) $H_B^{-2}(A) = A_1$

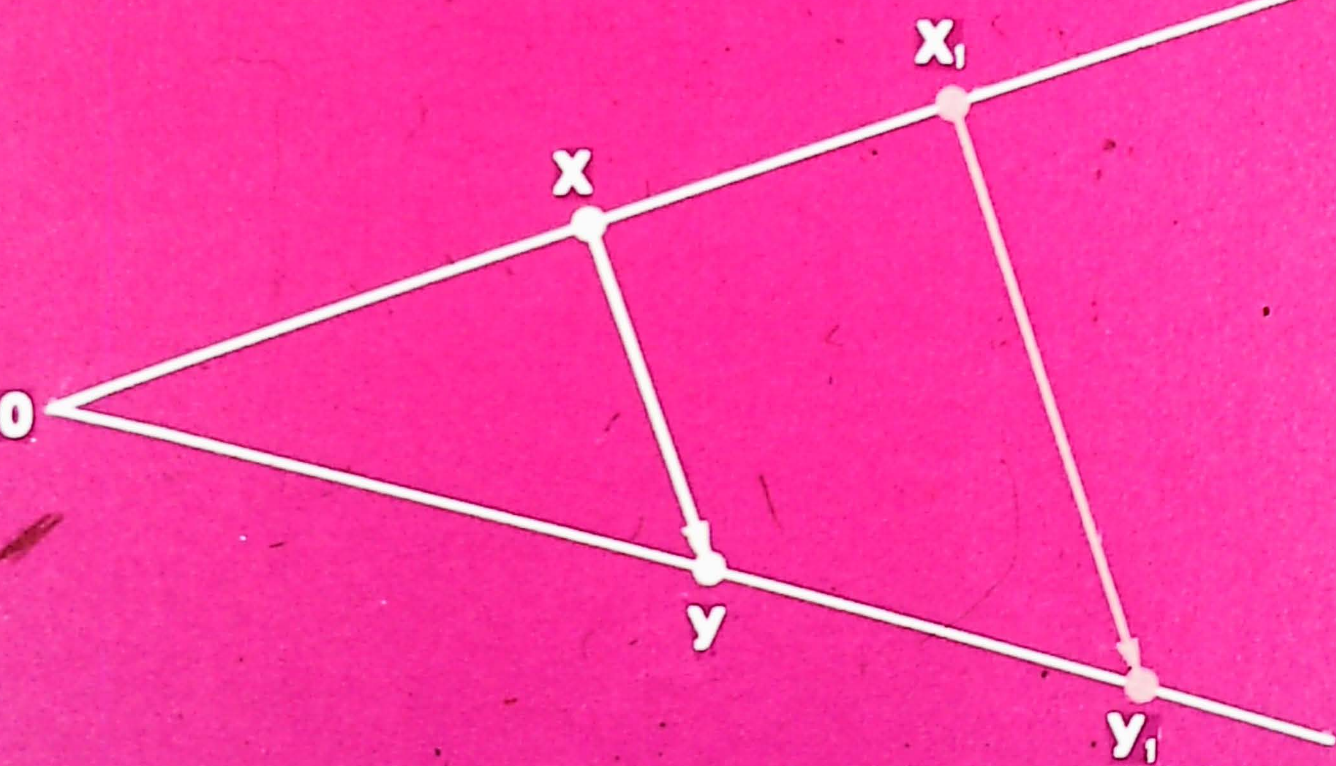
3) $H_B^2(A_1) = A$

4) $H_B^{-2}(A) = A.$

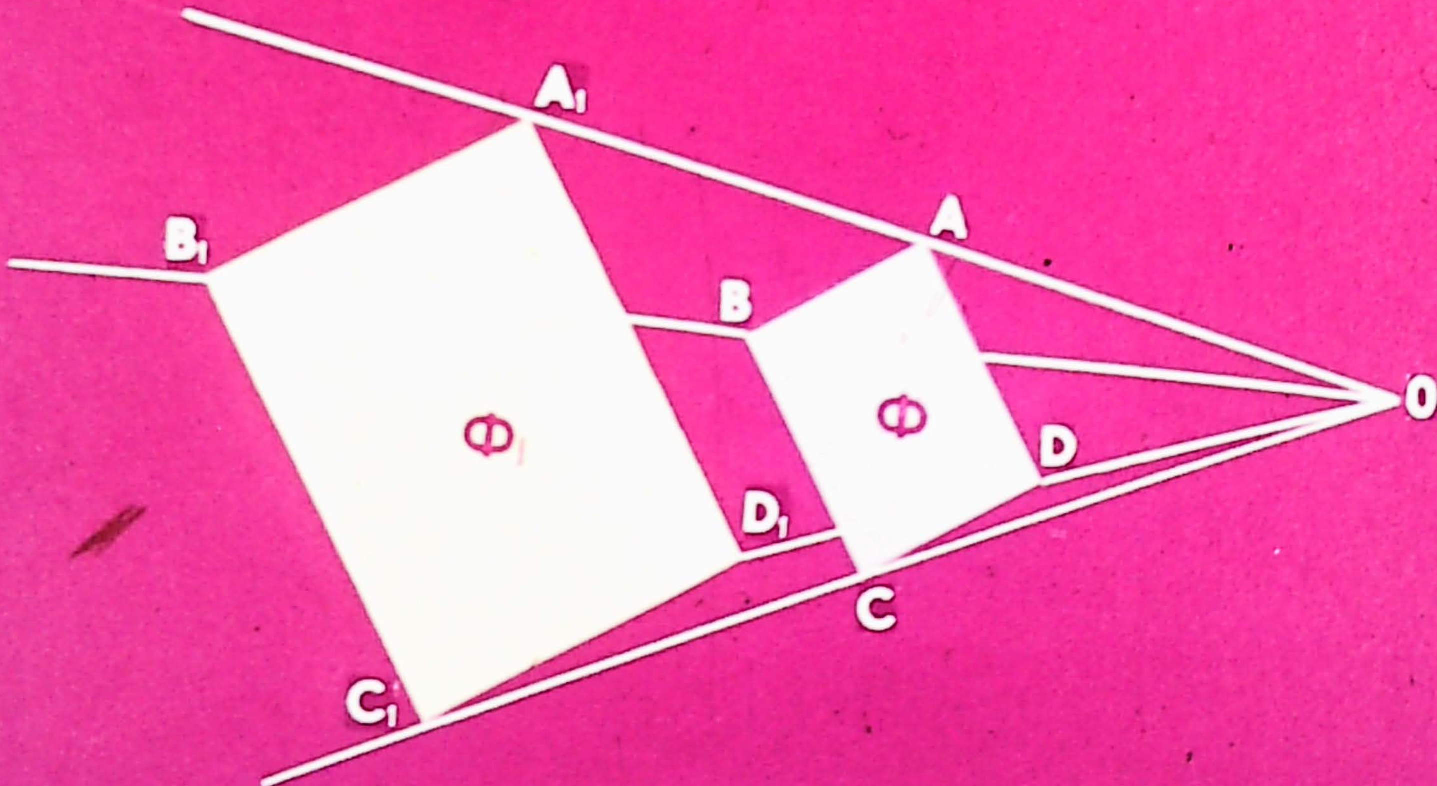


Дано: $Ф_1 = H_O^2\ (Ф)$.

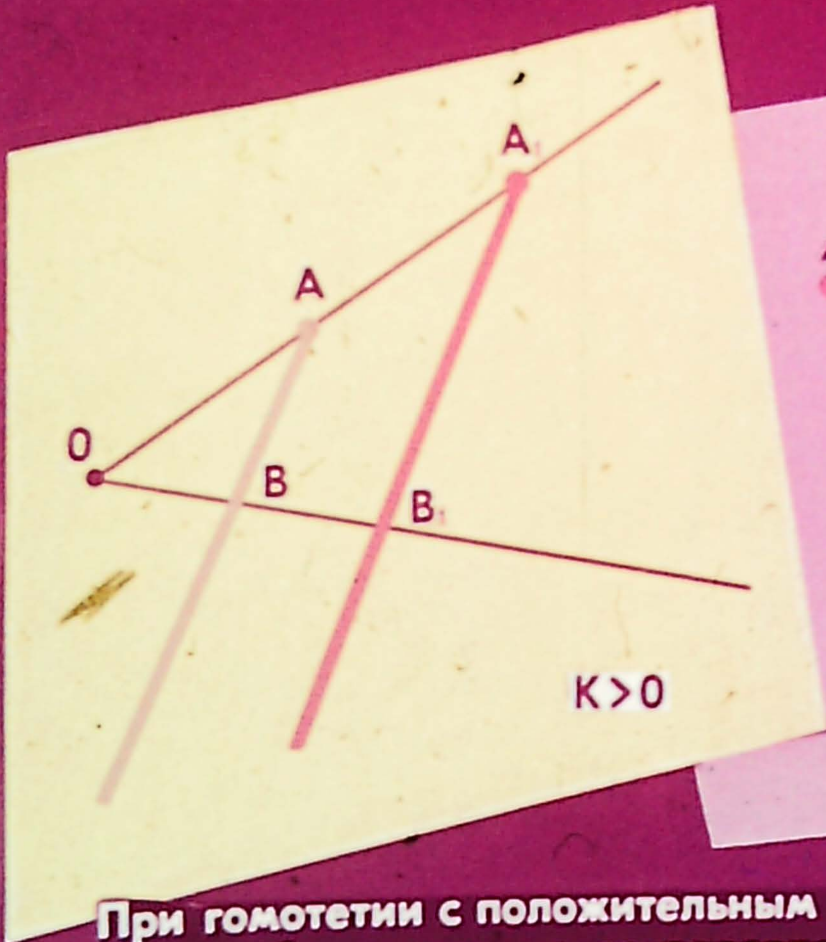
Можно ли считать фигуру Ф образом фигуры $Ф_1$ при гомотетии? Какая точка будет центром такой гомотетии? Каков будет коэффициент этой гомотетии?

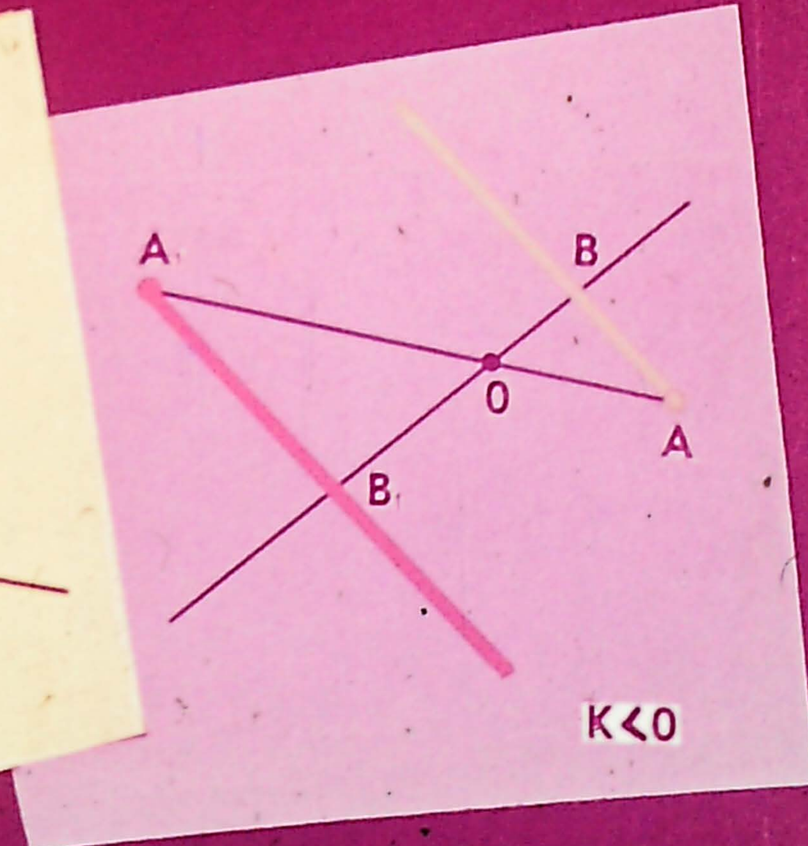


Если при гомотетии с коэффициентом К точки Х и У отображаются на точки X_1 и $У_1$, то $\overline{X_1У_1}=K\cdot\overline{XУ}$. Как доказать это?



При гомотетии с коэффициентом K из фигуры Ф получается фигура $Ф_1$, подобная Ф с коэффициентом подобия |K|. Как доказать подобие гомотетичных прямоугольников ABCD и $A_1B_1C_1D_1$?

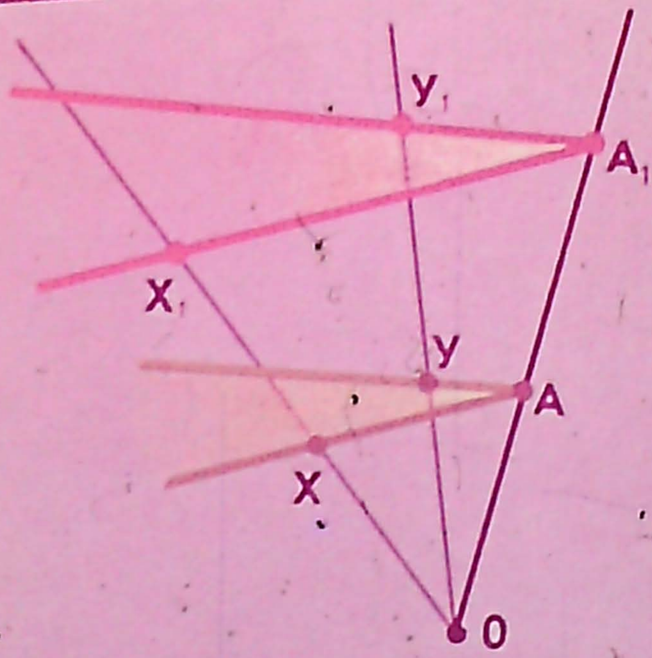




При гомотетии с положительным коэффициентом каждый луч отображается на сонаправленный с ним луч, а при гомотетии с отрицательным коэффициентом—на противоположно направленный луч.

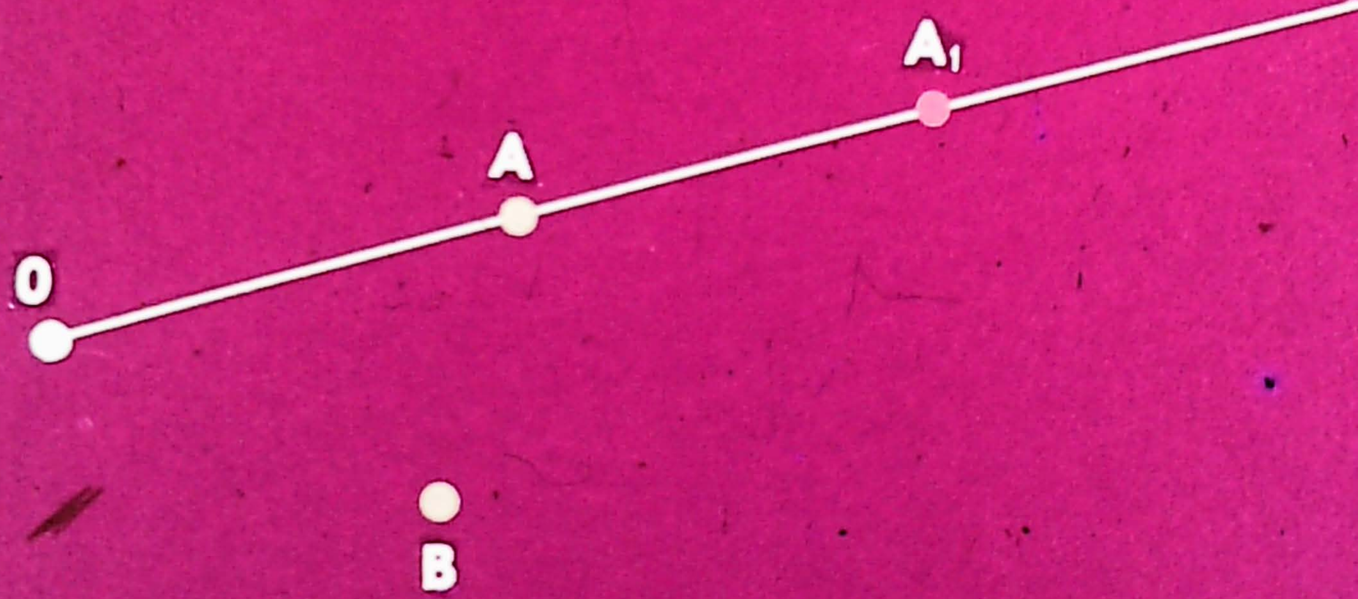
$H_O^k(X) = X_1 \quad H_O^k(Y) = Y_1$

$(XY) \parallel (X_1Y_1)$

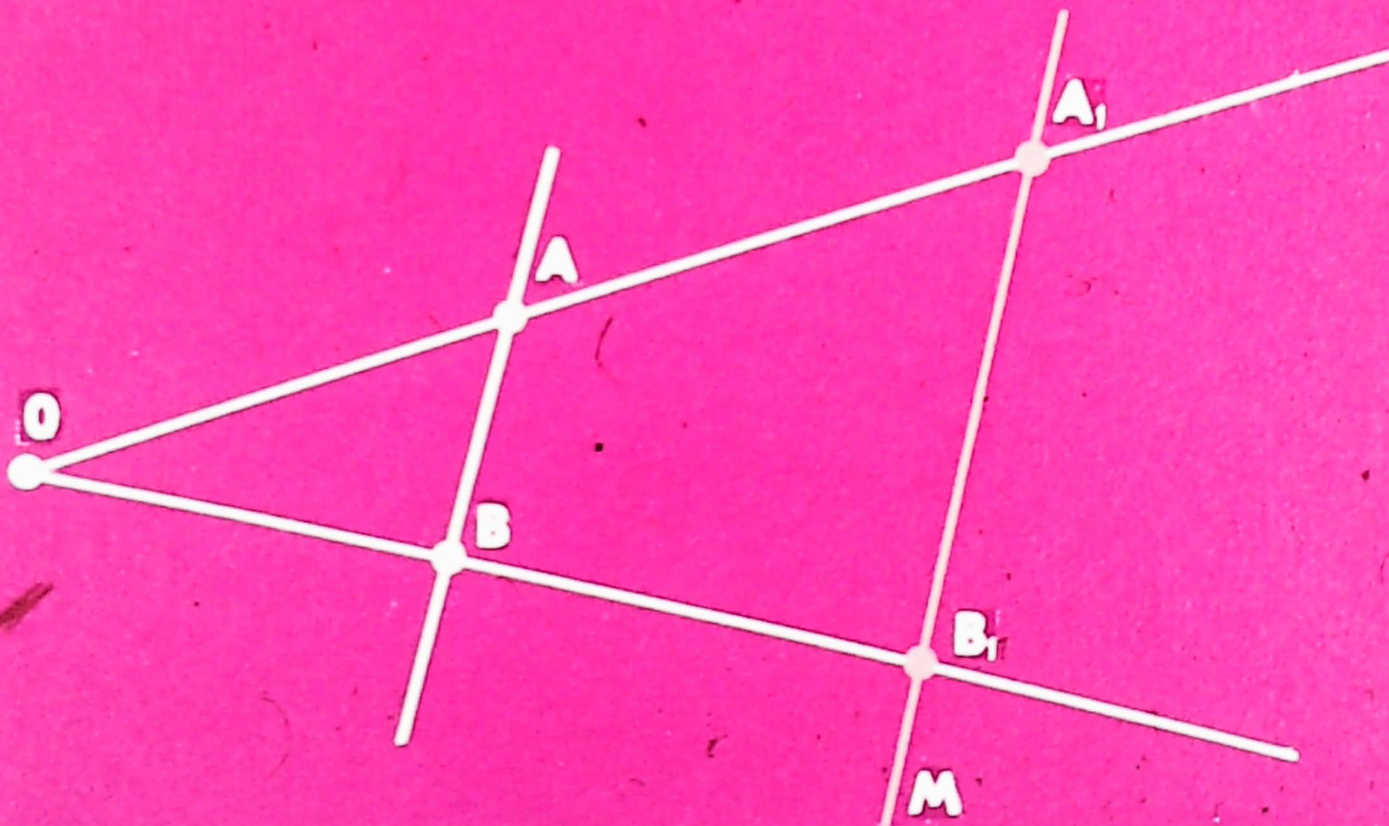


$\angle X_1A_1Y_1 \cong \angle XAY$

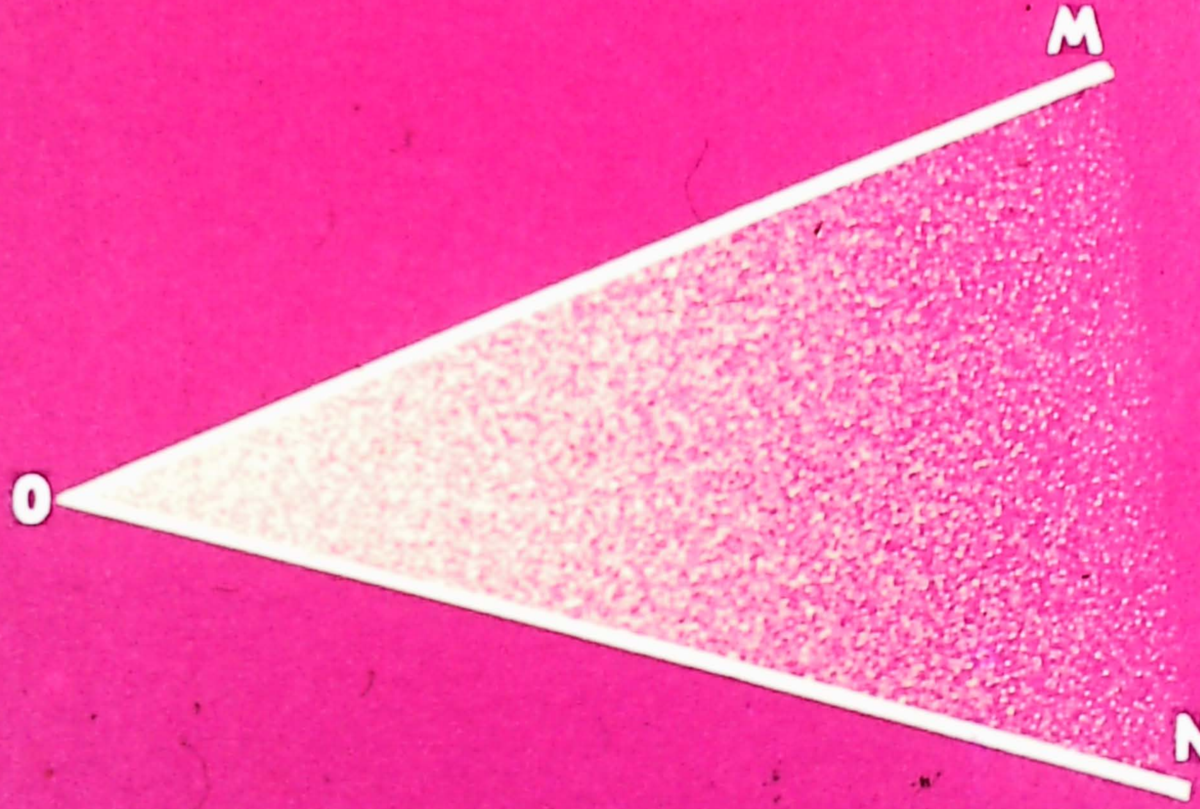
При гомотетии прямая переходит в параллельную ей прямую, угол — в конгруэнтный ему угол. Как это доказать?



Задача. Как построить образ точки В, если известен центр гомотетии 0 и $A_1 = H_0^k(A)$?

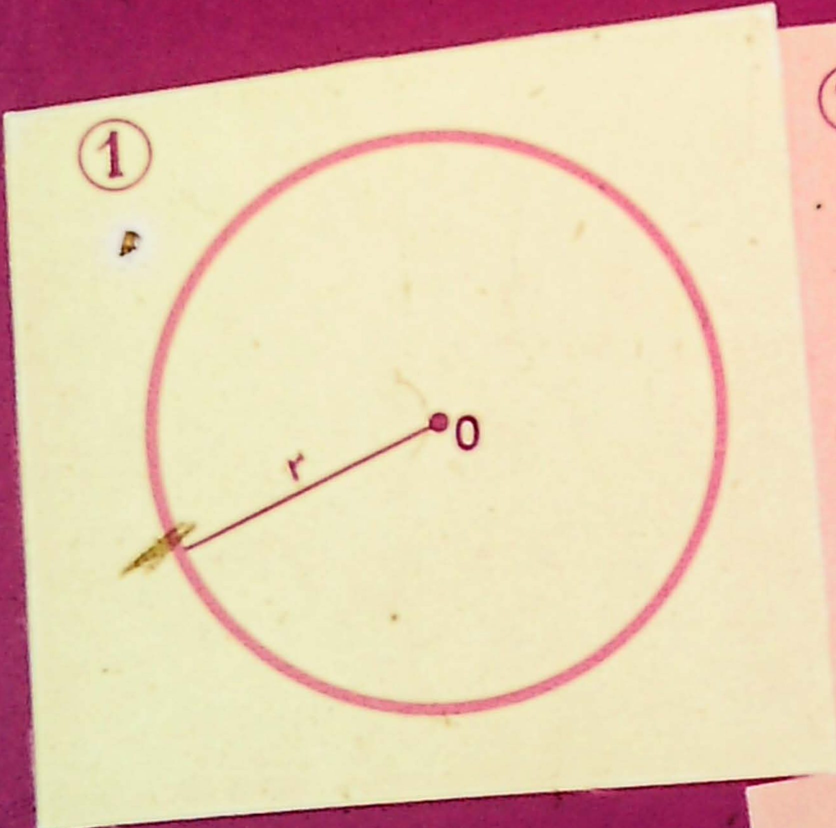


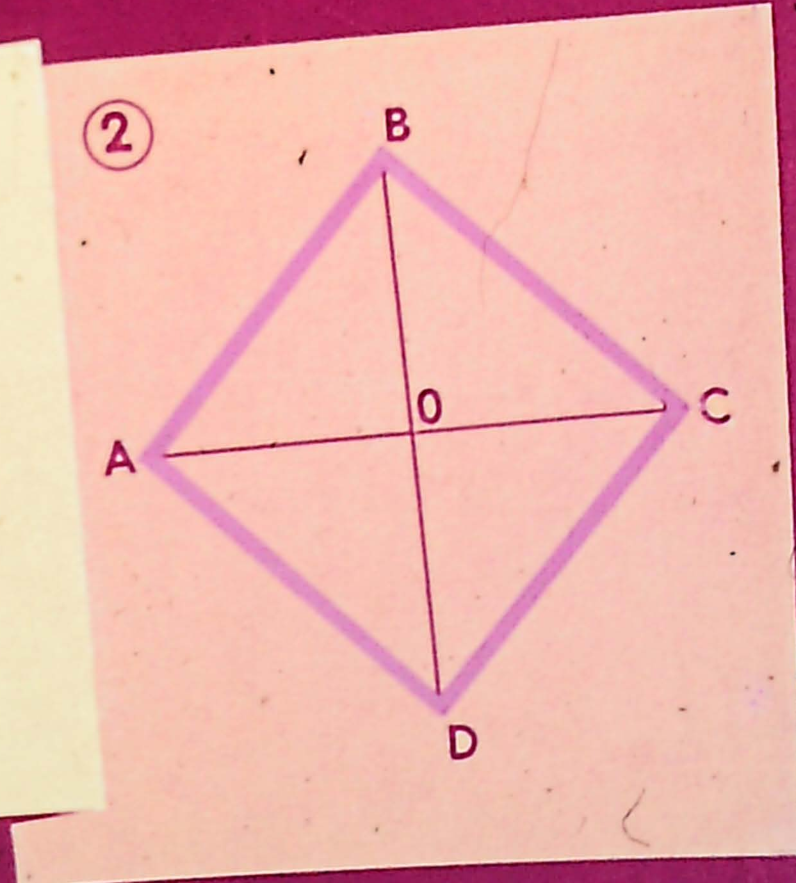
Решение. Проводим луч OB, прямую AB и через точку A_1 прямую, параллельную прямой AB. Тогда точка $B_1=(A_1M)\cap[OB)$ будет образом точки B в заданной гомотетии. Поясните почему.



Как построить угол, гомотетичный углу MON, если вершина угла является центром гомотетии, а коэффициент гомотетии K= −3? Какая фигура будет гомотетичной углу MON с центром O и K=3?

31



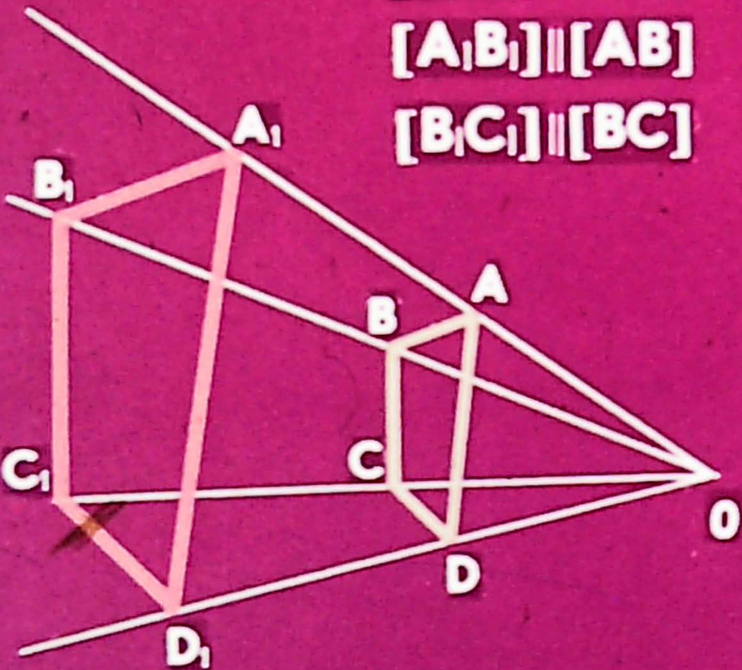


1. Какая фигура будет образом окружности (0,r) в гомотетии с центром 0 и $K=2$ $(K=-2)$?
2. Какая фигура будет образом квадрата ABCD в гомотетии с центром 0 и $K=3$ $(K=-3)$?

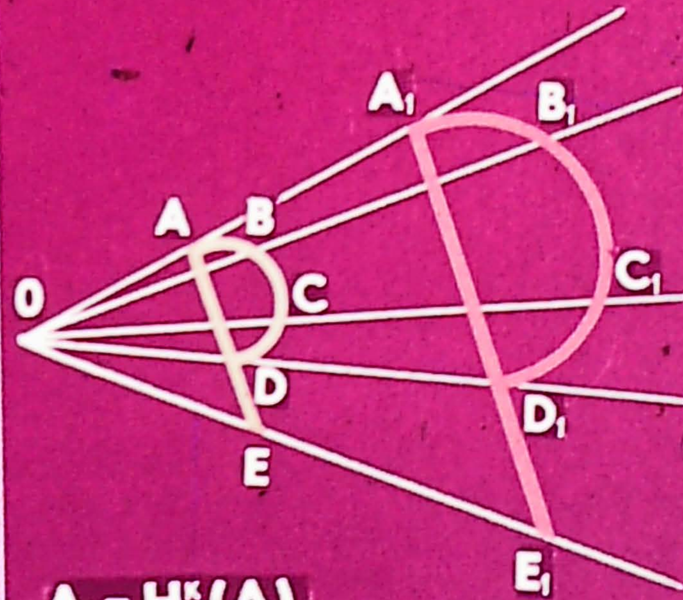
$[A_1D_1] \parallel [AD]$

$[A_1B_1] \parallel [AB]$

$[B_1C_1] \parallel [BC]$



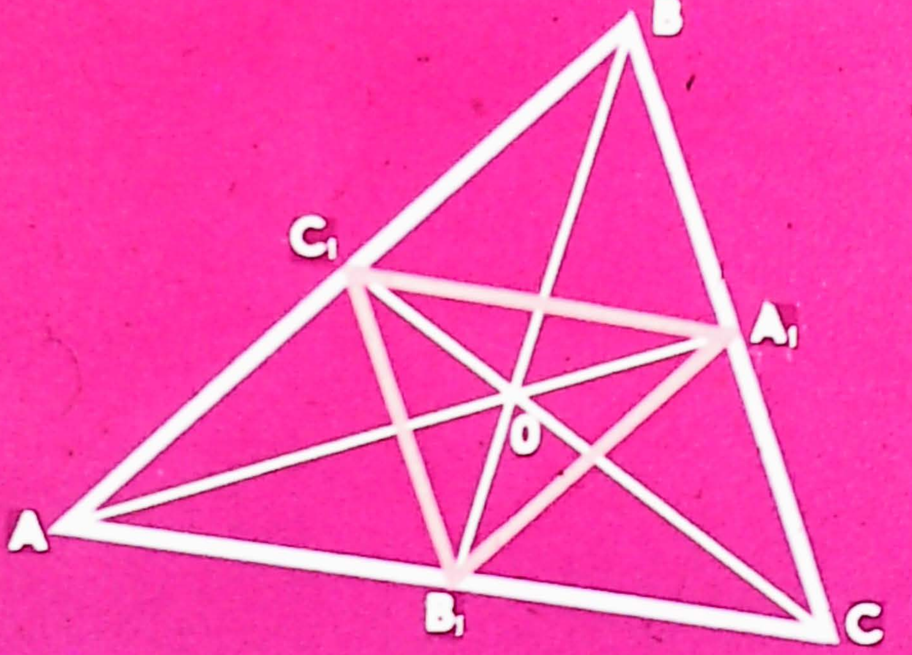
$A_1 = H_O^k(A)$



$A_1 = H_O^k(A)$

$B_1 = H_O^k(B)$ $C_1 = H_O^k(C)$...

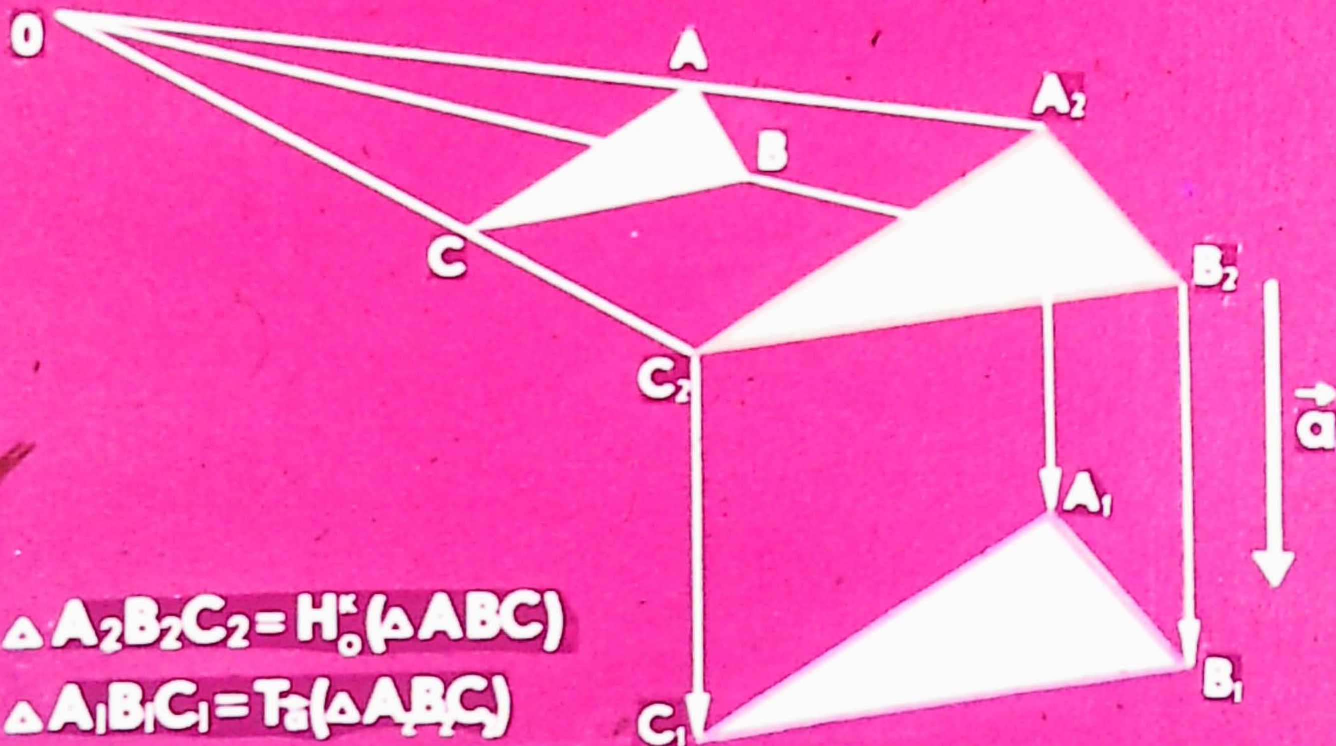
Рассмотренным в кадре 30 способом удобно строить многоугольники, гомотетичные данным.
Для произвольных фигур построение гомотетичных им фигур выполняется «приближенно» по отдельным точкам.



$|AC_1| = |C_1B|,\ |BA_1| = |A_1C|,\ |CB_1| = |B_1A|$

Гомотетичны ли треугольники ABC и $A_1B_1C_1$? Какая точка является центром гомотетии? Какое значение имеет коэффициент гомотетии?

Указание. Медианы в треугольнике пересекаются в одной точке и $\frac{|BO|}{|OB_1|} = \frac{|CO|}{|OC_1|} = \frac{|AO|}{|OA_1|} = 2.$

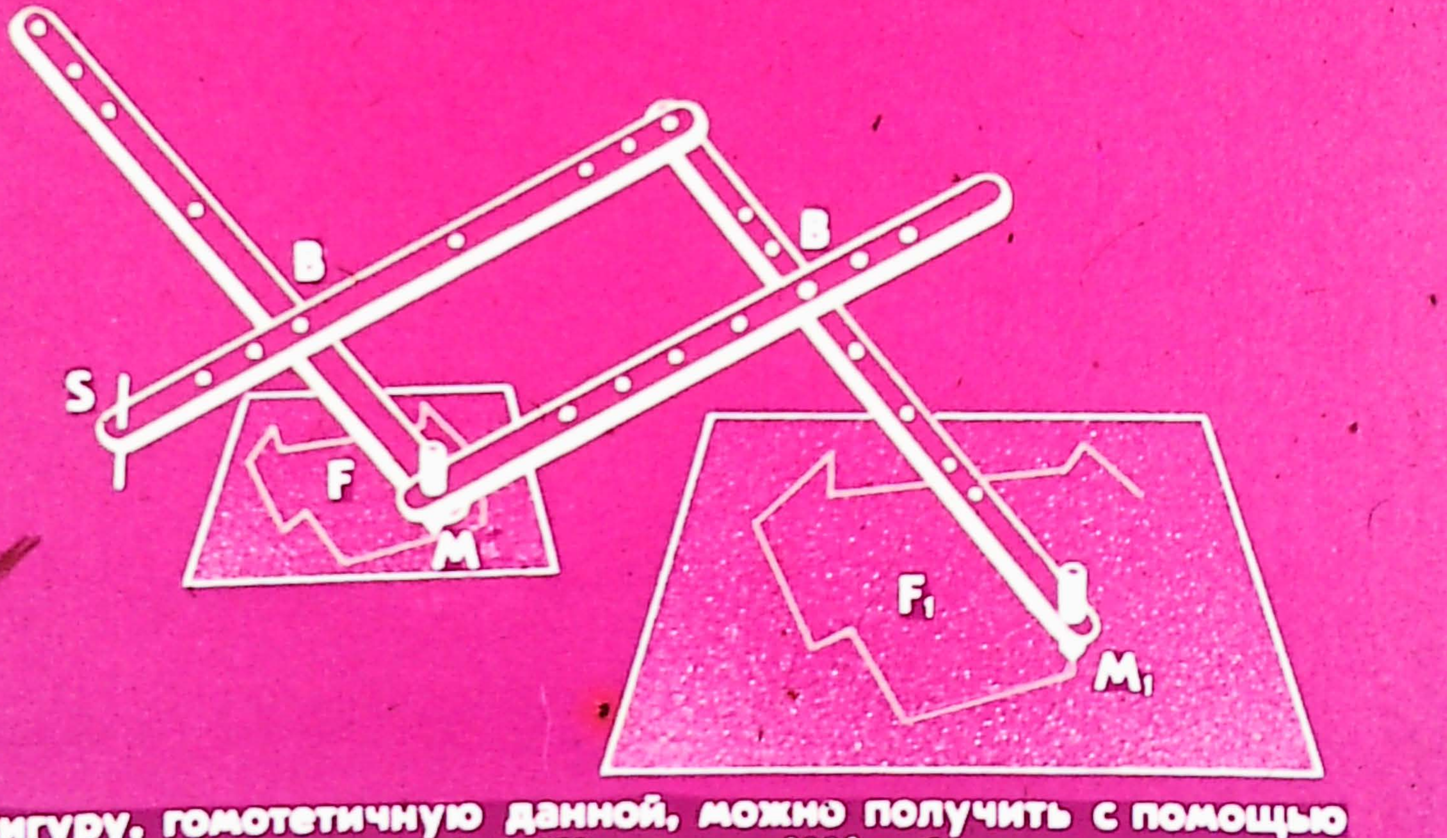


$\triangle A_2B_2C_2 = H_O^k(\triangle ABC)$

$\triangle A_1B_1C_1 = T_{\vec{a}}(\triangle A_2B_2C_2)$

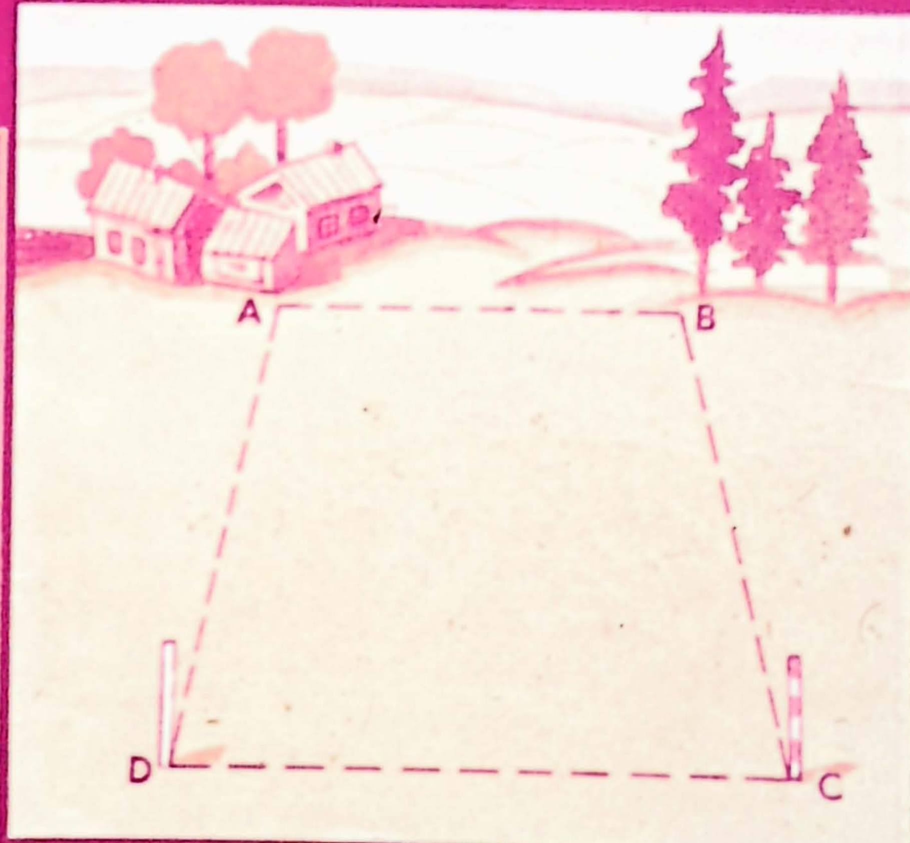
(Т—обозначение параллельного переноса).

Будут ли треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны? Чему равен коэффициент подобия?



Фигуру, гомотетичную данной, можно получить с помощью прибора—<u>*пантографа*</u>. Штифтом (M) обводят контур фигуры F. Карандаш (M_1) чертит гомотетичную фигуру F_1. Винты (B) устанавливаются на делениях, соответствующих выбранному коэффициенту гомотетии.

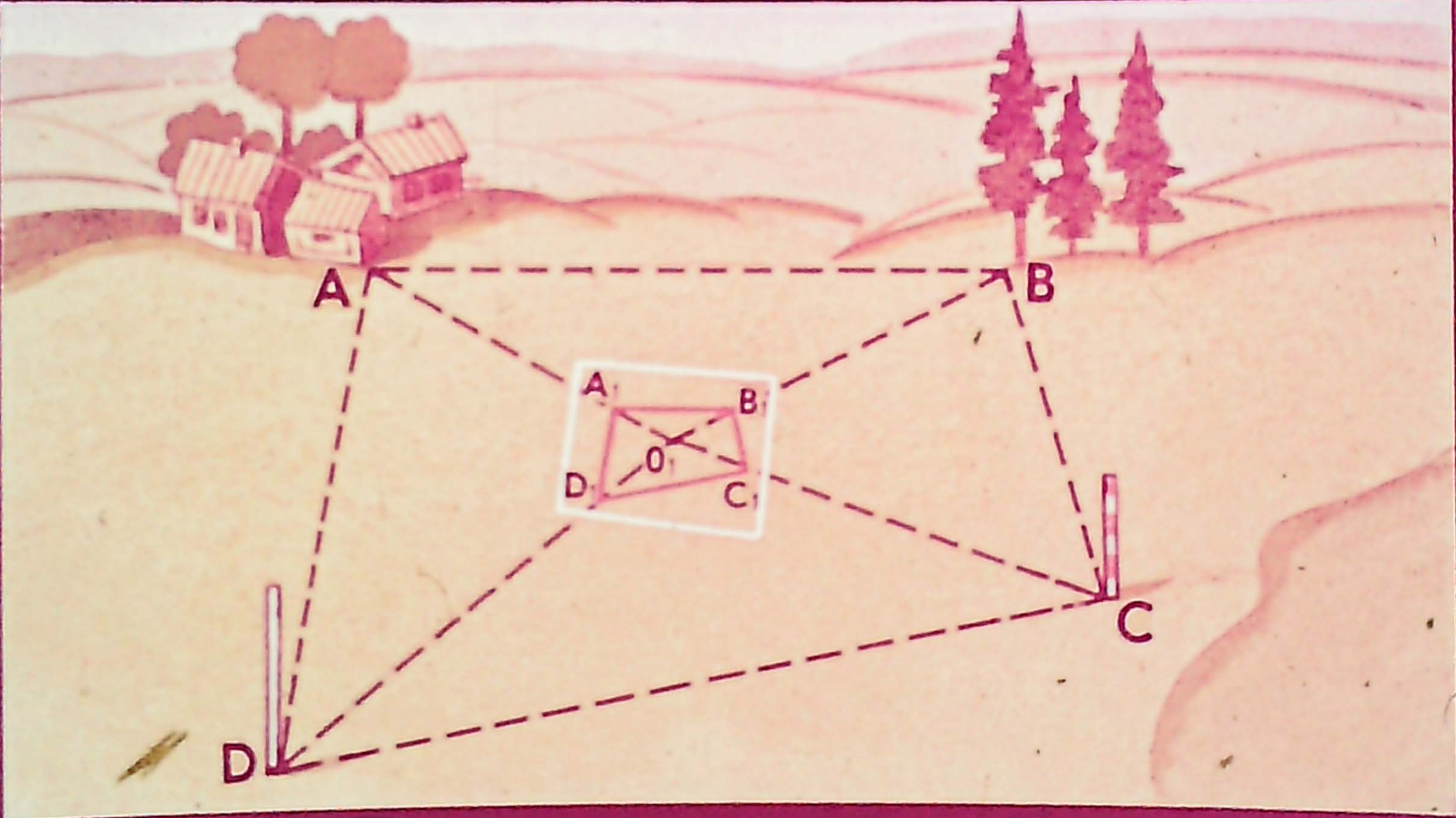
Мензула



Земельный участок

Гомотетия находит практическое применение при съемке плана участка на местности при помощи мензулы.

Задача. Начертить план земельного участка, имеющего форму многоугольника.



Решение. Устанавливают мензулу в выбранной точке 0 и отмечают соответствующую ей точку 0 на планшете. Ориентируют алидаду поочередно в направлениях на вершины участка и проводят лучи. На лучах в выбранном масштабе откладывают длины отрезков от точки 0 до вершин.

КОНЕЦ

Диафильм по геометрии для 7 класса
сделан по заказу Министерства просвещения СССР

Авторы В. Семаков, Ф. Нагибин
Художник-оформитель Н. Дунаева
Редактор Г. Витухновская

Д-025-76

Студия «Диафильм» Госкино СССР, 1976 г.
101 000, Москва, Центр, Старосадский пер., д. № 7
Цветной 0-30