III 1980

2 4 8

ТУ-19-241-77

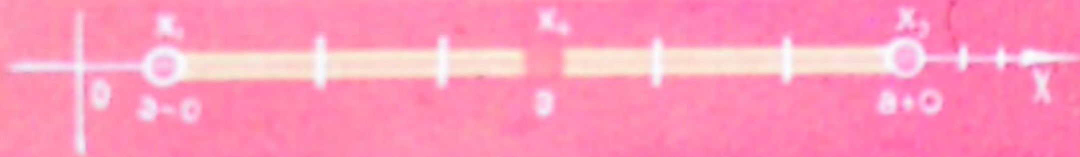
5

5

студия
ДИАФИЛЬМ

07—3—139

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ.

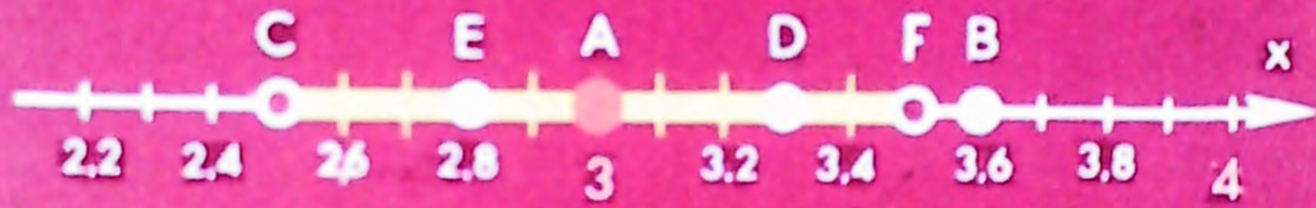


ПРОИЗВОДНАЯ

К сведению учителя

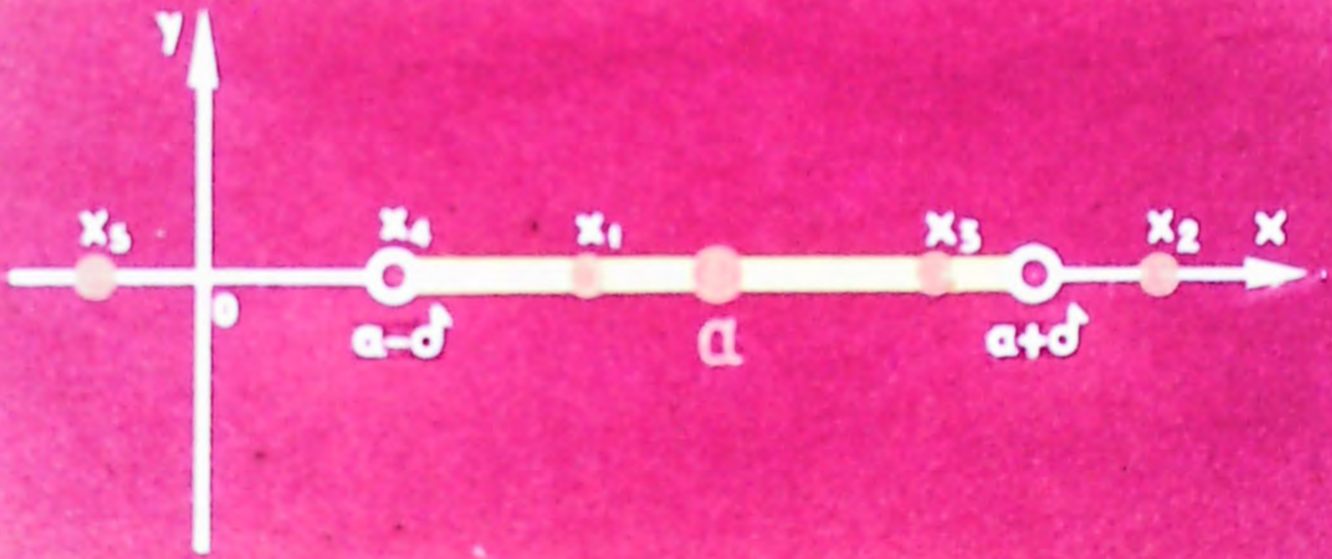
Кадры 2—14 формируют понятие предела функции в точке, кадры 15—22 формируют понятие непрерывности функции в точке. В кадрах 23—36 раскрывается физический смысл производной, сопоставляются графики функции и ее производной. В кадрах 37—43 рассматриваются примеры построения графиков функции с помощью производной.

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ.
НЕПРЕРЫВНОСТЬ



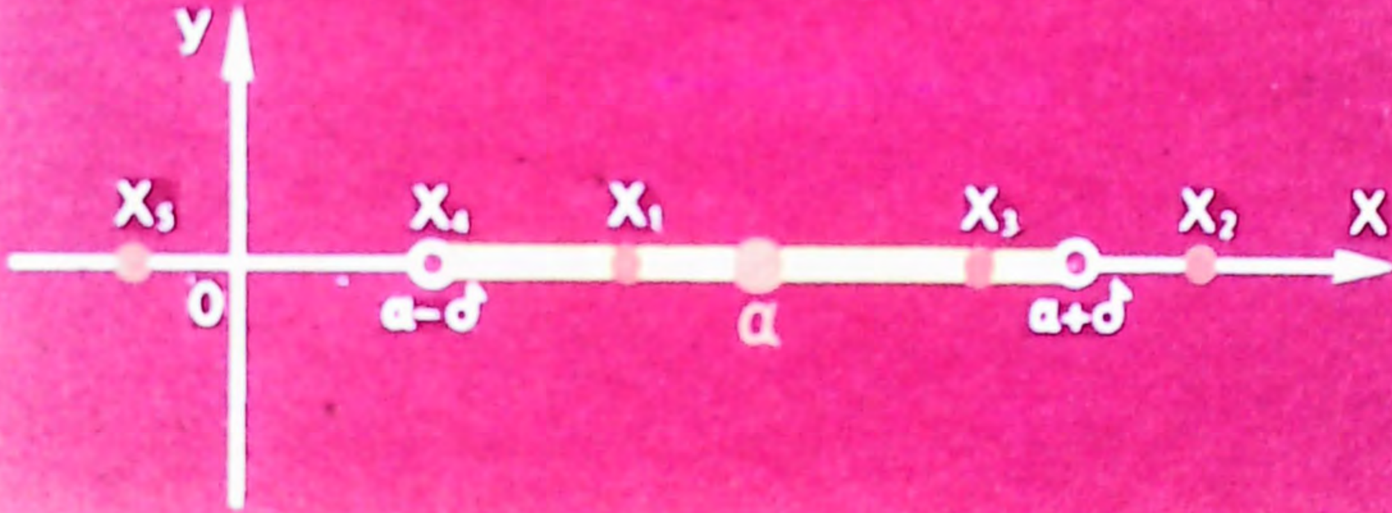
Найдите расстояния между точками: A и B; A и C; A и D; A и E. Какие из расстояний |AB|, |AC|, |AD|, |AE| меньше 0,5; больше 0,5; равны 0,5? Какие из точек B, C, D, E принадлежат промежутку]3−0,5; 3+0,5[?

4



Промежуток $]a-\delta, a+\delta[$ называют δ–окрестностью точки a. Сравните с числом δ расстояния от точки a до точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Какие из отмеченных точек принадлежат δ–окрестности точки a?

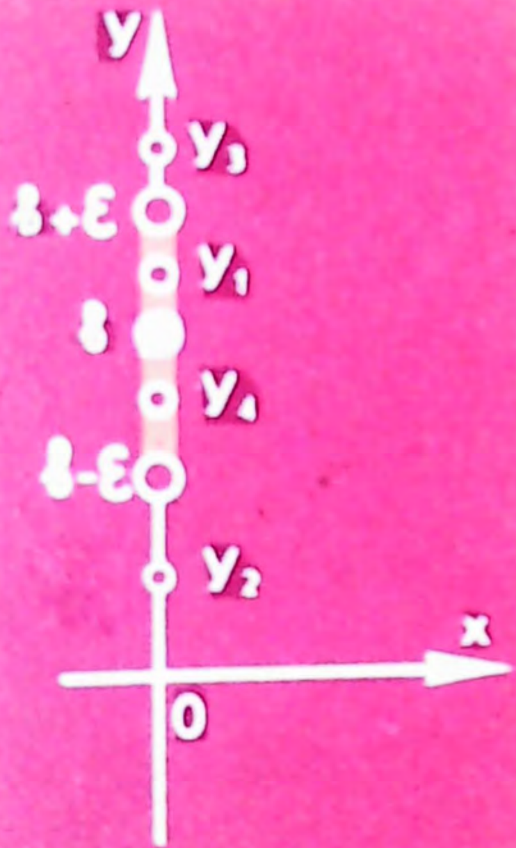
6



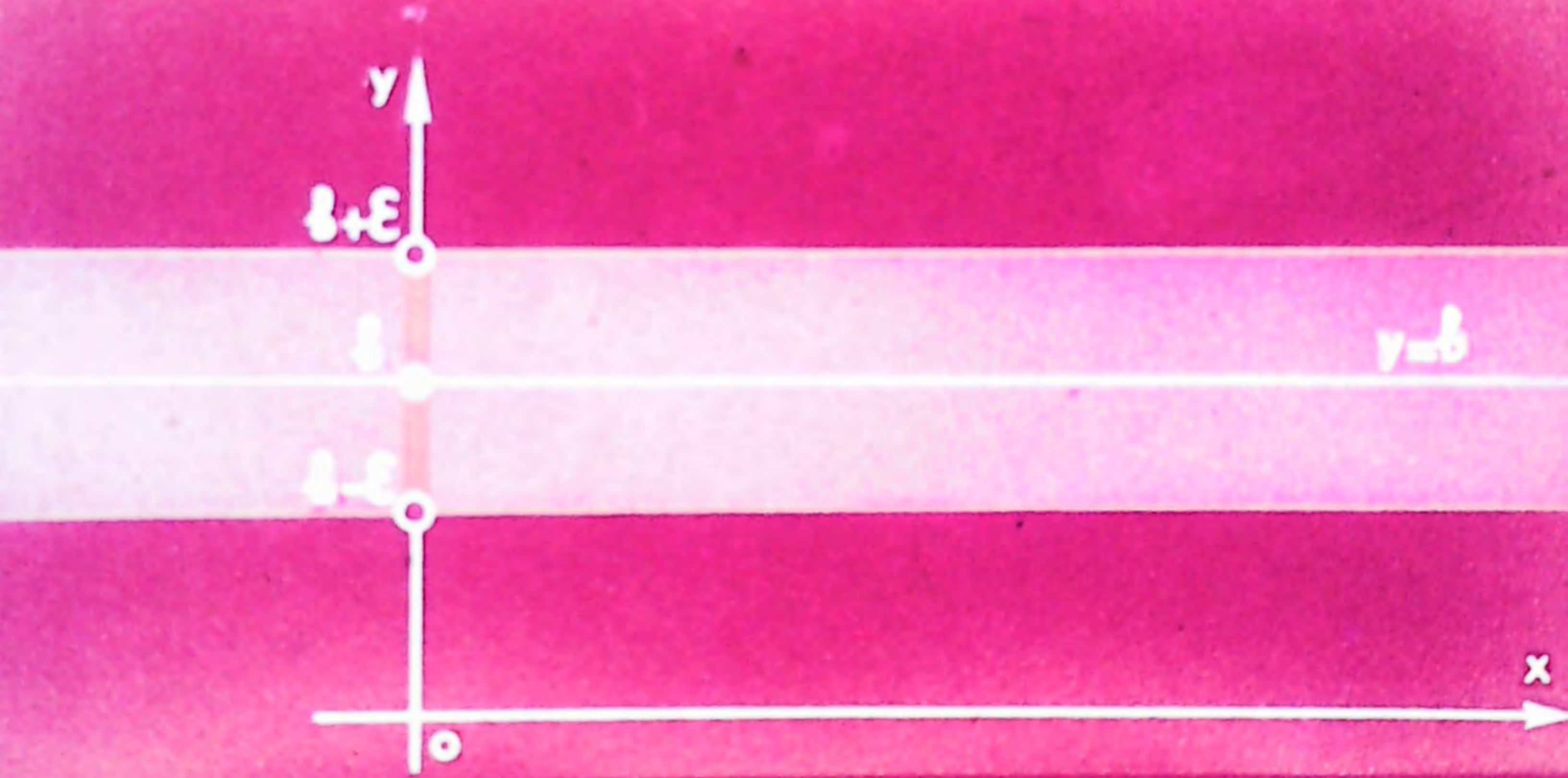
Высказывание „точка x_1 принадлежит δ-окрестности точки a" может быть записано так: $|x_1 - a| < \delta$.

Каков смысл неравенств: $|x_2 - a| > \delta$, $|x_3 - a| < \delta$?

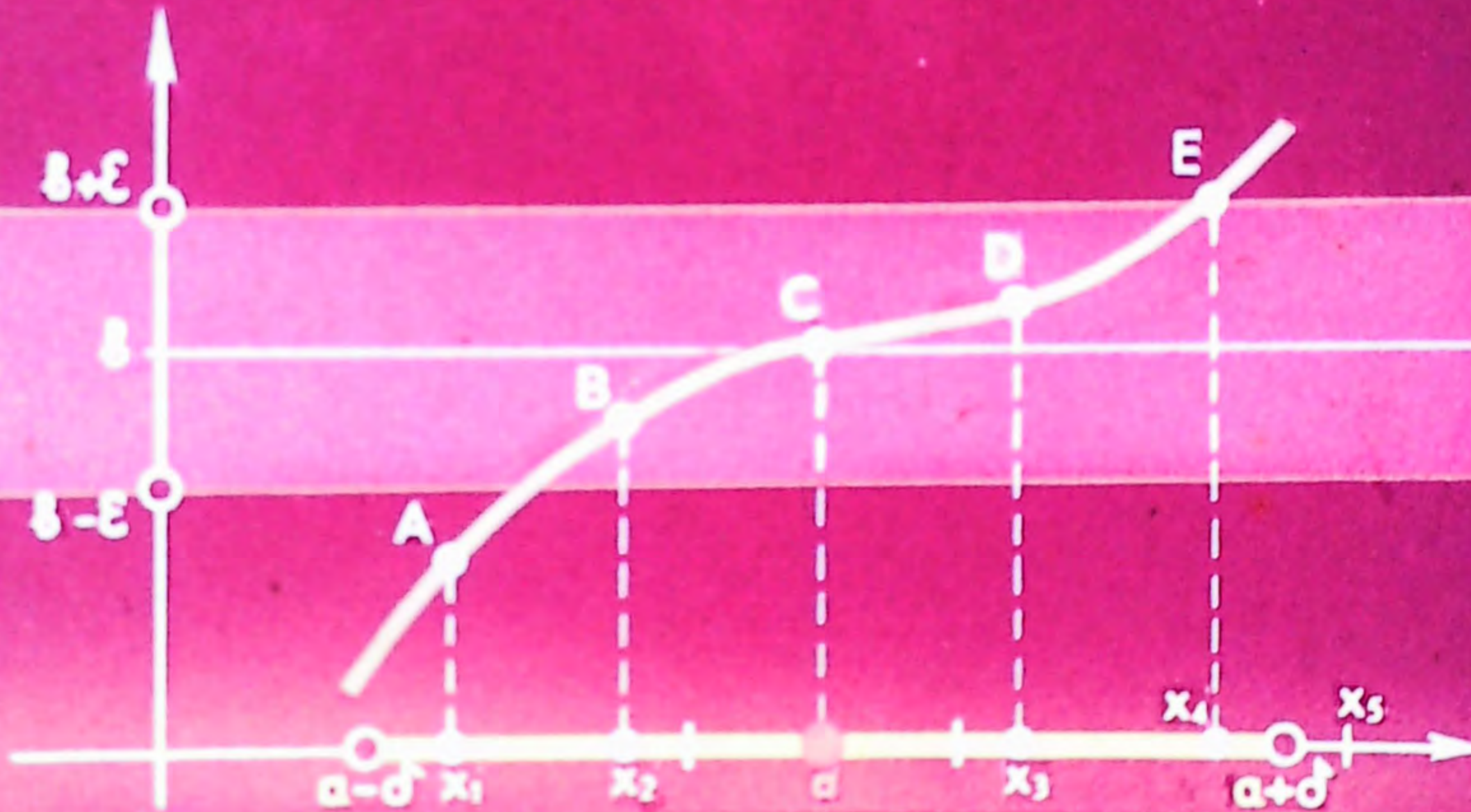
6



Промежуток $]b-\varepsilon;\ b+\varepsilon[$ называют ε—окрестностью точки b. Сравните с числом ε расстояния от точки b до точек: y_1, y_2, y_3, y_4. Каков смысл неравенств: $|y_1-b|<\varepsilon$; $|y_2-b|>\varepsilon$; $|y_3-b|>\varepsilon$; $|y_4-b|<\varepsilon$?



Поставим в соответствие ε–окрестности точки b открытую полосу координатной плоскости, ограниченную прямыми $y=b-\varepsilon$ и $y=b+\varepsilon$. Эту полосу назовем ε–полоской прямой b.



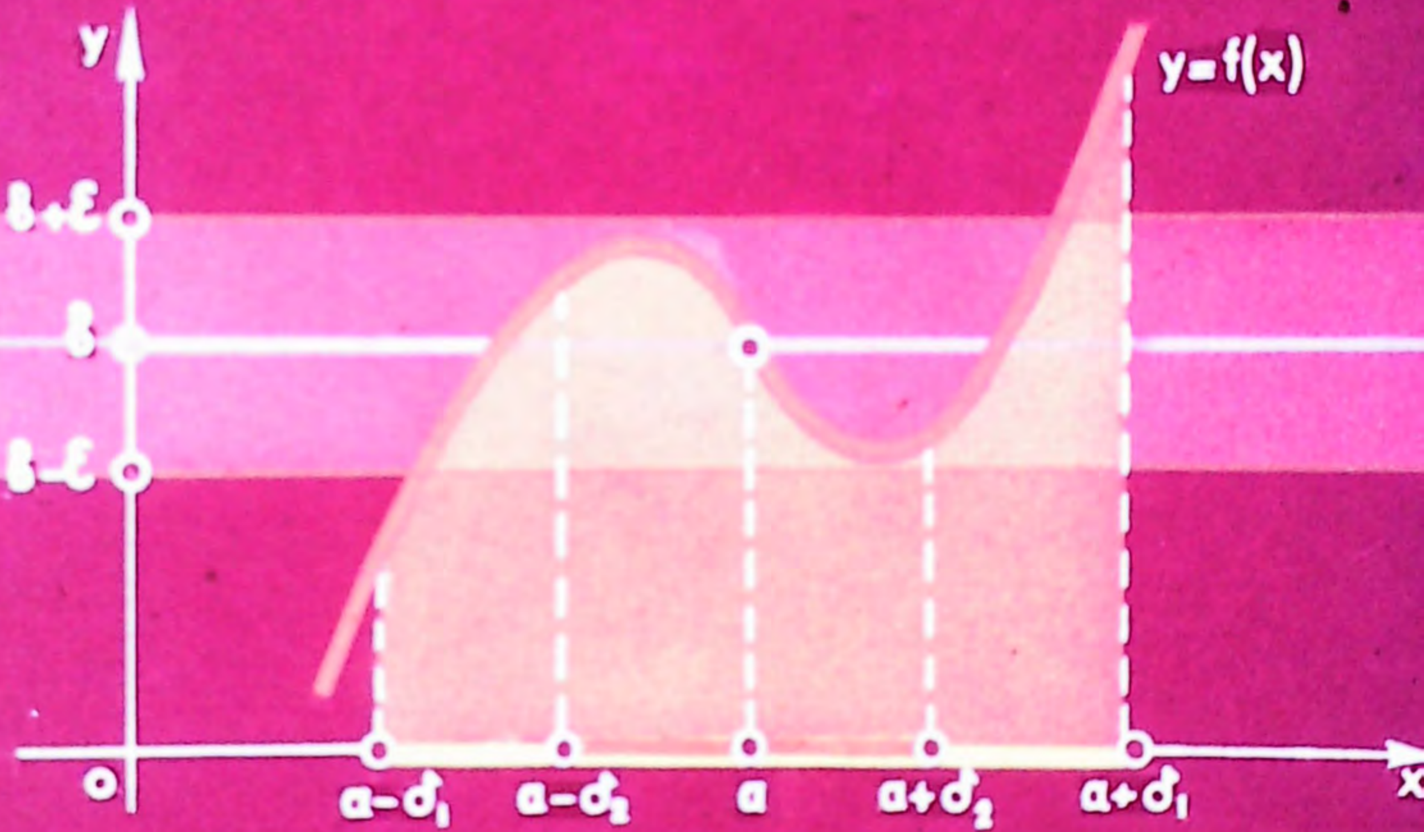
Для каждой из точек A, B, C, D, E графика выясните:

а) принадлежит ли эта точка ε — полоске прямой в;

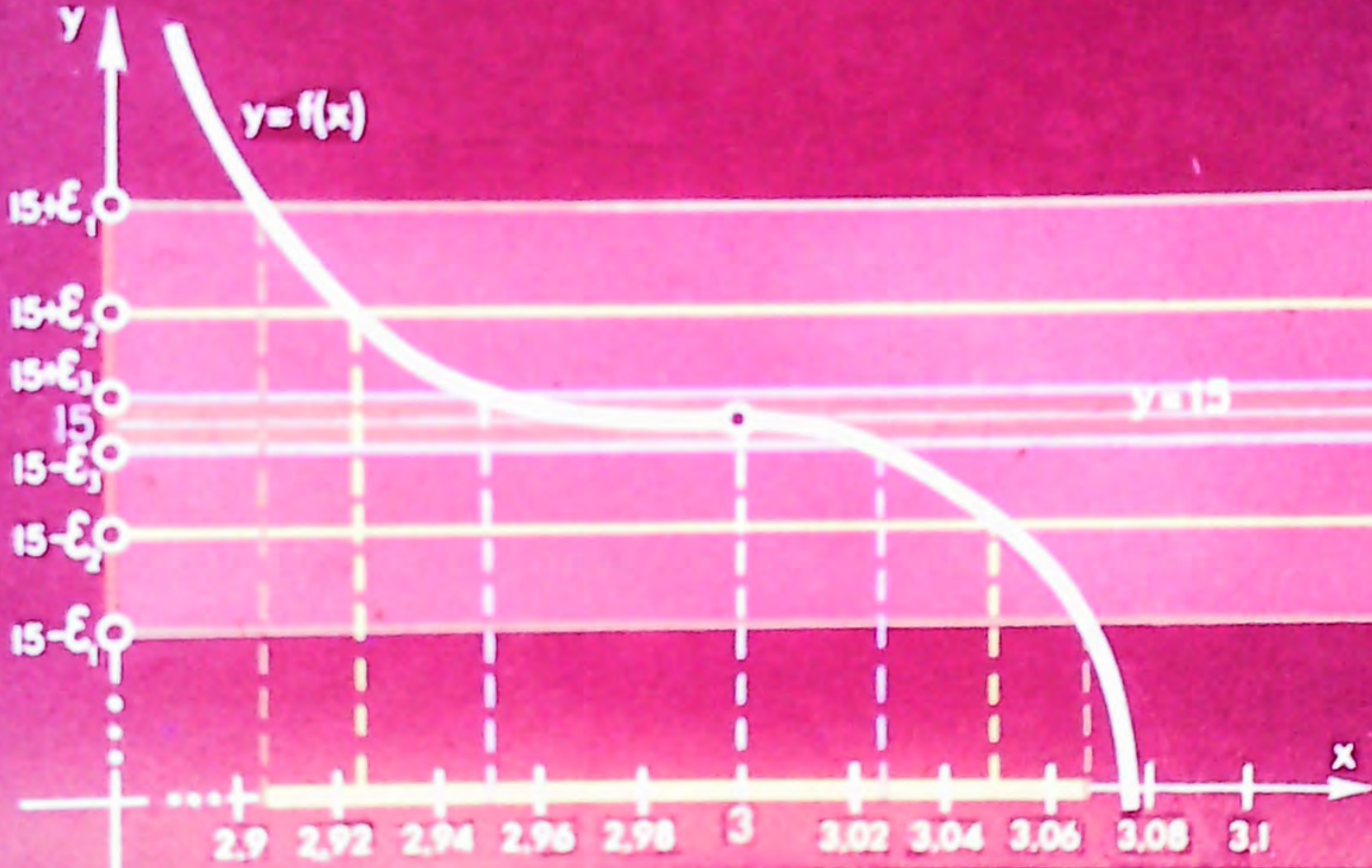
б) принадлежит ли ее абсцисса δ — окрестности точки a;

в) для каких значений x, где $x \in \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ верно: $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-в| < \varepsilon$.

9

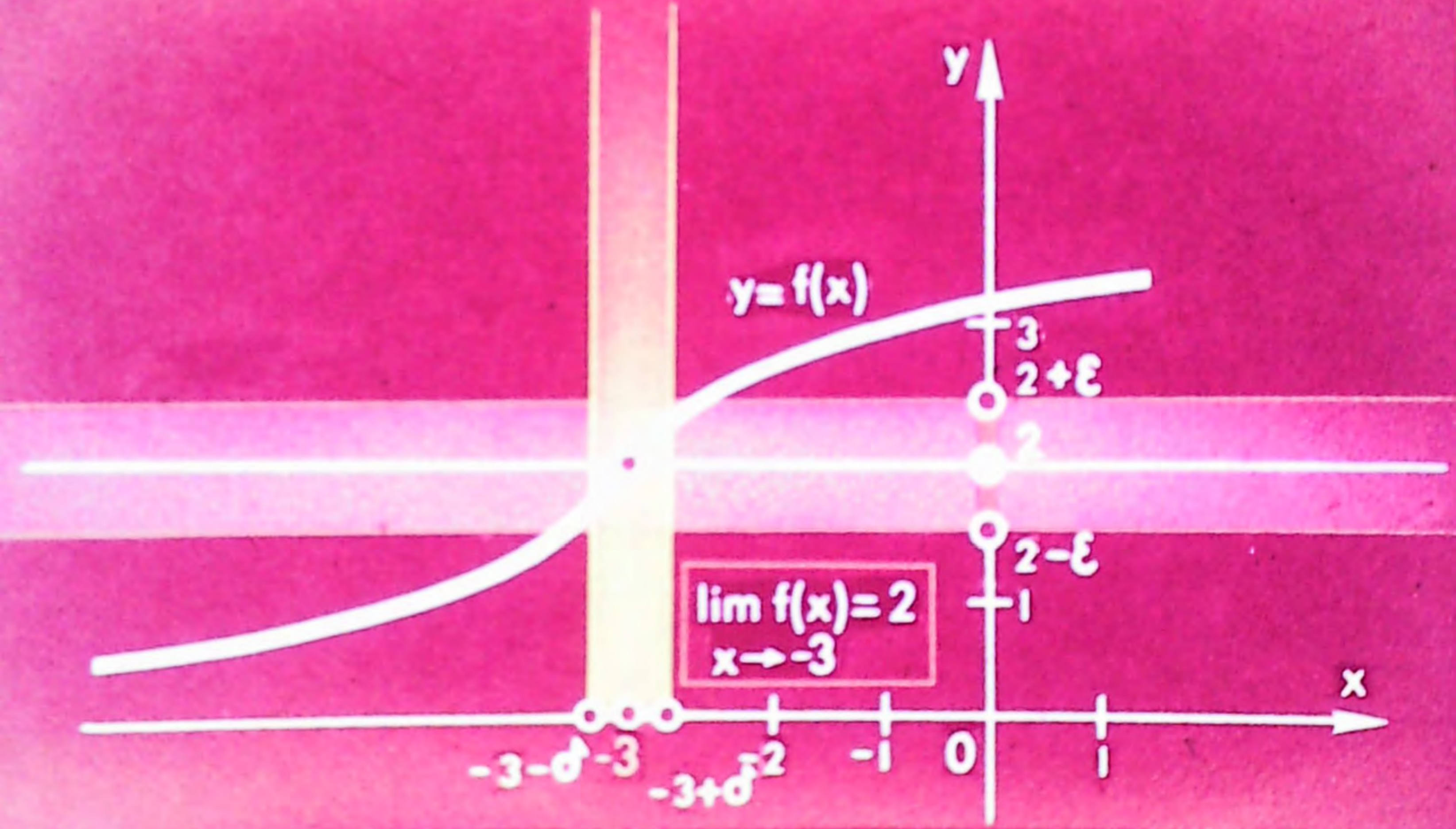


Функция f определена в любой окрестности точки a, кроме $x=a$. Верно ли, что: а) $(|x-a|<\delta_1$ и $x\neq a)\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon$; б) $(|x-a|<\delta_2$ и $x\neq a)\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon$?

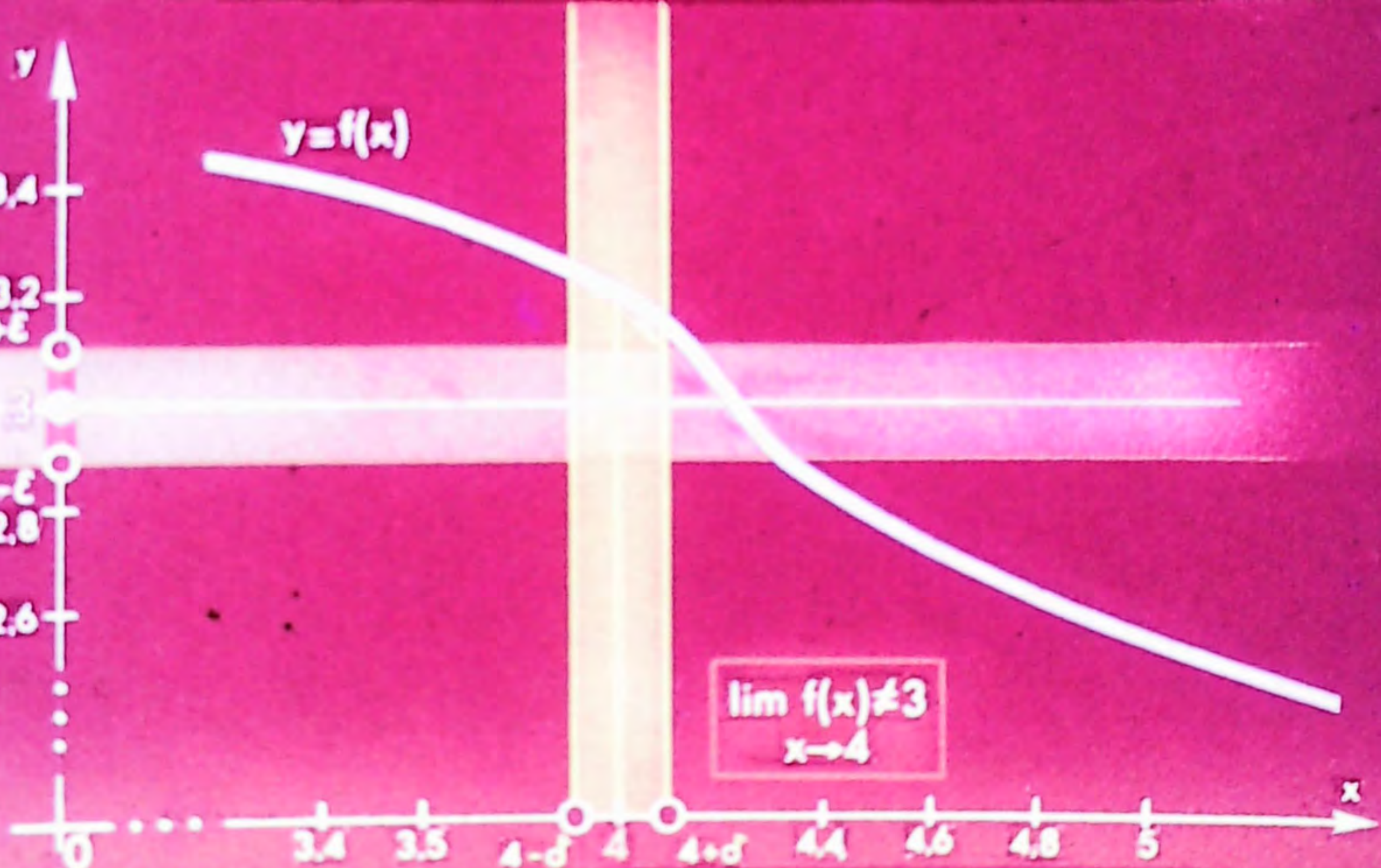


Укажите какую-нибудь окрестность точки 3 (подберите значение δ) так, чтобы для любого $x \neq 3$ из этой окрестности выполнялось условие а) $|f(x)-15| < \varepsilon_1$; б) $|f(x)-15| < \varepsilon_2$; в) $|f(x)-15| < \varepsilon_3$.

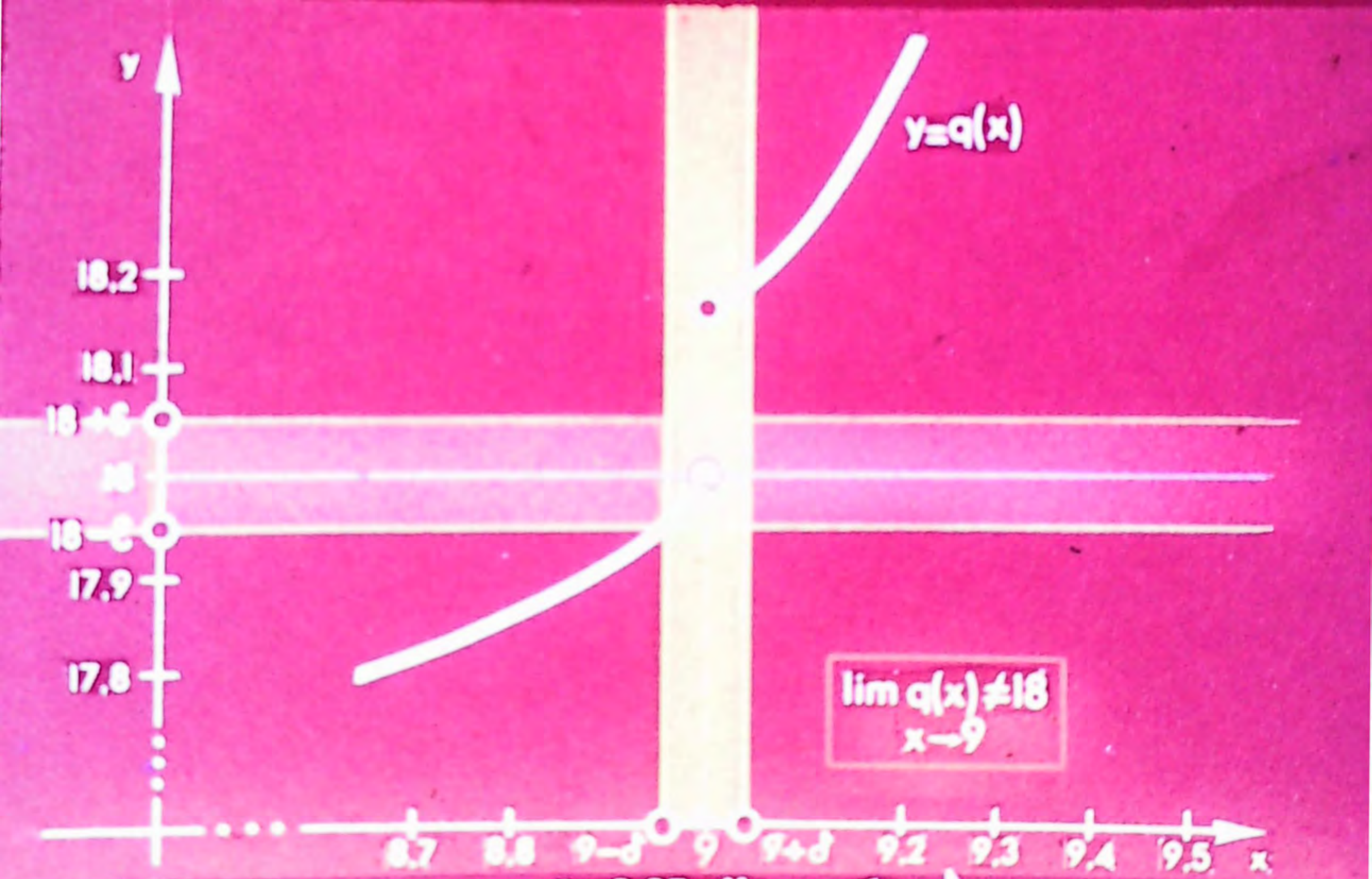
Пусть функция f обладает свойством: для любой сколь угодно малой ε – полоски прямой b найдется такая δ – окрестность точки a, что все точки графика функции f с абсциссами из δ – окрестности точки a (за исключением, быть может, $x=a$) принадлежат ε – полоске прямой b. Тогда число b называется пределом функции f в точке a. Это обозначают так: $\lim\limits_{x \to a} f(x)=b$.



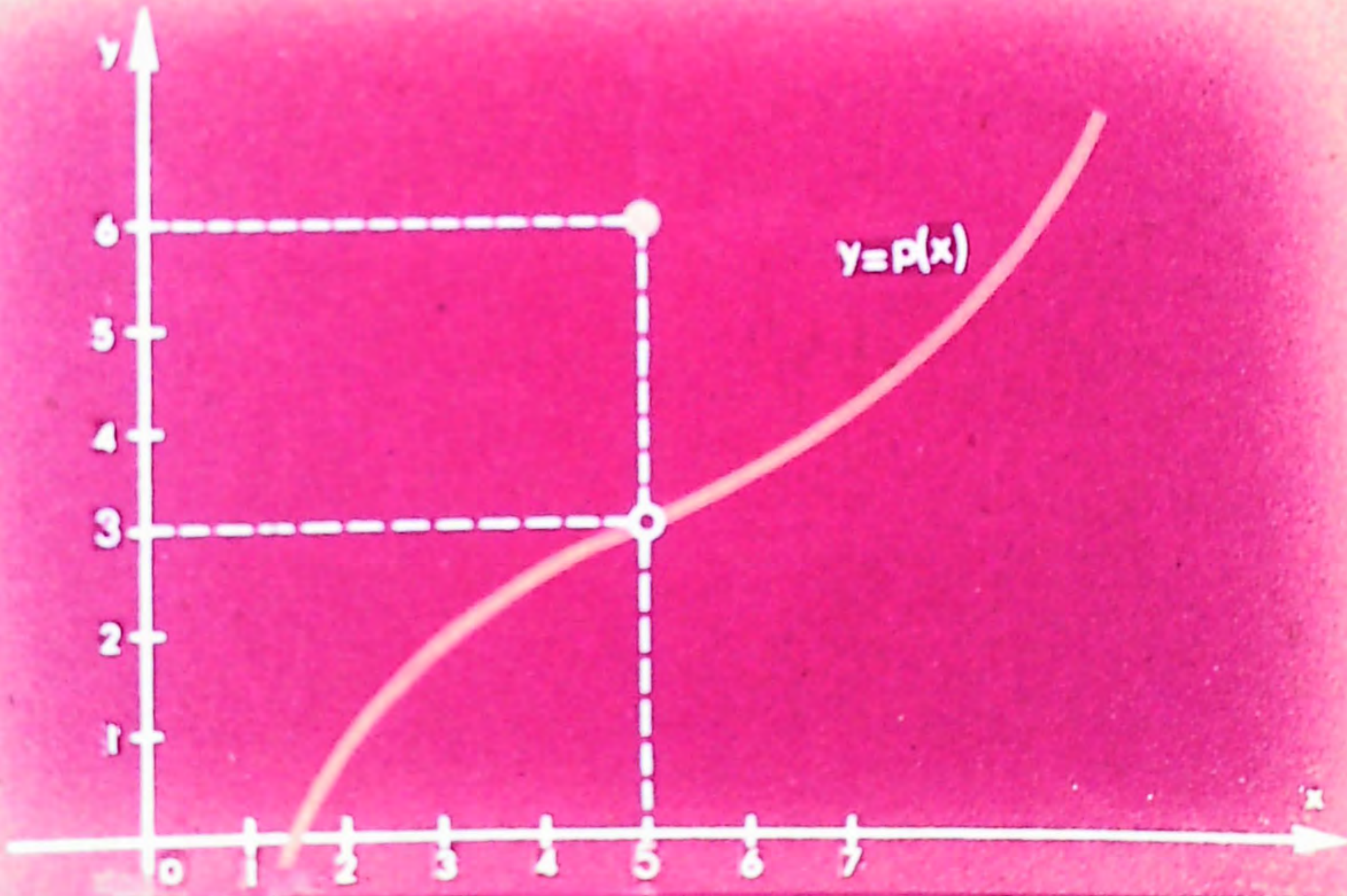
Для любой ε – полоски прямой 2 найдется δ – окрестность точки – 3, что если $|x-(-3)|<\delta$ и $x\neq -3$, то $|f(x)-2|<\varepsilon$.



Для $\varepsilon=0{,}1$ показана такая δ—окрестность точки 4, что для всех x из этой окрестности точки графика оказываются вне ε—полоски прямой 3. Легко видеть, что и для всякой меньшей δ—окрестности при любом x также выполняется условие $|f(x)-3|>\varepsilon$.

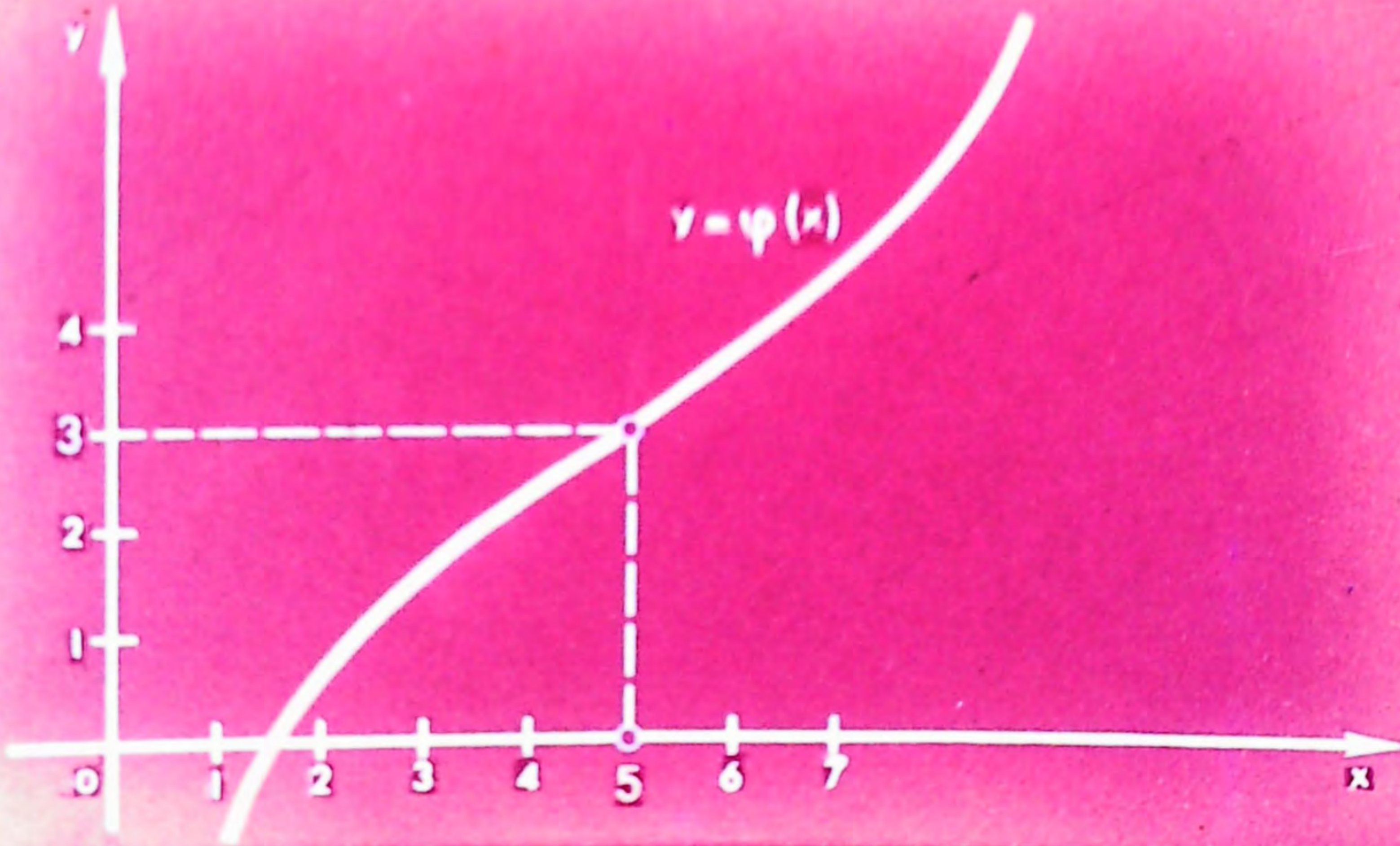


Действительно, пусть $\varepsilon = 0{,}05$. Какую бы δ—окрестность точки 9 мы ни взяли, для всех x из этой окрестности, больших 9, выполняется условие $|f(x)-18|>0{,}05$.



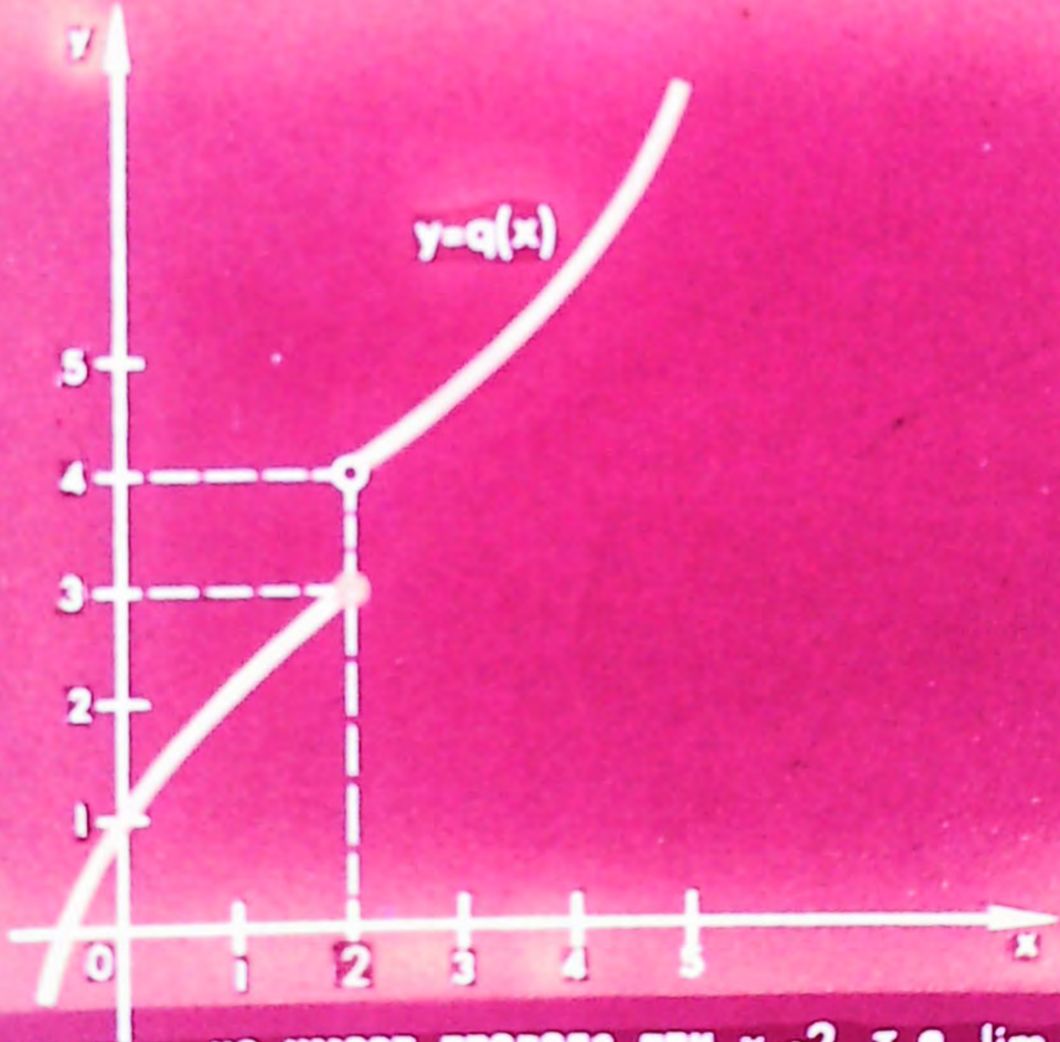
Функция p при $x=5$ имеет значение, равное 6, т. е. $p(5)=6$. Существует предел функции p при $x \to 5$: $\lim\limits_{x \to 5} p(x)=3$. Следовательно, $\lim\limits_{x \to 5} p(x) \neq p(5)$.

16

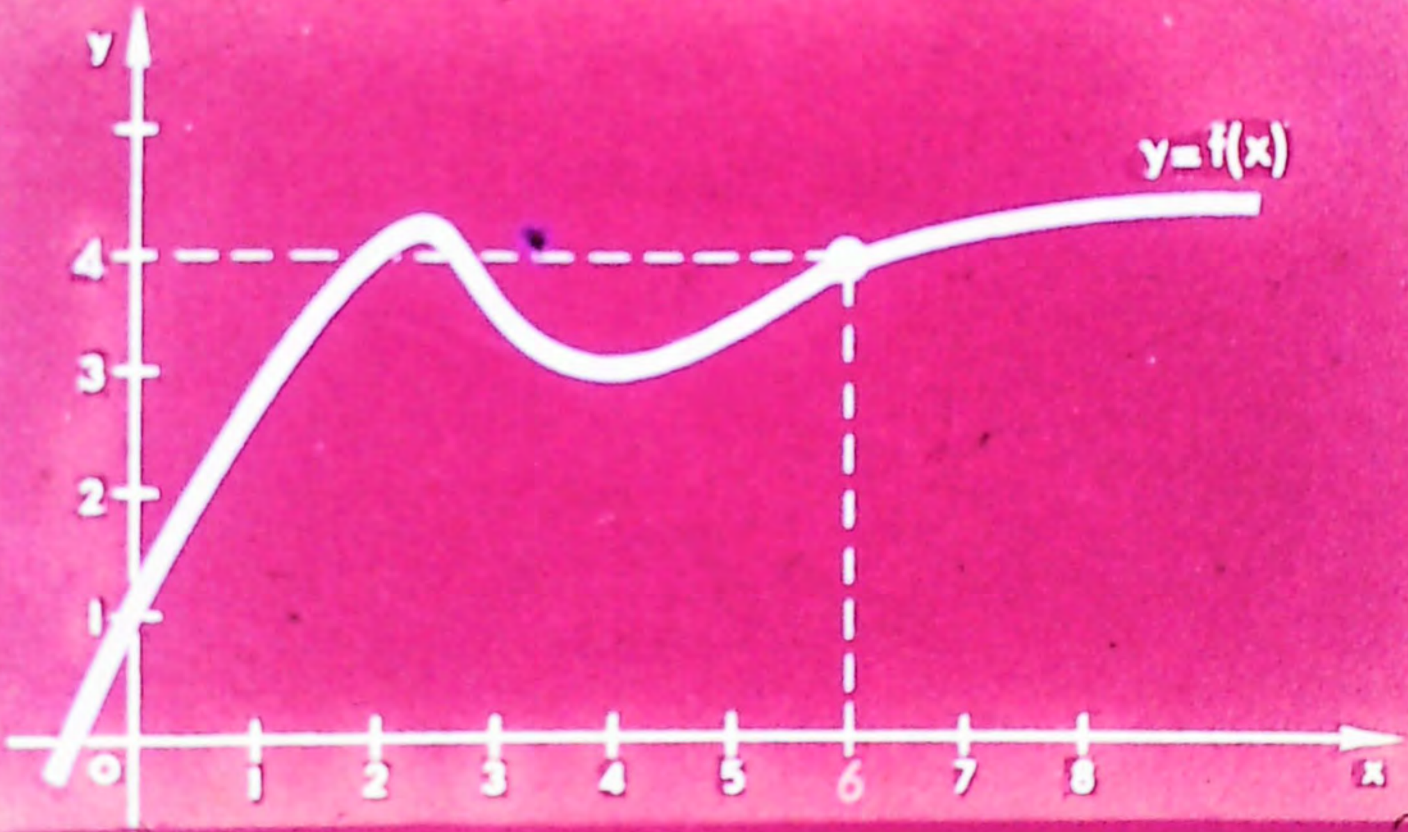


Функция φ не определена в точке $x=5$, т. е. $\varphi(5)$ не существует. Но $\lim\limits_{x\to 5}\varphi(x)=3$. Следовательно, в этом случае также $\lim\limits_{x\to 5}\varphi(x)\neq\varphi(5)$.

17



Функция q не имеет предела при $x \to 2$, т. е. $\lim\limits_{x\to 2} q(x)$ не существует (почему?), а $q(2)=3$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 2} q(x) \neq q(2)$.

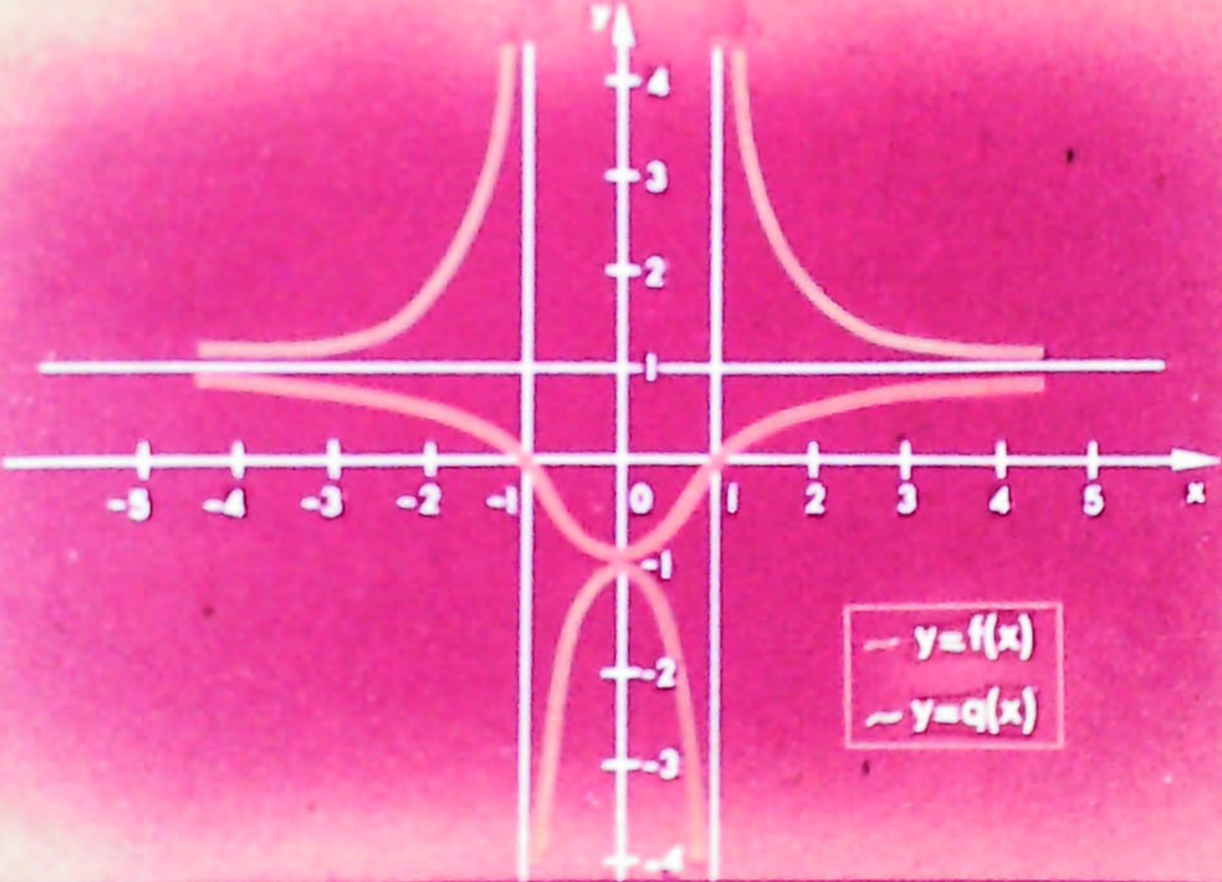


В точке $x=6$ существует и предел функции f, и значение этой функции: $\lim\limits_{x \to 6} f(x)=4$ и $f(6)=4$.

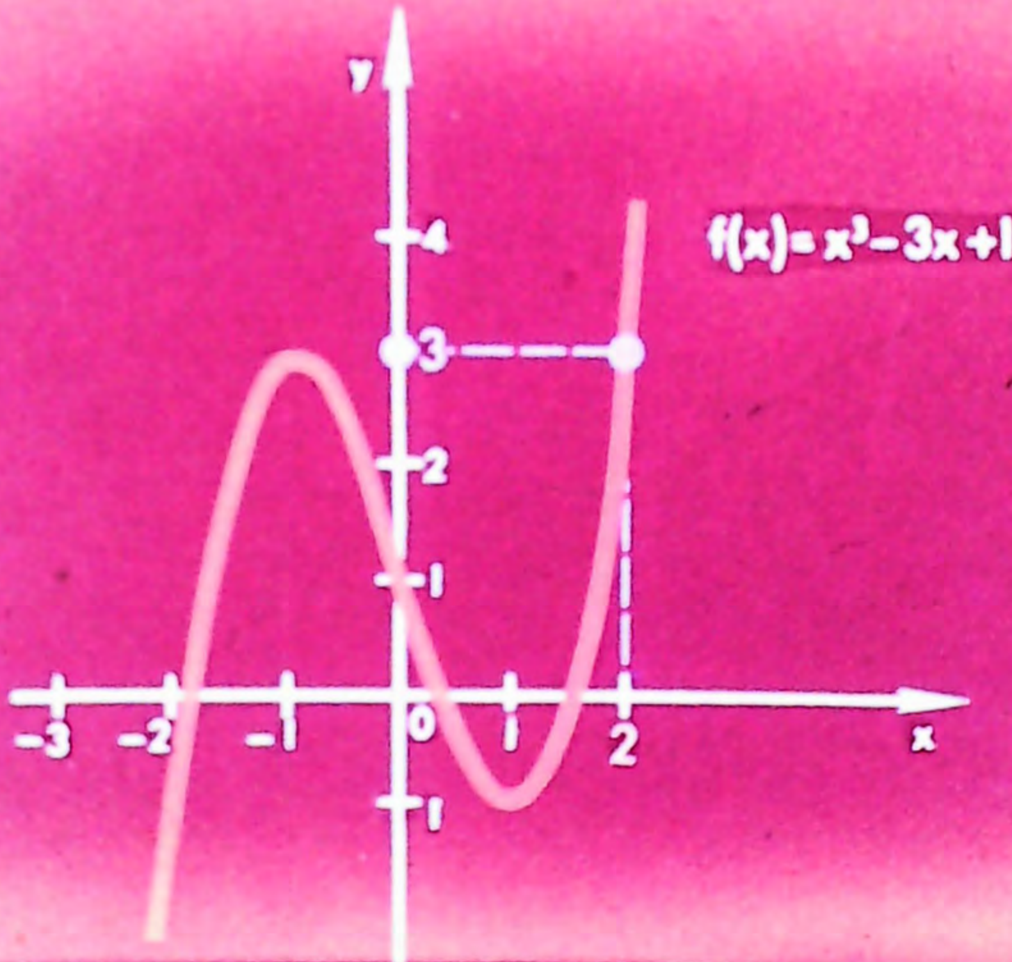
Итак, $\lim\limits_{x \to 6} f(x)=f(6)$.

Говорят, что функция f непрерывна в точке 6.

Функция f называется непрерывной в точке $x=a$, если предел функции при x, стремящемся к a, равен $f(a)$ т. е. $\lim\limits_{x \to a} f(x)=f(a)$.

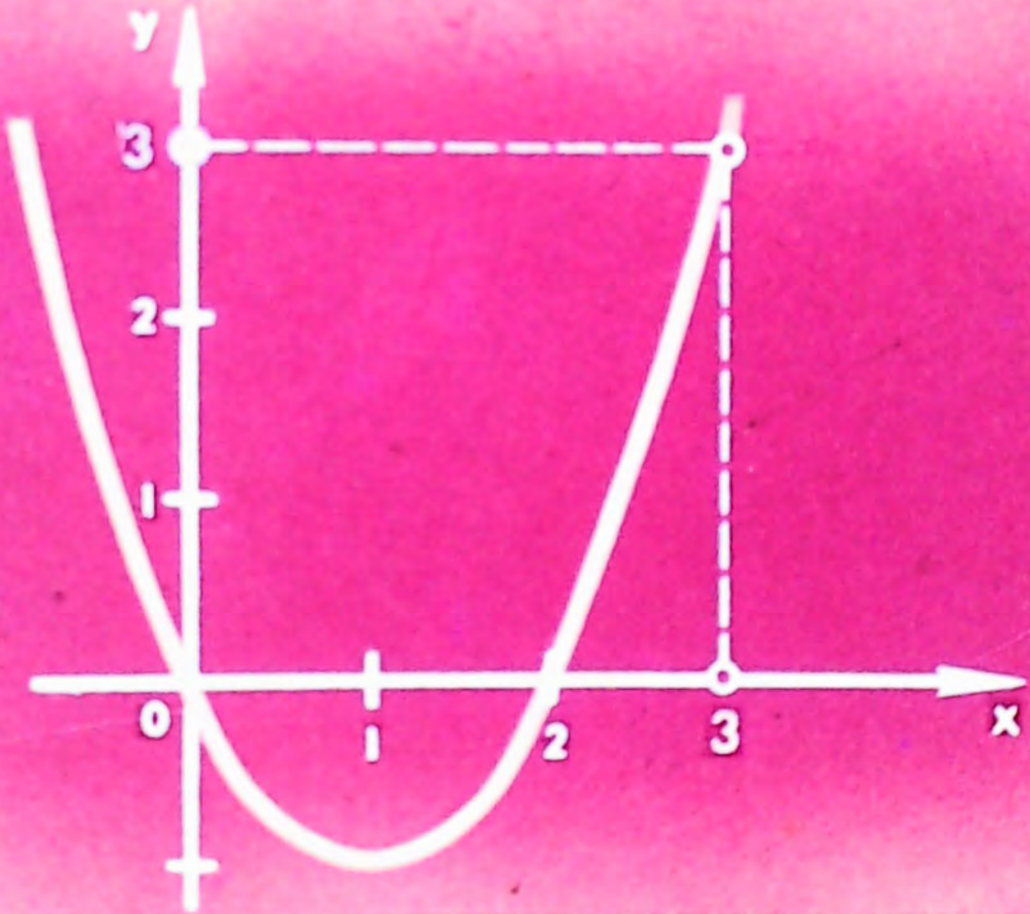


Рациональная функция непрерывна всюду, где она определена. Например, функция $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ непрерывна в каждой точке числовой прямой. Функция $g(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ непрерывна всюду, кроме точек $x=-1$ и $x=1$.



$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = 3$, так как функция f в точке $x=2$ непрерывна.

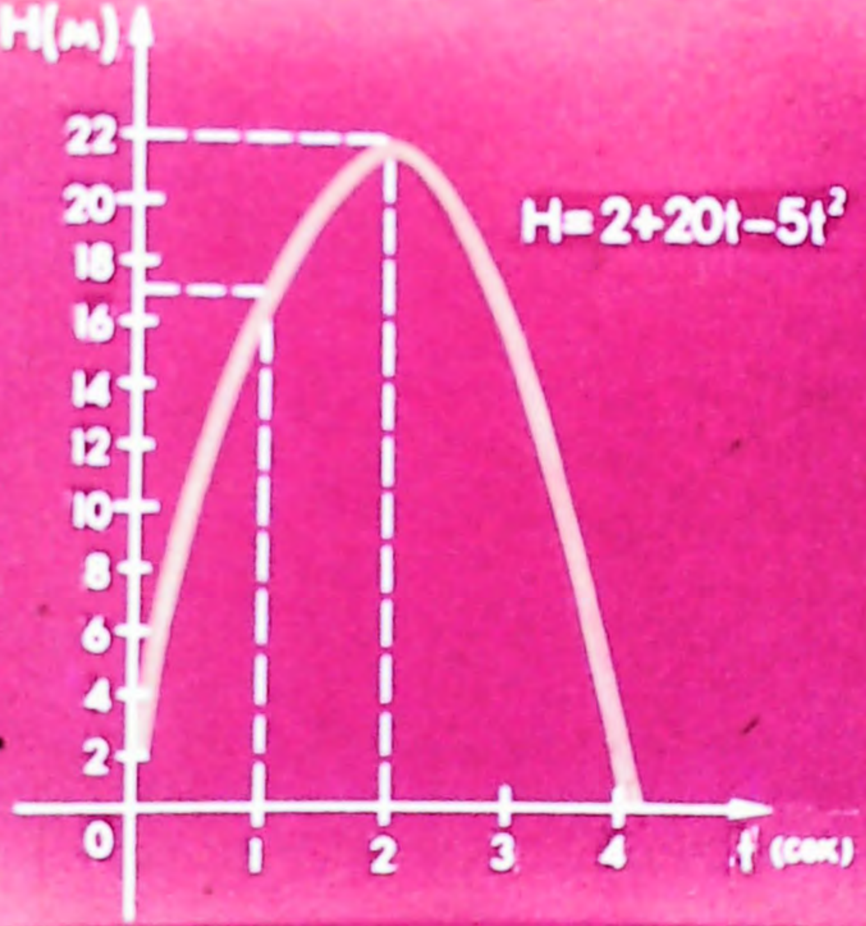
Найдите: $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.



Пусть $f(x)=\dfrac{x(x-2)(x-3)}{x-3}$. Укажите множество значений переменной x, на котором функция непрерывна. Найдите: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

ПРОИЗВОДНАЯ

Камень брошен вертикально вверх с высоты $h_0=2$м и с начальной скоростью $V_0=20$ м/с. Известно, что тело, брошенное вертикально вверх, через t секунд после начала движения оказывается на высоте H метров, где $H=h_0+V_0t-\frac{gt^2}{2}$. Подставив значения h_0 и V_0 и считая, что $g=10$ м/с², получим: $H=2+20t-5t^2$.



В какой момент времени камень находился на максимальной высоте? Сколько метров пролетел камень за 1-ю секунду, за 2-ю секунду? Найдите среднюю скорость движения $V_{ср.}$ в промежутке времени $\Delta t=1$: а) от $t=0$ до $t=1$; б) от $t=1$ до $t=2$.

В таблице даны значения средней скорости движения камня за время Δt от $t=1$ до $t=1+\Delta t$ для различных значений Δt. Если $\Delta t \to 0$, то $V_{ср.} \to 10$. В момент времени $t=1$ мгновенная скорость движения равна 10 м/с.

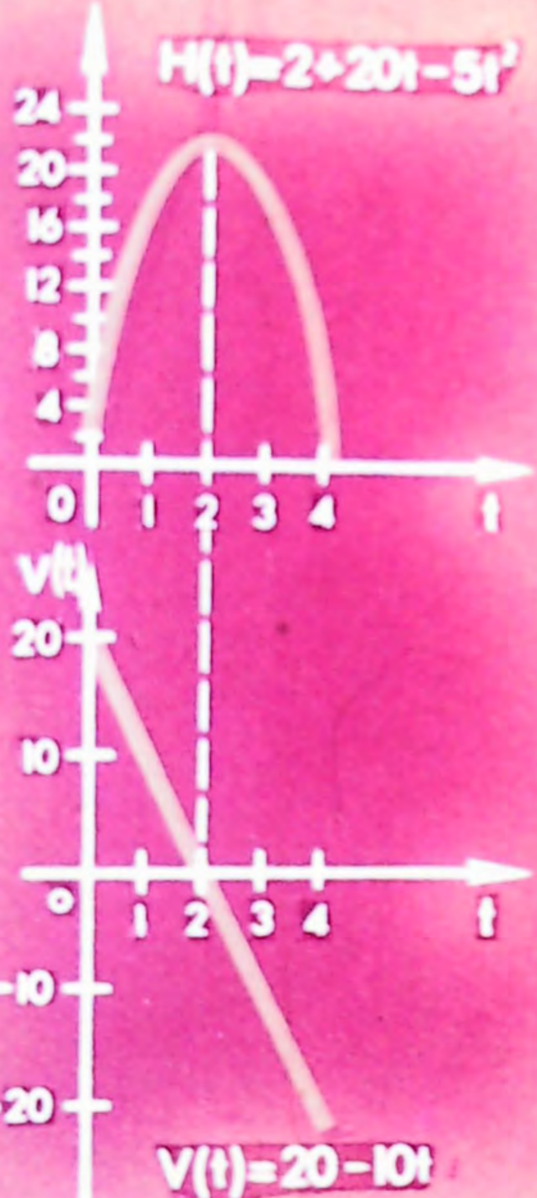
Δt	ΔH	$V_{ср.} = \frac{\Delta H}{\Delta t}$
1	5	5
0,2	1,8	9
0,1	0,95	9,5
0,01	0,0995	9,95
0,001	0,009995	9,995

Найдем скорость движения камня в произвольный момент времени t.

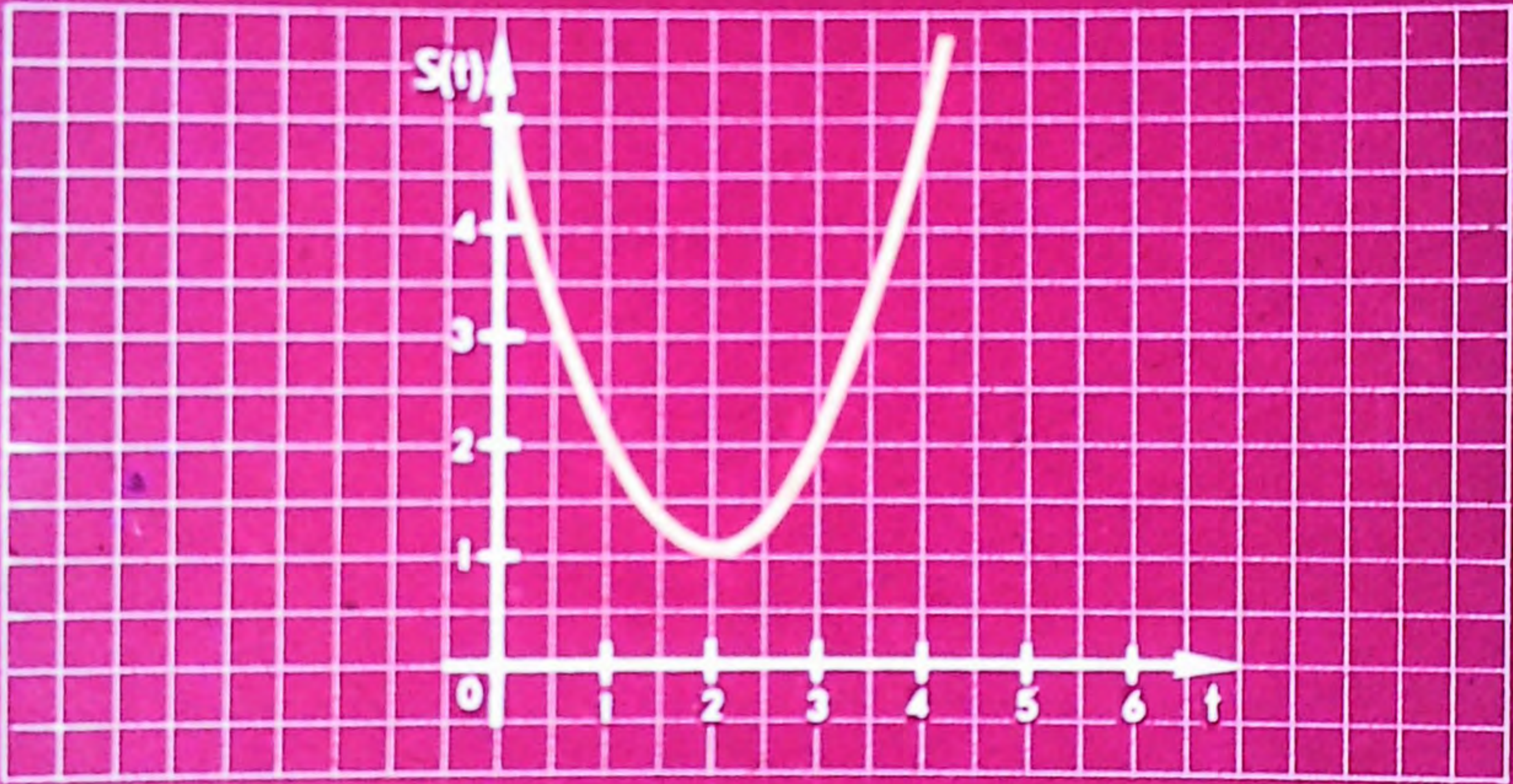
В промежутке времени Δt от момента t до момента $t+\Delta t$ $V_{ср.}=\frac{H(t+\Delta t)-H(t)}{\Delta t}=\frac{2+20(t+\Delta t)-5(t+\Delta t)^2-(2+20t-5t^2)}{\Delta t}=$

$=20-10t-5\cdot\Delta t.$

Если $\Delta t\to0$, то $V_{ср.}\to20-10t$. В любой момент времени t скорость движения может быть найдена по формуле $V(t)=20-10t$.



Сравните скорости движения в моменты времени $t=1$ и $t=3$, $t=0{,}5$ и $t=1{,}5$. Найдите скорость в момент $t=2$. Опишите изменение скорости в процессе движения.



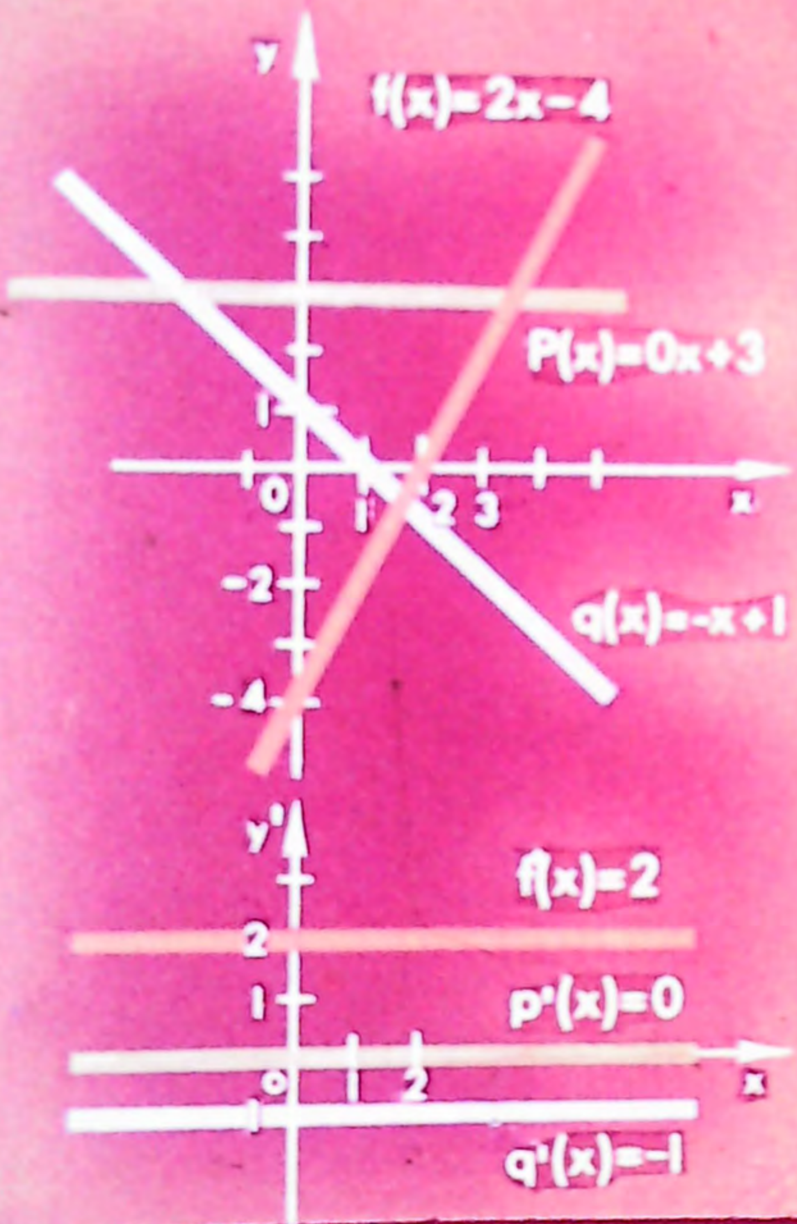
Тело движется прямолинейно по закону $S(t)=t^2-4t-5$ ($S(t)$— расстояние от начала отсчета в см, а t—время в секундах). Найдите $V_{ср.}$ в промежутке времени от $t=0$ до $t=1$; от $t=1$ до $t=2$. Сравните (по направлению и по модулю) скорость движения в моменты $t=1$ и $t=4$. Постройте график скорости.

Средней скоростью изменения функции $y=f(x)$ на промежутке $[x;\ x+\Delta x]$ называется отношение $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

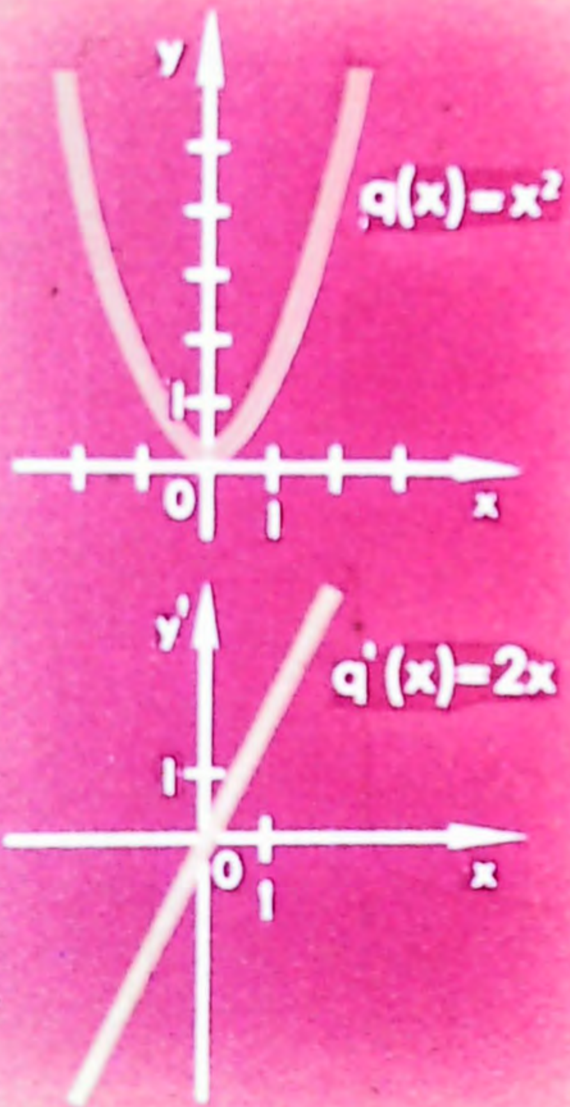
Скоростью изменения функции $y=f(x)$ в точке x называется предел средней скорости при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

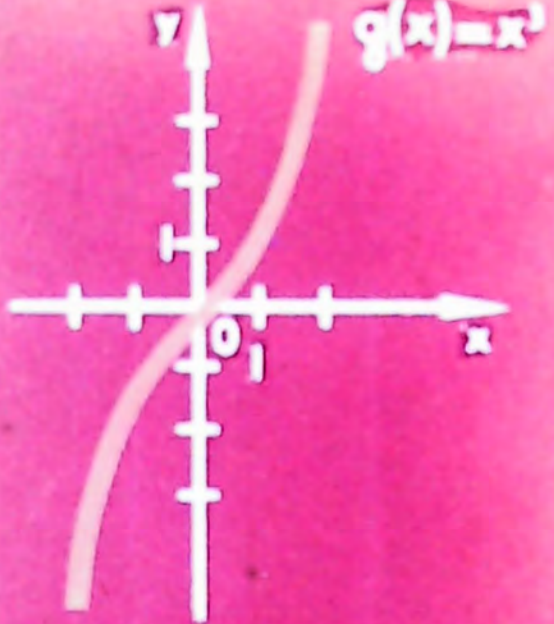
Скорость изменения функции $y=f(x)$ в точке x называют *производной* от функции в точке x и обозначают $f'(x)$.

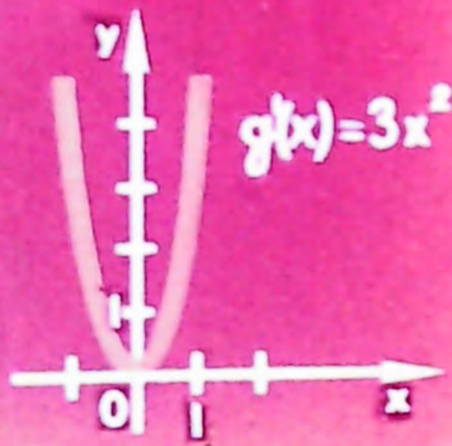


Производная (скорость изменения) функции $f(x)=kx+b$ постоянна и равна к.

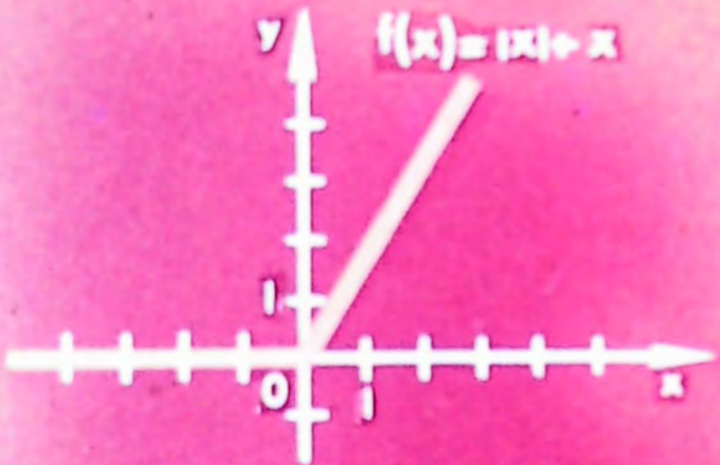


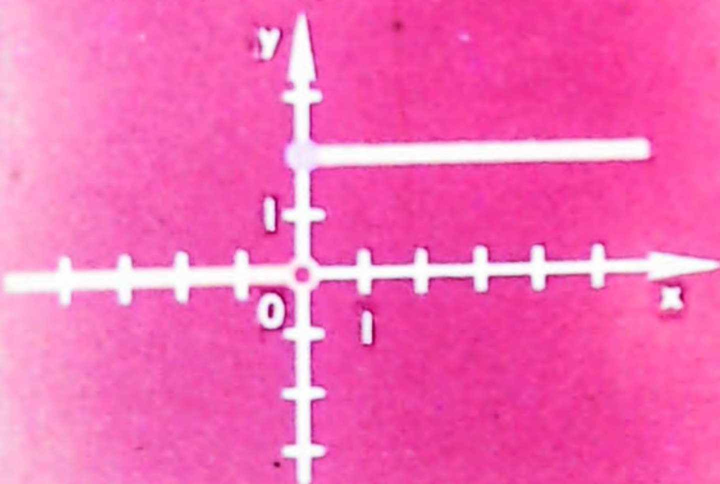
Производная (скорость изменения) функции $q(x)=x^2$ в промежутке $]-\infty;\ 0[$ отрицательна, в промежутке $]0;+\infty[$ положительна, в точке $x=0$ равна 0.



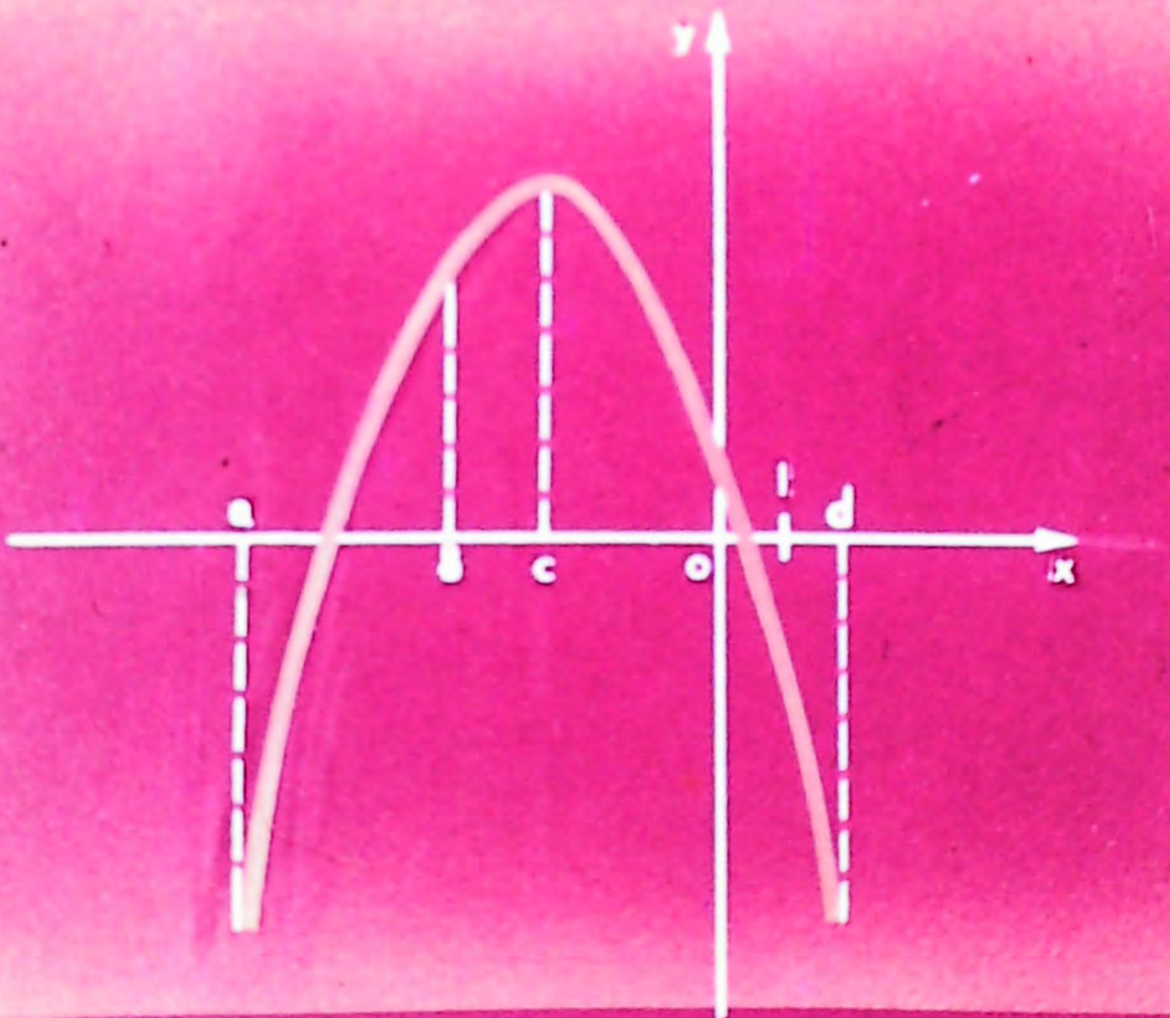


Производная функции $g(x)=x^3$ положительна при всех x, отличных от 0. В точке $x=0$ скорость изменения функции $g(x)=x^3$ равна 0.

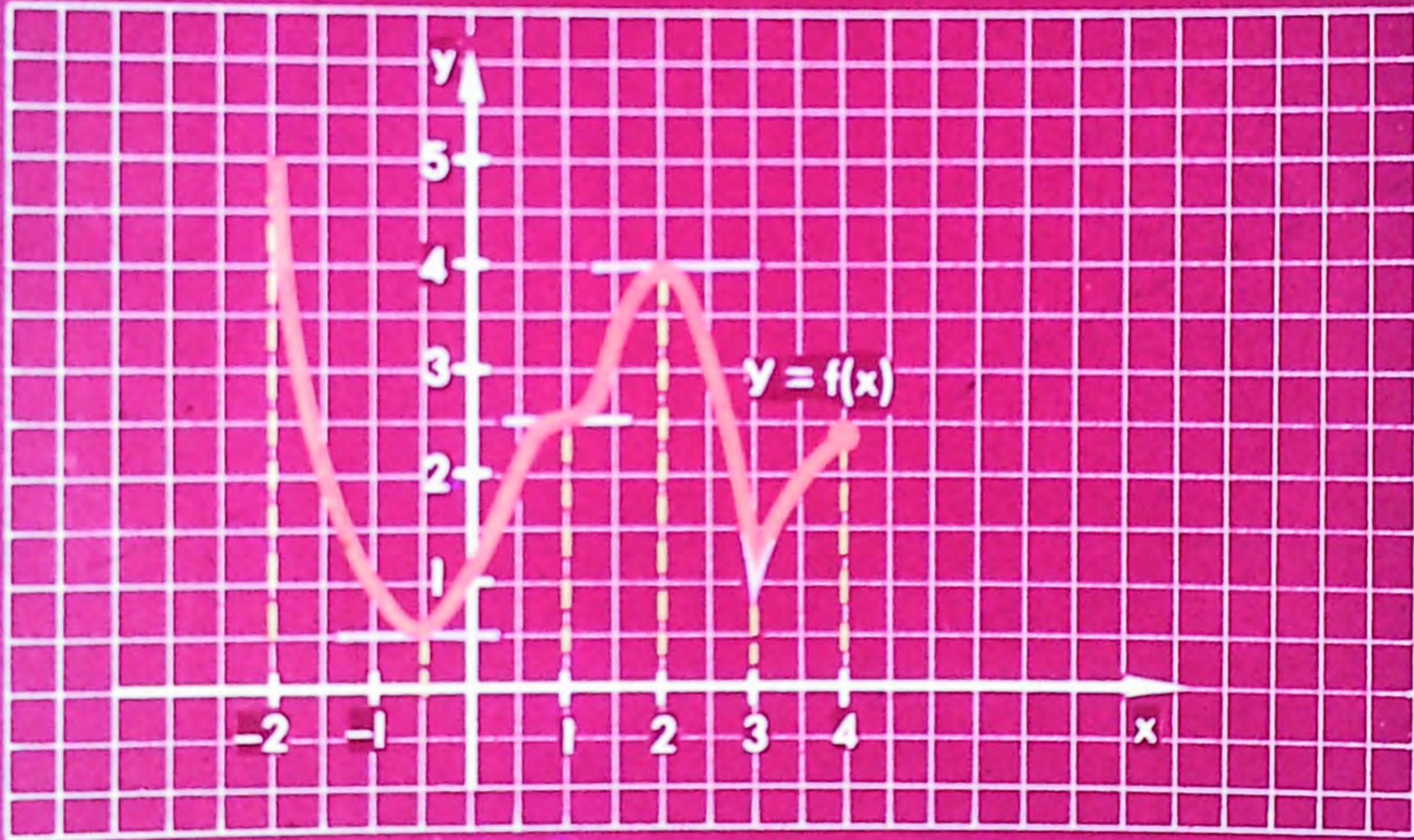




Непрерывная функция $f(x) = |x| + x$ имеет производную всюду, кроме точки $x = 0$. При $x < 0$ скорость изменения функции равна 0, при $x > 0$ она равна 2.



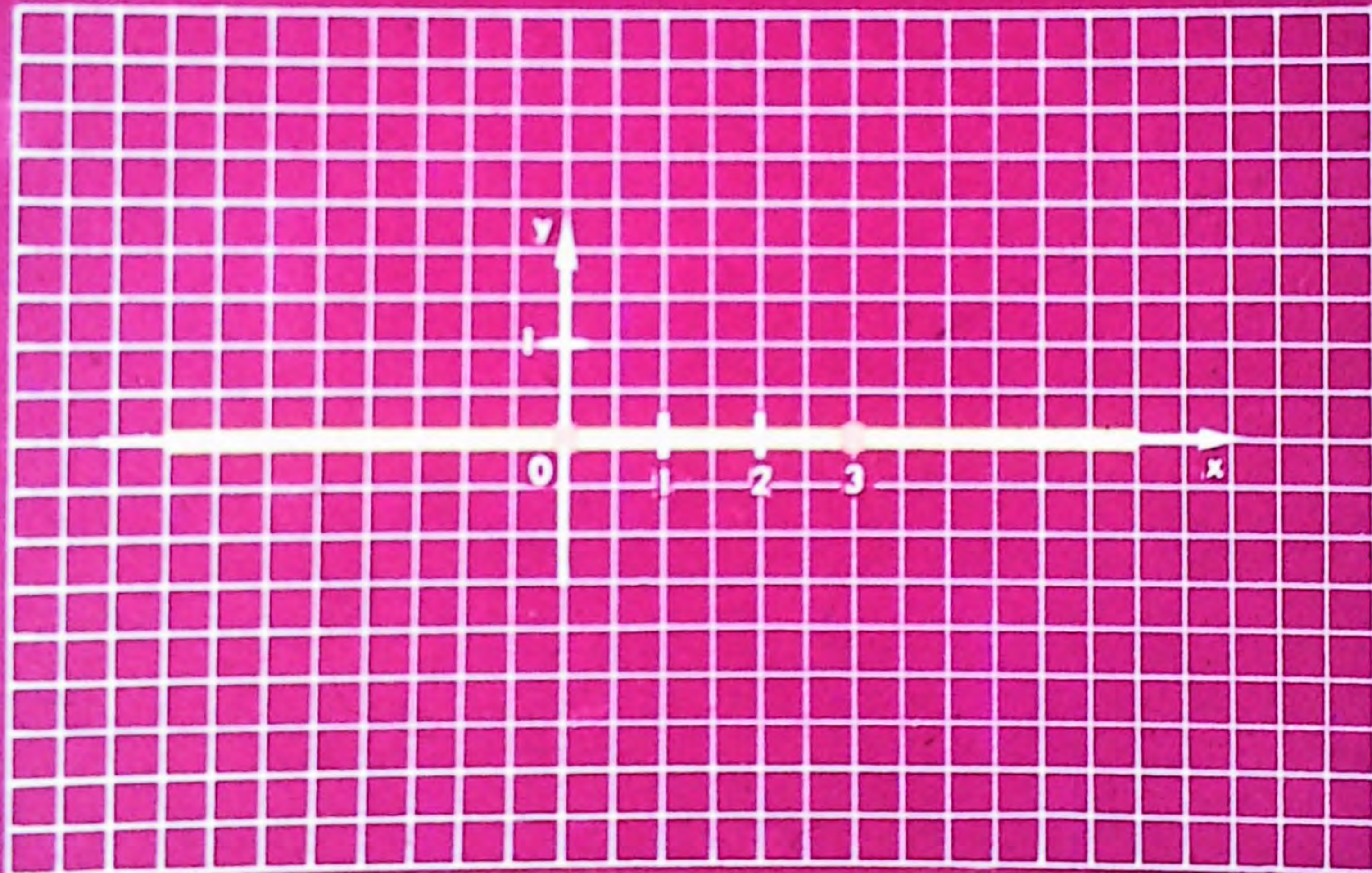
Каков знак производной функции $y=\varphi(x)$ в точке a, b, d? Сравните $\varphi'(a)$ и $\varphi'(b)$. Укажите множество значений переменной x, для которой $\varphi'(x)=0$; $\varphi'(x)>0$; $\varphi'(x)<0$.



Область определения функции — отрезок [−2; 4]. Укажите множество значений переменной x, при которых функция непрерывна; дифференцируема. При каких значениях x $f'(x)>0$; $f'(x)<0$; $f'(x)=0$? Опишите, как меняется производная в промежутке]−1; 2,5[.

Значения, которые принимает производная функции $y=g(x)$, показаны в таблице. Укажите промежутки возрастания и убывания функции. Изобразите схематически график функции $y=g(x)$ в окрестности точки $x=-5$; $x=1$; $x=10$.

x	$]-\infty; -5[$	-5	$]-5; 1[$	1	$]1; 10[$	10	$]10; +\infty[$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

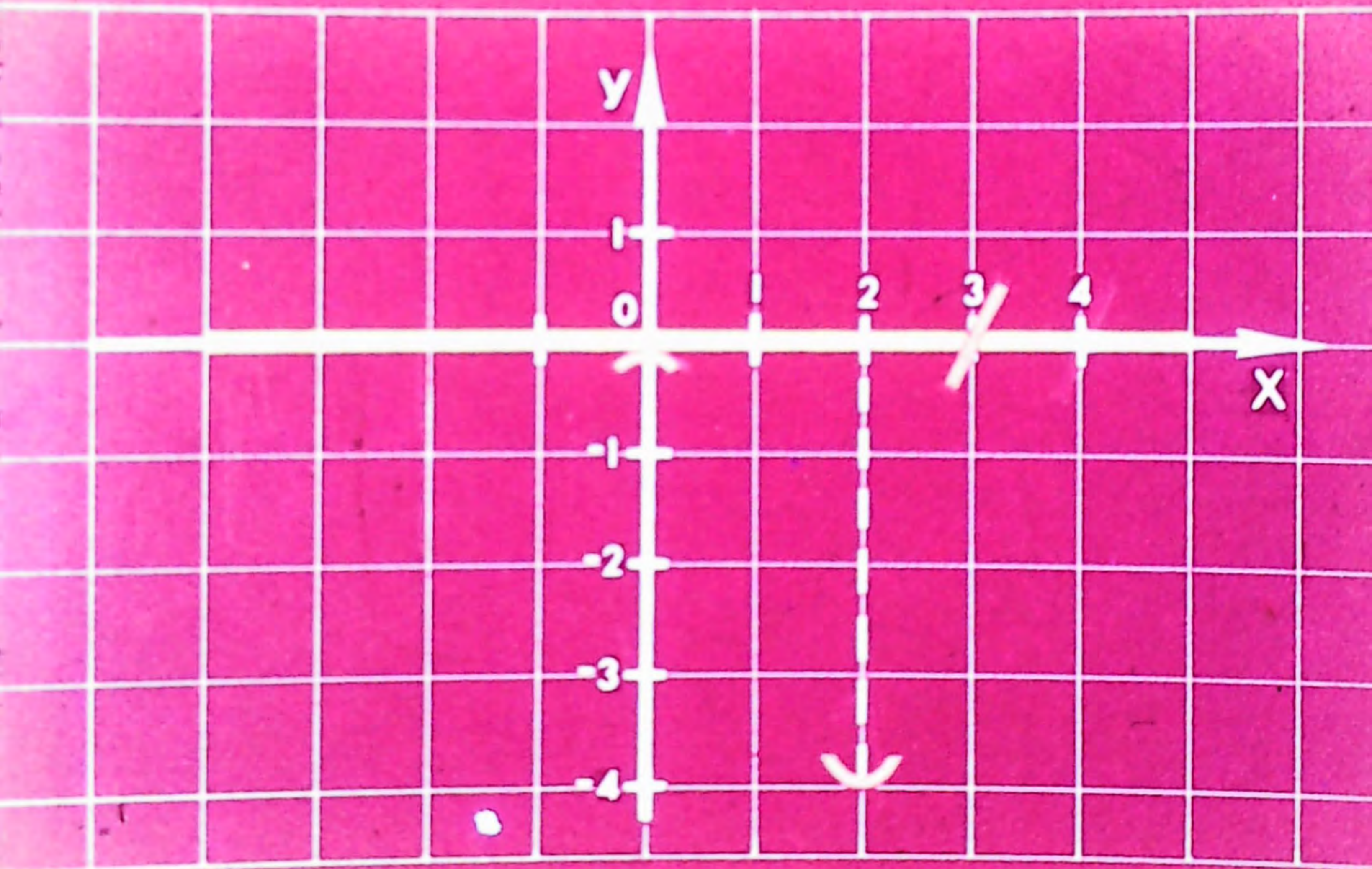


Задача. **Построить график функции $f(x)=x^3-3x^2$.**

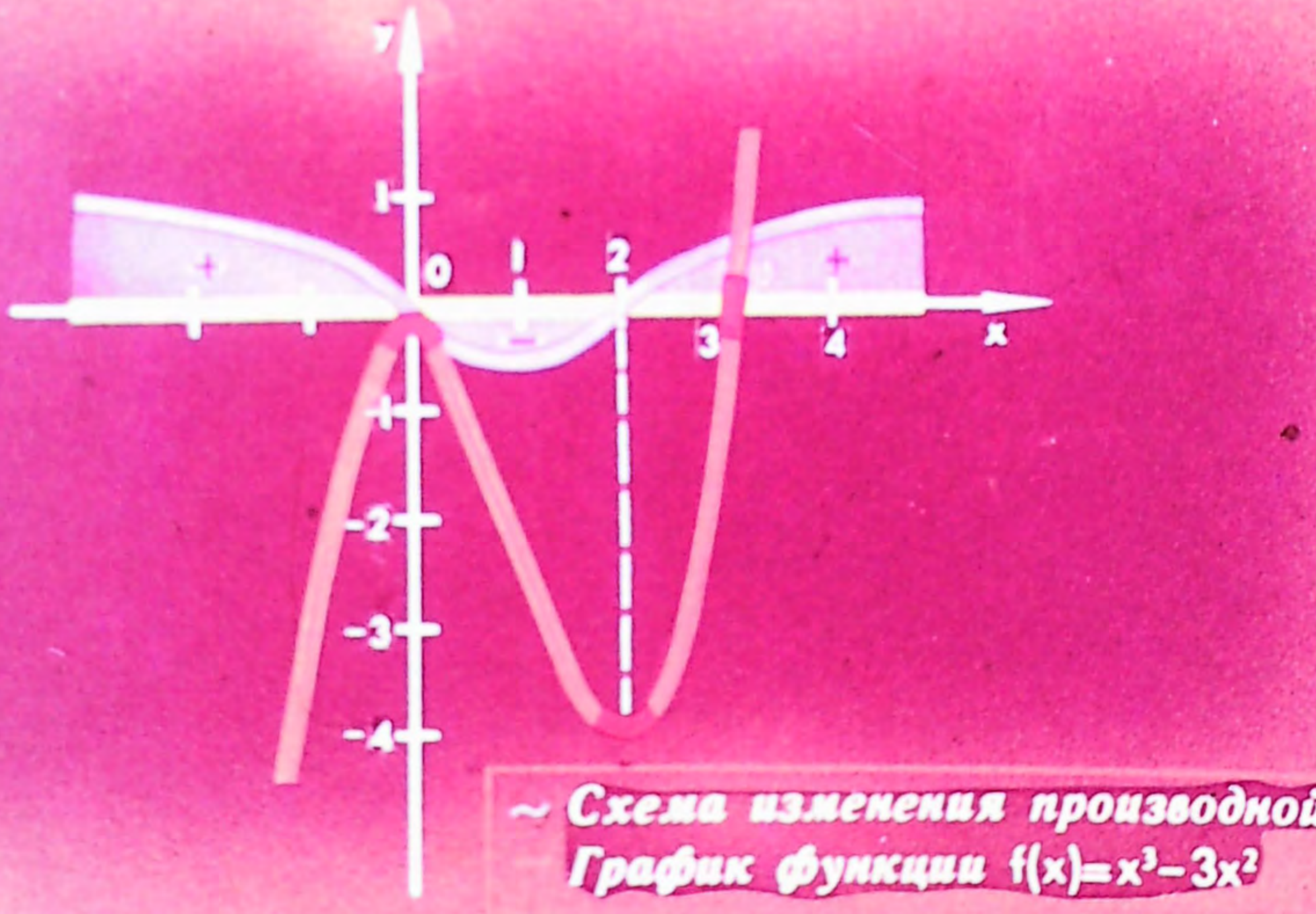
Решение: **а) функция определена и непрерывна на всей числовой прямой; б) найдем корни функции: $x^3-3x^2=0$; $x^2(x-3)=0$; $x=0$ и $x=3$.**

в) найдем производную функции $f(x)=x^3-3x^2$:
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$.

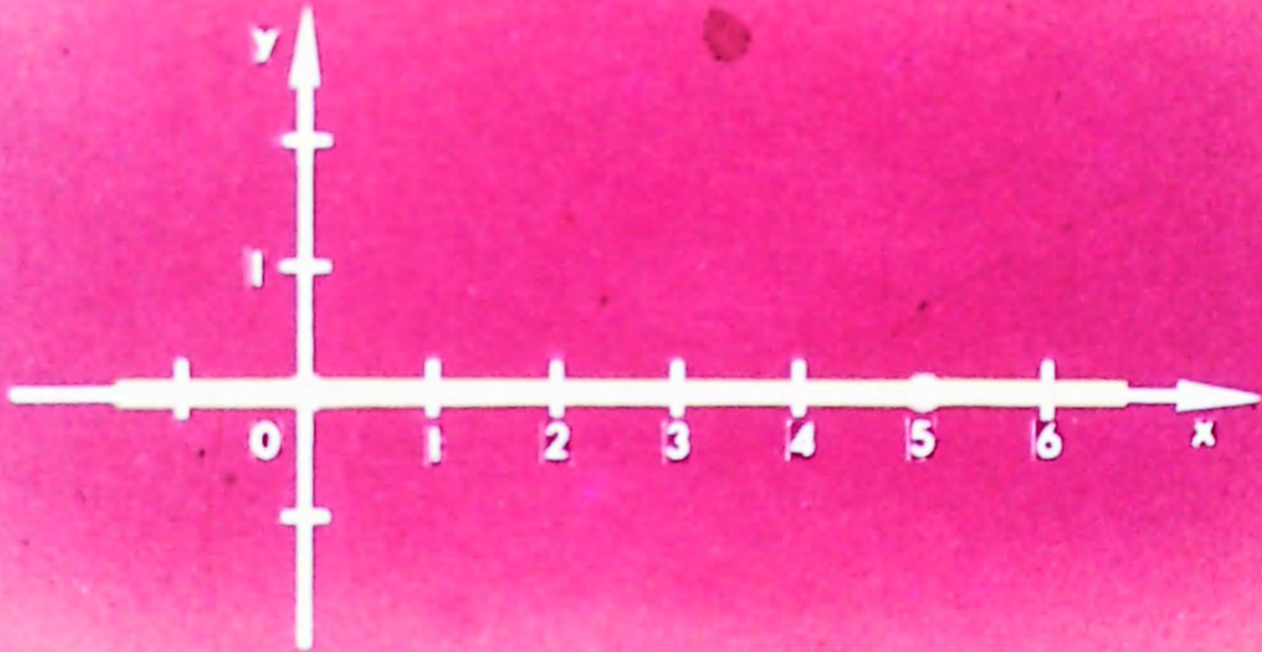
x	$]-\infty;0[$	0	$]0;\ 2[$	2	$]2;+\infty[$
f (x)	+	0	–	0	+
f(x)	$\nearrow$	max 0	$\searrow$	min −4	$\nearrow$



y
1
0
1
2
3
4
X
-1
-2
-3
-4
41



Построим график.



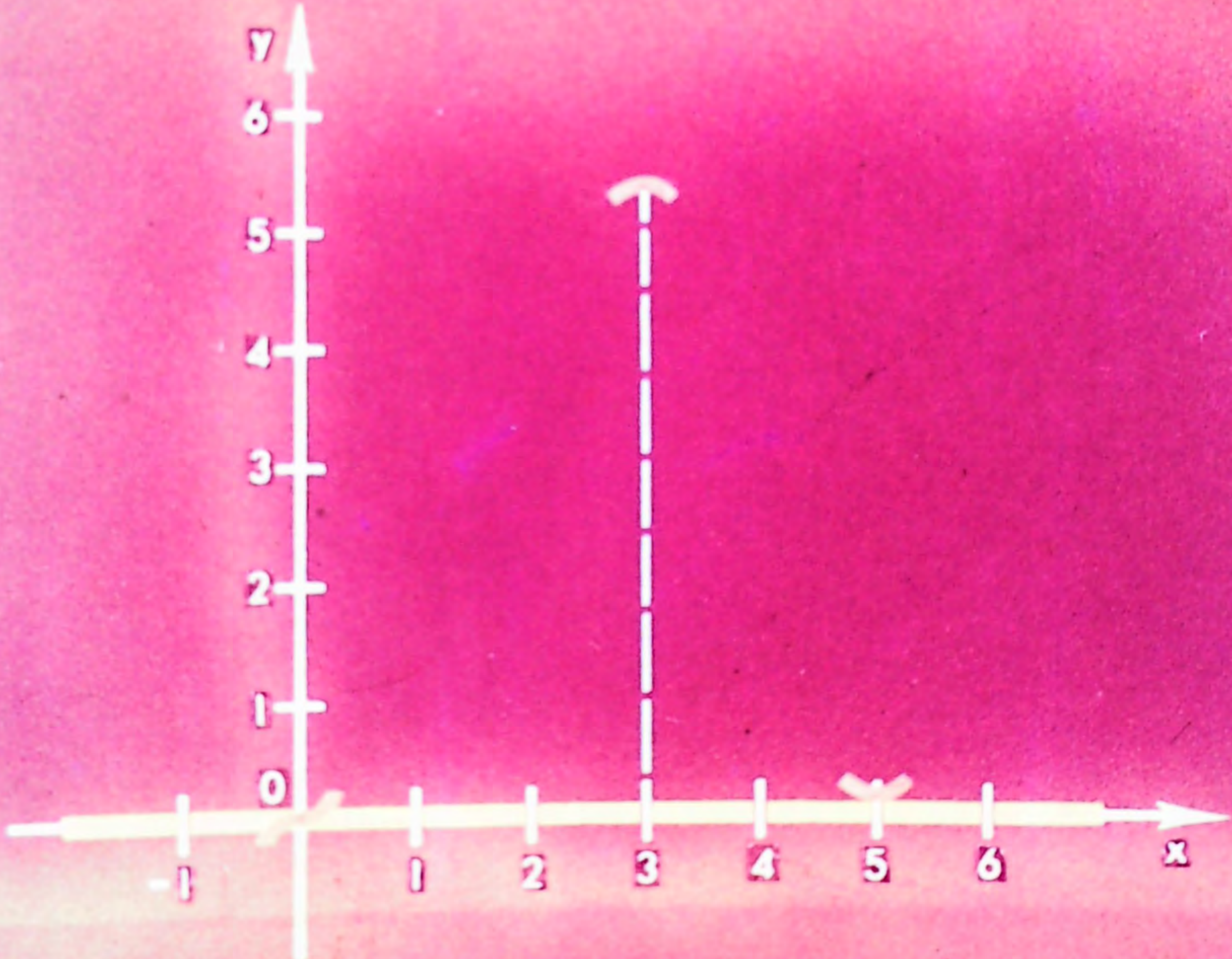
Задача. Построить график функции $f(x)=\frac{x^3(x-5)^2}{20}$.

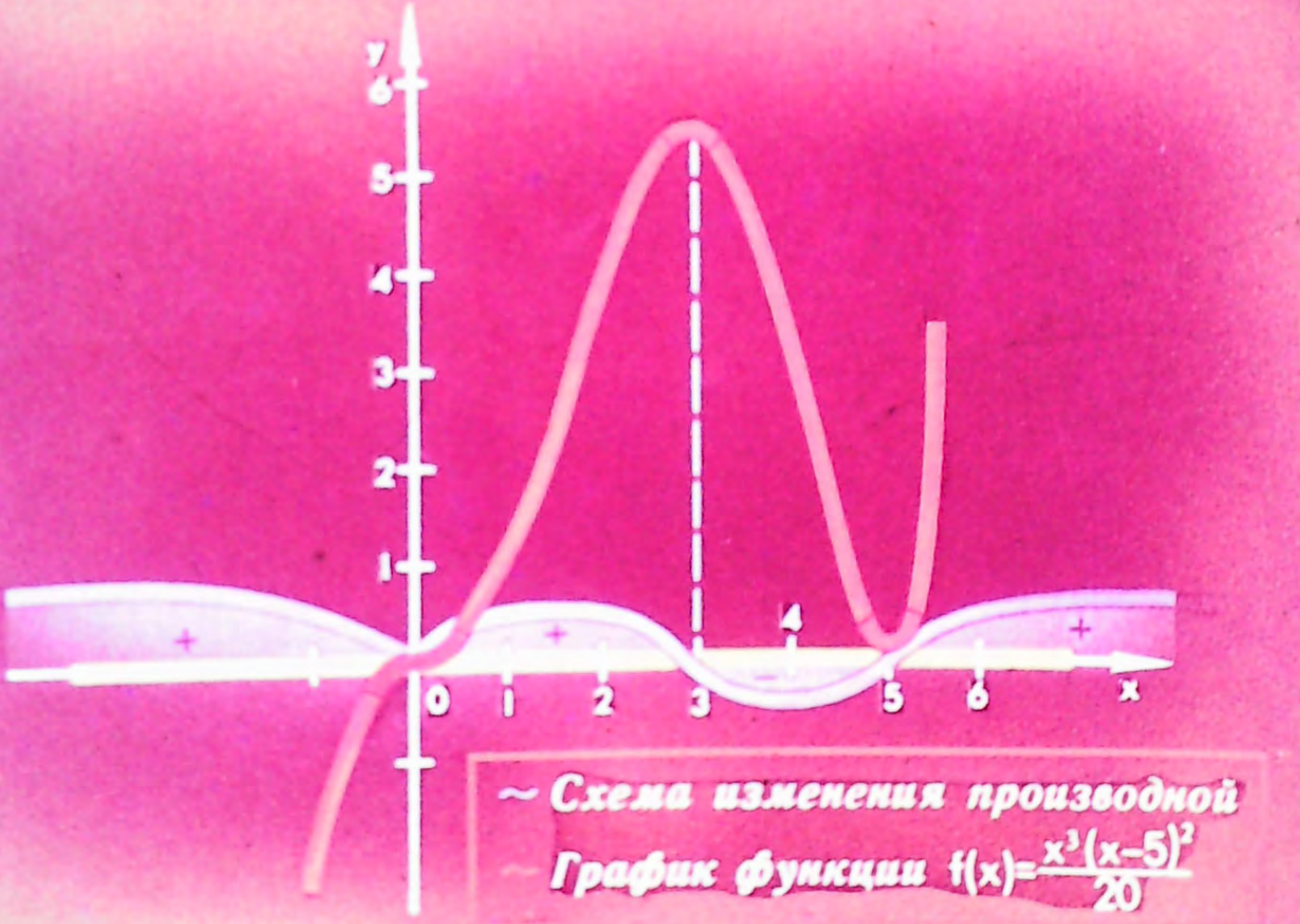
Решение: а) функция определена и непрерывна на всей числовой прямой; б) найдем корни функции: $x^3(x-5)^2=0$; $x=0$ и $x=5$;

в) найдем производную функции $f(x)=\frac{x^3(x-5)^2}{20}$; $f'(x)=$

$=\frac{x^2(x-3)(x-5)}{4}$.

X	]−∞;0[	0	]0;3[	3	]3;5[	5	]5;+∞[
$f'(x)$	+	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	0 перегиб	↗	5,4 max	↘	min 0	↗


y
6
5
4
3
2
1
0
-1
1
2
3
4
5
6
x



Построим график.

КОНЕЦ

Диафильм по математике для 9 класса сделан по заказу Министерства просвещения СССР

Авторы Ю. Макарычев, С. Суворова

Художник-оформитель И. Шаталова

Редактор Г. Витухновская

Д-124-77

Студия «Диафильм» Госкино СССР, 1977 г.

101000, Москва, Центр, Старосадский пер., д. № 7

Цветной 0-30