В помощь преподавателю

ФГОС

Математика

Подготовка к ГИА

Решение задач повышенной сложности

9 класс

Издательство «Учитель»

МАТЕМАТИКА

9 класс

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ

Автор-составитель **Ю. В. Лепёхин**,
народный учитель Российской Федерации

Издание 2-е, исправленное

Волгоград

УДК 372.016:51*09
ББК 74.262.21
М34

Автор-составитель Ю. В. Лепёхин

Математика. 9 класс : решение задач повышенной
М34 сложности / авт.-сост. Ю. В. Лепёхин. – Изд. 2-е, испр. –
Волгоград : Учитель. – 291 с.
ISBN 978-5-7057-5697-1

В пособии представлены нестандартные математические задачи с подсказками и ответами по темам: «Натуральные числа», «Уравнения и системы уравнений», «Текстовые задачи», «Неравенства», «Последовательности и прогрессии», «Функции и графики», «Геометрические задачи», «Задачи с параметром».

Учащиеся найдут разнообразный и полезный материал для подготовки к итоговой аттестации, познакомятся с наиболее важными идеями и методами решения задач повышенной сложности, а учитель может использовать наборы задач при подготовке школьников к ГИА, олимпиадам и конкурсам, построить урочную и внеурочную деятельность обучающихся с учетом личностно ориентированного, индивидуального подходов в соответствии с требованиями ФГОС ООО.

Адресовано учителям образовательных организаций, репетиторам по математике; полезно обучающимся.

УДК 372.016:51*09
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-7057-5697-1

ОТ АВТОРА

Замечательно сказал основоположник русской науки Михаил Ломоносов: «Математику уже затем учить следует, что она ум в порядок приводит». Решить сложную, оригинальную, нестандартную задачу – огромнейшее интеллектуальное наслаждение для любого человека. Оригинальные находки, нестандартные подходы, изобретательные выходы из трудных положений являются мощнейшим катализатором интеллектуального развития растущего человека. Радость от достижений в интеллектуальной области – одна из величайших радостей человеческого духа. Через толщу веков, как огненный факел первооткрывателей, к нам пробился звонкий девиз ищущих, эмоциональный порыв победителей, гордый человеческий возглас: «Эврика! Я нашёл!». Его гордо и радостно произнес Архимед в минуту высочайшего интеллектуального напряжения, в минуту великого открытия, в минуту славной победы человека над незнанием.

Математика даёт уникальнейшую возможность воспитывать смекалку, сообразительность, находчивость, настойчивость, оригинальность решения, она будит мысли и призывает к точности и обоснованности рассуждений. Запомнились замечательные слова о молодом математике Эваристе Галуа: «Он читал страницу за страницей, и пред ним простое и прекрасное, как греческий храм, вставало здание геометрии. Вскоре всё окружающее: звуки, запахи, товарищи – исчезло. Здание росло у него на глазах. Читая быстро, он поймал себя на мысли, что угадывает, знает заранее, что будет дальше. Многие теоремы он предвидел и только просматривал чертежи в подтверждение своих мыслей»*.

В изумительной книге Розы Петер «Игра с бесконечностью» есть такие проникновенные строки: «Я люблю математику

* Инфельд Л. Эварист Галуа. М.: Молодая гвардия, 1965.

не только потому, что она находит применение в технике, но также и потому, что она прекрасна, потому, что человек, если хотите, вложил в неё любовь к игре, и потому, что математика в состоянии справиться даже с самой увлекательной игрой – сделать возможным «ухватить бесконечность». Математика даёт нам чёткие сведения о бесконечности, о вещах, которые трудно даже вообразить. И в то же время она поразительно человечна и меньше всего похожа на пресловутое «дважды два – четыре»: математика несёт на себе печать никогда не кончающейся человеческой деятельности».

Работа с оригинальной, необычной, интересной задачей – важнейшая особенность в деятельности учителя математики.

Мне на всю жизнь запомнились мудрые слова академика А. И. Маркушевича: «Мы только тогда выполним свой долг перед молодым поколением, когда сумеем на своих уроках донести до ребят то безграничное мужество, любовь к людям и жертвенность, которые скрываются за скупыми строчками научных законов, формул и теорем».

Пособие условно можно разделить на 2 части. В первой части рассматриваются задачи, которые собраны по темам: «Натуральные числа», «Ума палата», «Уравнения и системы уравнений», «Текстовые задачи», «Неравенства», «Последовательности и прогрессии», «Функции и графики», «Геометрические задачи», «Задачи с параметром». Во второй части предложены ответы, указания и решения.

Учащиеся найдут для себя богатый и разнообразный материал для подготовки к итоговой аттестации, познакомятся с наиболее важными идеями и методами, заложенными в решении нестандартных задачах, а учитель может использовать наборы задач в своей работе: при подготовке к ГИА, олимпиадам и конкурсам. Важно при этом, чтобы эта работа велась регулярно, продуманно, систематически, заинтересованно и увлечённо.

§ 1. УМА ПАЛАТА

(001) Ума палата. № 1.

На столе стоят вверх дном 25 стаканов. За один ход Ваня может перевернуть любые два стакана. Сможет ли Ваня за несколько ходов поставить все стаканы правильно?

(002) Ума палата. № 2.

В клетках квадратной таблицы 4×4 расставлены знаки «+» и «–», как показано на рисунке. Разрешается одновременно менять знак во всех клетках, расположенных в одной строке, в одном столбце или на прямой, параллельной какой-нибудь диагонали (в частности, в любой угловой клетке). Докажите, что сколько бы мы ни произвели таких перемен знака, нам не удастся получить таблицу из одних плюсов.

+	–	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

(003) Ума палата. № 3.

В пробирке находятся марсианские амебы трех типов: A, B и C. Две амебы любых двух разных типов могут слиться в одну амебу третьего типа. После нескольких таких слияний в пробирке оказалась одна амеба. Каким может быть ее тип, если исходно амеб типа A было 20 штук, типа B – 21 штука и типа C – 22 штуки?

(004) Ума палата. № 4.

Можно ли таблицу 5×5 заполнить числами так, чтобы сумма чисел в любой строке была положительной, а сумма чисел в любом столбце – отрицательной?

Добрый и важный совет	► Если левая часть равенства представляет четное число, а правая часть – нечетное число, то такое равенство невозможно.	Помни!

(005) Ума палата. № 5.

Мальчик сказал: «Позавчера мне было 10 лет, а в будущем году мне исполнится 13 лет». Может ли такое быть?

(006) Ума палата. № 6.

Найдите наибольшее пятизначное число, кратное 9, так, чтобы первая цифра была 3 и все цифры были различны.

(007) Ума палата. № 7.

Найдите сумму коэффициентов многочлена:

$P(x) = (2 - 3x + x^2)^{1996}\,(2 + 3x + x^2)^{1997}$.

(008) Ума палата. № 8.

Найдите значение выражения:

$\sqrt{a^2 - 4a + 4} + \sqrt{\grave{a}^2 - 12a + 36}$, если $2 \le \grave{a} \le 6$.

(009) Ума палата. № 9.

Меню в школьной столовой состоит из n различных блюд. Ученик решил каждый день выбирать себе завтрак по-новому (включая пикантный завтрак из «0» блюд). За сколько дней ему удастся это сделать?

(010) Ума палата. № 10.

7 человек должны перенести 7 одинаковых мешков. Сколько способов распределить груз, если каждый может нести не более 2 мешков?

Добрый и важный совет	► Прочитай (осмысленно и вдумчиво) о сочетаниях, размещениях и перестановках. Появилась, например, чудесная книга «Комбинаторика», написанная известным математиком Н. Я. Виленкиным и дополненная его сыном и внуком.	Помни!

(011) Ума палата. № 11.

В ряд стоят 50 стульев. Нужно убрать 20 из них, но при этом нельзя убирать никакие два стула, стоящие рядом. Сколькими различными способами это можно сделать?

(012) Ума палата. № 12.

Определите, какая цифра стоит на тысяча первом месте после запятой в десятичном представлении дроби 4/7.

Добрый и важный совет	► При делении на число 7 возможно только 7 различных остатков: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Полезно производить полный перебор по этим семи остаткам.	Помни!

(013) Ума палата. № 13.

Даны числа $2^1 - 1$, $2^2 - 1$, $2^3 - 1$, …, $2^{n-1} - 1$, где n – нечетное число, $n \geq 3$. Докажите, что хотя бы одно из данных чисел делится на n.

(014) Ума палата. № 14.

Квадратное поле разбито на сто одинаковых квадратных участков, девять из которых поросли бурьяном. Известно, что бурьян за год распространяется на те, и только те участки, у которых не менее двух соседних (то есть имеющих общую сторону) участков уже поросли бурьяном. Докажите, что поле никогда не зарастет бурьяном полностью.

(015) Ума палата. № 15.

На доске написаны числа 3, 4, 5, 6. Любую пару чисел a, b можно заменить на пару чисел $a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$ и $a + b - \sqrt{a^2 + b^2}$. Может ли на доске появиться число, меньшее 1?

(016) Ума палата. № 16.

Известно, что в наборе из 32 одинаковых по виду монет есть две фальшивые монеты, которые отличаются от остальных по весу (настоящие монеты все имеют один вес, а две фальшивые – другой). Как разделить все монеты на две равные по весу кучки, сделав не более четырех взвешиваний на чашечных весах без гирь?

Добрый и важный совет	► Решая задачи на взвешивание на чашечных весах без гирь, полезно имеющиеся монеты разбивать на три части. Две части помещать на чашечные весы, а третью часть пока не рассматривать.	Помни!

(017) Ума палата. № 17.

Три одинаковых бочки с тремя красками наполнены на две трети. Имеется возможность переливать любую часть жидкости из одной бочки в другую. Как сделать во всех банках одинаковую смесь, если другой посуды нет и вылить краску нельзя?

(018) Ума палата. № 18.

Вычислите с точностью до 0,001.

$$\left(\frac{1-2\cdot 17{,}3^3}{1+17{,}3^3}\right)^3+\left(\frac{17{,}3(2-17{,}3^3)}{1+17{,}3^3}\right)^3+17{,}3^3.$$

(019) Ума палата. № 19.

Имеется 72 прямоугольных бруска размера $3\times3\times1$. Можно ли все эти бруски уложить в прямоугольную коробку размером $7\times9\times11$ (коробка с крышкой)?

(020) Ума палата. № 20.

Корни уравнения $x^2 + ax + 1 = b$ являются натуральными числами. Докажите, что $a^2 + b^2$ – составное число.

(021) Ума палата. № 21.

Расставьте в вершинах пятиугольника действительные числа так, чтобы сумма чисел на концах некоторой стороны была равна 1, другой – 2, …, на концах последней стороны равна 5.

(022) Ума палата. № 22.

При каком наименьшем значении n число $1\underbrace{22\ldots22}_{n\ \text{двоек}}1$ делится на 999999999?

Добрый и важный совет	► Если данное число a является произведением двух взаимно простых множителей, то для того, чтобы b нацело делилось на a, необходимо и достаточно, чтобы b делилось на каждый из двух взаимно простых множителей.	Помни!

(023) Ума палата. № 23.

Двузначные числа от 19 до 80 выписаны подряд. Делится ли полученное число 19202122…77787980 на 1980?

(024) Ума палата. № 24.

Найдите наибольшее целое x такое, чтобы число $4^{27} + 4^{1000} + 4^{x}$ было полным квадратом.

(025) Ума палата. № 25.

Некоторая сумма денег находится в банке под 2 % годовых (проценты простые). Через некоторое время эта сумма была взята вместе с полученными на нее процентными деньгами, что составило 8502 р. Если бы эта же сумма была отдана под 3 % годовых, но сроком на 1 год меньше, то процентные деньги с нее составили бы 819 рублей. Какая сумма была положена в банк?

§ 2. НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

(026) Числа. № 1.

Докажите, что при любом простом $p > 3$ число $10p^2 - 3p + 2$ составное.

(027) Числа. № 2.

На какую наименьшую величину могут отличаться друг от друга натуральные числа m, n, если известно, что число $\dfrac{89}{3m+7n}$ натуральное?

(028) Числа. № 3.

Докажите, что при любом натуральном значение n число $5^{5n+1}+4^{5n+2}+3^{5n}$ делится на 11.

(029) Числа. № 4.

Натуральные числа m, n таковы, что сумма наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного этих чисел будет равна сумме данных чисел, то есть НОД (m, n) + НОК $(m, n) = m + n$. Докажите, что одно из чисел является делителем другого.

(030) Числа. № 5.

Число научно-технических книг в библиотеке равно $\frac{11}{13}$ от числа художественных. При переезде библиотеки книги погрузили в 2 вагона. В первый вагон погрузили $\frac{1}{15}$ часть научно-технических книг и $\frac{18}{19}$ частей художественных. Во второй вагон погрузили $\frac{1}{19}$ художественных и $\frac{14}{15}$ научно-технических. Сколько книг каждого вида было в библиотеке, если в первом вагоне оказалось более 10000 книг, а во втором – менее 10000 книг?

(031) Числа. № 6.

Разложите число $2^{12} + 2^7 + 1$ на четыре сомножителя, не вычисляя самого числа, а используя только его выражение.

Добрый и важный совет	► Необходимо помнить, что к произведению данных чисел всегда можно добавить любое количество единиц или четное количество сомножителей, равных –1, от этого произведение не изменится, зато сумма чисел при этом будет меняться.	Помни!

(032) Числа. № 7.

Можно ли найти 2008 целых чисел таких, что их сумма равна нулю, а произведение равно 2008?

(033) Числа. № 8.

Докажите, что при любом нечетном n число $n^3 + 3n^2 - n - 3$ делится на 48.

(034) Числа. № 9.

Можно ли в трехзначном числе, делящемся на 37, переставить цифры так, чтобы полученное число тоже делилось на 3?

(035) Числа. № 10.

Определите количество натуральных чисел на числовом отрезке от 1 до 23091942 таких, которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5.

(036) Числа. № 11.

Найдите все пары простых чисел вида $(a^n - 1, a^n + 1)$, $n > 1$, где a и n – натуральные числа.

(037) Числа. № 12.

Найдите наименьшее натуральное число, квадрат которого оканчивается цифрами 2001 в заданном порядке.

(038) Числа. № 13.

Можно ли заменить звездочки в равенстве $1*2*...*10 = 0$ на знаки «+» или «–» так, чтобы равенство стало верным?

(039) Числа. № 14.

Числа 2^{1000} и 5^{1000} выписаны одно за другим в десятичной записи. Сколько всего цифр выписано?

(040) Числа. № 15.

Докажите, что простых чисел бесконечно много.

(041) Числа. № 16.

Докажите, что число $\underbrace{11...11}_{27\text{ единиц}}$ делится на 27.

(042) Числа. № 17.

Если числитель дроби есть разность квадратов двух нечетных чисел, а знаменатель – сумма квадратов этих же чисел, то такая дробь сокращается на 2, но не сокращается на 4. Докажите это.

(043) Числа. № 18.

Допишите к числу справа 523… три цифры так, чтобы полученное шестизначное число делилось на 7, 8, 9.

(044) Числа. № 19.

Рассматриваются всевозможные десятизначные числа, все цифры которых различны. Есть ли среди них числа, делящиеся на 11? Если да, то укажите наибольшее и наименьшее из них.

(045) Числа. № 20.

Найдите семизначное число, у которого первая цифра равна количеству нулей в числе, вторая – количеству единиц в числе, третья – количеству двоек в числе и так далее.

(046) Числа. № 21.

Найдите десятизначное число, у которого первая цифра равна количеству нулей в числе, вторая – количеству единиц в числе, третья – количеству двоек в числе и так далее.

(047) Числа. № 22.

Произведение четырех последовательных нечетных чисел оканчивается девяткой. Найдите предпоследнюю цифру произведения.

(048) Числа. № 23.

Сколько натуральных чисел, не превосходящих тысячу, в записи которых цифра 9 использована хоть один раз?

Добрый и важный совет	► Признак делимости на 11: рассмотрим разность между суммой цифр, стоящих на нечетных местах и суммой цифр, стоящих на четных местах. Для того чтобы данное число делилось на 11, необходимо и достаточно, чтобы полученная разность делилась на 11.	Помни!

(049) Числа. № 24.

Пес Шарик умножил первые десять простых чисел и получил число $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 = \underline{6}\,4\underline{6}9\;\underline{6}9\underline{3}\;2\underline{5}0 = a$. «Ты не прав», – сказал ему кот Матроскин. Почему?

(050) Числа. № 25.

Найдите шесть последовательных чётных чисел, сумма квадратов которых равна четырёхзначному числу, все цифры которого равны между собой.

(051) Числа. № 26.

Докажите, что ни при каком натуральном значении n выражение $n^2 + 5n + 16$ не делится на 169.

(052) Числа. № 27.

Произведение числа 21 на некоторое четырехзначное число «****» – точный куб. Найдите множитель «****».

(053) Числа. № 28.

Докажите, что любое целое число можно представить в виде суммы кубов пяти целых чисел.

(054) Числа. № 29.

Придумайте и докажите формулу для суммы квадратов всех целых чисел от 1 до n.

(055) Числа. № 30.

Квадрат целого числа имеет вид … 09 (оканчивается цифрами 0 и 9). Докажите, что третья справа цифра – четная.

§ 3. УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

(056) Уравнения. № 1.

Решите уравнение: $23x^2 + 2010x + 1987 = 0$.

Здравый смысл!	► Разумный подбор очевидных и простых значений корней уравнений всегда помогает при решении задач, а иногда является просто единственным способом решения.	Помни!

(057) Уравнения. № 2.

Решите уравнение: $x^3-(1+\sqrt{3})\cdot x^2+3=0$.

(058) Уравнения. № 3.

Решите уравнение: $6-5x+x^2=2(x-3)\sqrt{\tilde{o}}$.

(059) Уравнения. № 4.

Найдите корни многочлена: $2x^5+x^4-10x^3-5x^2+8x+4$.

(060) Уравнения. № 5.

Решите уравнение: $x^3-7x+6=0$.

Здравый смысл!

► Человеку очень легко даётся сложение. 3 + 2 = 5 – это сообразит каждый, а вот обратная логическая операция – разбиения числа на два слагаемых, особенно если одно из слагаемых будет отрицательным, всегда представляет значительную сложность, но открывает путь к решению задачи.

Помни!

(061) Уравнения. № 6.

Решите уравнение: $\dfrac{4x}{x^2+x+3}+\dfrac{5x}{x^2-5x+3}=-1{,}5$.

(062) Уравнения. № 7.

Решите уравнение: $\dfrac{x^2-12x+15}{x^2-6x+15}=\dfrac{4x}{x^2-10x+15}$.

(063) Уравнения. № 8.

Решите уравнение: $(x^2+5x+1)(x^2+4x)=20(x+1)^2$.

(064) Уравнения. № 9.

Решите уравнение: $(2x-3)^4+(2x-5)^4=2$.

(065) Уравнения. № 10.

Решите уравнение: $x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0$.

(066) Уравнения. № 11.

Решите уравнение: $\dfrac{4x}{4x^2-8x+7}+\dfrac{3x}{4x^2-10x+7}=1$.

(067) Уравнения. № 12.

Решите уравнение: $|x^2 - 9| + |x^2 - 4| = 5$.

(068) Уравнения. № 13.

Решите уравнение: $|x + 3| + 2|x + 1| = 4$.

(069) Уравнения. № 14.

Решите уравнение: $|x-3|^{x^2-x} = |x-3|^2$.

(070) Уравнения. № 15.

Решите уравнение: $|x^2 - 4x + 3| + |x^2 - 5x + 6| = 1$.

(071) Уравнения. № 16.

Решите уравнение в целых числах:

$15x^2y^2 - 8yx^2 + 28y^2x + x^2 + 5y^2 - 38xy + 8x - 24y + 16 = 0$.

(072) Уравнения. № 17.

Решите уравнение: $\sqrt[3]{(x+1)^2} + 2\sqrt[3]{(x-1)^2} = 3\sqrt[3]{x^2-1}$.

(073) Уравнения. № 18.

Не решая квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, найдите сумму кубов его корней.

(074) Уравнения. № 19.

Сколько решений в целых числах имеет уравнение

$2x + 7y = xy - 1$?

(075) Уравнения. № 20.

Найдите все целые решения уравнения $3x^2 - 7xy + 2y^2 = 0$.

(076) Уравнения. № 21.

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 10x^2 + 5y^2 - 2xy - 38x - 6y + 41 = 0, \\ 3x^2 - 2y^2 + 5xy - 17x - 6y + 20 = 0. \end{cases}$$

(077) Уравнения. № 22.

Решите в натуральных числах уравнение:

$x^4 + 2x^7y - x^{14} - y^2 = 7$.

(078) Уравнения. № 23.

Решите систему уравнений: $\begin{cases} \sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{y} = 3, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9. \end{cases}$

(079) Уравнения. № 24.

Решите уравнение: $(x^2 + 5x + 3)^2 + 5(x^2 + 5x) + 18 = x$.

Здравый смысл!	Иногда решение уравнения сводится к решению системы двух уравнений с двумя неизвестными.	Помни!

(080) Уравнения. № 25.

Решите уравнение: $(x^2 + 3x - 2)^2 + 3(x^2 + 3x - 2) - 2 = x$.

(081) Уравнения № 26.

Решите уравнение: $(x^2 - x + 1)^4 + 9x^4 = 10x^2(x^2 - x + 1)^2$.

(082) Уравнения. № 27.

Найдите три числа, каждое из которых равно квадрату разности двух других.

(083) Уравнения. № 28.

Решите уравнение: $(x^2 - 9x + 18)\,(x^2 - 11x + 28) + 2 = 0$.

(084) Уравнения. № 29.

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x^3}{y^2} + \dfrac{3y}{4x} = 2, \\ \dfrac{8y}{x^2} - \dfrac{6x}{y} = 5. \end{cases}$$

(085) Уравнения. № 30.

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x - y = 3, \\ x^4 + 3x^2y - 4y^2 = 0. \end{cases}$$

(086) Уравнения. № 31.

Решите в целых числах систему уравнений: $\begin{cases} xy + z = 94, \\ x + yz = 95. \end{cases}$

(087) Уравнения. № 32.

Решите систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{9x^2}{2(1-x)^2} = 1 + \dfrac{3xy}{2(1-x)^2}, \\ 2x^2 + xy = 1. \end{cases}$

(088) Уравнения. № 33.

Решите систему уравнений: $\begin{cases} x + y + z + u = 1, \\ y + z + u + v = 2, \\ z + u + v + x = 3, \\ u + v + x + y = 4, \\ v + x + y + z = 6. \end{cases}$

(089) Уравнения. № 34.

Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1. \end{cases}$

(090) Уравнения. № 35.

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = 1 - z, \\ \dfrac{yz}{y+z} = 2 - x, \\ \dfrac{xz}{x+z} = 2 - y. \end{cases}$$

(091) Уравнения. № 36.

Решите систему уравнений: $\begin{cases} x + y = 2000, \\ xy = z^2 + 1000000. \end{cases}$

(092) Уравнения. № 37.

Решите систему уравнений: $\begin{cases} x - y = 3, \\ x^4 + 3x^2 y - 4y^2 = 0. \end{cases}$

(093) Уравнения. № 38.

Решите систему уравнений: $\begin{cases} |x| > |y - z + t|, \\ |y| > |x - z + t|, \\ |t| > |x - y + z|, \\ |z| > |x - y + t|. \end{cases}$

(094) Уравнения. № 39.

В области действительных чисел найдите решения системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 9, \\ x_3 + x_4 + x_5 = 3, \\ x_4 + x_5 + x_6 = -3, \\ x_5 + x_6 + x_7 = -9, \\ x_6 + x_7 + x_8 = -6, \\ x_7 + x_8 + x_1 = -2, \\ x_8 + x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

(095) Уравнения. № 40.

Решите уравнение: $\sqrt[8]{x+1} + \sqrt[8]{x-1} = \sqrt[8]{2}$.

(096) Уравнения. № 41.

Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^3 y + 2x^2 y^2 + xy^3 = 4, \\ x + y + x^2 y + xy^2 = 4. \end{cases}$

(097) Уравнения. № 42.

Решите систему уравнений: $\begin{cases} 6xz + 3x = 2z - 2, \\ xy + zy = 2(z - x + 1), \\ zy - 6xz + y = 3x + 3. \end{cases}$

(098) Уравнения. № 43.

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = 1 - z, \\ \dfrac{yz}{y+z} = 2 - x, \\ \dfrac{xz}{x+z} = 2 - y. \end{cases}$$

(099) Уравнения. № 44.

Решите уравнение:

$(x^2 - 3)^3 - (4x + 6)^3 + 216 = 18\,(4x + 6)(3 - x^2)$.

(100) Уравнения. № 45.

Решите уравнение: $x^5 + (x + 1)^5 + (x + 2)^5 + \ldots + (x + 1998)^5 = 0$.

§ 4. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

(101) Текстовые задачи. № 1.

Трехзначное число начинается цифрой 4. Если эту цифру перенести в конец числа, то получится число, составляющее $\dfrac{3}{4}$ от исходного. Найдите исходное число.

(102) Текстовые задачи. № 2.

Математик купил картошки и по дороге домой выполнил вычисления: он умножил целую часть цены 1 кг картошки на целую часть массы купленной картошки и получил 24. Потом он умножил целую часть цены на дробную часть массы и получил 1, 2. Наконец, он умножил дробную часть цены на целую часть массы и получил 2. Определите стоимость купленной картошки. Целая часть числа x есть наибольшее целое число, не превосходящее x, ее обозначают: $[x]$. Дробная часть числа x есть разность между числом и его целой частью, ее обозначают : $\{x\}$ $[5] = 5$; $[3{,}4] = 3$; $\{5\} = 0$; $\{3{,}4\} = 0{,}4$.

(103) Текстовые задачи. № 3.

Определите год рождения тех людей, которым в 2003 году исполнилось столько лет, какова сумма цифр года их рождения.

(104) Текстовые задачи. № 4.

У отца спросили, сколько лет его двум сыновьям. Отец ответил, что если к произведению чисел, равных их возрасту, прибавить сумму этих чисел, то будет 14. Сколько лет сыновьям?

(105) Текстовые задачи. № 5.

В контейнер упаковывают изделия двух видов. Стоимость и вес одного изделия составляют 400 р. и 12 кг для первого типа и 600 р. и 15 кг для второго типа. Общий вес изделий равен 321 кг. Определите максимальную и минимальную возможную суммарную стоимость изделий, находящихся в контейнере.

(106) Текстовые задачи. № 6.

На заводе рабочий пятого разряда изготовляет за 1 час целое количество деталей, больше 5, а рабочий третьего разряда на 2 детали меньше. На выполнение заказа рабочему пятого разряда требуется целое количество часов, а двум рабочим третьего – на 1 час меньше. Какое количество деталей составляет заказ?

(107) Текстовые задачи. № 7.

Два маляра, работая вместе, могут покрасить забор за 3 ч. Производительности труда первого и второго относятся как 3 : 5. Маляры стали работать по очереди. За сколько часов они покрасят забор, если второй маляр сменит первого после того, как тот покрасит половину забора?

(108) Текстовые задачи. № 8.

Возраст одного человека в 1990 году был равен произведению цифр его года рождения. В каком году он родился, если известно, что ему меньше 90 лет.

(109) Текстовые задачи. № 9.

Двое рабочих могут напилить за день 5 поленец дров, а наколоть 8 поленец. Сколько поленец дров они должны напилить, чтобы успеть наколоть их в тот же день.

(110) Текстовые задачи. № 10.

В бассейн проведены две системы труб равной производительности. В 1 системе первая труба наполняет весь бассейн за t_1, вторая за t_2, … n-я за t_n. Во второй системе труб все трубы одинаковы и их тоже n штук. За какое время труба второй системы заполнит весь бассейн?

(111) Текстовые задачи. № 11.

Из пункта А по реке отправляется плот. Одновременно навстречу ему отправляется катер из пункта В, расположенного ниже по течению относительно пункта А. Встретив плот, катер сразу поворачивает и идет вниз по течению. Какую часть пути от А до В пройдет плот к моменту возвращения катера в пункт В, если скорость катера в стоячей воде в четыре раза больше скорости течения реки?

(112) Текстовые задачи. № 12.

Бикфордов шнур горит неравномерно, сгорая за 1 минуту. Как, имея два таких совершенно одинаковых шнура, измерить время 45 секунд?

(113) Текстовые задачи. № 13.

Из пункта А реки одновременно поплыли: мяч по течению реки и спортсмен против течения. Через 10 минут пловец повернул назад и догнал мяч в 1 км от А. Собственная скорость пловца постоянна. Какова скорость течения реки?

(114) Текстовые задачи. № 14.

Пройдя $\frac{3}{8}$ длины моста АВ, человек услышал гудок автомобиля, приближающегося к месту с постоянной скоростью 60 км/ч. Если он побежит назад, то встретится с автомобилем в А, а если побежит вперед, то автомобиль нагонит его в В. Как быстро бегает этот человек?

(115) Текстовые задачи. № 15.

Из пунктов А и В одновременно выехали навстречу друг другу два велосипедиста и встретились в 70 км от А. В конечных пунктах они отдыхали по часу и выехали назад с прежними скоростями. Вторая встреча состоялась на расстоянии 40 км от А. Найдите длину пути АВ.

(116) Текстовые задачи. № 16.

Войсковая колонна имеет длину 5 км. Связной, выехав из конца колонны, передал пакет в начало колонны и вернулся обратно. Колонна за это время прошла путь 12 км. Какой путь проехал связной?

(117) Текстовые задачи. № 17.

Из пункта А по одному шоссе выезжают одновременно два автомобиля, а через час вслед за ними – третий. Еще через час расстояние между третьим и первым автомобилем уменьшается в 1,5 раза, а между третьим и вторым в 2 раза. Во сколько раз скорость первого автомобиля больше скорости второго, если третий автомобиль не обгонял ни первый, ни второй автомобили?

(118) Текстовые задачи. № 18.

Два поезда движутся друг другу навстречу по параллельным путям. Скорость одного 60 км/ч, другого 80 км/ч. Пассажир, сидящий во втором поезде, заметил, что первый поезд шел мимо него 6 с. Какова длина первого поезда?

(119) Текстовые задачи. № 19.

Два мальчика, Миша и Гриша, учатся в школе, которая расположена от их жилья на расстоянии 6 км. Однажды автобус, которым они ехали, сломался и мальчики пошли в школу пешком. Миша первую половину пути шел со скоростью 4 км/ч, а вторую половину со скоростью 2 км/ч. Гриша поступил иначе:

первую половину времени он шел со скоростью 4 км/ч, а вторую со скоростью 2 км/ч. Пришел ли кто-то из мальчиков в школу раньше? Если «да», то насколько?

(120) Текстовые задачи. № 20.

В аудитории собралась молодежь: студенты и студентки. Вместе их было больше 70, но меньше 90. Всего скамеек, на которых сидели студенты и студентки, было на 1 больше, чем сидело на каждой из них студентов. Студентки сидели по одной на каждой скамейке. Сумма числа скамеек и студентов составила число молодежи. Сколько человек находится в аудитории и на скольких скамейках они сидели?

(121) Текстовые задачи. № 21.

В классе 85 % учащихся владеют языком Бейсик, 80 % языком Паскаль, а 75 % знают оба языка. Сколько процентов учащихся не знают ни одного из этих языков?

(122) Текстовые задачи. № 22.

В сосуде имеется спирт 70 %. В результате неправильного хранения из сосуда испарилось 11 г спирта и 1 г воды. Сколько граммов 96 % спирта нужно долить в сосуд, чтобы восстановить в нем прежнюю концентрацию.

(123) Текстовые задачи. № 23.

Проценты содержания (по весу) спирта в трех растворах образуют геометрическую прогрессию. Если смешать первый, второй и третий растворы в весовом количестве 2:3:4, то получится раствор, содержащий 32 % спирта. Если же смешать их в весовом соотношении 3:2:1, то получится раствор, содержащий 22 % спирта. Сколько процентов спирта содержит первый раствор?

(124) Текстовые задачи. № 24.

Процент сотрудников компании, получивших премию, заключен между 2,9 % и 3,1 %. Найдите минимальное возможное количество всех сотрудников компании.

1) 100; 2) 78; 3) 59; 4) 33; 5) 90.

(125) Текстовые задачи. № 25.

В банк поместили вклад 1000 р. В первый год ставка была 50 %, а затем каждый год ставка уменьшалась на 10 %. В конце каждого года после начисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же сумму. К концу четвертого года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с начальным вкладом на 722 %. Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял к вкладу?

(126) Текстовые задачи. № 26.

Магазин выставил на продажу товар с наценкой 60 % от закупочной стоимости. После продажи половины всего товара магазин снизил назначенную цену на 30 % и распродал оставшийся товар. Сколько процентов от закупочной цены товара составила прибыль магазина?

(127) Текстовые задачи. № 27.

В двух банках в конце года на каждый счет начисляется прибыль: в первом банке – 60 % к текущей сумме на счете, во втором – 40 % к текущей сумме на счете. Вкладчик в начале года часть имеющихся у него денег положил в первый банк, а остальные деньги во второй банк с таким расчетом, чтобы через два года суммарное количество денег на обоих счетах удвоилось. Какую часть денег вкладчик положил в первый банк?

(128) Текстовые задачи. № 28.

В школьной столовой обед из двух блюд стоит на 40 % дешевле, чем в кафе, причем первое стоит на 60 % дешевле, а второе на 30 % дешевле, чем в кафе. Во сколько раз в школьной столовой второе стоит дороже, чем первое?

(129) Текстовые задачи. № 29.

Две трубы вместе наполняют бассейн за 6 часов. Определите, за сколько часов наполняет бассейн каждая труба в отдельности, если известно, что из первой трубы в час вытекает на 50 % воды больше, чем из второй.

(130) Текстовые задачи. № 30.

Осенью в магазине цена растительного масла увеличивалась на одно и то же число процентов от предыдущей цены. За два месяца цена 1 литра масла возросла с 40 р. до 57,6 р. На сколько процентов ежемесячно увеличивалась цена масла?

(131) Текстовые задачи. № 31.

Из сосуда, содержащего 54 л чистой кислоты, вылили несколько литров и после этого долили сосуд водой до прежнего объема. Затем из сосуда вылили столько же литров смеси как и в первый раз. В результате в смеси, оставшейся в сосуде, осталось 24 л чистой кислоты. Сколько кислоты вылили в первый раз?

(132) Текстовые задачи. № 32.

Банк предоставляет ипотечный кредит (кредит на покупку квартиры под залог квартиры) сроком на 20 лет под 12 % годовых. Это означает, что ежегодно заемщик возвращает 12 % от непогашенной суммы кредита и 1/20 суммы кредита. Так, в первый год заемщик выплачивает 1/20 суммы кредита и 12 % от всей суммы кредита, во второй год заемщик выплачивает 1/20 суммы кредита и 12 % от 19/20 суммы кредита и т. д. Во сколько раз сумма, которую должен выплатить банку заемщик, больше суммы займа, если согласно договору досрочное погашение кредита невозможно?

(133) Текстовые задачи. № 33.

Половину пути от дома до стадиона спортсмен прошел шагом, а вторую половину бегом, затратив на весь путь 16 минут. Со стадиона он вернулся домой за 12 минут, причем половину времени он шел, а вторую половину бежал. Сколько времени ему нужно, чтобы дойти шагом от дома до стадиона?

(134) Текстовые задачи. № 34.

В дошкольном учреждении провели опрос. На вопрос «Что вы предпочитаете, компот или кашу?» большая часть ответила «кашу», меньшая «компот», а один респондент «затрудняюсь ответить». Далее выяснили, что среди любителей компота 30 % предпочитают абрикосовый, а 70 % грушевый. У любителей каши уточнили, какую именно кашу они предпочитают. Оказалось, что 56,25 % выбрали манную, 37,5 % рисовую и лишь один ответил «затрудняюсь ответить». Сколько детей было опрошено?

(135) Текстовые задачи. № 35.

В первый год было добыто 100 тысяч тонн руды. В течение следующих нескольких лет годовая добыча руды увеличивалась на 25 % по сравнению с предыдущим годом, а затем на протяжении последующих трех лет поддерживалась на достигнутом уровне. Общий объем руды за все время добычи составил 850 тысяч тонн. Сколько лет разрабатывалось месторождение?

§ 5. НЕРАВЕНСТВА

(136) Неравенства. № 1.

Найдите все значения x, при которых расстояние между соответствующими точками графиков функций $f(x) = \dfrac{5x-11}{x-2}$ и $g(x) = 6$ меньше, чем 0,7.

(137) Неравенства. № 2.

Определите, сколько целочисленных решений имеет неравенство$(n^2-1)(n^2-11)(n^2-101)(n^2-1001)<0$.

(138) Неравенства. № 3.

Найдите сумму натуральных решений неравенства $\dfrac{|x+2|-|x|}{9-x^2} \geq 0$.

(139) Неравенства. № 4.

Про число k известно, что $\dfrac{k+5}{(k+3)(k-1)} > 0$

и $\dfrac{k-1}{(k+4)(k+3)} < 0$. Выясните, можно ли определить по этим данным знак числа k, и, если возможно, найдите этот знак.

(140) Неравенства. № 5.

Решите неравенство: $|x^2 - 5x| < 6$.

(141) Неравенства. № 6.

Докажите, что для любого числа t выполняется неравенство $t^4 - t + \dfrac{1}{2} > 0$.

(142) Неравенства. № 7.

Без использования калькулятора докажите, что $2^{1995} > 5^{854}$.

(143) Неравенства. № 8.

Числа a, b, c удовлетворяют неравенству $(a + b + c)\, c < 0$. Докажите, что $b^2 > 4ac$.

(144) Неравенства. № 9.

Докажите, что для $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ справедливо неравенство $a^4 + b^4 + c^2 \geq 2\sqrt{2}\, abc$.

(145) Неравенства. № 10.

Найдите площадь фигуры, координаты точек которой являются решениями системы неравенств:

$$\begin{cases} (x+3y)(x-4y) \geq 0, \\ -13 \leq x \leq -1. \end{cases}$$

(146) Неравенства. № 11.

Изобразите множества, заданные неравенством $\dfrac{1}{2x} \leq \dfrac{1}{x-y}$.

(147) Неравенства. № 12.

Докажите, что для $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$ выполняется неравенство

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2}{(c+a)(c+b)}\geq\frac{3}{4}.$$

(148) Неравенства. № 13.

Найдите наибольшее значение функции

$y=\dfrac{3x^2}{ax^4+bx^2+c}$, где $a>0$, $b>0$, $c>0$.

(149) Неравенства. № 14.

Докажите, что при $x>0$ и $y>0$ выполняется неравенство $\sqrt[3]{4(x+y)}\geq\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}$.

(150) Неравенства. № 15.

Решите неравенство: $x^2-3{,}5x+4+\operatorname{tg}^2x\leq 1/\cos^2x$.

(151) Неравенства. № 16.

Докажите неравенство: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geq\dfrac{9}{a+b+c}$, если $a>0$, $b>0$, $c>0$.

(152) Неравенства. № 17.

Решите неравенство: $\sqrt{x+5}>x-1$.

(153) Неравенства. № 18.

Решите неравенство: $\sqrt{x+3}<3-x$.

(154) Неравенства. № 19.

Решите неравенство: $|x^2-2x|<x$.

(155) Неравенства. № 20.

Решите неравенство: $2x^2+5x+\sqrt{2x+1}<\sqrt{2x+1}-2$.

(156) Неравенства. № 21.

Решите неравенство: $\dfrac{x^2(x-6)^2(2-x)}{(x-2)^4(x-4)}\geq 0$.

(157) Неравенства. № 22.

Решите неравенство: $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\geq 0$.

(158) Неравенства. № 23.

Решите неравенство: $x^2+2x-\sqrt{x^2+2x+2}\le 0$.

(159) Неравенства. № 24.

Решите неравенство: $\sqrt{3x-4}+\sqrt{2x-13}>\sqrt{13-2x}$.

(160) Неравенства. № 25.

Докажите неравенство: $2a^2+b^2+c^2\ge 2a\,(b+c)$.

§ 6. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ПРОГРЕССИИ

(161) Прогрессии. № 1.

Найдите сумму чисел от 1 до 1000, делящихся на 7 и не делящихся на 13.

(162) Прогрессии. № 2.

Пусть $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$. Вычислите сумму $f(0)+f(\dfrac{1}{1976})+$ $+f(\dfrac{2}{1976})+\ldots+f(\dfrac{1975}{1976})+f(1)$.

(163) Прогрессии. № 3.

Найдите все значения b, при которых выражение

$f(n)=b\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$ принимает целые значения при всех натуральных значениях n.

(164) Прогрессии. № 4.

В арифметической прогрессии $a_3=13$, $a_7=-7$. При каком значении n сумма первых членов прогрессии S_n максимальна? Найдите эту сумму.

(165) Прогрессии. № 5.

Составьте формулу общего члена последовательности вида 0; 2; 2; 4; 4; 6; 6…

(166) Прогрессии. № 6.

Найдите сумму всех трехзначных чисел, не делящихся на 11 и имеющих последнюю цифру 5.

(167) Прогрессии. № 7.

Сумма нескольких подряд идущих чисел в 20 раз больше наибольшего из них и в 30 раз больше наименьшего. Найдите эти числа.

(168) Прогрессии. № 8.

Восемь чисел образуют геометрическую прогрессию. Сумма первых трех равна 21, а сумма последних трех равна 672. Найдите сумму всех восьми членов прогрессии.

(169) Прогрессии. № 9.

Числа a, b, c, d являются последовательными членами геометрической прогрессии. Известно, что $b^3 + c^3 = 288$, $ad = 24$. Найдите $a + d$.

Здравый смысл!	Полезно помнить некоторые важные формулы для прогрессии. Сумма n первых членов арифметической прогрессии равна произведению полусуммы крайних членов на число членов. На практике очень помогает формула: $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n$.	Помни!

(170) Прогрессии. № 10.

Сумма квадратов членов геометрической прогрессии в 3 раза больше суммы ее членов и в 3,6 раза меньше суммы четвертых степеней ее членов. Найдите второй член прогрессии.

(171) Прогрессии. № 11.

Существует ли геометрическая прогрессия, среди членов которой имеются числа 2, 3, 5?

(172) Прогрессии. № 12.

Сумма пятого и девятого членов геометрической прогрессии равна 7. Произведение шестого и восьмого членов равно 12. Найдите $a_5^2 + a_9^2$.

(173) Прогрессии. № 13.

Возрастающая арифметическая прогрессия состоит из натуральных чисел. Может ли сумма 1995 последовательных членов прогрессии равняться числу: а) n^{1994}; б) 1994^n, где n – натуральное.

(174) Прогрессии. № 14.

Докажите, что для всякой арифметической прогрессии a_1, a_2, … , a_n имеет место равенство:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

(175) Прогрессии. № 15.

В двух числовых последовательностях (a_n) и (b_n) каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих, причем $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $b_1 = 2$, $b_2 = 1$. Сколько существует чисел, встречающихся как в первой, так и во второй последовательности?

(176) Прогрессии. № 16.

Найдите все тройки ненулевых a, b, c, образующих арифметическую прогрессию, и таких, что из чисел $\frac{1}{a}; \frac{1}{b}; \frac{1}{c}$ также можно составить арифметическую прогрессию.

(177) Прогрессии. № 17.

В арифметической прогрессии $a_5 = 16$, $S_6 = 51$. Определите все значения n, при которых одновременно $a_n < 38$, $S_n > 129$.

(178) Прогрессии. № 18.

Пусть x_1 и x_2 корни уравнения $x^2 - 4x + a = 0$, а x_3 и x_4 – корни уравнения $x^2 - 36x + b = 0$. Известно, что $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$, $x_4 > 0$ и x_1; x_2; x_3; x_4 – последовательные члены некоторой геометрической прогрессии. Найдите a и b.

(179) Прогрессии. № 19.

В возрастающей геометрической прогрессии сумма первого и последнего членов равна 164, а произведение второго и предпоследнего членов равно 324. Найдите последний член прогрессии.

(180) Прогрессии. № 20.

Уравнение $x^2 + bx + c = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2. Известно, что числа b, x_1, c, x_2 в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию. Найдите разность этой прогрессии.

(181) Прогрессии. № 21.

Сумма членов возрастающей арифметической прогрессии, одним из членов которой является 1, равна 0. Найдите ее разность, если известно, что $a_4 \cdot a_{11} = 1$.

(182) Прогрессии. № 22.

В арифметической прогрессии сумма восьми первых членов равна 32, а сумма двадцати первых членов равна 200. Найдите сумму первых двадцати восьми членов прогрессии.

(183) Прогрессии. № 23.

Каждый член числовой последовательности, начиная со второго, равен произведению двух соседних с ним членов. Произведение первых десяти членов равно 18, а произведение первых двадцати членов равно 12. Найдите произведение первых 75 членов этой последовательности.

(184) Прогрессии. № 24.

Если к четырем последовательным членам арифметической прогрессии прибавить соответственно 7; 1; –3; –6, то получим четыре первых члена бесконечной геометрической прогрессии. Найдите ее сумму.

(185) Прогрессии. № 25.

Сумма первых n членов некоторой последовательности выражается формулой $S_n = 5n^2 - 7n + 3$. Докажите, что члены этой последовательности, начиная со второго, образуют арифметическую прогрессию.

§ 7. ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

(186) Графики. № 1.

Постройте график функции $y = \frac{(\sqrt{x^2-1})^2}{x-1}$.

(187) Графики. № 2.

Постройте график функции $y = \frac{3x+7}{x+2}$.

(188) Графики. № 3.

Графики функций $y = x + 6$, $y = -\frac{1}{2}x + 6$, $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$, попарно пересекаясь, образуют треугольник. Найдите его площадь.

(189) Графики. № 4.

Четная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом 12. При $3 \le x \le 6$ она задается формулой $f(x) = \frac{1}{4}x - 2$. Найдите значение выражения $6f(-17) + f(16)$.

(190) Графики. № 5.

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$y = |x^2 + x| + |x^2 - 3x + 2|$ на $[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$.

(191) Графики. № 6.

Дана функция $y = \frac{1-x}{1+x}$, где $|x| \neq 1$. Представьте ее в виде суммы четной и нечетной функции.

(192) Графики. № 7.

Точка пересечения графиков функций $y = ax + b$ и $y = bx + a$ отмечена красным цветом, а точки пересечения этих графиков с осью ординат – синим цветом. Ось абсцисс стерта. Как восстановить ее, если $a \neq b$, но числа a и b нам неизвестны.

(193) Графики. № 8.

Найдите уравнения трех прямых (графиков функций вида $y = ax + b$), ограничивающих на координатной плоскости правильный треугольник.

(194) Графики. № 9.

Постройте график уравнения $|y| + \dfrac{1}{|y|} = |x| + \dfrac{1}{|x|}$.

(195) Графики. № 10.

Найдите уравнение прямой, касающейся параболы $y = \dfrac{1}{3}(x^2 - 2x + 4)$ и окружности единичного радиуса с центром в начале координат. (Укажите все решения.)

(196) Графики. № 11.

Постройте график функции $y = \dfrac{(3x+1)\cdot|x-1| + 3x^2 - 2x - 1}{|x| + 2x + 1}$.

(197) Графики. № 12.

Постройте график функции $y = \dfrac{(x^2 - 5x + 6)(x+2)}{x^2 - 4} + \dfrac{|x-1|}{x-1}$ и определите $E(y)$.

(198) Графики. № 13.

При каких значениях параметра a прямая $y = ax - 5$ касается параболы $y = 3x^2 - 4x - 2$.

(199) Графики. № 14.

При каких значениях параметров a и b график функции $y = x^2 + ax + b$ касается прямых $y = 5x + 1$ и $y = -x - 2$.

(200) Графики. № 15.

Рассматриваются все параболы, задаваемые уравнением $y = x^2 + bx + 1$, где b – произвольное число. Составьте уравнение множества вершин этих парабол и изобразите это множество на координатной плоскости.

(201) Графики. № 16.

Постройте график функции $y = \dfrac{(x^2 - 10x + 21)(x - 2)}{x^2 - 9x + 14}$.

(202) Графики. № 17.

Постройте график функции $y = \dfrac{(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 7x + 12)}{x^2 - 5x + 6}$.

(203) Графики. № 18.

Постройте график функции $y = ax^2 + bx + c$, если известно, что он проходит через точки K (1; 4), L (–1; 10), N (2; 7).

(204) Графики. № 19.

Парабола $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точку K (–1; 5) и имеет вершину F (1; 1). Найдите ординату точки пересечения параболы с осью ординат.

(205) Графики. № 20.

Покажите часть координатной плоскости, покрытую всевозможными кругами вида $(x - a)^2 + (y - a)^2 \le a^2 + 2$.

§ 8. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

(206) Геометрия. № 1.

Внутри круга с радиусом $R = 1$ выбраны произвольно 5 точек. Докажите, что среди них найдутся две точки, расстояние между которыми не превосходит $\sqrt{2}$.

(207) Геометрия. № 2.

В остроугольном треугольнике из середины каждой стороны опущены перпендикуляры на две другие стороны. Докажите, что площадь шестиугольника, ограниченного этими перпендикулярами, равна половине площади треугольника.

Здравый смысл!	►Виды треугольника по его сторонам: пусть a, b и c – стороны треугольника, причем c – наибольшая сторона; тогда: а) если $c^2 < a^2 + b^2$, то треугольник остроугольный; б) если $c^2 = a^2 + b^2$, то треугольник прямоугольный; в) если $c^2 > a^2 + b^2$, то треугольник тупоугольный.	Помни!

(208) Геометрия. № 3.

На диагонали прямоугольника выбрали точку и через нее провели прямые, параллельные сторонам. По разные стороны от диагонали образовались два прямоугольника. Докажите, что их площади равны.

(209) Геометрия. № 4.

Внутри $\angle AOB$ взяли точку M. K и L симметричны точке M относительно прямых OA и OB соответственно. Прямая KL пересекает OA в точке C и OB – в точке D. Докажите, что OM – биссектриса угла CMD.

(210) Геометрия. № 5.

Хорда окружности удалена от центра на расстояние h. В каждый из сегментов, стягиваемых хордой, вписан квадрат так, что две соседние вершины квадрата лежат на дуге, две другие на хорде. Чему равна разность сторон этих квадратов?

(211) Геометрия. № 6.

В ΔABC $\angle B = 60°$, O – точка пересечения биссектрис AA_1 и CC_1. Докажите, что ΔA_1OC_1 – равнобедренный.

(212) Геометрия. № 7.

На сторонах AB, BC, CD, DA прямоугольника $ABCD$ соответственно взяты точки K, L, M, N, отличные от вершин. Известно, что $KL \parallel MN$, $KM \perp NL$. Докажите, что точка пересечения отрезков KM и LN лежит на диагонали DB прямоугольника.

(213) Геометрия. № 8.

В прямоугольном треугольнике ABC из вершины C прямоугольного угла проведена высота CD. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, равны соответственно r_1 и r_2. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Здравый смысл!	► Свойство медианы в прямоугольном треугольнике: *в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине.* Верна и обратная теорема: *если в треугольнике одна из медиан равна половине стороны, к которой она проведена, то этот треугольник прямоугольный.*	Помни!

(214) Геометрия. № 9.

Через точку M, лежащую внутри треугольника ABC, проведены три прямые, параллельные его сторонам. При этом образовались три треугольника, площади которых равны S_1, S_2 и S_3. Найдите площадь треугольника ABC.

(215) Геометрия. № 10.

Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции, параллельна её основаниям, пересекает боковые стороны трапеции в точках M и N. Найдите ее длину, если основания трапеции равны a и b.

(216) Геометрия. № 11.

Найдите такое значение x, при котором $x + 5$; $x + 9$; $x + 7$ – длины сторон прямоугольного треугольника.

(217) Геометрия. № 12.

В четырехугольнике $ABCD$ углы A и C равны 90°. Докажите, что периметр вписанного в $ABCD$ четырехугольника не меньше, чем $2AC$.

(218) Геометрия. № 13.

В треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка D. Проведите через точку D прямую так, чтобы она разделила площадь треугольника ABC на две фигуры равной площади.

(219) Геометрия. № 14.

Внутри угла, равного 60°, с вершиной в точке A на расстоянии 4 от нее расположена точка M. Найдите расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из точки M на стороны этого угла.

(220) Геометрия. № 15.

Через точку M на диаметре окружности проведена секущая CD под углом 45° к диаметру. Докажите, что $|CM^2| + |DM^2|$ не зависит от положения точки M на диаметре.

(221) Геометрия. № 16.

Около окружности радиуса $r = \sqrt{3}$ описан треугольник ABC, в котором $\angle B = 120°$, $AC = 14$. Найдите площадь треугольника ABC и длины сторон AB и BC.

(222) Геометрия. № 17.

В равнобедренный треугольник вписана окружность радиуса $r = 2$, которая касается боковых сторон в точках M и N. $MN = \frac{16}{5}$. Найдите основания и площадь треугольника.

(223) Геометрия. № 18.

Точка K лежит на боковой стороне трапеции $ABCD$. Основания $AD = 8$, $BC = 6$. Высота трапеции $h = 7$. Диагональ AC пересекает BK в точке F. $S_{CFK} = \frac{48}{5}$. Найдите отношение $AF : FC$.

(224) Геометрия. № 19.

На стороне BC квадрата $ABCD$ отмечена точка E – произвольная. Биссектриса угла DAE пересекает сторону CD в точке F. Вычислите $BE + DF$, если $AE = a$.

(225) Геометрия. № 20.

В прямоугольнике $ABCD$ $AD : AB = 5 : 3$. На сторонах AD, BC, CD, DA выбраны точки E, F, M, P соответственно так, что $AP : PD = 2 : 3$, $EFMP$ – ромб. Найдите отношение площади прямоугольника и площади ромба.

(226) Геометрия. № 21.

Найдите высоту трапеции, у которой диагонали взаимно перпендикулярны, а их длины равны 8 см и 6 см.

(227) Геометрия. № 22.

Из точки A окружности проведены три хорды AB, AC и AD так, что $AB = \frac{4}{3}AC$, $AC = 3AD$, $BD = a$, $BC = CD$. Найдите диаметр этой окружности.

(228) Геометрия. № 23.

В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC из вершин острых углов проведены медианы BK и CE. O – их точка пересечения. Найдите $\cos\angle BOC$.

(229) Геометрия. № 24.

Непараллельные стороны трапеции продолжены до пересечения в точке K и через K проведена прямая, параллельная основаниям трапеции. Найдите ее отрезок, ограниченный продолжением диагоналей, если основания равны a и b.

(230) Геометрия. № 25.

Точки P, K, M, N – соответственно середины сторон AB, DC, CD, DA четырехугольника $ABCD$. Отрезки AK и CP пересекаются в точке F, а отрезки AM и CN в точке E. Площадь четырехугольника $AFCE$ равна 666. Найдите S_{ABCD}.

(231) Геометрия. № 26.

В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания $BC = 63$, $AD = 33$. Отношения радиусов окружностей, вписанных в ΔABC и ΔACD, равно $3 : 2$. Найдите R – радиус окружности, описанной около трапеции.

(232) Геометрия. № 27.

Верно ли, что любой треугольник можно какой-нибудь прямой разрезать на две части равной площади и равного периметра?

(233) Геометрия. № 28.

В окружности есть хорда, равная a и ее в середине пересекает другая хорда, равная b. В каком отношении первая хорда делит вторую?

(234) Геометрия. № 29.

Дан треугольник ABC, $\angle B = 30^{\circ}$, $BC = 6$, $AC = 5$, расстояние от A до прямой BC меньше, либо равно $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Найдите S_{ABC}.

(235) Геометрия. № 30.

Периметр ΔABC равен a. Прямая $A_1C_1 \parallel AC$ и отсекае от ΔABC ΔA_1BC_1, $P_{A_1BC_1} = b$. В трапецию AA_1C_1C можно вписат окружность. Найдите AC.

(236) Геометрия. № 31.

Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Найдите радиус этой окружности, если средняя линия трапеци равна $9 + 3\sqrt{3}$, а углы при большем основании 60° и 30°.

(237) Геометрия. № 32.

Боковые стороны трапеции равны 6 и 10. Известно, что в эт трапецию можно вписать окружность, а средняя линия делит е на части, площади которых относятся как 5 : 11. Найдите длин большего основания трапеции.

(238) Геометрия. № 33.

Из точки E к окружности с диаметром KM проведена кас тельная EM. Отрезок EK пересекается с окружностью в точке D $DE = 2$, $KD = 6$. Найдите градусную меру дуги окружности, за ключенную внутри ΔMEK.

(239) Геометрия. № 34.

Дан параллелограмм $ABCD$, где $\angle DAB$ – острый. На прямых AB и BC выбраны точки H и K так, что ΔKAB и ΔHCB – равнобедренные ($AK = AB$, $HC = CB$). Докажите, что ΔKDH тоже равнобедренный.

(240) Геометрия. № 35.

Дан параллелограмм $ABCD$. Точка M лежит на BC так, что $BM : MC = 2 : 3$. $S_{ABCD} = 1$. Отрезок AC пересекает MD в точке K. Найдите S_{AMK}.

(241) Геометрия. № 36.

К гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами a и b пристроен прямоугольник (ширина которого – гипотенуза, а длина в два раза больше). Найдите расстояние от вершины прямого угла до центра прямоугольника.

(242) Геометрия. № 37.

Длины сторон треугольника равны 6,82 м и 0,31 м, а длина третьей стороны выражена целым числом метров. Найдите длину третьей стороны.

(243) Геометрия. № 38.

Докажите, что в четырехугольнике, вписанном в окружность, сумма произведений противоположных сторон равна произведению диагоналей.

(244) Геометрия. № 39.

На сторонах BC, CA и AB ΔABC взяты соответственно точки A_1, B_1 и C_1 так, что $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = 2 : 1$. Докажите, что если $\Delta A_1B_1C_1$ равносторонний, то и ΔABC – равносторонний.

(245) Геометрия. № 40.

В окружность вписан треугольник. Из любой точки, лежащей на окружности, проведены перпендикуляры на все стороны треугольника. Докажите, что основания перпендикуляров лежат на одной прямой.

(246) Геометрия. № 41.

Найдите такие четыре точки A, B, C, D, образующие четырехугольник $ABCD$ такой, что для любой точки (из A, B, C, D) найдется такая точка этой же плоскости, которая вместе с тремя остальными образует четырехугольник, равный данному.

(247) Геометрия. № 42.

На плоскости произвольно расположены 5 равных правильных треугольников: один красный и четыре синих. Можно ли, совершая параллельные переносы и повороты синих треугольников, переместить их так, чтобы они полностью покрыли весь красный?

(248) Геометрия. № 43.

В трапеции $ABCD$ AB – нижнее основание, M – любая точка на стороне AB. Проведена $MK \parallel BD$ и $MN \parallel AC$ (C на AD и N на BC). NK пересекает BD в точке Q и AC в точке P. Докажите, что $NQ = PK$.

(249) Геометрия. № 44.

Около прямоугольного треугольника ABC описана окружность, радиус которой равен 4. Найдите радиус вписанной в треугольник окружности, если известно, что $OO_1 = 2$, где O и O_1 – центры вписанной и описанной окружности.

(250) Геометрия. № 45.

На окружности, описанной около ΔABC, лежат точки K, L, M, отличные от вершин треугольника. При этом $AK = AB$, $CM = CA$. Найдите углы ΔKLM, если в ΔABC $\angle A = 74^\circ$, $\angle B = 38^\circ$.

(251) Геометрия. № 46.

Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Найдите S_{ABCD}, если S_{ACD} = 9 см^2, S_{AED} = 6 см^2, S_{ABD} = 10 см^2.

(252) Геометрия. № 47.

Символ велогонки Мира состоял из трех равных кругов. Две окружности касаются друг друга в центре третьей. Определите отношение площадей частей, на которые две касающиеся окружности разделили круг, ограниченный третьей окружностью.

(253) Геометрия. № 48.

В ΔABC $AB = 6$, $\angle BAC = 30°$, радиус описанной окружности равен 5. Найдите сторону AC.

(254) Геометрия. № 49.

Из точки M на окружности проведены три хорды $MN = 1$, $MP = 6$, $MQ = 2$. При этом $\angle NMP = \angle PMQ$. Найдите радиус окружности.

(255) Геометрия. № 50.

В квадрате $ABCD$ точки M и N принадлежат сторонам BC и CD, причем $\dfrac{BM}{MC} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{CN}{ND} = \dfrac{3}{2}$. Найдите площадь пятиугольника, ограниченного прямыми BC, CD, AN, BD, AM, если длина стороны квадрата равна a.

(256) Геометрия. № 51.

На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC построен равносторонний треугольник ABD так, что вершины C и D оказались по разные стороны от прямой AB. Найдите S_{ABC}, если $AB = 6$, а расстояние от центра ΔABD до вершины C равно $\sqrt{21}$.

(257) Геометрия. № 52.

Стороны AD и BC трапеции $ABCD$ параллельны, $AD = 3$, $\angle C = 120°$. Прямые BC и CD являются касательными к окружности, описанной около ΔABD. Найдите S_{ABD}.

(258) Геометрия. № 53.

В ΔABC проведена средняя линия MN, соединяющая стороны AB и BC. Окружность, проведенная через точки M, N и C, касается стороны AB. Радиус окружности равен $\sqrt{2}$. Найдите синус $\angle ACB$, если $AC = 2$.

(259) Геометрия. № 54.

В трапеции $KLMN$ известны боковые стороны $KL = 36$, $MN = 34$

и верхнее основание $LM = 10$, $\cos\angle KLM = -\frac{1}{3}$. Найдите диагональ LN.

(260) Геометрия. № 55.

По углам A и C при основании ΔABC определить угол между высотой и биссектрисой угла при вершине, противоположной основанию.

(261) Геометрия. № 56.

Разность катетов прямоугольного треугольника равна биссектрисе прямого угла. Найдите отношение катетов.

(262) Геометрия. № 57.

Может ли правильный многоугольник иметь 1991 диагональ? Придумать многоугольник с возможно близким числом диагоналей по недостатку и по избытку.

(263) Геометрия. № 58.

Стороны пятиугольника, взятые последовательно, равны 4 см, 6 см, 8 см, 7 см, 9 см. Можно ли в этот пятиугольник вписать окружность?

(264) Геометрия. № 59.

Найдите площадь прямоугольника, периметр которого равен 70 см, а отрезок прямоугольника, опущенный из вершины прямоугольника на диагональ, равен 12.

(265) Геометрия. № 60.

В треугольнике ABC длины сторон AB, BC и биссектрисы BN равны соответственно $1{,}5a$, a и a. Найдите длину медианы AM.

§ 9. ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

(266) Параметры. № 1.

Решите уравнение относительно x:

$(b^2 - 7b + 10)x = b^2 - 6b + 8$.

(267) Параметры. № 2.

При каких значениях параметра a уравнение имеет два различных корня.

$(a-1)x^2-(a+1)x+a+1=0.$

(268) Параметры. № 3.

Определите, при каких значениях параметра a уравнение $(a-2)x^2+2(a-2)x+2=0$ не имеет решений.

(269) Параметры. № 4.

Определите количество корней уравнения $||x-6|-4|=a$ в зависимости от параметра a.

(270) Параметры. № 5.

Найдите все значения a, при которых уравнение

$\left|x^2-a+1\right|=3$ имеет ровно 3 корня. (Если значение a более одного, то в ответе запишите их сумму.)

(271) Параметры. № 6.

Определите, при каких значениях a уравнение $||x-10|-8|=a$ имеет 4 различных корня, образующих арифметическую прогрессию.

(272) Параметры. №7.

Определите количество корней уравнения

$\left|x+\dfrac{9}{x}\right|-\left|x-\dfrac{9}{x}\right|=a$ в зависимости от значений параметра a.

(273) Параметры. № 8.

Определите, при каких значениях параметра a есть хотя бы одна пара чисел x, y удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} x^2+(y-2)^2<1, \\ y=ax^2. \end{cases}$$

(274) Параметры. № 9.

Определите, при каких значениях a система уравнений имеет четыре решения?

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = a. \end{cases}$$

(275) Параметры. № 10.

Сколько существует таких значений параметра a, что найдется ровно одно значение b, при котором уравнение $x^2 - 2x(3a + b + 1) + 2a^2 - 76 = 0$ имеет ровно один корень? Найдите сумму всех таких значений a.

(276) Параметры. № 11.

Определите значение параметра a так, чтобы сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (2 - a)x - a - 3 = 0$ была наименьшей.

(277) Параметры. № 12.

$(a+2)x^3 - (2a+1)x^2 - 6x + a^2 + 4a - 5 > 0$.

Найдите все значения x, при которых неравенство выполняется хотя бы при одном a из отрезка $[-2; 1]$.

(278) Параметры. № 13.

Плоскость покрыта квадратной решеткой. Можно ли через любой узел провести прямую, не проходящую больше ни через один узел решетки?

(279) Параметры. № 14.

Решите уравнение с параметром a:

$$\frac{x}{a(x+1)} - \frac{2}{x+2} = \frac{3-a^2}{a(x+1)(x+2)}.$$

(280) Параметры. № 15.

Сколько решений имеет уравнение $|x + 2| = ax + 1$ в зависимости от параметра a?

(281) Параметры. № 16.

Найдите все значения a, при которых неравенство $(a-2)(x^2+2x) \geq 4$ не выполняется ни при каких значениях x.

(282) Параметры. № 17.

При каких значениях параметра a система имеет единственное решение? $\begin{cases} x^2 - 6x + y^2 + 8 = 0, \\ x^2 + (y-4)^2 = a. \end{cases}$

(283) Параметры. № 18.

Определите, при каких значениях параметра a уравнение $|x^2 - 5x + 4| = ax$ имеет ровно три корня.

(284) Параметры. № 19.

Функция $y = f(x)$ определена для всех x, нечетна и при $x > 0$ она задана формулой $y = x^2 - 4x + 3$. Какой формулой задана функция при $x < 0$? Какое наибольшее количество решений имеет уравнение $f(x) = a$ и при каком a?

(285) Параметры. № 20.

Докажите, что при любых отличных от нуля числах a, b, c хотя бы одно из квадратных уравнений $ax^2 + 2bx + c = 0$, $bx^2 + 2cx + a = 0$, $cx^2 + 2ax + b = 0$ имеет корень.

(286) Параметры. № 21.

Найдите все такие пары квадратных трехчленов $x^2 + ax + b$ и $x^2 + cx + d$, что корни второго трехчлена числа a и b, а корни первого трехчлена – числа c и d.

(287) Параметры. № 22.

При каких значениях a четыре корня уравнения $x^4 + (a-5)x^2 + (a+2)^2 = 0$ являются последовательными членами арифметической прогрессии?

(288) Параметры. № 23.

Найдите наименьшее целое a, при котором для всех действительных x выполняется неравенство $x^4 + 2x^2 + a - 4x > 0$.

(289) Параметры. № 24.

При каких значениях параметра a, уравнение $x^4 + (a - 3)x^2 + (a + 10)^2 = 0$ имеет четыре корня таких, что расположенные в порядке возрастания эти корни составляют арифметическую прогрессию?

(290) Параметры. № 25.

Найдите все значения x, которые удовлетворяют неравенству $(a + 2)x^2 < 3ax + 28$ при любом значении параметра a из интервала $(-1; 0)$.

(291) Параметры. № 26.

Найдите все значения параметра a, для которых один корень уравнения $3ax^2 + 225a - 20x = 0$ в 3 раза больше другого.

(292) Параметры. № 27.

При каких значениях a четыре корня уравнения $x^4 + (a - 5)x^2 + (a + 2)^2 = 0$ являются последовательными членами арифметической прогрессии?

(293) Параметры. № 28.

Найдите все a, при которых корни уравнений $6x^2 - 5\sqrt{\grave{a}}\,x + a = 0$ и $3^{6ax^2 - 5\sqrt{ax}} = \dfrac{1}{3}$ образуют геометрическую прогрессию.

(294) Параметры. № 29.

При каких значениях параметра a все корни уравнения $ax^2 - (2a^2 - 5a - 2)x - 2(2a - 5) = 0$ удовлетворяют условию $1 < |x| < 2a$?

(295) Параметры. № 30.

Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{8 + x - 6\sqrt{x - 1}} = a$ имеет хотя бы один корень, лежащий на отрезке $[2; 17]$.

(296) Параметры. № 31.

Найдите все значения параметра a, при которых все точки

отрезка AB, где $A(0; 2)$, $B(1; 2)$ лежат внутри параболы
$y = ax^2 + 2(a - 5)x + a - 17$.

(297) Параметры. № 32.

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $|2a - 5 + 3|x|| = 3$ имеет ровно 3 корня.

(298) Параметры. № 33.

При каком наибольшем натуральном значении параметра a уравнение $|x - a| + |x - 4| = 15$ имеет хотя бы один отрицательный корень?

(299) Параметры. № 34.

При каких значениях параметров a и b график функции
$y = x^2 + ax + b$ касается двух прямых $y = 5x + 1$ и $y = -x - 2$.

(300) Параметры. № 35.

Найдите значения параметра a, при которых уравнение $x^3 + x^2 = a$ имеет 3 корня, образующие арифметическую прогрессию.

(301) Параметры. № 36.

При каких значениях параметра a система

$\begin{cases} x^2 - (2a+1)x + a^2 - 3 = y, \\ y^2 - (2a+1)y + a^2 - 3 = x \end{cases}$ имеет единственное решение?

(302) Параметры. № 37.

При каких значениях a система неравенств

$\begin{cases} x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a \le 0, \\ x^2 - 11x + 24 \ge 0. \end{cases}$ не имеет решений?

(303) Параметры. № 38.

Найдите все значения a, при которых уравнение
$(a + 1 - |x + 2|)(x^2 + 4x + 1 - a) = 0$ имеет ровно три корня.

(304) Параметры. № 39.

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых существует решение уравнения $x^2 + (2ax^2 + 3)^2 = 4$.

(305) Параметры. № 40.

При каких значениях a уравнение $ax - |x| - |x + 2| = \frac{a}{2}$ имеет 2 корня.

§ 10. ПОЧТИ ПРОСТО

(306) Почти просто. № 1.

У квадрата целого числа предпоследняя цифра 7. Какая последняя цифра этого квадрата?

(307) Почти просто. № 2.

Как изменится величина дроби $\frac{2a^2b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, если a и b уменьшить в 2 раза?

(308) Почти просто. № 3.

Дана таблица размером 2×2, заполненная натуральными числами.

2	1
3	2

За один ход разрешается увеличить на единицу числа, находящиеся в любых трёх клеточках.

а) Можно ли за несколько ходов из этой таблицы получить вторую таблицу?

5	5
5	5

б) Можно ли за несколько ходов из этой таблицы получить третью таблицу?

4	4
4	4

(309) Почти просто. № 4.

Дан треугольник ABC. $S_{ABC} = 1$. Первый игрок выбирает точку X на стороне AB, второй – Y на стороне BC, после чего первый – точку Z на стороне AC. При этом первый игрок стремится получить ΔXYZ наибольшей площади, а второй – наименьшей. Какое наибольшее значение площади ΔXYZ может обеспечить первый игрок?

(310) Почти просто. № 5.

По кругу записано 100 чисел, каждое из которых равно среднему арифметическому своих соседей. Докажите, что все 100 чисел равны.

(311) Почти просто. № 6.

Несколько камней весят вместе 10 т, при этом каждый из них весит не более 1 т. На каком наименьшем количестве трехтонок можно увезти этот груз за один раз?

(312) Почти просто. № 7.

В квадрате 3×3 расставлены числа так, что суммы чисел в каждой строке, в каждом столбце и в двух диагоналях равны 0. Сумма квадратов чисел в верхней строке равна n. Найдите сумму квадратов чисел нижней строки.

(313) Почти просто. № 8.

В наборе из одиннадцати попарно различных гирь каждая весит натуральное число граммов. Известно, что суммарный вес любых семи гирь больше суммарного веса четырех оставшихся. Найдите наименьший возможный суммарный вес гирь набора.

(314) Почти просто. № 9.

Пусть $S_n = \dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dfrac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}} + \dfrac{1}{5\sqrt{4}+4\sqrt{5}} + \ldots +$

$+\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$. Сравните $S(1996)$ с числами 0,7 и 0,71.

(315) Почти просто. № 10.

Имеются 5 целых чисел. Известны их попарные суммы 0, 1, 5, 7, 11, 12, 18, 24, 25, 29. Найдите эти числа.

(316) Почти просто. № 11.

В каждой клетке доски 5×5 сидит жук. В некоторый момент времени все жуки перелезли на соседнюю клеточку (по вертикали или горизонтали). Обязательно ли при этом останется пустая клетка?

(317) Почти просто. № 12.

Докажите, что число $100007 \cdot 100013 \cdot 100001 + 55$ составное.

(318) Почти просто. № 13.

Можно ли построить правильный треугольник так, чтобы все его вершины находились в узлах квадратной сетки?

(319) Почти просто. № 14.

Уравнение не имеет корней. $ax^2 + bx + c = 0$. И $a + b + c < 0$. Какой знак имеет число c?

(320) Почти просто. № 15.

Каждая точка окружности окрашена в один из двух цветов – красный или синий. Докажите, что в эту окружность можно вписать равнобедренный треугольник с вершинами одного цвета.

(321) Почти просто. № 16.

Найдите сотую цифру после запятой в десятичной записи числа $\frac{1}{7}$.

(322) Почти просто. № 17.

В прямоугольном треугольнике c – гипотенуза, h – высота, опущенная на гипотенузу, a, b – катеты. Докажите, что $c + h > a + b$.

(323) Почти просто. № 18.

Последовательность a_n задана двумя первыми членами $a_1 = 2$,

$a_2 = 3$ и уравнением $a_{k+2} = \frac{a_{k+1}}{a_k}$ ($k = 1, 2, 3\ldots$). Найдите a_{1996}.

(324) Почти просто. № 19.

Докажите, что $a^3 - 1$ не является степенью числа 2.

(325) Почти просто. № 20.

Числа a, b, c такие, что $(a + b + c)\,c < 0$. Докажите, что $b^2 > 4\,ac$.

(326) Почти просто. № 21.

Определите, при каких значениях a множество значений функции $y = -x^2 + 4x + a$ не пересекается с областью определения функции $y = \sqrt{3x+a}$.

(327) Почти просто. № 22.

Вычислить $\sqrt{\underbrace{44\ldots4}_{2n} + \underbrace{11\ldots1}_{n+1} - \underbrace{66\ldots6}_{n}}$.

(328) Почти просто. № 23.

На клетчатой бумаге по линиям сетки начерчен прямоугольник 1994×1995. Сколько клеток пересекает диагональ прямоугольника?

(329) Почти просто. № 24.

Докажите, что число $(10^n + 10^{n-1} + \ldots + 10 + 1)(10^{n+1} + 5) + 1$ является точным квадратом.

(330) Почти просто. № 25.

Плоскость покрыта квадратной решеткой. Можно ли через любой узел провести прямую, не проходящую больше ни через один узел решетки?

(331) Почти просто. № 26.

Дан неизвестный многочлен. При делении его на $(x - 1)$ остаток 2, а при делении на $(x - 2)$ остаток 1. Какой остаток будет при делении на $(x - 1)(x - 2)$?

(332) Почти просто. № 27.

Имеется 10 столбцов монет по десять монет в каждом. Монета весит целое число граммов ($m_0 \geq 2$). Один из столбцов состоит из 10 фальшивых монет. Фальшивая монета отличается на 1 г от настоящей, тяжелее или легче – неизвестно. Имеются точные весы с гирями. Как при помощи одного только взвешивания определить, в каком столбце будут фальшивые монеты.

(333) Почти просто. № 28.

Даны k ящиков. В некоторых из них положили по k ящиков меньшего размера, затем в некоторые из них положили k ящиков и т. д. В результате количество ящиков, в которых есть другие ящики, равно m. Сколько всего ящиков было использовано?

(334) Почти просто. № 29.

1996 человек поставили по кругу. Каждый второй выбывает. Кто останется последним?

(335) Почти просто. № 30.

Значение квадратного трехчлена $y = x^2 + ax + b$ в двух последовательных целых точках – соответственно квадраты двух последовательных натуральных чисел. Докажите, что значения трехчлена во всех целых точках – точные квадраты.

(336) Почти просто. № 31.

Вычислите $a^4 + b^4 + c^4$, зная, что $a + b + c = 0$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

(337) Почти просто. № 32.

По кругу записаны 5 чисел. Известно, что любое число не меньше суммы двух соседних с ним чисел и не больше суммы двух несоседних с ним чисел. Какие числа могут быть записаны?

(338) Почти просто. № 33.

В левом нижнем углу шахматной доски 6×6 находится король. За один ход он может передвинуться либо на одну клетку вправо, либо на одну клетку вверх, либо на одну клетку по диагонали вправо и вверх. Сколькими различными путями король может пройти в правый верхний угол доски?

(339) Почти просто. № 34.

Сократите дробь $\dfrac{x+y-2\sqrt{xy}}{\sqrt{-x}+\sqrt{-y}}$.

(340) Почти просто. № 35.

Доцент МФТИ ежедневно в 4 часа приезжает на электричке на Казанский вокзал. К этому времени на машине подъезжает его жена и везет его домой. Однажды он приехал в 3 часа, пошел домой пешком, встретил по дороге машину с женой, едущей за ним, сел в машину. Развернувшись и не теряя времени, машина повезла его домой, куда они прибыли на 10 минут раньше, чем обычно. Сколько времени шел доцент?

(341) Почти просто. № 36.

Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $x^2+(a^3+2a^2-4)x-2a^3-a^2+6a-5>0$ имеет хотя бы одно решение из промежутка $[-1; 2]$.

(342) Почти просто. № 37.

Молоко разлито по 30 стаканам. Мальчик пытается добиться, чтобы во всех стаканах молока стало поровну. Для этого он берет любые два стакана и уравнивает в них количество молока. Можно ли налить молоко в стаканы так, чтобы мальчик не смог добиться свой цели, сколько бы долго он ни занимался переливанием?

(343) Почти просто. № 38.

Двое играют на поле размером 8×9. Первый ставит фишку размером 1×1, а второй размером 1×2. Ставить фишку можно только на свободное место, накладывать их друг на друга нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход.

Начинает игру первый. Для какого игрока есть выигрышная комбинация? Найдите ее.

(344) Почти просто. № 39.

Освободитесь от иррациональности в знаменателе

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}.$$

(345) Почти просто. № 40.

Изобразите на плоскости все точки, координаты которых удовлетворяют системе $\begin{cases} y \le \sqrt{1-x^2}, \\ x \le \sqrt{1-y^2}. \end{cases}$ и найдите площадь полученной фигуры.

(346) Почти просто. № 41.

Куб со стороной 20 разбит на 8000 единичных кубиков, и в каждом кубике записано число. Известно, что в каждом столбике из 20 кубиков, параллельном ребру куба, сумма чисел равна 1. В некоторый кубик записано число 10. Через этот кубик проходит три слоя $1\times20\times20$, параллельных граням куба. Найдите сумму всех чисел всех этих слоев.

(347) Почти просто. № 42.

Докажите, что число $\underbrace{111...1}_{2n}-\underbrace{22...2}_{n}$ является квадратом натурального числа.

(348) Почти просто. № 43.

Вычислите с точностью до 0,001:

$$\left(\frac{1-2(17{,}3)^3}{1+(17{,}3)^3}\right)^3+\left(\frac{17{,}3\cdot(2-(17{,}3)^3)}{1+(17{,}3)^3}\right)^3+17{,}3^3.$$

(349) Почти просто. № 44.

Укажите моменты времени, когда впервые после полуночи угол между минутной и часовой стрелкой будет равным 1°, при том, что минутная стрелка показывает целое число минут.

(350) Почти просто. № 45.

Двое играют в такую игру: первый называет натуральное число от 1 до 9. Второй прибавляет к нему еще какое-нибудь однозначное число и называет сумму. К этой сумме первый прибавляет еще однозначное число и опять называет сумму и так далее. Выигрывает тот, кто первым назовет 66. Как нужно играть в такую игру, чтобы выиграть? Кто выиграет при правильной игре – начинающий или его партнер?

(351) Почти просто. № 46.

Извлеките корень $\sqrt[3]{\frac{1}{3}(\underbrace{11...1}_{3n}-\underbrace{33...3}_{n}\underbrace{00...0}_{n})}$.

(352) Почти просто. № 47.

Найдите четырехзначное число кратное 7 и представляющее собой сумму куба и квадрата одного и того же целого числа.

(353) Почти просто. № 48.

Четырехзначное число, у которого все цифры одинаковы, имеет только два простых делителя. Что это за число? Каковы его простые делители?

(354) Почти просто. № 49.

Найдите несократимую дробь, которая не изменит своего значения при добавлении к числителю 4, а к знаменателю 10.

(355) Почти просто. № 50.

Известно, что 8 % одного числа равны 64 % другого. Сумма этих чисел равна 162. Найдите эти числа.

(356) Почти просто. № 51.

Вычислите $2379 \cdot 23782378 - 2378 \cdot 23782379$.

(357) Почти просто. № 52.

Какое наименьшее число прямоугольников 1×2 клетки нужно закрасить на доске 8×8 клеток, чтобы любой квадрат 2×2 содержал по крайней мере одну закрашенную клетку?

(358) Почти просто. № 53.

Двое играющих по очереди красят клетки квадрата 8×8. За один ход игрок красит своим цветом одну клетку. Перекрасить клетки нельзя. Первый стремится закрасить своим цветом квадрат 2×2. Может ли второй помешать первому независимо от его игры?

(359) Почти просто. № 54.

Разрежьте данный остроугольный треугольник на три трапеции.

(360) Почти просто. № 55.

Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости условиями:

$$\begin{cases} x \ge 0, \\ y \ge x-1, \\ y \le -2x+5. \end{cases}$$

(361) Почти просто. № 56.

Можно ли к числу 1996 приписать слева несколько цифр так, чтобы получился полный квадрат?

(362) Почти просто. № 57.

Найдите значение выражения

$\sqrt{a^2-4a+4}+\sqrt{a^2-12a+36}$, если $2 \le a \le 6$.

(363) Почти просто. № 58.

Упростите выражение: $\dfrac{\sqrt{ab}-\sqrt{b^2}}{b}-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ, ОТВЕТЫ

§ 1. УМА ПАЛАТА

(001) Ума палата. № 1. Покажем, что число стаканов, стоящих вверх дном (стоящих неправильно), будет нечетно. Вначале их было 25 – нечетное число. Пусть на каком-то шаге вверх дном стоит $2k + 1$ стакан. Если Ваня выберет два стакана, стоящих правильно, и перевернет их, то неправильно стоящих стаканов станет $2k + 3$ – нечетное число. Если Ваня выберет два стакана, стоящих неправильно, и перевернет их, то неправильно стоящих стаканов станет $2k - 1$ – нечетное число. Если Ваня выберет два стакана, один из которых стоит правильно, а другой – неправильно, и перевернет их, то неправильно стоящих стаканов останется $2k + 1$ – нечетное число. Если бы Ваня смог поставить все стаканы правильно, то неправильно стоящих стаканов было 0 – четное число. А поскольку всегда на столе будет нечетное число стаканов, стоящих неправильно, то Ваня не сможет поставить все стаканы правильно.

Ответ: не сможет.

(002) Ума палата. № 2. Рассмотрим 8 отмеченных клеток (см. рис. 2). Любая операция затрагивает либо 2 клетки из этих 8, либо ни одной. Таким образом, при указанных операциях сохраняется четность числа минусов, стоящих в отмеченных клетках. А так как изначально в этих клетках стоял 1 минус (нечетное число), то таблицу из одних плюсов мы получить не можем (так как в этом случае в отмеченных клетках будет стоять 0 минусов – четное число).

+	–	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

Рис.1

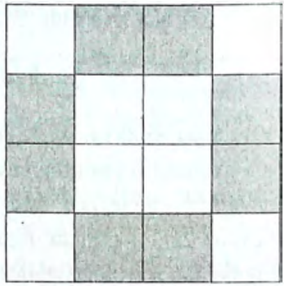


Рис. 2

(003) Ума палата. № 3. Покажем, что разность между количеством амеб двух разных типов будет сохранять свою четность. Покажем, например, что разность между количеством амеб типов A и C будет четной. Изначально эта разность четна. Если в какой-то момент слились амебы типов A и C, то количество амеб каждого из типов A и C уменьшилось на 1, а разность не изменилась. Если в какой-то момент слились амебы типов A и B, то получилась амеба типа C, количество амеб типа A уменьшилось на 1, а типа C увеличилось на 2, и разность изменилась на 2, то есть осталась четной. Если в какой-то момент слились амебы типов C и B, то разность также изменится на 2, то есть останется четной. Аналогично показывается, что разность между количеством амеб типов A и B и разность между количеством амеб типов C и B будет нечетной. Если бы в конце осталась амеба типа A, то разность между количеством амеб типов A и C будет равна 1 – числу нечетному, а она должна быть четной. Аналогично не могла остаться амеба типа C. Поэтому в конце останется амеба типа B.

Ответ: тип B.

(004) Ума палата. № 4. Если бы это было возможно, то сумма всех чисел таблицы, подсчитанная «по строкам», была бы положительной, а «по столбцам» – отрицательной, что невозможно.

Ответ: нельзя.

(005) Ума палата. № 5. Может. Например, день рождения 31 декабря 1997 года. Говорит мальчик 1 января 1998 г. Действительно, позавчера ему было 10 лет, сейчас 11 лет, 12 лет будет 31 декабря 1998 г., а в следующем году 31 декабря 1999 г. исполнится 13 лет.

Ответ: может.

(006) Ума палата. № 6. После цифры 3 для получения наибольшего пятизначного числа вставим последовательно цифры 9, 8, 7. Получим: $3987x$, где x – последняя неизвестная цифра. $3 + 9 + 8 + 7 = 27$. На последнее место можно ставить 0 или 9, чтобы число делилось на 9, но 9 уже есть в записи, значит, вставим цифру 0.

Наибольшее пятизначное число, кратное 9, так, чтобы первая цифра была 3 и все цифры были различны, будет 39870.

Ответ: 39870.

(007) Ума палата. № 7. Сумма коэффициентов многочлена будет равна значению многочлена при $x = 1$.

$P(1) = (2 - 3 + 1)^{1996}(2 + 3 + 1)^{1997} = 0.$

Ответ: 0.

(008) Ума палата. № 8.

$$\sqrt{a^2 - 4a + 4} + \sqrt{a^2 - 12a + 36} = \sqrt{(a-2)^2} + \sqrt{(a-6)^2} =$$

$$= |a-2| + |a-6|.$$

Так как $2 \le a \le 6$, то $|a - 2| = a - 2$, $|a - 6| = a - 6$, поэтому $|a-2| + |a-6| = a - 2 + 6 - a = 4$. Значит, при любом $2 \le a \le 6$ значение данного выражения будет равно 4.

Ответ: 4.

(009) Ума палата. № 9. Из одного блюда возможно составить два варианта. Из двух блюд: количество вариантов удваивается, можно взять все предыдущие варианты и еще к каждому из них можно присоединить новое блюдо – $2 \times 2 = 2^2$.

Рассуждая аналогично, последовательно находим количество вариантов из трех блюд – $2^2 \times 2 = 2^3$, из четырех $= 2^3 \times 2 = 2^4$.

Следовательно, количество вариантов из n блюд равно $2^{n-1} \times \times 2 = 2^n$. Методом математической индукции можно доказать, что количество вариантов из n блюд будет равно 2^n.

В комбинаторике известно равенство, обосновывающее полученный вариант: $C^0_n + C^1_n + C^2_n + \ldots + C^n_n = (1 + 1)^n = 2^n$.

Ответ: 2^n.

(010) Ума палата. № 10. Подсчитаем количество всех вариантов.

1) Ни у какого человека нет двух мешков, тогда получается, что каждый человек несет ровно по 1 мешку. Получается 1 вариант.

2) Один человек несет 2 мешка, следовательно, еще у одного человека нет ни одного мешка. Выбрать в каждом из этих случаев человека, у которого нет ни одного мешка, можно еще шестью вариантами. Всего получаем $7 \times 6 = 42$ (варианта). Получается 42 варианта.

3) Двое несут 2 мешка, двое по 0 мешков. Число вариантов выбора двух человек из семи, то есть будет число сочетаний из 7 по 2: C_7^2, а число вариантов выбора двоих из пяти оставшихся будет число сочетаний из 5 по 2: C_5^2. Таким образом, общее количество случаев будет

$$C_7^2 \cdot C_5^2 = \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 210$$. Получается 210 вариантов.

4) Трое несут по 2 мешка, трое по 0 мешков. Рассуждая аналогично предыдущему случаю, получаем

$C_7^3 \cdot C_4^3 = C_7^3 \cdot C_4^1 = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 4 = 140$. Получается 140 вариантов.

Всего 1 + 42 + 210 + 140 = 393 (варианта).

Ответ: 393.

(011) Ума палата. № 11. К ряду стульев добавим (виртуально) еще один стул слева. Если убирать какой-либо стул, кроме первого, то слева от него стоит стул (возможно, виртуальный), который нельзя убрать. Такую пару стульев обозначим 0, а другие пары соседних стульев обозначим 1. Между множеством способов, которыми можно убрать стулья, и множеством последовательностей из 0 и 1 (где нуль встречается 20 раз, а единица 11 раз) имеется взаимно-однозначное соответствие. Получаем число сочетаний из 31 по 11: C_{31}^{11}.

$C_{31}^{11} = 84672315$.

Ответ: 84672315.

(012) Ума палата. № 12. Обыкновенную дробь 4/7 запишем в виде бесконечной десятичной периодической дроби с периодом Т = 6. 4/7 = 0,(571428). Число 1001 представим в виде: 1001 = 166×6 + 5. На тысяча первом месте после запятой в десятичном представлении дроби 4/7 стоит та же цифра, которая стоит на пятом месте, то есть цифра 2.

Ответ: 2.

(013) Ума палата. № 13. Рассмотрим $n - 1$ четных чисел: 2^1, $2^2, 2^3, \ldots, 2^{n-1}$. При делении этих чисел на n, получаем: $2^k = nq + r$. Возможны n различных остатков r: 0, 1. 2, 3, … , $n-1$.

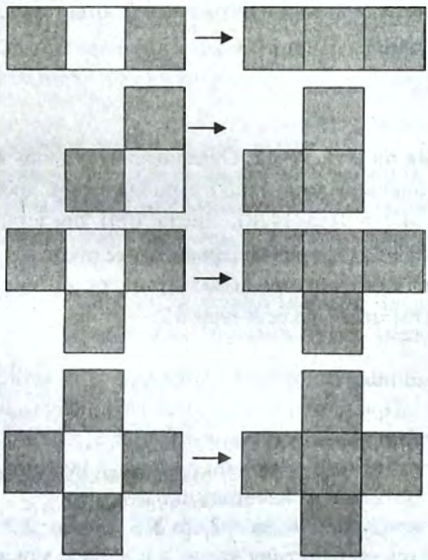
1) Если $r = 0$, то $2^k = nq$. Это равенство невозможно, так как 2^k не может делиться на нечетное число n.

2) Если $r = 2$, то $2^k = nq + 2$, то $2^k - 2 = nq$, $2(2^{k-1} - 1) = nq$. $2^{k-1} - 1$ делится на нечетное число n и данное утверждение доказано.

3) Если $r \neq 0$ и $r \neq 2$, то среди $n-1$ остатков будет только $n-2$ различных остатков и по принципу Дирихле найдутся два числа, имеющих одинаковые остатки: $2^k = nq + r$. $2^p = ns + r$. Положим для определенности, что $k > p$, $q > s$. Вычтем из первого равенства второе: $2^k - 2^p = n(q-s)$. $2^p(2^{k-p} - 1) = n(q-s)$.

2^p не делится на нечетное n, поэтому $2^{k-p} - 1$ будет нацело делится на n. Число $2^{k-p} - 1$ является одним из чисел данного ряда чисел $2^1 - 1, 2^2 - 1, 2^3 - 1, \ldots, 2^{n-1} - 1$. Значит, для любого случая доказано, что хотя бы одно из данных чисел делится на n.

(014) Ума палата. № 14. Рассмотрим суммарную длину границ участков, заросших бурьяном. Заметим (смотри рисунок), что при разрастании бурьяна эта суммарная длина границы не увеличивается.



Так как изначально суммарная длина границ участков, заросших бурьяном, не больше $4 \cdot 9 = 36$, то поле не сможет целиком зарасти бурьяном, так как длина границы поля равна 40.

(015) Ума палата. № 15. Из того, что $a + b - \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab} - \sqrt{a^2 + b^2} > 0$ при $a, b > 0$ следует, что после указанных операций числа на доске остаются положительными. Покажем, что после указанной операции не меняется сумма обратных величин чисел, написанных на доске. Действительно,

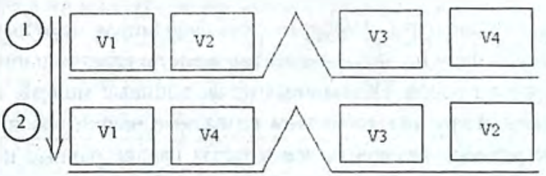
$$\frac{1}{x+y+\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x+y-\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2x+2y}{(x+y)^2-(x^2+y^2)} =$$
$$= \frac{2x+2y}{2xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Если одно из получившихся чисел меньше 1, то сумма обратных величин всех чисел, написанных на доске, будет больше 1.

Так как $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{19}{20} < 1$, то на доске не может появиться число, меньшее 1.

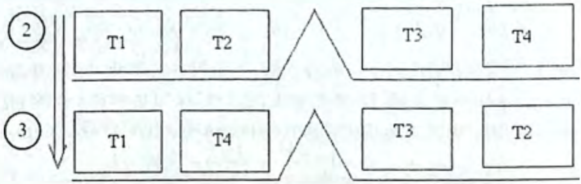
Ответ: Не может.

(016) Ума палата. № 16.

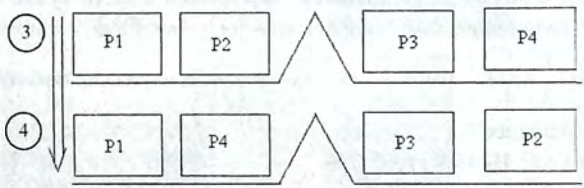


V1, V2, V3, V4 – четыре восьмерки монет. Если переложить V2 и V4, то обнаружим 2 восьмерки, среди которых имеется фальшивая монета, зная, что для этой пары известно, какая из них перетягивает. Не нарушая общности, будем считать их

V1 и V2, зная, какая из них перевешивает. Разобьем их на четверки, зная вначале, какая из них перевешивает T1, T2, T3 и T4. Вернемся ко второму взвешиванию и с точки зрения появившихся четверок увидим его так:



Выбираем две четверки, среди которых две фальшивые и разбиваем их на четыре пары P1, P2, P3, P4. Учтем теперь результат третьего взвешивания:



Выяснив две пары, в которых есть фальшивая монета, разделим каждую пару на части, поместив монеты каждой пары в две разные чашки весов. Оставшиеся не фальшивые монеты поровну из каждой группы добавляем на разные чашки весов. В результате удалось разделить все монеты на две равные по весу кучки, сделав не более четырех взвешиваний на чашечных весах без гирь.

(017) Ума палата. № 17. Решение представлено схематично в виде четырех этапов *A*, *B*, *C*, *D*. В результате получаем поровну в каждом из трех сосудов.

1	2	3
X	X	X
1	2	3
1	2	3

A

1	2	3
3	3	
1	2	
1	2	

B

<table>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td>3</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr>
</table>

C

1	2	3
1		1
2		2
3		3

D

1	2	3
1	1	1
2	2	2
3	3	3
1	1	1
2	2	2
3	3	3

A) из 3 => 1 и 2,
B) из 1 и 2 => 3,
C) из 2 => 1,
D) из 1 и 3 => 2.

Получилось поровну!!!

Ответ: Поровну.

(018) Ума палата. № 18. Обозначим $17{,}3^3 = a$, тогда

$$\left(\frac{1-2a}{1+a}\right)^3 + \frac{a^3(2-a)^3}{(1+a)^3} + a = \frac{(1-2a)^3 + a((2-a)^3 + (1+a)^3)}{(1+a)^3} =$$

$$= \frac{(1-2a)^3 + a(3(4-4a+a^2-2+a-2a+a^2+1+2a+a^2))}{(1+a)^3} =$$

$$= \frac{1-6a+12a^2-8a^3+9a^3-9a^2+9a}{(1+a)^3} = \frac{a^3+3a^2+3a+1}{a^3+3a^2+3a+1} = 1.$$

С точностью до 0,001 получим 1,000.

Ответ: 1,000.

(019) Ума палата. № 19. Рассмотрим слой (единственный слой) прилегающий к грани размером 7×11. Внутри этого полностью заполненного слоя должны находиться либо полностью брусочки $3\times3\times1$, тогда они занимают объем 9 единичных кубиков, либо один из слоев бруска размером 3×1, занимающей объем в 3 единичных кубика. Всего в этом слое $7\times11 = 77$ единичных кубиков Они должны быть представлены в виде $9t + 3k$, где t и k принимают целые неотрицательные значения. Получим $9t + 3k = 77$,

$3(3t + k) = 77$, а этого быть не может, так как левая часть равенства кратна 3, и 77 на 3 не делится. Значит, уложить бруски в коробку не удастся.

Ответ: Нельзя.

(020) Ума палата. № 20. $x^2 + ax + 1 - b = 0$. Применяя теорему Виета, получаем:

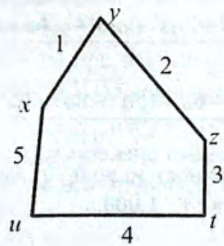
$x_1x_2 = 1 - b$,

$x_1x_2 = -a$; $b = 1 - x_1x_2$,

$a^2 + b^2 = (x_1 + x_1)^2 + (1 - x_1x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 1 - 2x_1x_2 + x_1^2x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + 1 + x_1^2x_2^2 = x_1^2(x_2^2 + 1) + (x_2^2 + 1) = (x_2^2 + 1)\cdot(x_1^2 + 1)$. $(x_2^2 + 1)(x_1^2 + 1)$ – число составное.

(021) Ума палата. № 21. Обозначим последовательно числа, стоящие в вершинах пятиугольника: x, y, z, t, u. По условию задачи получаем систему пяти линейных уравнений с пятью неизвестными:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ y + z = 2, \\ z + t = 3, \\ t + u = 4, \\ u + x = 5. \end{cases}$$



$2(x + y + z + t + u) = 15$,

$\underline{x+y}+\underline{z+t}+u=7{,}5$,

$1+3+u=7{,}5$,

$u=3{,}5$; $x=1{,}5$; $t=0{,}5$; $z=2{,}5$; $y=-0{,}5$.

Ответ: $x=1{,}5$; $y=-0{,}5$; $z=2{,}5$; $t=0{,}5$; $u=3{,}5$.

(022) Ума палата. № 22.

1) $a=1\underbrace{22\ldots22}_{n\text{ двоек}}1=\underbrace{11\ldots11}_{n-1}*10+\underbrace{11\ldots11}_{n+1}=10b+b=11b$

2) $\underbrace{11\ldots11}_{n+1}*11=999999999*k.$

$\underbrace{11\ldots11}_{n+1}*11=9*111111111*k$

$b=\underbrace{11\ldots11}_{n+1}:9 \quad n*b=\underbrace{11\ldots11}_{n+1}:111111111$

3) $n+1$ кратно 9, $n+1$ принимает значения 9, 18, 27, 36, 45, 54, …

Получаем $b=\underbrace{11\ldots11}_{9}\underbrace{11\ldots11}_{9}\underbrace{11\ldots11}_{9}\ldots=$

$\underbrace{11\ldots11}_{9}*(\underbrace{100000000}_{9}\underbrace{100000000}_{9}\underbrace{100000000}_{9}\ldots)=$

$=\underbrace{111111111}_{9}*c$

4) c делится на 9, поэтому число единиц в числе c должно быть кратно 9. Минимальное число единиц должно быть 9.

$9\times9=81=n+1$, $n=80$.

Ответ: 80.

(023) Ума палата. № 23. Представим число 1980 в виде произведения двух взаимно простых чисел 99 и 20.

$1980=99\cdot20$, $D(99,20)=1$.

Значит, достаточно доказать делимость на 20 и на 99.

Число оканчивается на 80, значит, делится на 20.

Найдем S_1 – сумму первых цифр.

$S_1 = 1 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60 + 70 + 8 = 279.$

S_2 – сумма вторых цифр.

$S_2 = 9 + 6 \cdot 45 = 279.$

По признаку делимости на 9: $279 + 279 = 558 \vdots 9$.

$279 - 279 = 0.$

Поэтому число делится на 11.

Итак, число делится на 20, 9 и 11, значит, делится на 1980.

О т в е т: делится на 1980.

(024) Ума палата. № 24. Пусть $x \geq 27$, тогда

$4^{27} + 4^{1000} + 4^x = 4^{27}(1 + 4^{973} + 4^{x-27}) = (2^{27})^2 \cdot (1 + 2 \cdot 2^{1945} + (2^y)^2)$

при $y = 1945$, т. е. при $x = 1972$ наше выражение полный квадрат.

Если $x > 1972$, т. е. $y > 1945$, то

$(2^y)^2 < 1 + 2 \cdot 2^{1945} + (2^y)^2 < (1 + 2^y)^2.$

В этом случае выражение $1 + 2 \cdot 2^{1945} + (2^y)^2$ строго заключено между двумя последовательными квадратами и само полным квадратом не является, а с ним и все выражение $4^{27} + 4^{1000} + 4^x$ не является полным квадратом

О т в е т: 1972.

(025) Ума палата. № 25.

Пусть x р. – было положено и прошло t лет на 2 % вкладе.

$$\begin{cases} x + 0,02 \cdot x \cdot t = 8502, \\ 0,03x(t-1) = 819. \end{cases} \qquad \frac{1 + 0,02t}{0,03t - 0,03} = \frac{2834}{273},$$

$$\frac{100 + 2t}{3t - 3} = \frac{2834}{273}, \quad 27300 + 546t = 8502t - 8502,$$

$7956t = 35802, \quad t = 4,5.$

$$Y = \frac{819}{0,03 \cdot 3,5} = \frac{27300}{3,5} = 7800 \text{ р.}$$

О т в е т: 7800 р.

§ 2. НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

(026) Числа. № 1. Любое простое число большее трех делится на 3 с остатком 1 или 2. Значит, p может быть вида либо $3k+1$, либо $3k+2$. Рассмотрим оба случая.

1) Пусть $p = 3k+1$, тогда $10(3k+1)^2 - 3(3k+1) + 2 = 10(9k^2+6k+1) - 9k - 1 = 90k^2 + 60k + 10 - 9k - 1 = 90k^2 + 51k + 9 = 3(30k^2 + 17k + 3)$. Значит, данное число составное.

2) Пусть $p = 3k+2$, тогда

$10(3k+2)^2 - 3(3k+2) + 2 = 10(9k^2 + 12k + 4) - 9k - 4 = 90k^2 + 120k + 40 - 9k - 4 = 90k^2 + 111k + 36 = 3(30k^2 + 37k + 13)$. Значит, число составное.

Таким образом, при любом простом $p > 3$ число $10p^2 - 3p + 2$ составное.

(027) Числа. № 2. Для того чтобы дробь была натуральной, необходимо, чтобы 89 нацело делилось на $3m + 7n$. 89 – простое число, значит $3m + 7n = 1$ или $3m + 7n = 89$. $3m + 7n = 1$ – невозможно, так как m и n должны быть натуральными.

Тогда $3m + 7n = 89$.

$n = \dfrac{89 - 3m}{7}$. Методом полного перебора находим натуральные значения n. При $m = 4, 11, 18, 25$ (период $T = 7$) соответственные значения n будут равны 11, 8, 5, 2 ($T = 3$). Наименьшая разница будет равна 3.

Ответ: 3

(028) Числа. № 3.

$5^{5n+1} + 4^{5n+2} + 3^{5n} = 5 \cdot 3125^n + 16 \cdot 1024^n + 243^n$.

3125^n при делении на 11 имеет остаток 1.

$5 \cdot 3125^n$ при делении на 11 имеет остаток 5.

1024 при делении на 11 имеет остаток 1.

1024^n при делении на 11 имеет остаток 1.

$16 \cdot 1024^n$ при делении на 11 имеет остаток 16 или 5.

243^n при делении на 11 имеет остаток 1.

Значит, $5 \cdot 3125^n + 16 \cdot 1024^n + 243^n$ при делении на 11 имеет остаток $5 + 5 + 1 = 11$ равно 0.

Получаем: $5^{5n+1} + 4^{5n+2} + 3^{5n}$ нацело делится на 11.Что и требовалось доказать.

(029) Числа. № 4. Пусть d = НОД(m, n), тогда $m = d \cdot m_1$ и $n = d \cdot n_1$, где НОД(m_1, n_1) = 1, то есть числа m_1 и n_1 взаимно простые.

Данные числа можно представить в виде $m = d \cdot m_1$ и $n = d \cdot n_1$, НОК(m, n) = dm_1n_1. По условию задачи получаем:

$d + dm_1n_1 = dm_1 + dn_1,$

$1 + m_1n_1 = m_1 + n_1,$

$1 + m_1n_1 - m_1 - n_1 = 0,$

$1 + m_1n_1 - m_1 + n_1 = 0,$

$(1 - m_1) - n_1(m_1 - 1) = 0,$

$(1 - n_1)(1 - m_1) = 0;$

$n_1 = 1$ или $m_1 = 1$.

Если $n_1 = 1$, то $n = d$, при этом $m = d \cdot m_1$. Значит, m нацело делится на n, что и требовалось доказать.

Если $m_1 = 1$, то $m = d$, $n = d \cdot n_1$.

Значит, n нацело делится на m, что и требовалось доказать.

(030) Числа. № 5. Пусть было x художественных книг. Тогда научно-технических было $\frac{11}{13} \cdot x$ книг. В первом вагоне тогда было $\frac{1}{15} \cdot \frac{11}{13} \cdot x + \frac{18}{19} \cdot x = \frac{3719}{3705} \cdot x$. Во втором вагоне было $\frac{14}{15} \cdot \frac{11}{13} \cdot x + \frac{1}{19} \cdot x = \frac{3121}{3705} \cdot x$. Так как в первом вагоне оказалось более 10000 книг, а во втором менее 10000 книг, то

$$\begin{cases} \dfrac{3719}{3705} \cdot x > 10000, \\ \dfrac{3121}{3705} \cdot x < 10000; \end{cases}$$

$$9962\frac{1322}{3719} < x < 11871\frac{609}{3121}.$$

x делится на 3705, так как количество книг – целое число.

Получаем $x = 3 \cdot 3705 = 11115$. Это единственное натуральное число вида $3705k$, где k – натуральное число, удовлетворяющее найденному интервалу.

Научно-технических книг, таким образом, было $\frac{11}{13} \cdot 11115 =$ $= 9405$.

Ответ: 11115, 9405.

(031) Числа. № 6.

$2^{12} + 2^7 + 1 = 2^{12} + 2 \cdot 2^6 + 1 = (2^6 + 1)^2 = (2^6 + 2 \cdot 2^3 + 1 - 2^4)^2 =$ $= ((2^3 + 1)^2 - 4^2)^2 = ((2^3 + 1 - 4)(2^3 + 1 + 4))^2 = (2^3 - 3)^2(2^3 + 5)^2$. Получили четыре множителя и не важно, что среди них две пары одинаковых.

Ответ: $(2^3 - 3)(2^3 - 3)(2^3 + 5)(2^3 + 5)$.

(032) Числа. № 7. Разложим число 2008 на множители. $2008 =$ $= 8 \cdot 251$, где 251 – простое число. $2008 = 2 \cdot 4 \cdot 251$.

$2 + 4 + 251 = 257$. Для получения суммы, равной нулю, выберем 257 раз число (–1). Получилось 3 + 257 слагаемых. Остается найти еще $2008 - 260 = 1748$ слагаемых, которые не должны изменить ни найденной суммы, ни найденного произведения. Проблема решается, если взять 874 единицы и 874 числа, равных (–1). Все 2008 целых чисел найдены: числа 251, 4 и 2 взяты по одному разу, единица выбрана 874 раза, а –1 будет встречаться 1131 раз. Общее количество слагаемых $1 + 1 + 1 +$ $+ 874 + 1131 = 2008$, при этом их сумма равна нулю, а произведение равно 2008.

Ответ: Можно. Числа 251, 4 и 2 взяты по одному разу, единица выбрана 874 раз, а -1 будет встречаться 1131 раз.

(033) Числа. № 8.

$n^3 + 3n^2 - n - 3 = n^2(n + 3) - (n + 3) = (n + 3)(n^2 - 1) = (n + 3)(n + 1)(n - 1)$. Возьмем теперь нечетное число $n = 2k + 1$. Получаем: $(2k + 4)(2k + 2) \cdot 2k = 8k(k + 1)(k + 2)$. Из двух последовательных натуральных чисел одно кратно 2, значит, данное число кратно 16, а из трех последовательных натуральных чисел одно кратно 3, значит, данное число кратно 3 и делится на 48.

(034) Числа. № 9. Докажем, что если число $N = abc$ делится на 37, то в этом случае число $M - bca$ также делится на 37.

Имеем: $N = 100a + 10b + c = 37k$, отсюда: $c = 37k - 100a - 10b$. Тогда: $M = 100b + 10c + a = 100b + 10\ (37k - 100a - 10b) + a = 370k - 999a = 37(10k - 27)$. Последнее равенство доказывает, что M делится на 37. Значит, в трехзначном числе, делящемся на 37, можно переставить цифры так, чтобы полученное число тоже делилось на 3.

Ответ: Можно.

(035) Числа. № 10. Наименьшее общее кратное чисел 2, 3 и 5 будет 30. От 1 до 30 имеется 8 чисел, удовлетворяющих условию задачи: 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. В любой следующей последовательности из 30 последовательных натуральных чисел будет ровно 8 чисел, удовлетворяющих условию задачи. $23091942 = 769731 \cdot 30 + 12$. В 769731 периодах находится $769731 \cdot 8 = 6157848$ искомых чисел. В двенадцати оставшихся числах расположено ещё три искомых числа. Таким образом, всего на числовом отрезке от 1 до 23091942 будет всего 6157851 таких чисел, которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5.

Ответ: 6157851.

(036) Числа. № 11. Применим формулу разложения на множители выражения $a^n - b^n$.

$\grave{a}^n - 1 = a^n - 1^n = (a-1)(a^{n-1} + ...)$. Число $(a^n - 1)$ нацело делится на $(a - 1)$. Число a^n+1 простое, значит, $a = 2$. При $a = 2$ получаем, что $2^n + 1$ и $2^n - 1$ – простые. Число 2^n не может быть кратно трем.

Если $2^n = 3h + 1$, то $2^n - 1 = 3h + 1 - 1 = 3h$. $2^n - 1$ в этом случае делится на три.

Если $2^n = 3h - 1$, то $2^n + 1 = 3h - 1 + 1 = 3h$. $2^n + 1$ в этом случае делится на три.

Значит, при нечетном n $2^n + 1$ делится нацело на 3, при четном n $2^n - 1$ делится нацело на 3.

Таким образом, возможен только один вариант: $2^n - 1 = 3$, $2^n = 4$, $n = 2$. Получается единственная искомая пара простых чисел (3; 5).

Ответ: (3; 5).

(037) Числа. № 12. $n^2 = 10000x + 2001$. Последнее равенство доказывает, что n – нечетное

$(2k+1)^2 = 10000x + 2001,$

$4k^2 + 4k = 10000x + 2000,$

$k(k+1) = 2500x + 500,$

$k(k+1) = 125(20x+4).$

Либо $k = 125t$, либо $k = 125t - 1$.

Наименьшее значение $k = 124$, тогда $n = 249$.

$n^2 = (850-1)^2 = 62500 - 500 + 1 = 62001$.

Ответ: 249.

(038) Числа. № 13. Заменив в выражении все звездочки на плюсы, мы получим, что значение выражения в левой части равно 55. Станем заменять некоторые плюсы на минусы. При этом каждый раз значение выражения будет уменьшаться на четное число. То есть значение выражения, стоящего слева, всегда будет нечетным числом. Значит, четное число 0 мы получить не сможем.

Ответ: Нельзя.

(039) Числа. № 14. Пусть 2^{1000} – m-значное число, и 5^{1000} – n-значное число. Это означает, что $10^{m-1} < 2^{1000} < 10^m$ и $10^{n-1} < 5^{1000} < 10^n$. Перемножив эти неравенства, мы получим $10^{n+m-2} < 10^{1000} < 10^{m+n}$. Откуда следует, что искомое число цифр $m + n = 1000 + 1 = 1001$.

Ответ: 1001 цифра.

(040) Числа. № 15. Пусть простых чисел конечное число (n штук): $p_1, p_2, \dots, p_n$. Тогда рассмотрим число $A = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$. Но оно не делится ни на одно из чисел $p_1, p_2, \dots, p_n$. Значит, оно делится только на себя и на единицу, то есть оно – тоже простое. Противоречие.

(041) Числа. № 16. Заметим, что данное число можно представить в виде произведения двух чисел, первое из которых есть число, содержащее 9 подряд единиц, а второе состоит из трех единиц, между первой и второй единицей вставлено восемь нулей и между второй и третьей единицей еще восемь нулей. Получаем, используя признаки делимости на девять и на три, что первый сомножитель делится на 9, а второй – на 3. Поэтому произведение делится на 27.

(042) Числа. № 17.

$$\frac{(2a+1)^2-(2b+1)^2}{(2a+1)^2+(2b+1)^2}=\frac{(2a+1-2b-1)(2a+1+2b+1)}{4a^2+4b^2+4a+4b+2}=$$

$$=\frac{2(a-b)\cdot 2(a+b+1)}{2(2a^2+2b^2+2a+2b+1)}=\frac{4(a-b)(a+b+1)}{2(2(a^2+b^2+a+b)+1)}.$$

Так как знаменатель дроби $2k$, где $k = 2(a^2 + b^2 + a + b) + 1$ – нечетное число, то дробь сокращается на 2, но не сокращается на 4.

(043) Числа. № 18.

1) $D(7, 8, 9) = 1$, $K(7, 8, 9) = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$.

2) $523000 = 504 \cdot 1037 + 352$,

$504 - 352 = 152$.

3) $523000 + 152 = 523152 \vdots 504$.

4) $523152 + 504 = 523656$.

Если прибавить еще 504, то получится 524160.

Ответ: 523152, 523656.

(044) Числа. № 19.

1) $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$.

x – сумма цифр на четных местах, y – сумма цифр на нечетных местах.

$$\begin{cases} y - x = 11, \\ y + x = 45. \end{cases} \qquad 2y = 56,\ y = 28,\ x = 17.$$

Случай 39 и 6 не подходит, так как цифры не дают в сумме 6. Значит $x = 28$, $y = 17$. Таких групп много.

2) Найдем наибольшее из них.

9 $\underline{8}$ 7 $\underline{6}$ 5 4 …

$9 + 7 + 5 = 21$. Остается $28 - 21 = 7$,

7 из двух слагается как $5 + 2$ (не подходит), $4 + 3$, $6 + 1$ (не подходит).

Получили, старшая группа 9, 7, 5, 4, 3; младшая – 8, 6, 2, 1, 0.

Наибольшее число – 9876543210.

3) Найдем наименьшее число.

$\underline{1}$ 0 $\underline{2}$ 3 4 5 6 7 8 9

Если можно поставить 4, то $1 + 2 + 4 = 7$, $17 - 7 = 10$.

<u>1 0 2 3</u> Чтобы сохранить 1023 вставляем 5.

$\underline{1}$ 0 $\underline{2}$ 3 5 $1 + 2 + 5 + x + y$, $x + y = 9$ или $x + y = 20$ (нет).

$x + y = 9$ $1 + 8, 2 + 7, 3 + 6, 4 + 5$. Все не подходят.

Сохранить 1023 не удалось.

$0\ \underline{\underline{2}}\ 4$

$1 + 2 + 3 + 5 + 6 = 17$,

$0 + 4 + 7 + 8 + 9 = 28$.

Наименьшее число – 1024375869.

Ответ: 9876543210; 1024375869.

(045) Числа. № 20. Ответ: 3211000.

(046) Числа. № 21. Ответ: 6210001000.

(047) Числа. № 22. 5; 7; 9; 11; 13; 15; <u>17; 19; 21; 23</u>; 25.

Данный участок не содержит числа, оканчивающегося на 5. Значит, эти числа можно представить в виде $10t - 3$, $10t - 1$, $10t + 1$, $10t + 3$.

$$(10t - 3)(10t + 3)(10t - 1)(10t + 1) = (100t^2 - 9)(100t^2 - 1) =$$
$$= 10000t^4 - 900t^2 - 100t^2 + 9 = 10000t^4 - 1000t^2 + 9 =$$
$$= 1000(10t^4 - - t^2) + 9.$$

Значит, произведение будет иметь вид $xxx\ldots009$. Предпоследняя цифра – 0.

Ответ: 0.

(048) Числа. № 23. Рассмотрим все «трехзначные» числа от 1 до 999, представляя двузначные как $0\alpha\beta$, а однозначные 00α. Итак, имеем число $\overline{xyz}$, в котором каждая цифра принимает девять значений 0, 1, 2 … 8. $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ чисел, не содержащих девяток. С учетом числа 1000 всего $999 - 728 = 271$ число содержит девятки (000 – не натуральное число $729 - 1 = 728$).

Ответ: 271.

(049) Числа. № 24. Можно найти несколько решений этой задачи, основанных на признаках делимости чисел.

1) Признак делимости на 11. Рассмотрим разность между суммой цифр, стоящих на нечетных местах, и суммой цифр,

стоящих на четных местах: $(6 + 6 + 6 + 3 + 5) - (4 + 9 + 9 + 2 + 0) = 26 - 24 = 2$, 2 не делится на 11. Значит, умножено неверно.

2) Признак делимости на 3. Рассмотрим сумму цифр: $6 + 4 + 6 + 9 + 6 + 9 + 3 + 2 + 5 + 0 = 50$. 50 не делится на 3.

3) Признак делимости на 25. Число оканчивается на 50, значит, оно делится на 25, $25 = 5 \cdot 5$, а в данном произведении только одна пятерка.

4) Признак: $2 \cdot 5 = 10$,

остается $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 = 646969325$;

а) левая не делится на 5, а правая оканчивается 5 и, значит, делится на 5;

б) найдем последнюю цифру произведения

$3 \cdot 7 \ldots 1 \cdot 11 \ldots 1 \cdot 13 \ldots 3 \cdot 17 \ldots 1 \cdot 19 \ldots 9 \cdot 23 \ldots 7 \cdot 29 = \ldots 3$. Должно оканчиваться на 3, а не на 5.

(050) Числа. № 25. Пусть $2k - 4$, $2k - 2$, $2k$, $2k + 2$, $2k + 4$, $2k + 6$ – шесть последовательных чётных чисел.

Тогда $(2k - 4)^2 + (2k - 2)^2 + (2k)^2 + (2k + 2)^2 + (2k + 4)^2 + (2k + 6)^2$ сумма их квадратов.

$4k^2 - 16k + 16 + 4k^{2} - 8k + 4 + 4k^2 + 4k^2 + 8k + 4 + 4k^2 + 16k + 16 + 64k^2 + 24k + 36 = 24k^2 + 24k + 32 + 36 + 8 = 24k^2 + 24k + 76$. Это число делится на 4, значит, четырехзначное число тоже будет делиться на 4. Таких чисел только два: либо 4444, либо 8888.

Рассмотрим 2 случая:

1) $24k^2 + 24k + 76 = 4444$. Разделим обе части уравнения на 24:

$k^2 + k - 182 = 0$.

Отсюда $k = -14$ или $k = 13$.

Тогда искомые числа будут

при $k = -14$ $\{-32; -30; -28; -26; 24; 22\}$;

при $k = 13$ $\{22; 24; 26; 28; 30; 32\}$.

2) $24k^2 + 24k + 76 = 8888$.

$6k^2 + 6k = 2203$. В первой части уравнения стоит чётное число, а во второй части уравнения стоит нечётное число. Значит, решений нет.

Ответ: 22, 24, 26, 28, 30, 32 или –32, –30, –28, –26, –24, –22.

(051) Числа. № 26. Пусть $n^2 + 5n + 16 = 169k$, $k \in N$, $n \in N$.

$n^2 + 5n + 16 - 169k = 0$.

$D = 25 - 4(16 - 169k) = 25 - 64 + 1676k = 676k - 39$.

$26^2k - 39 = t^2$,

$4 \cdot 13^2k - 13 \cdot 3 = t^2$,

$13(52k - 3) = t^2, \quad t = 13s$,

$13(52k - 3) = 169s^2$,

$52k - 3 = 13s^2$,

$52k - 13s = 3$, $13(4k - s^2) = 3$.

Левая часть уравнения делится нацело на 13, а правая часть уравнения не делится на 13, поэтому равенство невозможно. Значит, $n^2 + 5n + 16$ ни при каком значении n не делится на 169.

(052) Числа. № 27. Пусть искомое число $\overline{xyzt}$. Тогда $21 \cdot \overline{xyzt} = 21^3m^3$. $\overline{xyzt} = 441m^3$.

при $m = 1$ $\overline{xyzt} = 441$ – трехзначное. Быть не может.

при $m = 3$ $\overline{xyzt} = 441 \cdot 27 = 11907$ – пятизначное.

при $m > 4$ $\overline{xyzt}$ – пятизначное.

Единственное решение при $m = 2$.

$\overline{xyzt} = 441 \cdot 8 = 3528$.

Ответ: 3528.

(053) Числа. № 28.

1) Пусть $a = 6k + e$, $a^3 = 216k^3 + 108k^2e + 18ke^2 + e^3 =$

$$= \left| \begin{matrix} 1^3 = 1; 2^3 = 6 + 2; 3^3 = 27 = 6 \cdot 3 + 3 \\ 4^3 = 64 = 10 \cdot 6 + 4; 5^3 = 125 = 120 + 5 \end{matrix} \right| = 6t + e.$$

Куб числа при делении на 6 дает тот же остаток, что и само число.

2) $a = a^3 - 6n$.

3) $6n = (n+1)^3 + (n-1)^3 - 2n^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + n^3 - 3n^2 + 3n - 1 - 2n^3 = 6n$.

Итак, $6n = (n+1)^3 + (n-1)^3 + (-n)^3 + (-n)^3$.

4) Значит, $a = a^3 - (n+1)^3 - (n-1)^3 + n^3 + n^3$

Что и требовалось доказать.

(054) Числа. № 29. $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Применяем метод математической индукции.

$$S_{k+1} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = (k+1)(\frac{k(2k+1)}{6} + k + 1) =$$

$$= (k+1)\frac{2k^2 + k + 6k + 6}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} =$$

$$= \frac{(k+1)(2k + 4k + 3k + 6)}{6} =$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+1)}{6}.$$

Ответ: $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(055) Числа. № 30.

1) $x^2 = \ldots 09$. $x = 10t + 3$ или $x = 10k + 7$.

2) Пусть $x = 10k + 7$, тогда

$(10k + 7)^2 = 100k^2 + 140k + 49 = 100x^2 + 20(7k + 2) + 9$.

$7x + 2$ должно быть кратно пяти.

Значит $k = 10l + 4$ или $k = 10l + 9$.

Вообще $k = 5S + 4$, значит, $x = 10(5S + 4) + 7$, $x = 50S + 47$.

$(50S + 47)^2 = 2500S^2 + 4700S + 2209 = (25S^2 + 47S + 22)100 + 9$.

$y = 25S^2 + 47S + 22 = S(25S + 47) + 22$.

Если S – четное, то y – четное.

Если S – нечетное, то $25S + 47$ – четное и y – четное.

y всегда четно, что и требовалось доказать.

3) Пусть $x = 10k + 3$.

$(10k + 3)^2 = 100k^2 + 60k + 9$.

k кратно 5 $k = 5x$.

$x = 50x + 3$, $(50x + 3)^2 = 2500x^2 + 300x + 9 = (25x^2 + 3x)100 + 9$.

$y = 25x^2 + 3x = x(25x + 3)$.

Если x – четное, то y – четное.

Если x – нечетное, то $25x + 3$ – четное и y – четное.

Получили, что y всегда четно, что и требовалось доказать.

§ 3. УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

(056) Уравнения. № 1.

Замечаем, что $x = -1$ является корнем данного уравнения. На самом деле: $23(-1)^2 + 2010(-1) + 1987 = 0$. $0 = 0$ – верно. Значит, $x_1 = -1$. Для уравнения, имеющего корни x_1 и x_2, по теореме Виета справедливо равенство: $x_1x_2 = \frac{1987}{23}$. Поэтому $x_2 = -\frac{1987}{23}$.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1987}{23}$.

(057) Уравнения. № 2. Легко заметить, что корнем данного уравнения является $x = \sqrt{3}$. Подставим этот корень в данное уравнение $3\sqrt{3} - 3 - 3\sqrt{3} + 3 = 0$, $0 = 0$ – верно. Выделим скобку $(x - \sqrt{3})$.

$x^3 - \sqrt{3}x^2 - x^2 + 3 = 0$, $x^2(x - \sqrt{3}) - x^2 + x\sqrt{3} - x\sqrt{3} + 3 = 0$,

$x^2(x - \sqrt{3}) - x(x - \sqrt{3}) - \sqrt{3}(x - \sqrt{3}) = 0$,

$(x - \sqrt{3})(x^2 - x - \sqrt{3}) = 0$,

$x = \sqrt{3}$, или $x^2 - x - \sqrt{3} = 0$,

$D = 1 + 4\sqrt{3}$.

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}}{2},$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}}{2}, \; x_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}}{2}.$$

Получили $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}}{2}$, $x_3 = \dfrac{1 - \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}}{2}$.

О т в е т: $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}}{2}$, $x_3 = \dfrac{1 - \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}}{2}$.

(058) Уравнения. № 3. Так как подкоренное выражение для корня четной степени неотрицательно, то $x \geq 0$.

$x^2 - 5x + 6 = 2(x - 3)\sqrt{x}$,

$(x - 2)(x - 3) - 2(x - 3)\sqrt{x} = 0$,

$(x - 3)(x - 2 - 2\sqrt{x}) = 0$,

$x = 3$ или $x - 2\sqrt{x} - 2 = 0$.

$x - 2\sqrt{x} - 2 = 0$. Пусть $\sqrt{x} = z$, $z \geq 0$.

$z^2 - 2z + 1 - 3 = 0$,

$(z - 1)^2 = 3$,

$z - 1 = \pm\sqrt{3}$, $z = 1 \pm \sqrt{3}$,

$z_1 = 1 - \sqrt{3} < 0$, $z_2 = 1 + \sqrt{3}$.

$\sqrt{\breve{o}} = 1 + \sqrt{3}$,

$x = 1 + 2\sqrt{3} + 3$, $x = 4 + 2\sqrt{3}$.

Условие $x \geq 0$ выполнено.

О т в е т: $x = 3$, $x = 4 + 2\sqrt{3}$.

(059) Уравнения. № 4. Разложим данный многочлен на множители, а затем, приравняв к нулю, решим уравнение:

$2x^5 + x^4 - 10x^3 - 5x^2 + 8x + 4 = x^4(2x+1) - 5x^2(2x+1) + 4(2x+1) =$
$= (2x+1)(x^4 - 5x^2 + 4);$

$(2x+1)(x^4 - 5x^2 + 4) = 0,$

$$\left[\begin{array}{l} 2x+1=0, \\ x^4 - 5x^2 + 4 = 0. \end{array}\right.$$

Ответ: $-1/2, -1, -2, 1, 2.$

(060) Уравнения. № 5. Представив слагаемое $-7x$ в виде суммы $-x + (-6x)$, получим:

$x^3 - x - 6x + 6 = 0,$

$x(x^2 - 1) - 6(x - 1) = 0,$

$x(x-1)(x+1) - 6(x-1) = 0,$

$(x-1)(x^2 + x - 6) = 0,$

$x = 1$ или $x^2 + x - 6 = 0.$

Решаем квадратное уравнение: $x_2 = 2$, $x_3 = -3$.

Ответ: 1; 2; –3.

(061) Уравнения. № 6. Если $x = 0$, то $0 + 0 = -1{,}5$ ложно. Поэтому $x \neq 0$. Разделим числитель и знаменатель каждой дроби на x.

$$\frac{4}{x+1+\dfrac{3}{x}} + \frac{5}{x-5+\dfrac{3}{x}} = -1{,}5\,.$$

Обозначим $x + \dfrac{3}{x} = z$, тогда

$$\frac{4}{z+1} + \frac{5}{z-5} + \frac{3}{2} = 0\,,$$

$$\frac{8z - 40 + 10z + 10 + 3z^2 - 12z - 15}{2(z+1)(z-5)} = 0\,,$$

$$\frac{3z^2 + 6z - 45}{(z+1)(z-5)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 + 2z - 15 = 0, \\ z \neq -1, \\ z \neq 5. \end{cases}$$

$z^2 + 2z - 15 = 0,$

$$\begin{cases} z_1 z_2 = -15, \\ z_1 + z_2 = -2. \end{cases}$$

$z_1 = -5,\ z_2 = 3.$

1) $z = -5,$

$$x + \frac{3}{x} = -5, \qquad x \neq 0.$$

$x^2 + 5x + 3 = 0$

$D = 25 - 12 = 13.$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

2) $z = 3,$

$$x + \frac{3}{x} = 3,$$

$x^2 - 3x + 3 = 0$

$D = 9 - 12 < 0.$

Ответ: $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}.$

(062) Уравнения. № 7. Убедимся, что $x = 0$ не является корнем уравнения. На самом деле

$$\frac{0+0+15}{0-0+15} = \frac{0}{15};\ 1 = 0 \text{ ложно.}$$

Значит $x \neq 0$. Разделим числитель и знаменатель каждой дроби на $x \neq 0$.

$$\frac{x - 12 + \frac{15}{x}}{x - 6 + \frac{15}{x}} = \frac{4}{x - 10 + \frac{15}{x}},$$

Обозначим $x+\dfrac{15}{x}=z$, тогда

$\dfrac{z-12}{z-6}=\dfrac{4}{z-10}$. Видно, что $z \neq 6$, $z \neq 10$.

Получаем $(z-12)(z-10)=4(z-6)$,

$z^2-22z+120-4z+24=0$,

$z^2-26z+144=0$.

$\dfrac{D}{4}=169-144=25$,

$z_{1,2}=13\pm5$, $z_1=8$, $z_2=18$. Условия $z \neq 6$ и $z \neq 10$ выполняются.

Возможны два случая:

1. $z=8$, $x+\dfrac{15}{x}=8$, где $x \neq 0$.

$x^2-8x+15=0$,

$(x-3)(x-5)=0$,

$x=3$, $x=5$.

2. $z=18$, $x+\dfrac{15}{x}=18$, где $x \neq 0$.

$x^2-18x+15=0$,

$\dfrac{D}{4}=81-15=66$.

$x_{1,2}=9\pm\sqrt{66}$.

Ответ: $x=3$, $x=5$, $x=9-\sqrt{66}$, $x=9+\sqrt{66}$.

(063) Уравнения. № 8. $x^2+4x=t$, $x+1=z$, тогда

$(t+z)t=20z^2$,

$t^2+zt-20z^2=0$, $z \neq 0$,

$$\left(\frac{t}{z}\right)^2+\left(\frac{t}{z}\right)-20=0, \qquad h=\frac{t}{z},$$

$h^2+h-20=0,$

$h_1=-5, \quad h_2=4.$

1) $\dfrac{x^2+4x}{x+1}=-5,$

$x^2+4x=-5x-5,$

$x^2+9x+5=0.$

$D=81-20=61$

$x=\dfrac{-9\pm\sqrt{61}}{2}.$

2) $\dfrac{x^2+4x}{x+1}=4,$

$x^2=4.$

$x=-2,\ x=2.$

Ответ: $x=-2,\ x=2,\ x=\dfrac{-9\pm\sqrt{61}}{2}.$

(064) Уравнения. № 9. Пусть $2x-4=z$, тогда

$(z-1)^4+(z+1)^4=2,$

$(z^2-2z+1)^2+(z^2+2z+1)^2=2,$

$z^4+4z^2+1-4z^3+2z^2-4z+z^4+4z^3+1+4z^2+2z^2+4z-2=0,$

$2z^4+12z^2=0,$

$2z^2(z^2+6)=0,$

$z^2=0$ или $z^2=-6,$

$z=0$ нет решений.

Получили $2x-4=0$

$x=2.$

Ответ: 2.

(065) Уравнения. № 10. Это уравнение является возвратным. Если $x = 0$, то получим $1 = 0$ – ложно. Значит $x \neq 0$. Разделим обе части на $x^2 \neq 0$.

$$x^2 - 5x + 8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0,$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 5(x + \frac{1}{x}) + 8 = 0.$$ Пусть $x + \frac{1}{x} = z$.

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = z^2, \ x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2.$$

$z^2 - 2 - 5z + 8 = 0,$

$z^2 - 5z + 6 = 0,$

$(z - 2)(z - 3) = 0,$

$z = 2, z = 3.$

$Z = 2, \ x + \frac{1}{x} = 2,$

$x^2 + 1 = 2x,$

$(x - 1)^2 = 0,$

$x = 1.$

$Z = 3, \ x + \frac{1}{x} = 3,$

$x^2 + 1 = 3x,$

$x^2 - 3x + 1 = 0.$

$D = 9 - 4 = 5,$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, x = 1.$

(066) Уравнения. № 11. Так как на нуль делить нельзя, то

А) $4x^2 - 8x + 7 = 0, \ \frac{D}{4} = 16 - 28 = -12 < 0,$

Б) $4x^2 - 10x + 7 = 0$, $\dfrac{D}{4} = 25 - 28 = -3 < 0$.

ОДЗ: $(-\infty; +\infty)$.

$$\frac{4x}{4x^2 - 8x + 7} + \frac{3x}{4x^2 - 10x + 7} = 1.$$

Учитывая, что $x = 0$ не является корнем данного уравнения, разделим числитель и знаменатель каждой дроби на $x \neq 0$.

$$\frac{4}{4x - 8 + \dfrac{7}{x}} + \frac{3}{4x - 10 + \dfrac{7}{x}} = 1.$$

Пусть $z = 4x + \dfrac{7}{x}$, тогда $\dfrac{4}{z-8} + \dfrac{3}{z-10} = 1$,

$$\frac{4z - 40 + 3z - 24 - z^2 + 18z - 80}{(z-8)(z-10)} = 0,$$

$$\frac{-z^2 + 25z - 144}{(z-8)(z-10)} = 0.$$

Учитывая, что $z \neq 8$ и $z \neq 10$, получаем

$z^2 - 25z + 144 = 0$,

$$\begin{cases} z_1 z_2 = 144, \\ z_1 + z_2 = 25. \end{cases} \qquad z_1 = 9,\ z_2 = 16.$$

Условия $z \neq 8$ и $z \neq 10$ выполнены.

1) $z = 9$.

$4x + \dfrac{7}{x} = 9, x \neq 0$

$4x^2 - 9x + 7 = 0$,

$D = 81 - 4 \cdot 4 \cdot 7 = 81 - 112 = -31 < 0$.

Корней нет.

2) $z = 16$.

$4x + \dfrac{7}{x} = 16,\ x \neq 0.$

$4x^2 - 16x + 7 = 0,$

$\frac{D}{4} = 64 - 28 = 36.$

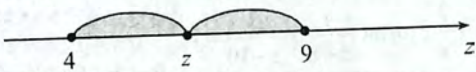
$x_{1,2} = \frac{8 \pm 6}{4}$ $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 3{,}5.$

Ответ: $\{0{,}5; 3{,}5\}$.

(067) Уравнения. № 12. Пусть $x^2 = z$, $z \geq 0$. Тогда

$|z - 9| + |z - 4| = 5.$

Сумма расстояний от z до чисел 9 и 4 равна 5.



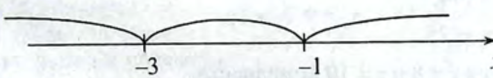
Тогда z лежит на отрезке от [4; 9].

Значит, $4 \leq z \leq 9$, $4 \leq x^2 \leq 9$, $2 \leq |x| \leq 3$.

Значит, $[-3; -2] \cup [2; 3]$.

Ответ: $[-3; -2] \cup [2; 3]$.

(068) Уравнения. № 13. Модули раскрываются относительно $x = -3$ и $x = -1$.



	I	II	III
	$x < -3$	$-3 \leq x \leq -1$	$x > -1$
$\lvert x + 3\rvert$	$-x - 3$	$x + 3$	$x + 3$
$\lvert x + 1\rvert$	$-x - 1$	$-x - 1$	$x + 1$
$\lvert x + 3\rvert + 2\lvert x + 1\rvert$	$-3x - 5$	$-x + 1$	$3x + 5$

I. $x < -3$

$-3x - 5 = 4,$

$-3x = 9$,

$x = -3$, $-3 \notin (-\infty; -3)$ нет решений.

II. $-3 \le x \le -1$

$-x + 1 = 4$, $-x = 3$, $x = -3$, $-3 \in [-3; -1]$.

Получили $x = -3$.

III. $x > -1$

$3x + 5 = 4$, $3x = -1$, $x = -\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3} \in (1; +\infty)$.

Получили $x = -\frac{1}{3}$.

Ответ: $\{-3, -\frac{1}{3}\}$.

(069) Уравнения. № 14. Пусть $|x - 3| = 0$.

Тогда $x - 3 = 0$, $x = 3$.

Получили $0^6 = 0^2$ верно.

$x = 3$ – корень уравнения.

Основание равно 1.

$|x - 3| = 1$,

$x - 3 = 1$ или $x - 3 = 1$,

$x = 4$ или $x = 2$.

Подставив, убедимся, что получаем верное равенство $1 = 1$.

Получили $x = 2$, $x = 4$.

Если $|x - 3| \ne 0$ и $|x - 3| \ne 1$, то в силу монотонности функции $y = a^x$, получаем $x^2 - x = 2$, $x^2 - x - 2 = 0$,

$x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

Получили еще один корень $x = -1$.

Ответ: $\{-1; 2; 3; 4\}$.

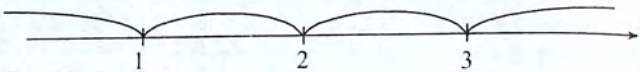
(070) Уравнения. № 15. $x^2 - 4x + 3 = x^2 - 3x - x + 3 = x(x - 3) - (x - 3) = (x - 1)(x - 3)$,

$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2x - 3x + 6 = x(x - 2) - 3(x - 2) = (x - 2)(x - 3)$.

Уравнение имеет вид:

$|(x-1)(x-3)| + |(x-2)(x-3)| = 1.$

Раскроем модули, используя таблицу.



	$x<1$	$1 \le x \le 2$	$2<x<3$	$x \ge 3$
$\|(x-1)(x-3)\|$	x^2-4x+3	$-x^2+4x-3$	$-x^2+4x-3$	x^2-4x+3
$\|(x-2)(x-3)\|$	x^2-5x+6	x^2-5x+6	x^2-5x+6	$-x^2+5x-6$
$\|(x-1)(x-3)\| +$ $+\|(x-2)(x-3)\|$	$-x+3$	$-2x^2+9x-9$	$2x^2+9x-9$	$2x^2-9x+9$

Пусть $x<1$ или $x \ge 3$, тогда уравнение примет вид

$2x^2-9x+9=1,$

$2x^2-9x+8=0,$

$D = 81 - 4 \cdot 2 \cdot 8 = 17.$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{17}}{4},\ x_1 = \frac{9-\sqrt{17}}{4},\ x_2 = \frac{9+\sqrt{17}}{4}.$$

$x_2 \ge 3$ $\qquad \dfrac{9+\sqrt{17}}{4} \ge 3,$

$9+\sqrt{17} \ge 12,$

$\sqrt{17} \ge 3.$ Очевидно.

Повторив данное рассуждение в обратном порядке, получим, что неравенство $x_2 \ge 3$ доказано методом сведения к очевидному.

Получили корень уравнения $x = \dfrac{9+\sqrt{17}}{4}.$

$$x_1 = \frac{9-\sqrt{17}}{4}$$

$\frac{9-\sqrt{17}}{4} > 1,$ $\qquad\qquad$ $\frac{9-\sqrt{17}}{4} < 3,$

$9+\sqrt{17} > 4,$ $\qquad\qquad$ $9+\sqrt{17} < 12,$

$5 > \sqrt{17},$ $\qquad\qquad$ $-\sqrt{17} < 3.$

Значит, x_1 не является корнем уравнения.

$1 \le x \le 2$

Уравнение имеет вид:

$-x + 3 = 1;\ -x = -2;\ x = 2,\ 2 \in [1;\ 2].$

Значит, $x = -2$ – корень данного уравнения.

$2 < x < 3$

Уравнение принимает вид:

$-2x^2 + 9x - 9 = 1,$

$2x^2 - 9x + 10 = 0,$

$D = 81 - 80 = 1,$

$x_{1,2} = \frac{9 \pm 1}{4},\ x_1 = 2,\ x_2 = 2{,}5.$

$2 \notin (2;\ 3) \quad 2{,}5 \in (2;\ 3).$

Получили $x = 2{,}5$ – корень данного уравнения.

Ответ: $x = 2;\ x = 2{,}5;\ x = \frac{9+\sqrt{17}}{4}.$

(071) Уравнения. № 16. Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно переменной y.

$(15x^2 + 28x + 5)y^2 - 2(4x^2 + 19x + 12)y + (x + 4)^2 = 0.$

Разложим квадратные трехчлены на линейные множители.

а) $15x^2 + 28x + 5 = (3x + 5)(5x + 1),$

$\frac{D}{4} = 146 - 75 = 121,$

$x = \frac{-14 \pm 11}{15},\ x_1 = -\frac{5}{3},\ x_2 = -\frac{1}{5}.$

б) $4x^2 + 19x + 12 = (x + 4)(4x + 3)$,

$D = 361 - 192 = 169$.

$$x = \frac{14 \pm 13}{8},\ x_1 = -4,\ x_2 = -\frac{3}{4}.$$

$(3x + 5)(5x + 1)y^2 - 2(x + 4)(4x + 3)y + (x + 4)^2 = 0$.

$$\frac{D}{4} = (x + 4)^2(4x + 3)^2 - (x + 4)^2(15x^2 + 28x + 5) = (x + 4)^2(16x^2 +$$

$$+ 24x + 9 - 15x^2 - 28x - 5) = (x + 4)^2(x^2 - 4x + 4) = (x + 4)^2(x - 2)^2.$$

$$y_{1,2} = \frac{(4x^2 + 19x + 12) \pm (x^2 + 2x - 8)}{15x^2 + 28x + 5},$$

$$y_1 = \frac{3x^2 + 17x + 20}{(2x + 5)(5x + 1)} = \frac{(3x + 5)(x + 4)}{(3x + 5)(5x + 1)} = \frac{x + 4}{5x + 1},$$

$$y_2 = \frac{5x^2 + 21x + 4}{(2x + 5)(5x + 1)} = \frac{(5x + 1)(x + 4)}{(3x + 5)(5x + 1)} = \frac{x + 4}{3x + 5}.$$

1) $y = \dfrac{x + 4}{3x + 5}$. Найдем $3y$ и выделим целую часть.

$$3y = \frac{3x + 12}{3x + 5},\ 3y = \frac{3x + 5}{3x + 5} + \frac{7}{3x + 5},\ 3y = 1 + \frac{7}{3x + 5}.$$

Число 7 имеет ровно четыре целых делителя: –7, –1, 1, 7. Рассмотрим эти четыре случая.

$3x + 5 = 7$,	$3x + 5 = -7$,	$3x + 5 = 1$,	$3x + 5 = 1$,
$3x = 2$,	$3x = -12$,	$3x = -4$,	$3x = -6$,
$x \notin Z$.	$x = -4$,	$x \notin Z$.	$x = -2$,
	$y = 0$.		$y = -2$.

2) $y = \dfrac{x + 4}{5x + 1}$,

$$5y = \frac{5x + 20}{5x + 1},\ 5y = 1 + \frac{19}{5x + 1}.$$

Число 19 имеет ровно четыре целых делителя: –19, –1, 1, 19. Рассмотрим эти четыре случая.

$5x+1=19$,	$5x+1=-19$,	$5x+1=1$,	$5x+1=-1$,
$5x=18$,	$5x=-20$,	$5x=0$,	$5x=-2$,
$x\notin Z$.	$x=-4$,	$x=0$,	$x\notin Z$.
	$y=0$.	$y=4$.	

Ответ: (–2; – 2); (0; 4); (–4; 0).

(072) Уравнения. № 17. $\sqrt[3]{(x+1)^2}+2\sqrt[3]{(x-1)^2}=3\sqrt[3]{x^2-1}$,

$\sqrt[3]{(x+1)^2}-3\sqrt[3]{(x+1)(x-1)}+2\sqrt[3]{(x-1)^2}=0$.

Если $x=1$, тогда уравнение принимает вид: $\sqrt[3]{4}=0$, а это равенство ложно. Значит, $x\neq 1$ и $\sqrt[3]{(x-1)^2}\neq 0$. Разделим обе части уравнения на $\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

$$\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}-3\cdot\frac{\sqrt[3]{(x+1)(x-1)}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}+2=0,$$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}-3\cdot\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+2=0.$$

Пусть $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=z$, тогда уравнение принимает вид:

$z^2-3z+2=0$,

$\begin{cases} z_1z_2=2, \\ z_1+z_2=3; \end{cases}$ $\quad z_1=1$ или $z_2=2$.

Возможны 2 случая:

$z=1$. $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=1$, $\frac{x+1}{x-1}=1$, $x+1=x-1$,

$x-x=-2$, $0=-2$ ложно.

$z = 2$. $\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}} = 2$, $\dfrac{x+1}{x-1} = 8$, $x + 1 = 8(x - 1)$, $x + 1 = 8x - 8$,

$x - 8x = -8 - 1$, $-7x = -9$, $x = \dfrac{9}{7}$.

П р о в е р к а:

Пусть $x = \dfrac{9}{7}$, тогда $\sqrt[3]{\dfrac{16^2}{7^2}} + 2\sqrt[3]{\dfrac{4}{7^2}} = 3\sqrt[3]{\dfrac{81}{49} - 1}$,

$\dfrac{\sqrt[3]{16^2}}{\sqrt[3]{49}} + 2 \cdot \dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{49}} = 3 \cdot \dfrac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{49}}$,

$\sqrt[3]{44} + 2\sqrt[3]{4} = 3 \cdot \sqrt[3]{8 \cdot 4}$,

$4\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{4} = 6\sqrt[3]{4}$,

$6\sqrt[3]{4} = 6\sqrt[3]{4}$ верно.

О т в е т: $x = 1\dfrac{2}{7}$.

(073) Уравнения. № 18. $ax^2 + bx + c = 0$. Пусть x_1 и x_2 – корни данного квадратного уравнения. По теореме Виета получаем:

$x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$, $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$. Возведем в квадрат обе части второго равенства.

1) $x_1^2 + x_2^2 = \dfrac{b^2}{a^2} - \dfrac{2c}{a} = \dfrac{b^2 - 2ac}{a^2}$;

2) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2) = -\dfrac{b}{a}\left(\dfrac{b^2 - 2ac}{a^2} - \dfrac{c}{a}\right) =$

$= -\dfrac{b}{a}\dfrac{b^2 - 3ac}{a^2} = \dfrac{3abc - b^3}{a^3}$.

О т в е т: $\dfrac{3abc - b^3}{a^3}$.

(074) Уравнения. № 19. $2x + 1 = xy - 7y$. Выразим y через x, получаем:

$$y = \frac{2x+1}{x-7} = \frac{2x-14+15}{x-7} = 2 + \frac{15}{x-7}.$$

$\frac{15}{x-7}$ – целое число, поэтому 15 нацело делится на $x - 7$. Всего возможно 8 различных случаев, поскольку делителями числа 15 будут –15, –5, –3, –1, 1, 3, 5, 15.

$x - 7 = 1$,	$x - 7 = 3$,	$x - 7 = 5$,	$x - 7 = 15$,
$x = 8$,	$x = 10$,	$x = 12$,	$x = 22$,
$y = 17$.	$y = 7$.	$y = 5$.	$y = 3$.
$x - 7 = -1$,	$x - 7 = -3$,	$x - 7 = -5$,	$x - 7 = 15$,
$x = 6$,	$x = 4$,	$x = 2$,	$x = -8$,
$y = -13$.	$y = -3$.	$y = -1$.	$y = 1$.

Всего 8 решений: (8; 17), (10; 7), (12; 5), (22; 3), (6; –13), (4; –3), (2; –1), (–8; 1).

Ответ: (8; 17), (10; 7), (12; 5), (22; 3), (6; –13), (4; –3), (2; –1), (–8; 1).

(075) Уравнения. № 20. $3x^2 - 7xy + 2y^2 = 3x^2 - 6xy - xy + 2y^2 =$
$= 3x(x - 2y) - y(x - 2y) = (x - 2y)(3x - y) = 0$.

$x = 2y$ или $y = 3x$.

$(2y, y)$, где y – целое, $y \in Z$.

$(x, 3x)$, $x \in Z$.

Ответ: $(2y, y)$, где $y \in Z$, $(x, 3x)$, $x \in Z$.

(076) Уравнения. № 21.

$$\begin{cases} 10x^2 + 5y^2 - 2xy - 38x - 6y + 41 = 0, \\ 3x^2 - 2y^2 + 5xy - 17x - 6y + 20 = 0. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе:

$7x^2 + 7y^2 - 7xy - 21x + 21 = 0,$

$x^2 + y^2 - xy - 3x + 3 = 0,$

$x^2 - yx - 3x + y^2 + 3 = 0,$

$x^2 - (y + 3)x + y^2 + 3 = 0,$

$D = (y + 3)^2 - 4y^2 - 12 = y^2 + 6y + y - 4y^2 - 12 = -3y^2 + 6y - 3 =$
$= -3(y^2 - 2y + 1).$

$D = -3(y - 1)^2.$

Чтобы уравнение имело корни, необходимо, чтобы $D \geq 0$.

$-3(y - 1)^2 \geq 0,$

$(y - 1)^2 \leq 0$, что возможно только при $y = 1$.

Если $y = 1$, то уравнение $x^2 - (y + 3)x + y^2 + 3 = 0$ принимает вид

$x^2 - 4x + 4 = 0,$

$(x - 2)^2 = 0, \quad x - 2 = 0, \quad x = 2.$

Получили (2; 1).

Ответ: (2; 1).

(077) Уравнения. № 22.

$x^4 - (x^{14} - 2x^7y + y^2) = 7,$

$(x^2)^2 - (x^7 - y)^2 = 7,$

$(x^2 + x^7 - y)(x^2 - x^7 + y) = 7.$

Получили

$\begin{cases} x^2 + x^7 - y = 7, \\ x^2 - x^7 + y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + x^7 - y = -7, \\ x^2 - x^7 + y = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + x^7 - y = 1, \\ x^2 - x^7 + y = 7; \end{cases}$

$2x^2 = 8,$	$2x^2 = -8$	$2x^2 = 8,$
$x = 2,$	ложно	$x = 2,$
$y = 131.$		$y = 125.$

$\begin{cases} x^2 + x^7 - y = -1, \\ x^2 - x^7 + y = -7; \end{cases} \quad 2x^2 = -8$ ложно.

Ответ: (2; 131), (2; 125).

(078) Уравнения. № 23. $\begin{cases} \sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{y} = 3, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9. \end{cases}$

Решение:

Пусть $\sqrt[6]{x} = z$, $\sqrt[6]{y} = t$, $t \geq 0$, $z \geq 0$.

Система примет вид:

$$\begin{cases} z + t = 3, \\ z^3 + t^3 = 9; \end{cases} \qquad \begin{cases} z + t = 3, \\ (z+t)(z^2 - zt + t^2) = 9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} z + t = 3, \\ 3(z^2 - zt + t^2) = 9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} z + t = 3, \\ z^2 - zt + t^2 = 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} z + t = 3, \\ z^2 - z(3-z) + (3-z)^2 = 3; \end{cases}$$

$z^2 - 3z + z^2 + 9 - 6z + z^2 - 3 = 0,$

$3z^2 - 9z + 6 = 0,$

$z^2 - 3z + 2 = 0,$

$$\begin{cases} z_1 z_2 = 2, \\ z_1 + z_2 = 3. \end{cases}$$

$z_1 = 1,$ $\qquad z_2 = 2,$

$t_1 = 2.$ $\qquad t_2 = 1.$

Значит, $\sqrt[6]{x} = 1$, $\sqrt[6]{y} = 2$ или $\sqrt[6]{x} = 2$, $\sqrt[6]{y} = 1$,

$x = 1$, $y = 64$ или $x = 64$, $y = 1$.

Ответ: (1; 64), (64; 1).

(079) Уравнения. № 24. $(x^2 + 5x + 3)^2 + 5(x^2 + 5x) + 15 + 3 = x$,

$(x^2 + 5x + 3)^2 + 5(x^2 + 5x + 3) + 3 = x$.

Очень интересный приём: решение одного уравнения с одной переменной сводится к решению системы двух уравнений с двумя переменными.

$$-\begin{cases} x^2 + 5x + 3 = z, \\ z^2 + 5z + 3 = x. \end{cases}$$

$x^2 - z^2 + (x - z) = z - x,$

$(x - z)(x + z) + 5(x - z) + x - z = 0,$

$(x - z)(x + z) + 6(x - z) = 0,$

$(x - z)(x + z + 6) = 0.$

$x - z = 0$ или $x + z + 6 = 0,$

$z = x$ или $z = -x - 6.$

$z = x.$

Первое уравнение примет вид: $x^2 + 5x + 3 = x,$

$x^2 + 4x + 3 = 0,$

$x_1 = -3,\ x_2 = -1.$

$z = -x - 6.$

Первое уравнение примет вид: $x^2 + 5x + 3 = -x - 6,$

$x^2 + 6x + 9 = 0,$

$(x + 3)^2 = 0,$

$x + 3 = 0,$

$x = -3.$

Значит, данное уравнение имеет два корня: $x = -3$, $x = -1$.

Ответ: $x = -3, x = -1$.

(080) Уравнения. № 25. Пусть

$$-\begin{cases} x^2 + 3x - 2 = z, \\ z^2 + 3z - 2 = x. \end{cases}$$

$x^2 - z^2 + 3(x - z) = z - x,$

$(x - z)(x + z) + 3(x - z) + x - z = 0,$

$(x - z)(x + z) + 4(x - z) = 0,$

$x - z = 0$ или $x + z + 4 = 0,$

$z = x$ или $z = -x - 4.$

1) $z = x.$

Первое уравнение примет вид: $x^2 + 3x - 2 = x.$

$x^2 + 2x - 2 = 0$,

$\frac{D}{4} = 1 + 2 = 3$, $\quad x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$.

2) $z = -x - 4$.

Первое уравнение примет вид: $x^2 + 3x - 2 = -x - 4$,

$x^2 + 4x + 2 = 0$,

$\frac{D}{4} = 4 - 2 = 2$, $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}$.

Следовательно, искомое уравнение имеет 4 корня:

$x_1 = -1 - \sqrt{3}$, $x_2 = -2 - \sqrt{2}$, $x_3 = -1 + \sqrt{3}$, $x_4 = -2 + \sqrt{2}$.

Ответ: $x_1 = -1 - \sqrt{3}$, $x_2 = -2 - \sqrt{2}$, $x_3 = -1 + \sqrt{3}$,

$x_4 = -2 + \sqrt{2}$.

(081) Уравнения. № 26. $(x^2 - x + 1)^4 - 10x^2(x^2 - x + 1)^2 + 9x^4 = 0$.

$x^4 \neq 0$, так как при $x = 0$ получаем неверное равенство.

Если $x = 0$, то $1 - 0 + 0 = 0$ ложно.

$$(\frac{x^2 - x + 1}{x})^4 - 10\frac{(x^2 - x + 1)^2}{x^2} + 9 = 0,$$

$$(\frac{x^2 - x + 1}{x})^4 - 10(\frac{x^2 - x + 1}{x})^2 + 9 = 0, \qquad z = (\frac{x^2 - x + 1}{x})^2$$

$z^2 - 10z + 9 = 0$, $z_1 = 1$, $z_2 = 9$.

1) $(\frac{x^2 - x + 1}{x})^2 = 1$,

$x^2 - x + 1 = x$ или $x^2 - x + 1 = -x$,

$x^2 - 2x + 1 = 0$ или $x^2 = -1$ ложно.

$x = 1$.

2) $(\frac{x^2 - x + 1}{x})^2 = 9$,

$\frac{x^2 - x + 1}{x} = 3$ или $\frac{x^2 - x + 1}{x} = -3$,

$x^2 - x + 1 = 3x$ или $x^2 - x + 1 = -3x$,

$x^2 - 4x + 1 = 0$ или $x^2 + 2x + 1 = 0$.

$$\frac{D}{4} = 3,\ x = 2 \pm \sqrt{3} \text{ или } x = -1.$$

Ответ: $\{ 2-\sqrt{3}, -1, 1, 2+\sqrt{3} \}$.

(082) Уравнения. № 27. $\begin{cases} (x-y)^2 = z\ (I), \\ (x-z)^2 = y\ (II), \\ (y-z)^2 = x\ (III). \end{cases}$

Вычитаем последовательно данные уравнения:

$$\begin{cases} (x-y)^2 - (x-z)^2 = z - y, \\ (x-z)^2 - (y-z)^2 = y - x, \\ (y-z)^2 - (x-y)^2 = x - z. \end{cases} \qquad \begin{cases} (z-y)(2x-y-z) = z-y, \\ (y-x)(2z-x-y) = y-x, \\ (x-z)(2y-x-z) = x-z. \end{cases}$$

1) $z = y$ из (III) $x = 0$.

Из (I) $y^2 = y$, $\begin{cases} y = 0, \\ z = 0, \\ x = 0. \end{cases}$ или $\begin{cases} y = 1, \\ z = 1, \\ x = 0. \end{cases}$

2) $2x - y - z = 1$,

$(x - y) + (x - z) = 1$,

$\begin{cases} 2x - y - z = 1, \\ 2z - x - y = 1. \end{cases}$ или $\begin{cases} 2x - y - z = 1, \\ y = x. \end{cases}$

$3x - 3z = 0$, $\qquad$ $x - z = 1$,

$x = z$.

$\begin{cases} y = 0, \\ z = 1, \\ x = 1. \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} y = 1, \\ z = 0, \\ x = 1. \end{cases}$

Ответ: (0; 0; 0), (1; 0; 1), (0; 1; 1), (1; 1; 0).

(083) Уравнения. № 28. Раскладываем квадратные трёхчлены на линейные множители: $(x-6)(x-3)(x-4)(x-7)+2=0$,

$(x-3)(x-7)(x-6)(x-4)+2=0$,

$(x^2-10x+21)(x^2-10x+24)+2=0$,

$z=x^2-10x+21$.

$z(z+3)+2=0$,

$z^2+3z+2=0$,

$z_1=-2$, $z_2=-1$.

$x^2-10x+21=-2$ или $x^2-10x+21=-1$.

Ответ: $x=5\pm\sqrt{2}$, $x=5\pm\sqrt{3}$.

(084) Уравнения. № 29.

$$x\begin{cases}\dfrac{x^3}{y^2}=2-\dfrac{3y}{4x},\\[2mm] \dfrac{8y}{x^2}=5+\dfrac{6x}{y}.\end{cases}\qquad \frac{8x}{y}=(2-\frac{3}{4}\frac{y}{x})(5+6\frac{x}{y}).$$

Обозначим $\dfrac{x}{y}=z$, тогда

$$8z=(2-\frac{3}{4z})(5+6z),$$

$$8z=10-\frac{15}{4z}+12z-\frac{9}{2},\quad z-\frac{15}{4z}+\frac{11}{2}=0,$$

$15z^2+22z-15=0$,

$$\frac{D}{4}=121+240=361,$$

$$z_{1,2}=\frac{-11\pm19}{16},\quad z_1=-\frac{30}{16}=-\frac{15}{8},\quad z_2=\frac{1}{2}.$$

$$1)\ \frac{x}{y}=-\frac{15}{8},\ x=\frac{-15y}{8},\ \frac{8y\cdot64}{225y^2}=-\frac{25}{4},y=\frac{-2048}{5625},$$

$$x = \frac{2048 \cdot 15}{25 \cdot 225 \cdot 8} = \frac{256}{25 \cdot 15} = \frac{256}{375}.$$

2) $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$, $y = 2x$,

$\frac{16}{x} - 3 = 5$, $\frac{16}{x} = 8$, $x = 2$, $y = 4$.

Ответ: $(2; 4)$, $(\frac{256}{375}; \frac{-2048}{5625})$.

(085) Уравнения. № 30. $x^4 + 3x^2y - 4y^2 = 0$,

$x^4 + 4x^2y - x^2y - 4y^2 = 0$,

$x^2(x^2 - y) + 4y(x^2 - y) = 0$,

$(x^2 - y)(x^2 + 4y) = 0$.

Система принимает вид:

$$\begin{cases} x - y = 3, \\ (x^2 - y)(x^2 + 4y) = 0. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - y = 3, \\ (x^2 - y) = 0. \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = 3, \\ x^2 + 4y = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решим отдельно каждую систему:

1) $\begin{cases} x - y = 3, \\ (x^2 - y) = 0. \end{cases}$ $-\begin{cases} x - y = 3, \\ (x^2 - y) = 0. \end{cases}$

$x^2 - x = 3$,

$x^2 - x + 3 = 0$,

$D = 1 - 12 = -11 < 0$.

Корней нет.

2) $\begin{cases} x - y = 3, \\ x^2 + 4y = 0. \end{cases}$ $\begin{cases} y = x - 3, \\ x^2 + 4(x - 3) = 0. \end{cases}$

$x^2 + 4x - 12 = 0$,

$$\begin{cases} x_1 x_2 = -12, \\ x_1 + x_2 = -4. \end{cases}$$

$x_1 = -6, \quad x_2 = 2,$

$y_1 = -9, \quad y_2 = -1.$

Получили $(-6; -9)$, $(2; -1)$.

Ответ: $(-6; -9)$, $(2; -1)$.

(086) Уравнения. № 31. Вычитаем из второго уравнения первое: $x + yz - xy - z = 95 - 94,$

$x - z + y(z - x) = 1,$

$(x - z) - y(x - z) = 1,$

$(x - z)(1 - y) = 1.$

Получаем две системы:

а) $\begin{cases} x - z = 1, \\ 1 - y = 1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - z = -1, \\ 1 - y = -1. \end{cases}$

а) $\begin{cases} x = z + 1, \\ -y = 1 - 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = z + 1, \\ y = 0; \end{cases}$

Если $y = 0$, то из 1-го уравнения $0 + z = 94$, $z = 94$. Из 2-го уравнения $x + 0 = 95$, $x = 95$.

Получили $(95; 0; 94)$.

б) $\begin{cases} x = z - 1, \\ -y = -2; \end{cases}$ $\begin{cases} x = z - 1, \\ y = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + z = 94, \\ x = z - 1; \end{cases}$

$2z - 2 + z = 94, \quad 3z = 96, \quad z = 32,$

$x = 95 - yz = 95 - 64 = 31.$

Получили $(31; 2; 32)$.

Ответ: $(95; 0; 94)$, $(31; 2; 32)$.

(087) Уравнения. № 32. $z = \dfrac{3x}{2(1-x)^2}, \quad z^2 = \dfrac{9x^2}{4(1-x)^4}.$

$$-\begin{cases} 2z^2 - yz = 1, \\ 2x^2 + xy = 1. \end{cases}$$

$2(z^2 - x^2) - y(z + x) = 0,$

$(x + z)(2z - 2x - y) = 0.$

$z + x = 0$ или $\qquad 2z - 2x = y.$

1) $z = -x$

$$\frac{3x}{2(1-x)^2} = -x, \quad x \neq 0.$$

$2x^2 - 4x + 5 = 0,$

$D < 0$ корней нет.

2) $2z - 2x - y = 0,$

$$\frac{6x}{(1-x)^2} - 2x - y = 0, \qquad xy = 1 - 2x^2, \ y = \frac{1-2x^2}{x}.$$

$$\frac{3x}{(1-x)^2} - 2x - \frac{1-2x^2}{x} = 0, \ \frac{3x}{(1-x)^2} = \frac{1}{x},$$

$3x^2 = 1 - 2x + x^2$

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \ x_2 = \frac{-(\sqrt{3}+1)}{2}.$$

При этом $y = \dfrac{1}{x} - 2x,$

$$y_1 = \frac{2}{\sqrt{3}-1} - \frac{2(\sqrt{3}-1)}{2} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} - (\sqrt{3}-1) =$$

$$= \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} + 1 = 2.$$

Аналогично $y_2 = 2$.

Ответ: $(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}; 2), (\dfrac{-(\sqrt{3}+1)}{2}; 2).$

(088) Уравнения. № 33.

$$\begin{cases} x+y+z+u=1, \\ y+z+u+v=2, \\ z+u+v+x=3, \\ u+v+x+y=4, \\ v+x+y+z=6. \end{cases}$$

Сложив уравнения, получим:

$4(x+y+z+u+v)=16,$

$x+y+z+u+v=4.$

$v=3, x=2, y=1, z=0, u=-2.$

Ответ: $v=3, x=2, y=1, z=0, u=-2.$

(089) Уравнения. № 34.

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x^3+y^3+z^3=1. \end{cases}$$

1) Каждое из неизвестных $0 \le |z| \le 1$, $0 \le |y| \le 1$, $0 \le |x| \le 1$.

Если, например, $|y|>1$, то $|y|^2>1$ и $|x|^2+|y|^2+|z|^2>1$.

2) При $0 \le x \le 1$ имеем $0 \le x^3 \le x^2 \le 1$.

При $0<x<1$ имеем $0<x^3<x^2<1$.

Если хотя бы одно из 3 неизвестных (x, y, z) будет строго больше 0 и меньше 1, то получаем для определенности $0<x<1$, $x^3<x^2$.

$1=x^3+y^3+z^3<x^3+y^3+z^3=1$, чего быть не может.

3) Значит, x, y, z равны только 0 или 1. При этом одно из неизвестных будет 1, а другие 0.

Итак, получаем (0; 0; 1), (0; 1; 0), (1; 0; 0).

Ответ: (0; 0; 1), (0; 1; 0), (1; 0; 0).

(090) Уравнения. № 35.

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = 1 - z, \\ \dfrac{yz}{y+z} = 2 - x, \\ \dfrac{xz}{x+z} = 2 - y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{xy + xz + yz}{x+y} = 1, \\ \dfrac{yz + xy + xz}{y+z} = 2, \\ \dfrac{xz + xy + yz}{x+z} = 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 2y + 2z, \\ y + z = x + z. \end{cases}$$

$x = y$, $x + x = 2x + 2z$, $z = 0$.

Из первого: $\dfrac{xx}{2x} = 1$; $x = 2$, $y = 2$.

Ответ: $x = 2$, $y = 2$, $z = 0$.

(091) Уравнения. № 36. $\begin{cases} x + y = 2000, \\ xy = z^2 + 1000000. \end{cases}$

$y = 2000 - x$, $(2000 - x)x - 1000000 = z^2$,
$-(x - 1000)^2 = z^2$.

$(-\infty; 0]$ $\quad$ $[0; +\infty)$

$$\begin{cases} x - 1000 = 0, \\ z^2 = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1000, \\ z = 0, \\ y = 1000. \end{cases}$$

Ответ: $x = 1000$, $y = 1000$, $z = 0$.

(092) Уравнения. №37.

$$\begin{cases} x - y = 3, \\ x^4 + 3x^2y - 4y^2 = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение.

$x^4 + 3x^2y - 4y^2 = 0,$

$x^4 + 4x^2y - x^2y - 4y^2 = 0,$

$x^2(x^2 - 4) + 4y(x^2 - 4) = 0,$

$(x^2 - y)(x^2 + 4y) = 0.$

Система принимает вид:

$$\begin{cases} x - y = 3, \\ (x^2 - y)(x^2 + 4y) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - y = 3, \\ x^2 - y = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = 3, \\ x^2 + 4y = 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

1) $\begin{cases} x - y = 3, \\ x^2 - y = 0; \end{cases}$ $\quad - \begin{cases} x^2 - y = 0, \\ x - y = 3; \end{cases}$ $\quad x^2 - x = -3,$

$x^2 - x + 3 = 0,$

$D = 1 - 12 = -11 < 0,$

корней нет.

2) $\begin{cases} x - y = 3, \\ x^2 + 4y = 0; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y = x - 3, \\ x^2 + 4(x - 3) = 0; \end{cases}$

$x^2 + 4x - 12 = 0,$

$\begin{cases} x_1 x_2 = -12, \\ x_1 + x_2 = -4; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_1 = -6, \\ y_1 = -9; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = -1. \end{cases}$

Получили (–6;–9), (2;–1).

Ответ: (–6; –9), (2; –1).

(093) Уравнения. № 38.

$$\begin{cases} |x|>|y-z+t|, \\ |y|>|x-z+t|, \\ |t|>|x-y+z|, \\ |z|>|x-y+t|. \end{cases}$$

Так как обе части неравенства неотрицательные, то можно возвести обе части в квадрат:

$$\begin{cases} x^2-(x-z+t)^2>0, \\ y^2-(x-z+t)^2>0, \\ t^2-(x-y+z)^2>0, \\ z^2-(x-y+t)^2>0. \end{cases} \qquad x\begin{cases} (x-y+z-t)(x+y-z+t)>0, \\ (y-x+z-t)(y+x-z+t)>0, \\ (t-x+y-z)(t+x-y+z)>0, \\ (z-x+y-t)(z+x-y+t)>0. \end{cases}$$

$$-(x-y+z-t)^2(x+y-z+t)^2(t+x+z-y)^2(y-x+z-t)^2>0.$$

Последнее неравенство невозможно, и система решений не имеет.

О т в е т: Решений нет.

(094) Уравнения. № 39.

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6, \\ x_2+x_3+x_4=9, \\ x_3+x_4+x_5=3, \\ x_4+x_5+x_6=-3, \\ x_5+x_6+x_7=-9, \\ x_6+x_7+x_8=-6, \\ x_7+x_8+x_1=-2, \\ x_8+x_1+x_2=2. \end{cases}$$

Сложим:

$3(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8)=0,$

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8=0.$

Сложим I, IV, VII: $\underline{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8}+x_1=$ $=6-3-2=1,\ x_1=1.$

Сложим II, V, VIII: $\underline{x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_1} + x_2 = 2$,
$x_2 = 2$.

Из I и следующих:

$1 + 2 + x_3 = 6$, $x_3 = 3$,

$2 + 3 + x_4 = 9$, $x_4 = 4$,

$3 + 4 + x_5 = 3$, $x_5 = -4$,

$4 - 4 + x_6 = -3$, $x_6 = -3$,

$-4 - 3 + x_7 = -9$, $x_7 = -2$,

$-3 - 2 + x_8 = -6$, $x_8 = -1$.

Итак, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = -4$, $x_6 = -3$, $x_7 = -2$, $x_8 = -1$.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = -4$, $x_6 = -3$, $x_7 = -2$, $x_8 = -1$.

(095) Уравнения. № 40. $\sqrt[8]{x+1} + \sqrt[8]{x-1} = \sqrt[8]{2}$.

ОДЗ $x \geq 1$, $x = 1$ – корень.

$f(x) = \sqrt[8]{x+1} + \sqrt[8]{x-1}$ возрастающая функция, значит, $x = 1$ – единственный корень.

Ответ: $x = 1$.

(096) Уравнения. № 41.

$$\begin{cases} x^3y + 2x^2y^2 + xy^3 = 4, \\ x + y + x^2y + xy^2 = 4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy(x^2 + y^2) + 2x^2y^2 = 4, \\ x + y + xy(x + y) = 4. \end{cases}$$ Пусть $x + y = z$, $xy = t$.

$x^2 + 2xy + y^2 = z^2$, $x^2 + y^2 = z^2 - 2xy$, $z^2 + y^2 = z^2 - 2t$.

$$\begin{cases} t(z^2 - 2t) + 2t^2 = 4, \\ z + zt = 4; \end{cases} \begin{cases} tz^2 - 2t^2 + 2t^2 = 4, \\ z + zt = 4; \end{cases} \begin{cases} tz^2 = 4, \\ z + zt = 4. \end{cases} t = \frac{4}{z^2}$$

$$z + z \cdot \frac{4}{z^2} = 4, \quad z + \frac{4}{z} = 4, \quad z^2 + 4 = 4z, \quad z^2 - 4z + 4 = 0,$$

$(z - 2)^2 = 0$,

$$z - 2 = 0, \quad z = 2, \quad t = \frac{4}{4} = 1.$$

$$\begin{cases} x+y=2, \\ xy=1. \end{cases} \quad x=1,\ y=1.$$

Ответ: (1; 1).

(097) Уравнения. № 42.

$$\begin{cases} 6xz+3x=2z-2, \\ xy+zy=2(z-x+1), \\ zy-6xz+y=3x+3. \end{cases}$$

1) Сложим первое и третье уравнения системы:

$3x + zy + y = 3x + 2z + 1$,

$z(y-2) = 1-y$.

2) Если $y = 2$, то $z \cdot 0 = 1$, чего быть не может, поэтому $z = \dfrac{1-y}{y-2}$.

3) Из II $xy + zy - 2z + 2x = 2$,

$x(y+2) + z(y-2) = 2$,

$x(y+2) + \dfrac{1-y}{y-2}(y-2) = 2$,

$x(y+2) = 1 + y$.

Если $y = -2$, то $x \cdot 0 = -1$, значит $y \neq 2$, $x = \dfrac{1+y}{y+2}$.

4) Подставляем в I уравнение:

$3x(2z+1) = 2(z-1)$,

$\dfrac{3+3y}{y+2} \cdot (\dfrac{2-2y+y-2}{y-2}) = 2\dfrac{1-y-y+2}{y-2}$,

$\dfrac{3(y+1)}{y+2} \cdot \dfrac{-y}{y-2} = \dfrac{2(3-2y)}{y-2}$, $\dfrac{-3y(y+1)}{y+2} = 6-4y$,

$-3y^2 - 3y = 6y - 4y^2 + 12 - 8y$,

$-3y^2 - 3y - 6y + 4y^2 - 12 + 8y = 0$,

$y^2 - y - 12 = 0$,

$y_1 = -3$, $y_2 = 4$.

5) При $y = -3$, $x = 2$, $z = -0{,}8$. Имеем $(2; -3; -0{,}8)$.

6) При $y = 4$, $x = \frac{5}{6}$, $z = -1{,}5$. Имеем $(\frac{5}{6}; 4; -1{,}5)$.

Ответ: $(2; -3; -0{,}8)$, $(\frac{5}{6}; 4; -1{,}5)$.

(098) Уравнения. № 43.

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = 1 - z, \\ \dfrac{yz}{y+z} = 2 - x, \\ \dfrac{xz}{x+z} = 2 - y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{xy + xz + yz}{x+y} = 1, \\ \dfrac{yz + xy + xz}{y+z} = 2, \\ \dfrac{xz + xy + yz}{x+z} = 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 2y + 2z, \\ y + z = x + z. \end{cases}$$

$x = y$, $x + x = 2x + 2z$, $z = 0$.

Из первого: $\frac{xx}{2x} = 1$; $x = 2$, $y = 2$.

Ответ: $x = 2$, $y = 2$, $z = 0$.

(099) Уравнения. № 44.

$x^6 - 9x^4 + 27x^2 - 27 - 64x^3 - 288x^2 - 432x =$
$= 18(12x + 18 - 4x^3 - 6x^2)$.

$x^6 - 9x^4 - 64x^3 - 261x^2 - 432x - 27 - 216x - 324 + 72x^3 +$
$+ 108x^2 = 0,$

$x^6 - 9x^4 + 8x^3 - 153x^2 - 648x - 351 = 0.$

Поделив многочлен $x^6 - 9x^4 + 8x^3 - 153x^2 - 648x - 351$ на $x - 3$, получим:

$(x-3)(x^5 - 3x^4 + 8x^2 - 177x - 117) = 0,$

$x^5 - 3x^4 + 8x^2 - 177x - 117 = 0,$

$(x^2 + ax - 3)(x^3 + bx^2 + cx + 39) = 0,$

$x^5 + bx^4 + cx^3 + 39x^2 + ax^4 + abx^3 + acx^2 + 39ax - 3x^3 - 3bx^2 -$
$- 3cx - 117 = 0.$

$$\begin{cases} a+b=-3, \\ c+ab-3=0, \\ 39+ac-3b=8, \\ 39a-3c=-117. \end{cases} \quad \begin{aligned} &b=-3-a, \\ &3c=39a+177, \\ &c=13a+59. \end{aligned}$$

$13a + 59 + a(-3-a) - 3 = 0,$

$13a + 59 - 3a - a^2 - 3 = 0,$

$-a^2 + 10a + 56 = 0,$

$a^2 - 10a - 56 = 0,$

$\frac{D}{4} = 25 + 56 = 81.$

$a_{1,2} = \frac{5 \pm 9}{1}, \qquad a_1 = -4, \qquad a_2 = 14,$

$\qquad b_1 = 1, \qquad b_2 = -17,$

$\qquad c_1 = 7, \qquad c_2 = 241.$

1) $(x^2 - 4x - 3)(x^3 + x^2 + 7x + 39) = 0,$

$x^2 - 4x - 3 = 0.$

$\frac{D}{4} = 4 + 3 = 7. \quad x = 2 \pm \sqrt{7}.$

$x^3 + x^2 + 7x + 39 = 0.$

Поделим этот многочлен на $x + 3$ уголком:

$(x + 3)(x^2 - 2x + 13) = 0$,

$x = -3$ или $\dfrac{D}{4} = 1 - 13 = -1 < 0$.

2) $a = 14$, $b = -17$, $c = 241$.

$39 + ac - 36 = 8$,

$39 + 3374 + 51 = 8$ ложно.

Ответ: $x = -3$, $x = 2 + \sqrt{7}$, $x = 2 - \sqrt{7}$.

(100) Уравнения. № 45.

Всего имеется 1999 слагаемых, среднее $(x + 999)^5$.

$t = x + 999$ замена. Получим:

$(t - 999)^5 + (t - 998)^5 + \ldots + (t - 1)^5 + t^5 + (t + 1)^5 + \ldots + (t + 999)^5 = 0$.

Рассмотрим сумму равноудаленных от t^5 слагаемых:

$F_k(t) = (t - k)^5 + (t + k)^5 = t^5 - 5t^4k + 10t^3k^2 - 10t^2k^3 + 5tk^4\ k^5 + t^5 + 5t^4k + 10t^3k^2 + 10t^2k + 5tk^4 + k^4 = 2t^5 + 20t^3k^2 + 10tk^4$.

$F_k(t) = 2t^5 + 20t^3k^2 + 10tk^4$.

$F_k(t) > 0$ при $t > 0$, $F_k(t) < 0$ при $t < 0$,

$F_k(t) = 0$ при $t = 0$. Поэтому $t = 0$ – единственный корень уравнения.

$t = 0$, $x + 999 = 0$, $x = -999$.

Ответ: -999.

§ 4. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

(101) Текстовые задачи. № 1.

Пусть $a = 400 + z$, $b = 10z + 4$.

$10z + 4 = \dfrac{3}{4}(400 + z)$, $10z + 4 = 300 + \dfrac{3}{4}z$,

$9\dfrac{1}{4}z = 296$, $z = \dfrac{296 \cdot 4}{37} = 32$.

Исходное число 432.

Ответ: 432.

(102) Текстовые задачи. № 2. Пусть стоимость 1 кг равна x,y рублей, а масса t,z кг. По условию задачи получаем: $xt = 24$, $xz = 1{,}2$, $ty = 2$. Перемножим два последних равенства: $xzty = 2{,}4$; $xt \cdot zy = 2{,}4$; $24zy = 2{,}4$; $zy = 0{,}1$. Определим стоимость купленной картошки: $(x + y)(t + z) = xt + ty + xz + zy = 24 + 2 + 1{,}2 + 0{,}1 =$ $= 27{,}3$.

Ответ: 27,3.

(103) Текстовые задачи. № 3. Рассмотрим возраст людей, которые родились в прошлом веке, то есть родившихся в $19xy$ году: $19xy = 1900 + 10x + y$. Тогда по условию задачи:

$2003 - (1900 + 10x + y) = 1 + 9 + x + y,$

$93 = 11x + 2y.$

Найдем решение уравнения в том случае, когда переменные x и y являются цифрами. Из уравнения следует: x – нечетная цифра, причем такая, что $93 - 18 < 11x < 93$, $75 < 11x < 93$.

Ясно, что $x = 7$ – единственное решение, тогда $y = 8$. Следовательно, искомые люди родились в 1978 году.

Теперь будем искать возраст людей, родившихся в этом веке, то есть в $20xy$ году. Так как сравниваем с 2003 годом, то $x = 0$, тогда

$2003 - 200y = 2 + y.$

$3 - y = 2 + y$, $2y = 1$. Уравнение $1 = 2y$ в целых числах не имеет решения. Следовательно, такие люди в этом веке еще не родились.

Ответ: 1978.

(104) Текстовые задачи. №4. Пусть одному сыну n лет, а другому m лет. Тогда из условия задачи имеем:

$mn + m + n = 14,$

$mn + m = 14 - n,$

$m(n + 1) = 14 - n,$

$m = \dfrac{14-n}{n+1} = \dfrac{15}{n+1} - 1,$

Поскольку n и m – натуральные числа, то:

а) либо $n + 1 = 5$;

б) либо $n + 1 = 3$.

Легко увидеть, что знаменатель не может быть равен 1 или 15.

Следовательно, одному сыну 2 года, а другому 4 года.

Ответ: 2 года и 4 года.

(105) Текстовые задачи. № 5. x – было изделий I типа, y – было изделий II типа.

$12x + 15y = 321$, $4x + 5y = 107$, $4x = 107 - 5y$,

$x = \dfrac{107-5y}{4}$.

Общая стоимость $z = 400000x + 600000y = 400000 \cdot \dfrac{107-5y}{4} +$ $+ 600000y = 100000(107 - 5y) + 600000y = 100000(107 - 5y + 6y) =$ $= 100000(107 + y)$.

1) Наименьшее значение будет при $y = 1$, оно равно $100 \cdot 108 =$ $= 10800$т. (x – дробное), значит, $y = 3$, $z = 110000$.

2) Наибольшее значение будет при $y = 22$ $x < 0$,

$y = 21$, $x = \dfrac{1}{2}$ – дробное, $y = 20$, $x = \dfrac{7}{4}$ – дробное,

$y = 19$; $x = 3$ – натуральное.

При $y = 19$ имеем:

$100(107 + 19) = 12600$ (р.)

Ответ: 12600 р., 10800 р.

(106) Текстовые задачи. № 6.

	5-й разряд	3-й разряд	2 рабочих 3-го разряда
Деталей в час	$x + 2$	x	$2x$
Время	$t + 1$		t

$(t+1)(x+2) = 2xt$, $xt + x + 2t + 2 = 2xt$, $x + 2 = xt - 2t$,

$$t = \frac{x+2}{x-2} = 1 + \frac{4}{x-2}.$$

$$t = 1 + \frac{4}{x-2}.$$

$x - 2 = 1$, $x = 3$, $t = 5$, $x + 2 = 5$ ложно.

$x - 2 = 2$, $x = 4$, $t = 3$, $x + 2 = 6$.

$x - 2 = 4$, $x = 6$, $t = 2$, $x + 2 = 8$.

Получили для двух последних случаев $2xt = 24$.

Ответ: 24.

(107) Текстовые задачи. № 7.

Пусть первый сделает всю работу за x часов, а второй за y часов. Их производительности будут $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$. По условию:

$$\frac{1}{x} : \frac{1}{y} = 3 : 5, \quad \frac{y}{x} = \frac{3}{5}, y = \frac{3}{5}x.$$

Совместная производительность будет $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x} + \frac{5}{3x} = \frac{8}{3x}$.

Зная, что всю работу вместе они завершат за 3 ч, получаем

$\frac{8}{3x} \cdot 3 = 1$, $\frac{8}{x} = 1$, $x = 8$, тогда $y = \frac{3}{5} \cdot 8 = \frac{24}{5} = 4{,}8$.

Половину забора первый покрасит за 4 ч, а второй свою половину за 2,4 ч. Общее время при поочередной работе 4 ч + 2,4ч = = 6,4 ч.

Ответ: 6,4 ч.

(108) Текстовые задачи. № 8.

Пусть он родился в $\overline{19xy}$ году.

$9xy$ – произведение цифр его года рождения.

$1990 - \overline{19xy} = 1900 + 90 - 1900 - 10x - y = 90 - 10x - y.$

$9xy = 90 - 10x - y$,

$9xy + y = 90 - 10x$,

$y(9x + 1) = 90 - 10x$,

$$y = \frac{-9x - 1 + 91 - x}{9x + 1} = \frac{91 - x}{9x + 1} - 1.$$

1) $x = 0$	$y = 90$ нет	6) $x = 5$	40/46
<u>2) $x = 1$</u>	<u>$y = 8$.</u> (1918 г.)	7) $x = 6$	30/55
3) $x = 2$	70/19 дробь	8) $x = 7$	20/64
4) $x = 3$	60/28 дробь	9) $x = 8$	10/73
5) $x = 4$	50/7	<u>10) $x = 9$</u>	<u>$y = 0$.</u> (1990 г.)

Ответ: 1918 или 1990.

(109) Текстовые задачи. № 9.

Время распила и время колки дров обратно пропорционально количеству, поскольку $t_1 : t_2 = 8 : 5$. Время распила составляет $\frac{8}{13}$ всего дня и за это время будет распилено $5 \cdot \frac{8}{13} = \frac{40}{13}$ (поленец) $= 3\frac{1}{13}$ поленец.

Ответ: $3\frac{1}{13}$ поленец.

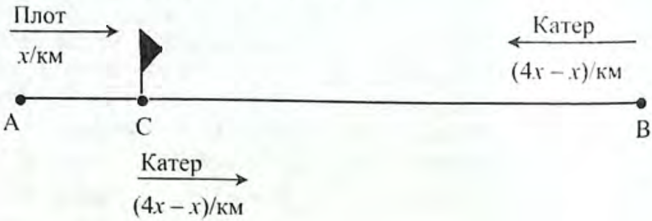
(110) Текстовые задачи. № 10.

$$\frac{x}{n} = \frac{1}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \ldots + \frac{1}{t_n}},$$

$$x = \frac{n}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \ldots + \frac{1}{t_n}}.$$

Ответ: $\frac{n}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \ldots + \frac{1}{t_n}}$.

(111) Текстовые задачи. № 11.



1-й способ.

Пусть x км/ч – скорость течения реки и AB = a км;

$4x$ км/ч – скорость катера в стоячей воде; $5x$ км/ч – скорость катера по течению реки;

$3x$ км/ч – скорость катера против течения реки;

$a/(x + 3x) = a/(4x)$ – время до встречи в C.

$AC = a/(4x) \cdot x = a/4$(км); $3a/4$ (км) = BC;

$0{,}75a/(5x) = 3a/(20x)$ (ч) – время катера на путь BC;

$3a/(20x)$ (км) – путь, пройденный плотом за это время;

$a/4 + 3a/20 = 8a/20 = 2a/5$ (км) – весь путь, пройденный плотом;

$2a/5/a = 2/5$ – часть пути AB, которую прошел плот.

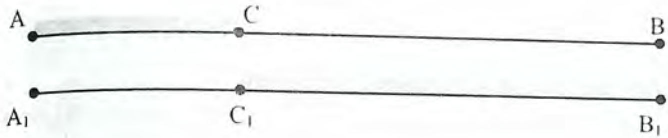
2-й способ.

На отрезке AB плот движется в 3 раза медленнее катера и до встречи пройдет путь втрое меньший: $AC = a/4$ км, $BC = 3a/4$ км. На отрезке BC плот движется в 5 раз медленнее катера и до встречи пройдет путь в 5 раз меньший, чем катер, то есть $3a/20$км. Весь путь, пройденный плотом, равен $a/4 + 3a/20 = 2a/5$(км), что составляет 2/5 пути AB.

Ответ: 2/5 пути AB.

(112) Текстовые задачи. № 12.

Сложим два шнура AB и A_1B_1 сонаправленно (т. е. с одинаковой степенью сгорания в направлениях от A к B и от A_1 к B_1).



1) Поджигаем A и B_1. Огоньки встречаются в точках C и C_1. Время сгорания t_0. $t_{AC} = t_{B_1C_1} = t_{A_1C_1} = t_{CB}$. Поэтому остатки CB и C_1A_1 догорят за то же время, значит, $t_{AC} = t_{B_1C_1} = t_{A_1C_1} = t_{CB} =$ $= 30$ с.

2) В момент встречи огоньков в точках C и C_1 поджигаем A_1 и B. Теперь CB и C_1A_1 горят с двух концов и сгорают одновременно вдвое быстрее, т. е. за 15 с. К моменту их общего полного сгорания пройдет 30 с + 15 с = 45 с.

(113) Текстовые задачи. № 13.

В системе координат, связанной с течением реки, пловец проплыл 10 мин в одном направлении и 10 мин обратно. Общее время 20 мин. Для мяча время будет таким же. Получаем, $V_{теч} =$ $= 1000$ м : 20 = 50 м/мин.

Ответ: 50 м/мин.

(114) Текстовые задачи. № 14.

Если человек пробежит в направлении B $\frac{3}{8}$ моста, то к этому моменту автомобиль попадет в точку A и до момента встречи в B человеку остается пробежать $\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$ моста, а автомобиль должен будет проехать весь мост. Поэтому скорость, с которой бежит человек в 4 раза меньше скорости автомобиля: 60 км/ч : 4 = 15 км/ч.

Ответ: 15 км/ч.

(115) Текстовые задачи. № 15.

До первой встречи они вместе проехали АВ, а до второй – 3АВ. Поэтому первый проехал до второй встречи 70 км · 3 = = 210 км. Еще ему оставалось проехать 40 км. Всего 210 км + + 40 км = 250 км, и это 2АВ. 2АВ = 250 км, АВ = 125 км.

Ответ: 125 км.

(116) Текстовые задачи. № 16.

y км/ч – скорость связного, x км/ч – скорость колонны.

$$\frac{5}{y-x}+\frac{5}{y+x}=\frac{12}{x},\ \frac{5\cdot 2y}{y^2-x^2}=\frac{12}{x},$$

$$5xy=6y^2-6x^2,\ 6y^2-5xy-6x^2=0,\ \frac{y}{x}=t,$$

$$6t^2-5t-6=0,$$

$$D=25+144=169,\ t=\frac{5\pm 13}{12},\ t=\frac{2}{3},\ \frac{y}{x}=\frac{2}{3},\ y=1{,}5x.$$

Так как колонна прошла 12 км, а скорость связного в 1,5 раза больше, то и проехал он в 1,5 раза больше 12·1,5 = 18 (км).

Ответ: 18 км.

(117) Текстовые задачи. № 17.

x км/ч, y км/ч, z км/ч – скорости 1, 2 и 3-го автомобилей. В начале выхода 3-го расстояния x км и y км, а через час $d_{13}=2x-z$, $d_{23}=2y-z$.

$$\frac{x}{2x-z}=1{,}5 \quad \text{и} \quad \frac{y}{2y-z}=2,$$

$$\begin{cases} x=3y-1{,}5z, \\ y=4y-2z; \end{cases} \quad -\begin{cases} 4x=12y-6z, \\ 3y=12y-6z; \end{cases}$$

$$4x-3y=12x-12y,$$

$$9y=8x,\ \frac{x}{y}=\frac{9}{8}.$$

Значит, отношение скоростей будет $\frac{9}{8}$.

Ответ: $\frac{9}{8}$.

(118) Текстовые задачи. № 18.

$V_1 + V_2 = 140$ км/ч.

$$S = 140 \text{ км/ч} \cdot 6 \text{ с} = \frac{140 \cdot 6}{3{,}6} = \frac{140}{0{,}6} = \frac{140 \cdot 5}{3} = \frac{700}{3} = 233\frac{1}{3} \text{ (м)}.$$

Ответ: $233\frac{1}{3}$ м.

(119) Текстовые задачи. № 19.

$t_1 = \frac{3}{4} + \frac{3}{2} = \frac{9}{4} = 2{,}25$ (ч).

$4x + 2x = 6$, $6x = 6$, $x = 1$; $2x = 2$ (ч). $t_2 = 2$ ч.

$2{,}25 - 2 = 0{,}25$ (ч).

Ответ: Гриша пришел в школу на ¼ часа раньше.

(120) Текстовые задачи. № 20.

Пусть x – студентов, y – студенток, z – скамеек, k – студентов на каждой скамейке.

$z = k + 1$,

$70 < z + kz < 90$,

$70 < z(k + 1) < 90$,

$70 < (k + 1)^2 < 90$,

$(k + 1)^2 = 81$, $k + 1 = 9$, $k = 8$,

$z = 9$, $\quad 9 + 8 \cdot 9 = 81$.

Ответ: 81 человек, 9 скамеек.

(121) Текстовые задачи. № 21.

1) Сколько процентов учащихся владеют только языком Бейсик?

85 % – 75 % = 10 %.

2) Сколько процентов учащихся владеют только языком Паскаль?

80 % – 75 % = 5 %.

3) Сколько процентов учащихся не владеют ни одним языком?

100 % – 10 % – 5 % – 75 % = 10 %.

Ответ: 10 %.

(122) Текстовые задачи. № 22.

Спирт	Вода
$0{,}7a$	$0{,}3a$

Спирт	Вода
$(0{,}7a - 11)$ г	$(0{,}3a - 1)$ г
$0{,}96z$ г	$0{,}04z$ г

Было $0{,}7a$ спирта, $0{,}3a$ воды. $(0{,}7a - 11)$ г – осталось спирта, $(0{,}3a - 1)$ г – осталось воды, z г добавили.

$0{,}96z$ г – добавили спирта,

$0{,}04z$ г – добавили воды.

$(0{,}7a - 11 + 0{,}96z)$ г – стало спирта, $(0{,}3a - 1 + 0{,}004z)$ г – стало воды.

Зная, что концентрация спирта стала прежней, получаем:

$$\frac{0{,}7a - 11 + 0{,}96z}{0{,}3a - 1 + 0{,}04z} = \frac{7}{3},$$

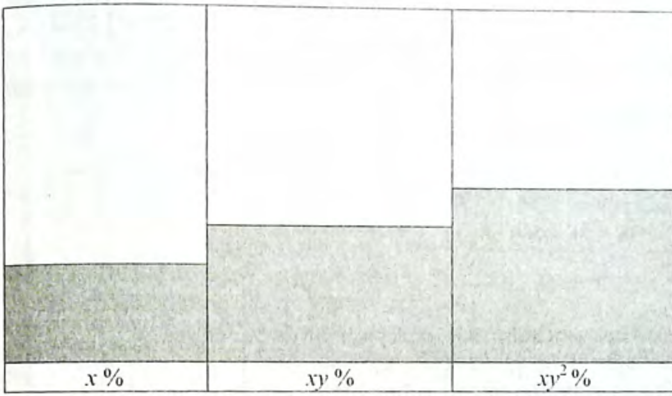
$0{,}21a - 33 + 2{,}88z = 0{,}21a - 7 + 0{,}28z,$

$2{,}6z = 33 - 7,$

$26z = 260,\ z = 10.$

Ответ: 10 г.

(123) Текстовые задачи. № 23.



Пусть первый раствор содержит x % спирта, второй – xy %, а третий – xy^2 %. Если смешать первый, второй и третий растворы в весовом количестве 2:3:4, то получится: $2a$ л, $3a$ л, $4a$ л. Всего $2a + 3a + 4a = 9a$ (л).

x % от $2a$ л : $\dfrac{2a \cdot x}{100}$ л,

xy % от $3a$ л : $\dfrac{3a \cdot xy}{100}$ л,

xy^2 % от $4a$ л : $\dfrac{4a \cdot xy^2}{100}$ л,

32 % от $9a$ л : $\dfrac{9a \cdot 32}{100}$ л. По условию задачи получаем:

$$\frac{2a \cdot x}{100} + \frac{3a \cdot xy}{100} + \frac{4a \cdot xy^2}{100} = \frac{9a \cdot 32}{100}.$$

$2x + 3xy + 4xy^2 = 9 \cdot 32.$

Если же смешать их в весовом соотношении 3:2:1 , то получится $3b$ л, $2b$ л, b л.

x % от $3b$ л : $\frac{3b \cdot x}{100}$ л,

xy % от $2b$ л : $\frac{2b \cdot xy}{100}$ л,

xy^2 % от b л : $\frac{b \cdot xy^2}{100}$ л,

$3b + 2b + b = 6b$ (л).

22 % от $6b$ л : $\frac{6b \cdot 22}{100}$.

Получится раствор, содержащий 22 % спирта.

$$\frac{3b \cdot x}{100} + \frac{2b \cdot xy}{100} + \frac{b \cdot xy^2}{100} = \frac{6b \cdot 22}{100} \text{ л}$$

$3x + 2xy + xy^2 = 6 \cdot 22$.

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x(2+3y+4y^2) = 288, \\ x(3+2y+y^2) = 132. \end{cases}$$

$$\frac{2+3y+4y^2}{3+2y+y^2} = \frac{24}{11},$$

$(2 + 3y + 4y^2) \cdot 11 = (3 + 2y + y^2) \cdot 24$,

$44y^2 + 33y + 22 - 24y^2 - 48y - 72 = 0$,

$20y^2 - 15y - 50 = 0$,

$4y^2 - 3y - 10 = 0$.

$D = 9 + 160 = 169$.

$$y_{1,2} = \frac{3 \pm 13}{8},\ y_1 = \frac{-10}{8} = -\frac{5}{4} < 0,\ y_2 = \frac{16}{8} = 2.$$

Получили $y = 2$.

$x(3 + 4 + 4) = 132$,

$11x = 132,\ x = 12.$

Ответ: 12 %.

(124) Текстовые задачи. № 24.

Пусть всего только один человек получил премию, а всего работает x сотрудников.

$$2{,}9 < \frac{100\%}{x} < 3{,}1\%,\ \begin{cases} 2{,}9x < 100, \\ 3{,}1x > 100; \end{cases} \qquad \begin{cases} x < \dfrac{100}{2{,}9}, \\ x > \dfrac{100}{3{,}1}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < \dfrac{1000}{29}, \\ x > \dfrac{1000}{31}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 34\dfrac{14}{29}, \\ x > 32\dfrac{8}{31}. \end{cases}$$

Возможные целые значения $x = 33$ и $x = 34$.

Минимальное количество работников – 33.

Ответ: 33.

(125) Текстовые задачи. № 25.

1) $1{,}5 \cdot 1000 + x = (1500 + x)$ – рублей стало после первого года.

2) $(1500 + x) \cdot 1{,}4 + x = (2100 + 2{,}4x)$ – рублей стало после второго года.

3) $(2100 + 2{,}4x) \cdot 1{,}3 + x = 2730 + 3{,}12x + x = (2730 + 4{,}12x)$ – рублей стало после третьего года.

4) $(2730 + 4{,}12x) \cdot 1{,}2 = (3276 + 4{,}944x)$ – рублей стало после четвертого года.

Зная, что вклад увеличился на 722 %, имеем:

$3276 + 4{,}944x = 8220,$

$4{,}944x = 8220 - 3276,$

$4{,}944x = 4944,$

$x = 1000.$

Ответ: 1000 р.

(126) Текстовые задачи. № 26.

	При закупке	1-я распродажа	2-я распродажа
Стоимость единицы товара	x	$1{,}6x$	$0{,}7\cdot 1{,}6x =$ $= 1{,}12x$
Количество товара	y	$0{,}5y$	$0{,}5y$
Цена товара	xy	$0{,}8xy$	$0{,}56xy$

Общая выручка при продаже будет:

$0{,}8xy + 0{,}56xy = 1{,}36xy$.

$$\frac{1{,}36xy}{xy}\cdot 100\,\% = 136\,\%.$$

Прибыль составила $136\,\% - 100\,\% = 36\,\%$.

Ответ: 36 %.

(127) Текстовые задачи. № 27.

a р., x – доля денег в первом банке.

$ax\cdot 1{,}6^2 + a(1-x)1{,}4^2 = 2a$,

$2{,}56x + 1{,}96(1-x) = 2$,

$0{,}6x = 0{,}04$, $x = \dfrac{1}{15}$.

Ответ: $\dfrac{1}{15}$.

(128) Текстовые задачи. № 28.

	Стоимость «1-го блюда»	Стоимость «2-го блюда»
В школьной столовой	$0{,}4x$ р.	$0{,}7y$ р.
В кафе	x р.	y р.

Стоимость обеда в кафе $(x + y)$р., а в школьной столовой $(0{,}4x + 0{,}7y)$р.

По условию задачи обед в школьной столовой на 40 % дешевле, чем в кафе, то есть составляет 60 % от стоимости обеда в кафе.

$0,4x + 0,7y = 0,6(x + y)$,

$4x+7y = 6x+6y$,

$7y - 6y=6x - 4x$,

$y = 2x$.

Тогда второе в школьной столовой будет дороже в

$$\frac{1,4x}{0,4x} = \frac{14}{4} = 3,5.$$

Ответ: 3,5.

(129) Текстовые задачи. № 29.

Пусть первая труба наполнит бассейн за x часов, ее производительность $\frac{1}{x}$, вторая наполнит бассейн за y часов, ее производительность $\frac{1}{y}$. Совместная производительность $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}$.

По условию задачи $\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{6}$.

$6x + 6y = xy$.

С другой стороны, так как из первой трубы в час вытекает на 50 % воды больше, чем из второй, то $\frac{1}{x}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{y}$. Отсюда $3x = 2y$. Получаем систему:

$$\begin{cases} 3x = 2y, \\ 6x + 6y = xy. \end{cases}$$

$y = 1,5x$

$6x + 9x = 1,5x^2$,

$15x = 1,5x^2$,

$x = 10, y = 15$.

Ответ: 10 часов, 15 часов.

(130) Текстовые задачи. № 30.

а р. стоило масло, и ежемесячно цена увеличивалась на x %. По формуле сложных процентов через два месяца цена будет равна

$$a(1 + \frac{x}{100})^2 = 57{,}6,$$

$$(1 + \frac{x}{100})^2 = \frac{57{,}6}{40},$$

$$(1 + \frac{x}{100})^2 = 1{,}44,$$

$$(1 + \frac{x}{100}) = 1{,}2, \quad \text{так как } 1 + \frac{x}{100} > 0,$$

$$\frac{x}{100} = 0{,}2;\ x = 20.$$

Ежемесячное увеличение цены на 20 %.

Ответ: 20 %.

(131) Текстовые задачи. № 31.

1-й способ:

Пусть x – доля вылитой кислоты (дробь, показывающая, какую часть вылили). Тогда $1 - x$ – доля оставшейся.

$$54(1 - x)(1 - x) = 24,$$

$$(1 - x)^2 = \frac{4}{9},\ 1 - x = \frac{2}{3} \quad \text{или} \quad 1 - x = -\frac{2}{3},$$

$x = \frac{1}{3}$ или $x = \frac{5}{3}$ не может быть по смыслу задачи.

Вылили $\frac{1}{3} \cdot 54 = 18$ (л). Получили 18 л.

2-й способ:

Пусть x – вылили.

$$\frac{54 - x}{54} = \frac{24}{54 - x},$$

$(54-x)^2 = 54\cdot24 = 9\cdot6\cdot6\cdot4$,

$54 - x = 36$, $x = 18$.

Ответ: 18.

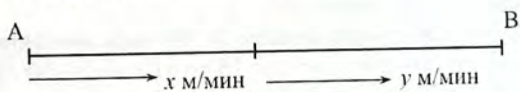
(132) Текстовые задачи. № 32.

Пусть x рублей стоит квартира, то есть сумма кредита. Ежегодно заемщик возвращает 1/20 суммы кредита и за двадцать лет выплатит весь кредит. Кроме того, ежегодно заемщик возвращает 12 % от непогашенной суммы кредита, что составит $0{,}12x(1 + 19/20 + 18/20 + \ldots + 1/20)$. Сумма $1 + 19/20 + 18/20 + \ldots + 1/20$ является суммой двадцати членов арифметической прогрессии, у которой первый член и разность равны 1/20. Найдем эту сумму. $(1 + 1/20)10 = 10{,}5$. Заемщик за двадцать лет возвращает $0{,}12\cdot10{,}5x = 1{,}26x$, поэтому общие выплаты будут $x + 1{,}26x = 2{,}26x$.

Следовательно, сумма, которую должен выплатить банку заемщик, больше суммы займа в 2,26 раз.

Ответ: 2,26.

(133) Текстовые задачи. № 33.



$$\begin{cases} \dfrac{a}{x} + \dfrac{a}{y} = 16, \\ 6x + 6y = 2\grave{a}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{a}{x} + \dfrac{a}{y} = 16, \\ 3\dfrac{x}{a} + 3\dfrac{y}{a} = 1. \end{cases} \qquad \frac{a}{x} = z;\ \frac{a}{y} = h;\ z > h$$

$z = 16 - h$, $\dfrac{3}{16-h} + \dfrac{3}{h} = 1$, $3h + 48 - 3h = 16h - h^2$,

$h^2 - 16h + 48 = 0$, $h_1 = 3$, $h_2 = 12$,

$z = 12$, $\frac{a}{x} = 12$, $\frac{2a}{x} = 24$ (мин).

Ответ: 24 мин.

(134) Текстовые задачи. № 34.

100 % – (56,25 % + 37,5 %) = 100 % – 93,75 % = 6,25 % – 1 человек среди любителей каши.

1) 6,25 % составляют 1 человека. 1 : 0,0625 = 16 (чел.).

16 человек любят кашу.

2) Любителей компота меньше 16. Полным перебором устанавливаем, что для чисел от 1 до 15 только для числа 10 будут целыми 30 % и 70 % – соответственно 3 и 7 человек.

3) Любителей компота было 10 (чел.).

Всего 16 + 10 + 1 = 27.

Ответ: 27.

(135) Текстовые задачи. № 35.

$$S = 100 + 100 \cdot \frac{5}{4} + 100\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \ldots + 100\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1} + 3 \cdot 100 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{n-1} =$$

$$= \frac{100\left(\left(\frac{5}{4}\right)^n - 1\right)}{\frac{5}{4} - 1} + 300\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1} = 400\left(\frac{5}{4}\right)^n - 400 + 300 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{n-1} =$$

$= 640(\frac{5}{4})^n - 400.$

$640(\frac{5}{4})^n - 400 = 850, \quad 640(\frac{5}{4})^n = 950 + 300.$

$(\frac{5}{4})^n = \frac{125}{64}$, $(\frac{5}{4})^n = (\frac{5}{4})^3$, $n = 3$. $3 + 3 = 6$.

Ответ: 6 лет.

§ 5. НЕРАВЕНСТВА

(136) Неравенства. № 1.

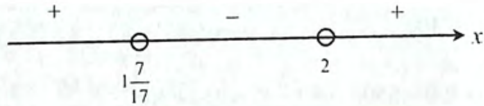
По условию задачи составим неравенство

$$\left|\frac{5x-11}{x-2} - 6\right| < 0,7,$$

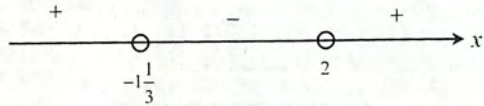
$$\left|\frac{5x-11-6x+12}{x-2}\right| < 0,7, \ \left|\frac{-x+1}{x-2}\right| < 0,7, \ \left|\frac{x-1}{x-2}\right| < 0,7.$$

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{x-2} > -0,7, \\ \dfrac{x-1}{x-2} < 0,7; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x-1}{x-2} + 0,7 > 0, \\ \dfrac{x-1}{x-2} + 0,7 < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x-1+0,7x-1,4}{x-2} > 0, \\ \dfrac{x-1+0,7x-1,4}{x-2} < 0; \end{cases} \begin{cases} \dfrac{17x-24}{x-2} > 0, \\ \dfrac{3x+4}{x-2} < 0; \end{cases} \begin{cases} \dfrac{x-1\frac{7}{17}}{x-2} > 0, \\ \dfrac{x+1\frac{1}{3}}{x-2} < 0. \end{cases}$$

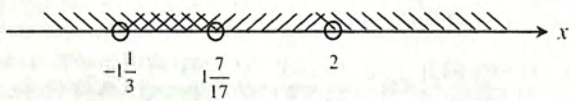


Получили $(-\infty;\ 1\frac{7}{17}) \cup (2;\ +\infty)$.



Получили $(-1\frac{1}{3};\ 2)$.

Найдем решение системы:



Получили $(-1\frac{1}{3}; 1\frac{7}{17})$.

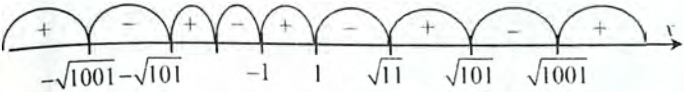
Ответ: $(-1\frac{1}{3}; 1\frac{7}{17})$.

(137) Неравенства. № 2.

Решим неравенство методом интервалов.

$f(n) = (n^2 - 1)(n^2 - 11)(n^2 - 101)(n^2 - 1001)$.

$f(n) = 0$ при $n = -\sqrt{1001}$, $n = -\sqrt{101}$, $n = -\sqrt{11}$, $n = -1$, $n = 1$, $n = \sqrt{11}$, $n = \sqrt{101}$, $n = \sqrt{1001}$.



Получили $\pm 2, \pm 3, \pm 11, \pm 12, \ldots, \pm 31$. $23 \cdot 2 = 46$.

Ответ: 46.

(138) Неравенства. № 3.

Умножим обе части данного неравенства на –1:

$$\frac{|x+2|-|x|}{x^2-9} \le 0.$$

Решим неравенство методом интервалов:

1) Обозначим $f(x) = \dfrac{|x+2|-|x|}{x^2-9}$.

2) Найдем $D(f)$. $x^2 \ne 9, x \ne -3, x \ne 3$,

$D(f) = (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$.

3) Определим, где $f(x) = 0$.

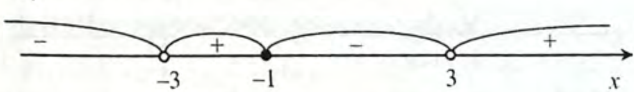
$|x+2| = |x|$

$x + 2 = x$ или $x + 2 = -x$,

$2 = 0$ $\quad 2x = -2$,

ложно $\quad x = -1$.

4)



$$f(4) = \frac{6-4}{16-9} = \frac{2}{7} > 0.$$

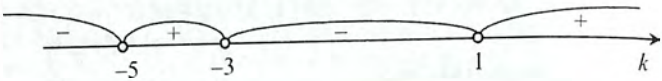
5) Значит, $\dfrac{|x+2|-|x|}{x^2-9} \le 0$ на $(-\infty; -3) \cup [-1; 3)$.

Сумма натуральных решений будет $1 + 2 = 3$.

Ответ: 3.

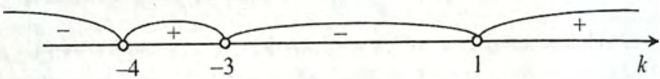
(139) Неравенства. № 4.

1) $\frac{k+5}{(k+3)(k-1)} > 0$



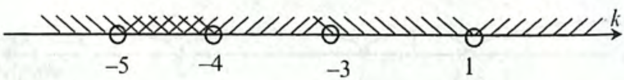
Получили $(-5;-3) \cup (1;+\infty)$.

2) $\frac{k-1}{(k+4)(k+3)} < 0$



Получили $(-\infty;-4) \cup (-3;1)$.

3) Так как оба условия должны выполняться одновремснно, то найдем значения n, при которых выполняются оба условия.



Получили значения N, при которых одновременно выполняются оба условия $-5 < k < -4$.

Следовательно, можно утверждать, что знак k всегда отрицательный.

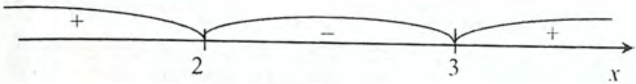
Ответ: всегда при данных условиях знак числа k отрицательный.

(140) Неравенства. № 5.

Раскроем модуль, составляя систему неравенств:

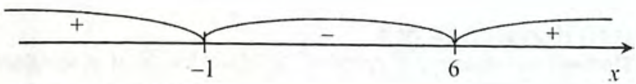
$$\begin{cases} x^2 - 5x < -6, \\ x^2 - 5x < 6; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 5x - 6 > 0, \\ x^2 - 5x + 6 < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-2)(x-3) > 0, \\ (x+1)(x-6) < 0. \end{cases}$$

а)



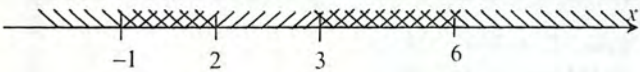
Получили $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$;

б)



Получили $(-1; 6)$.

Найдем решение системы.



Решение системы будет $(-1; 2) \cup (3; 6)$.

Ответ: $(-1; 2) \cup (3; 6)$.

(141) Неравенства. № 6.

$$t^4 - t + \frac{1}{2} = t^4 - t^2 + \frac{1}{4} + t^2 - t + \frac{1}{4} = (t^2 - \frac{1}{2})^2 + (t - \frac{1}{2})^2 > 0.$$

Равенство не достигается.

(142) Неравенства. № 7.

$2^{1995} = 2^{7\cdot 285} = (2^7)^{285} = 128^{285} > 125^{285} = 5^{3\cdot 285} = 5^{855} > 5^{854}$.

Значит, $2^{1995} > 5^{854}$.

(143) Неравенства. № 8.

1-й способ. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$, тогда по условию имеем $f(1).\ f(0) < 0$, то есть на промежутке от 0 до 1 график функции пересекает ось OX, то есть два корня у уравнения $ax^2 + ax + c = 0$, а это значит, что $D > 0$, $b^2 - 4ac > 0$, $b^2 > 4ac$ и т. д.

2-й способ. По условию $ac + bc + c^2 < 0$,

$$4ac + 4bc + 4c^2 < 0,$$

$$4ac < -4bc - 4c^2(*).$$

Докажем, что $-4bc - 4c^2 \leq b^2(**)$.

На самом деле $-4bc - 4c^2 - b^2 \leq 0$,

$$4c^2 + bc^2 + \geq 0,$$

$(4c + b) \geq 0$ очевидно.

Из (*) и (**) имеем, если $4ac < -4bc - 4c^2$ и $-4bc - c^2 \leq b^2$, то $4ac < -4bc - 4c^2$ и $-4bc - 4c^2 \leq b^2$, то $4ac < b^2$, значит, $b^2 > 4ac$ и т. д.

(144) Неравенства. № 9.

Применяем теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом.

$$a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2,$$

$$a^4 + b^4 + c^2 \geq 2a^2b^2 + c^2 = 2\frac{2a^2b^2 + c^2}{2} \geq 2\sqrt{2a^2b^2c^2} = 2\sqrt{2}abc.$$

Итак, $a^4 + b^4 + c^2 \geq 2\sqrt{2}\,abc$.

(145) Неравенства. № 10.

$$-(3y + x)(4y - x) \geq 0,\ (y + \frac{1}{3}x)(y - \frac{1}{4}x) \leq 0.$$

$$y = \frac{1}{4}x,\ x = -1,\ y = -\frac{1}{4}$$

$$x = -13,\ y = -\frac{13}{4}.$$

$$A(-13; -\frac{13}{4}),\ D(-1, -\frac{1}{4});$$

$$y = -\frac{1}{3}x$$

$K(0, 6)$.

$(6 + 0)(6 - 0) = 36 > 0$.

$$\frac{CD+AB}{2}\cdot 12=(CD+AB)\cdot 6=(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{13}{3}+\frac{13}{4})\cdot 6=(\frac{14}{3}+\frac{14}{4})\cdot 6=$$

$$=(\frac{14}{3}+\frac{7}{2})\cdot 6=28+21=49.$$

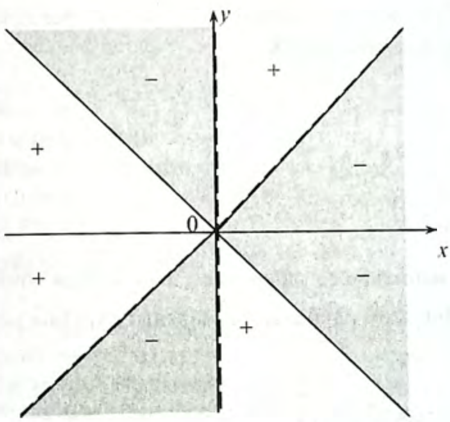
Ответ: 49.

(146) Неравенства. № 11.

Изобразите множества, заданные неравенством $\frac{1}{2x}\le\frac{1}{x-y}$.

$$\frac{1}{2x}-\frac{1}{x-y}\le 0,\ \frac{1}{2x}+\frac{1}{y-x}\le 0,\ \frac{y-x+2x}{2x(y-x)}\le 0,$$

$$\frac{y+x}{2x(y-x)}\le 0,\ \frac{y+x}{x(y-x)}\le 0,\ y=-x \text{ при } x=4,\ y=1\ \ \frac{5}{4(-3)}<0.$$



(147) Неравенства. № 12.

Докажите, что для $a\ge 0$, $b\ge 0$, $c\ge 0$ выполняется неравенство

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2}{(c+a)(c+b)}\geq\frac{3}{4}.$$

Решение:

$$\frac{a^2(b+c)}{(a+b)(b+c)(a+c)}+\frac{b^2(a+c)}{(b+c)(b+a)(a+c)}+$$

$$+\frac{c^2(a+b)}{(c+a)(a+b)(c+b)}\geq\frac{3}{4},$$

$4a^2b+4a^2c+4b^2a+4b^2c+4c^2a+4c^2b\geq$

$\geq 3(a^2+ab+ac+bc)\cdot(b+c),$

$4a^2b+4a^2c+4b^2a+4b^2c+4c^2a+4c^2b\geq 3a^2b+3ab^2+3abc+$ $+3b^2c+3a^2c+3abc+3ac^2+3bc^2,$

$a^2b-2abc+c^2b+a^2c-2abc+b^2c+ab^2-2abc+ac^2\geq 0,$

$b(a-c)^2+c(a-b)^2+a(b-c)^2\geq 0.$ Очевидно.

Неравенство доказано методом сведения к очевидному.

(148) Неравенства. № 13.

$y=\dfrac{3}{ax^2+\dfrac{c}{x^2}+b}$. При этом $\dfrac{ax^2+\dfrac{c}{x^2}}{2}\geq\sqrt{ax^2\cdot\dfrac{c}{x^2}}$,

$ax^2+\dfrac{c}{x^2}\geq 2\sqrt{ac}$.

Значит, наименьшее значение знаменателя будет равно $b+2\sqrt{ac}$. При этом наибольшее значение функции равно

$\dfrac{3}{b+2\sqrt{ac}}$.

Ответ: $\dfrac{3}{b+2\sqrt{ac}}$.

(149) Неравенства. № 14.

$4(x+y)\geq x+y+3\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})$,

$3(x+y) \geq 3\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})$,

$(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}) \geq \sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})$,

$\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2} \geq 0$.

$(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})^2 \geq 0$. Неравенство доказано методом сведения к очевидному.

(150) Неравенства. № 15.

$x^2 - 3,5x + 4 + \mathrm{tg}^2 x \leq 1/\cos^2 x$.

Так как $\mathrm{tg}^2 x$ должен существовать и знаменатель дроби не равен 0, получаем, что $\cos x \neq 0$. $x \neq \pi/2 + \pi n$, где n принадлежит Z.

Получаем $x^2 - 3,5x + 3 + 1 + \mathrm{tg}^2 x \leq 1/\cos^2 x$.

$x^2 - 3,5x + 3 + 1/\cos^2 x \leq 1/\cos^2 x$.

$x^2 - 3,5x + 3 \leq 0$.

Решая последнее неравенство методом интервалов, получаем: $[1,5; 2]$.

Учитывая, что $x \neq \pi/2 + \pi n$, где n принадлежит Z, видим, что в найденном отрезке необходимо удалить $x = \pi/2$.

Значит, решением данного неравенства будет:

$[1,5; \pi/2) \cup (\pi/2; 2]$.

Ответ: $[1,5; \pi/2) \cup (\pi/2; 2]$.

(151) Неравенства. № 16.

1) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$ (*)

2) $\frac{a+b+c}{3} = \sqrt[3]{abc}$,

$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$,

$$\frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \le \frac{3}{a+b+c} \quad (**)$$

Из (*) и (**) следует данное неравенство.

(152) Неравенства. № 17.

$\sqrt{x+5} > x-1$.

Данное неравенство сводится к совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1<0, \\ x+5\ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x-1\ge 0, \\ x+5>x^2-2x+1; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<1, \\ x\ge -5; \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 1, \\ x^2-3x-4<0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решением первой системы будет: $[-5; 1)$.

Решим вторую систему:

$$\begin{cases} x\ge 1, \\ x^2-3x-4>0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x\ge 1, \\ (x+1)(x-4)<0. \end{cases}$$

Так как $x \ge 1$, то $x + 1 > 0$ и получаем равносильную систему:

$$\begin{cases} x\ge 1, \\ x<4. \end{cases}$$

Получили $[1; 4)$.

Найдем решение совокупности: $[-5; 1) \cup [1; 4) = [-5; 4)$.

Ответ: $[-5; 4)$.

(153) Неравенства. № 18.

$\sqrt{x+3} < 3-x$

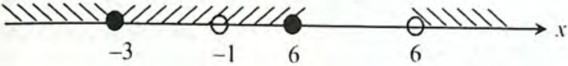
Из неравенства следует, что правая часть должна быть неотрицательной. В противном случае неравенство не выполняется. Значит, данное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x+3\ge 0, \\ 3-x\ge 0, \\ x+3<x^2-6x+9; \end{cases} \qquad \begin{cases} x\ge -3, \\ x\le 3, \\ x^2-7x+6>0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \le x \le 3, \\ (x-1)(x-6) > 0. \end{cases}$$

Решением неравенства $(x-1)(x-6) > 0$ будет $(-\infty; 1) \cup (6; +\infty)$.

Найдем решение системы:



Получили $[-3; 1)$.

О т в е т: $[-3; 1)$.

(154) Неравенства. № 19.

Правая часть неравенства не может быть отрицательной, так как иначе получается, что модуль меньше отрицательного числа, а этого быть не может. Следовательно, обе части неравенства неотрицательны. Возведем в квадрат обе части неравенства. Учитывая, что модуль a^2 равен a^2, получаем: $(x^2 - 2x)^2 < x^2$,

$(x^2 - 2x)^2 - x^2 < 0$,

$((x^2 - 2x) - x)((x^2 - 2x) + x) < 0$,

$(x^2 - 3x)(x^2 - x) < 0$,

$x^2(x-1)(x-3) < 0$.

Учитывая, что $x > 0$, получаем $(1; 3)$.

О т в е т: $(1; 3)$.

(155) Неравенства. № 20.

$$2x^2 + 5x + \sqrt{2x+1} < \sqrt{2x+1} - 2$$

Так как подкоренное выражение для корня четной степени неотрицательно, получаем $x \ge -0,5$. Следовательно, при $x \ge -0,5$, получаем $2x^2 + 5x + 2 \le 0$. Решением последнего неравенства будет отрезок $[-2; -0,5]$. Учитывая найденное ограничение, получаем $x = -0,5$.

О т в е т: $-0,5$.

(156) Неравенства. № 21.

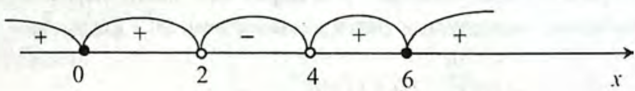
$$\frac{x^2(x-6)^2(2-x)}{(x-2)^4(x-4)} \geq 0$$

Учитывая, что $x \neq 2$, обе части неравенства умножаем на -1, после чего сокращаем на $x - 2$. Получаем равносильное неравенство:

$$\frac{x^2(x-6)^2}{(x-2)^3(x-4)} \leq 0.$$

Данная дробь равна нулю при $x = 0$ и $x = 6$ и не имеет смысла при $x = 2$ и $x = 4$. Решая методом интервалов, определяем, что на самом крайнем промежутке $(6; +\infty)$ функция

$f(x) = \dfrac{x^2(x-6)^2}{(x-2)^3(x-4)}$ принимает положительные значения. Учитывая кратность корней, находим знаки на других промежутках:



Получили $\{0; 6\} \cup (2; 4)$.

Ответ: $\{0; 6\} \cup (2; 4)$.

(157) Неравенства. № 22.

$(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geq 0$,

$(x-1)\sqrt{(x+1)(x-2)} \geq 0$.

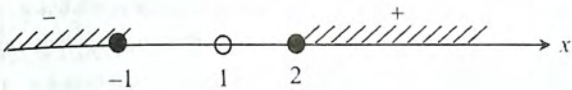
Решим неравенство методом интервалов.

Обозначим $f(x) = (x-1)\sqrt{(x+1)(x-2)}$.

Найдем $D(f)$. $(x + 1)(x - 2) \geq 0$. Получаем $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$.

Определим, где $f(x) = 0$:

$(x-1)\sqrt{(x+1)(x-2)} = 0$, если $x = -1$, $x = 2$.



Получили $\{-1\} \cup [2; +\infty)$.

Ответ: $\{-1\} \cup [2; +\infty)$.

(158) Неравенства. № 23.

$x^2 + 2x - \sqrt{x^2 + 2x + 2} \le 0$,

$\sqrt{x^2 + 2x + 2} \ge x^2 + 2x$.

Пусть $x^2 + 2x = z - 2$. Получаем $\sqrt{z+2} \ge z$. Данное неравенство равносильно совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} z < 0, \\ z + 2 \ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} z \ge 0, \\ z + 2 \ge z^2; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} z < 0, \\ z \ge -2; \end{cases} \\ \begin{cases} z \ge 0, \\ z^2 - z - 2 \le 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} -2 \le z < 0, \\ \begin{cases} z \ge 0, \\ (z+1)(z-2) \le 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решим вторую систему:

$$\begin{cases} z \ge 0, \\ (z+1)(z-2) \le 0; \end{cases} \quad \begin{cases} z \ge 0, \\ -1 \le z \le 2. \end{cases}$$

Получили $[0; 2]$. Найдем решение совокупности.

Имеем: $[-2; 0) \cup [0; 2] = [-2; 2]$. $-2 \le z \le 2$.

Таким образом, получили равносильную систему:

$$\begin{cases} x^2 + 2x \ge -2, \\ x^2 + 2x \le 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 2x + 2 \ge 0, \\ x^2 + 2x - 2 \le 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x+1)^2 + 1 \ge 0, \\ (x+1)^2 - 3 \le 0. \end{cases}$$

Первое неравенство системы выполняется для любого x, поэтому решением системы будет решение второго неравенства.

$(x+1)^2 \le 3$,

$|x+1| \le \sqrt{3}$,

$-\sqrt{3} \le x+1 \le \sqrt{3}$,

$-\sqrt{3}-1 \le x \le \sqrt{3}-1$.

Получили: $[-\sqrt{3}-1;\ \sqrt{3}-1]$.

Ответ: $[-\sqrt{3}-1;\ \sqrt{3}-1]$.

(159) Неравенства. № 24.

$\sqrt{3x-4}+\sqrt{2x-13} > \sqrt{13-2x}$.

Так как подкоренное выражение для корня четной степени неотрицательно, то имеем:

$$\begin{cases} 3x-4 \ge 0, \\ 2x-13 \ge 0, \\ 13-2x \ge 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \ge \dfrac{4}{3}, \\ x \ge 6{,}5, \\ x \le 6{,}5. \end{cases}$$

Последней системе удовлетворяет единственное число $x = 6{,}5$. Проверка убеждает в том, что это число является единственным решением неравенства.

Ответ: 6,5.

(160) Неравенства. № 25.

$2a^2+b^2+c^2 \ge 2a(b+c)$,

$2a^2+b^2+c^2-2ab-2ac \ge 0$,

$a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2 \ge 0$,

$(a-b)^2(a-c)^2 \ge 0$.

Сумма двух неотрицательных слагаемых неотрицательна, поэтому последнее неравенство очевидно. Повторив приведенное рассуждение в обратном порядке, получаем, что мы доказали неравенство методом сведения к очевидному.

§ 6. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ПРОГРЕССИИ

(161) Прогрессии. № 1.

Найдем сумму чисел от 1 до 1000, делящихся на 7. Получаем арифметическую прогрессию 7, 14, 21, …, 994, разность которой будет $d = 7$. Определим номер последнего члена.

$7 + (n - 1) \cdot 7 = 994$, $1 + n - 1 = 142$, $n = 142$. Пусть S_1 – сумма членов этой прогрессии. $S_1 = \frac{7 + 994}{2} \cdot 142 = 1001 \cdot 71$.

Найдем сумму чисел от 1 до 1000, делящихся на 7 и на 13. Получаем арифметическую прогрессию 91, 182, …, 910.

$91 + (n - 1) \cdot 91 = 910$, $1 + n - 1 = 10$, $n = 10$. Пусть S_2 – сумма членов второй прогрессии. $S_2 = \frac{91 + 910}{2} \cdot 10 = 1001 \cdot 5$.

S – сумма чисел от 1 до 1000, делящихся на 7 и не делящихся на 13. $S = S_1 - S_2 = 1001 \cdot (71 - 5) = 1001 \cdot 66 = 66066$.

Ответ: 66066.

(162) Прогрессии. № 2.

Пусть $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$. Вычислите сумму $f(0) + f(\frac{1}{1976}) + f(\frac{2}{1976}) + \ldots + f(\frac{1975}{1976}) + f(1)$. Объединим числа в пары: первый с последним, второй с предпоследним и так далее. Одно число: $f(\frac{988}{1976})$ останется без пары. Докажем, что сумма чисел каждой пары равна 1. Обозначим $4^b = Z$.

$$f(b) + f(1 - b) = \frac{4^b}{4^b + 2} + \frac{4^{1-b}}{4^{1-b} + 2} =$$

$$= \frac{4^b}{4^b + 2} + \frac{4}{4 + 2 \cdot 4^b} = \frac{Z}{Z + 2} + \frac{4}{4 + 2 \cdot Z} = \frac{Z + 2}{Z + 2} = 1.$$

Всего получили 988 пар чисел, сумма чисел каждой пары равна 1. В середине остается последнее слагаемое, у которого не оказалось пары: $f(\frac{988}{1976}) = 0{,}5$. Тогда общая сумма равна 988,5.

Ответ: 988,5.

(163) Прогрессии. № 3.

Рассмотрим последовательность

$$g(n) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

$$g(1) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5},$$

$$g(2) = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}-6+2\sqrt{5}}{4} = \sqrt{5}.$$

Докажем, что $g(n+2) = g(n+1) + g(n)$, то есть $g(n+2) - g(n+1) = g(n)$.

$$g(n+2) - g(n+1) =$$

$$= \frac{(1+\sqrt{5})^{n+2} - (1-\sqrt{5})^{n+2}}{2^{n+2}} - \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}} =$$

$$= \frac{(6+2\sqrt{5})\cdot(1+\sqrt{5})^n - (6-2\sqrt{5})\cdot(1+\sqrt{5})^n}{4\cdot 2^n} -$$

$$- \frac{(1+\sqrt{5})\cdot(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})\cdot(1-\sqrt{5})^n}{2\cdot 2^n} =$$

$$= \frac{(6+2\sqrt{5}-2-2\sqrt{5})\cdot(1+\sqrt{5})^n - (6-2\sqrt{5}-2+2\sqrt{5})\cdot(1-\sqrt{5})^n}{4\cdot 2^n} =$$

$$= \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n} = g(n).$$

$g(n) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, является формулой общего члена знаменитого ряда Фибоначчи, то есть такой числовой последовательности, в которой $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, а каждый член числовой последовательности, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих членов: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,... .

Получаем, что $f(1) = f(2) = b\sqrt{5}$, $f(3) = 2b\sqrt{5}$, $f(4) = 3b\sqrt{5}$, ...

Чтобы выражение принимало целые значения при всех натуральных значениях n, необходимо выбрать $b = \frac{1}{\sqrt{5}}k$, где $k \in Z$.

О т в е т: $b = \frac{1}{\sqrt{5}}k$, где $k \in Z$.

(164) Прогрессии. № 4.

$-4d = 20$, $d = -5$; $a_1 - 10 = 13$, $a_1 = 23$.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}n.$$

$$S_n = \frac{46 + (n-1)(-5)}{2}n = \frac{46 - 5n + 5}{2}n = \frac{-5n^2 + 51n}{2}.$$

$$F(n) = -\frac{5}{2}n^2 + \frac{51}{2}n, \qquad F(x) = -\frac{5}{2}x^2 + \frac{51}{2}x.$$

Не забыть переход к действительному аргументу.

Ветви параболы направлены вниз. В вершине сумма $F(x)$ принимает наибольшее значение.

$$x_b = \frac{-b}{2a} = \frac{-51}{2(-5)} = 5{,}1.$$

Ближнее натуральное к x_b будет $n = 5$, соответственно, при $n = 5$ функция $f(n)$ принимает наибольшее значение.

Вычислим $F(5)$.

$$F(x) = -\frac{5\cdot 25}{2} + \frac{51\cdot 5}{2} = \frac{-125 + 51\cdot 5}{2} = \frac{5(51-25)}{2} =$$

$$= \frac{5\cdot 26}{2} = 5\cdot 13 = 65.$$

Максимальная сумма равна 65 при $n = 5$.

Ответ: 5.

(165) Прогрессии. № 5.

Составьте формулу общего члена последовательности вида 0; 2; 2; 4; 4; 6; 6…

1-й способ:

$$a_n = n + \frac{(-1)^n - 1}{2}.$$

А) если $n = 1$ $\quad a_n = 1 + \frac{-1-1}{2} = 1 - 1 = 0$.

Б) если $n = 2k$ $\quad a_{2k} = 2k + \frac{(-1)^{2k} - 1}{2} = 2k + \frac{1-1}{2} = 2k$.

В) если $n = 2k+1$ $\quad a_{2k+1} = 2k + 1 + \frac{-1-1}{2} = 2k + 1 - 1 = 2k.$

Формула верна для любого $n \geq 1$.

2-й способ: Пусть $[x]$ – целая часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.

$$a_n = \left[\frac{n}{2}\right]\cdot 2$$

а) если $n = 1$ $\quad a_1 = \left[\frac{1}{2}\right]\cdot 2 = 0\cdot 2 = 0$.

б) если $n = 2k$ $\quad a_{2k} = \left[\frac{2k}{2}\right]\cdot 2 = [k]\cdot 2 = 2k = n$ верно.

в) если $n = 2k + 1$ $\qquad a_{2k+1} = \left[\dfrac{2k+1}{2}\right] \cdot 2 = [k + \dfrac{1}{2}] \cdot 2 = k \cdot 2 = 2k$

верно.

Ответ: $a_n = n + \dfrac{(-1)^n - 1}{2}$.

(166) Прогрессии. № 6.

$S_0 = 105 + 115 + 125 + \ldots + 985 + 995$

$S_1 = 165 + 275 + 385 + 445 + 605 + 715 + 825 + 935$

$a_n = a_1 + (n - 1)\cdot d,$

$995 = 105 + (n - 1)10, \quad 890 = (n - 1)10,$

$n - 1 = 89, n = 90.$

$S_0 = S_{90} =$

$= \dfrac{a_1 + a_{90}}{2} \cdot 90 = \dfrac{105 + 995}{2} \cdot 90 = \dfrac{1100}{2} 90 = \dfrac{99000}{2} = 49500.$

$a_n = a_1 + (n - 1)\cdot d,$

$995 = 165 + (n - 1)110, \quad 770 = (n - 1)110,$

$n - 1 = 7, n = 8.$

$S_1 = S_8 = \dfrac{a_1 + a_8}{2} \cdot 8 = \dfrac{165 + 935}{2} \cdot 8 = \dfrac{1100}{2} \cdot 8 = 1100 \cdot 4 = 4400.$

$49500 - 4400 = 45100.$

Ответ: 45100.

(167) Прогрессии. № 7.

1) $x, x + 1, \ldots x + n. \quad 30x = 20(x + n).$

2) $\dfrac{(2x + n)(n + 1)}{2} = 30\delta;$

$5n(n + 1) = 60 \cdot 2n, \quad n + 1 = 24, \quad n = 23, x = 46.$

Ответ: 46, 47, … 69.

(168) Прогрессии. № 8.

$$\begin{cases} b_1(1 + q + q^2) = 21, \\ b_1 q^5 (1 + q + q^2) = 672; \end{cases}$$

Учитывая, что $21 \neq 0$ $\dfrac{b_1q^5(1+q+q^2)}{b_1(1+q+q^2)}=\dfrac{672}{21}$,

$q^5 = 32$, $q^5 = 2^5$.

Так как функция $y = x^5$ монотонно возрастающая, то $q = 2$.

Получили $q = 2$, значит, $b_1(1 + 2 + 4) = 21$, $7b_1 = 21$, $b_1 = 3$.

Итак, $b_1 = 3$, $q = 2$.

$$S_8=\frac{b_1(q^8-1)}{q-1}=\frac{3\cdot(2^8-1)}{2-1}=3\cdot(256-1)=255\cdot3=765.$$

Ответ: 765.

(169) Прогрессии. № 9.

$b^3 + c^3 = (aq)^3 + (aq^2)^3 = a^3q^3 + a^3q^6 = a^3q^3(1 + q^3)$.

$ad = a^2q^3$.

$a +.d = a + aq^3 = a(1 + q^3)$

$$a+d=\frac{a^3q^3(1+q^3)}{a^2q^3}=\frac{288}{24}=12.$$

Ответ: 12.

(170) Прогрессии. № 10.

S – сумма членов данной прогрессии,

$S_1=\dfrac{a_1^{\,2}}{1-q^2}$ – сумма квадратов,

$S'=\dfrac{a_1^{\,4}}{1-q^4}$ – сумма четвертых степеней. По условиям задачи

составим уравнения:

$$\frac{a_1^{\,2}}{1-q^2}=\frac{3a_1}{1-q},\ \frac{a_1}{1+q}=\frac{3}{1},\ a_1=3(1+q),$$

$$\frac{a_1^{\,4}}{1-q^4}=\frac{3{,}6a_1^{\,2}}{1-q^2},\ \frac{a_1^{\,2}}{(1-q^2)(1+q^2)}=\frac{18}{5(1-q^2)},$$

$\frac{a_1^2}{1+q^2} = \frac{18}{5}$, $\frac{9(1+2q+q^2)}{1+q^2} = \frac{18}{5}$, $\frac{1+2q+q^2}{1+q^2} = \frac{2}{5}$.

$5 + 10q + 5q^2 = 2 + 2q^2$,

$3q^2 + 10q + 3 = 0$,

$q = -3,\ q` = -\frac{1}{3}$,

$|q| < 1$. Получили $q = -\frac{1}{3}$.

$a_1 = 3 + 3q = 3 - 1 = 2$.

$a_2 = a_1q = 2(-\frac{1}{3}) = -\frac{2}{3}$.

Ответ: $-\frac{2}{3}$.

(171) Прогрессии. № 11.

Если такая прогрессия существует, то

$3 = 2\cdot q^n$, $\quad 5 = 3\cdot q^l$,

$\frac{3}{2} = q^n$, $\quad \frac{5}{3} = q^l$,

$\left(\frac{3}{2}\right)^l = q^{nl}$, $\quad \left(\frac{5}{3}\right)^n = q^{nl}$,

$\frac{3^l}{2^l} = \frac{5^n}{3^n}$,

$3^{l+n} = 2^l\cdot 5^n$, что невозможно.

Ответ: Не существует.

(172) Прогрессии. № 12.

Пусть a_1 – первый член, q – знаменатель геометрической прогрессии. Тогда $a_1q^4 + a_1q^8 = 7$; $a_6\cdot a_8 = 12$, $a_1q^5\cdot a_1q^7 = 12$, $a_1^2q^{12} = 12$. Нужно найти $a_5^2 + a_9^2$.

$a_5^2 + a_9^2 = (a_1q^4)^2 + (a_1q^8)^2 = a_1^2q^8 + a_1^2q^{16} = a_1^2(q^8 + q^{16})$.

По условию составим систему:

$$\begin{cases} a_1q^4 + a_1q^8 = 7, \\ a_1^2q^{12} = 12; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1(q^4 + q^8) = 7, \\ a_1^2q^{12} = 12; \end{cases}$$

Возведем в квадрат обе части первого уравнения.

$a_1^2(q^8 + 2q^{12} + q^{16}) = 49,$

$a_1^2q^8 + 2\underline{a_1^2q^{12}} + a_1^2q^{16} = 49,$

$a_1^2q^8 + 24 + a_1^2q^{16} = 49,$

$a_1^2q^8 + a_1^2q^{16} = 25.$

Получили, что $a_5^2 + a_9^2 = 25$.

Ответ: 25.

(173) Прогрессии. № 13.

А) $\frac{a_1 + a_{1995}}{2} \cdot 1995 = n^{1994}$; $\frac{(2a_1 + 1994d)1995}{2} = n^{1994}$;

$(a_1 + 997d) \cdot 1995 = 1995^{1994}$

$a_1 + 997d = 1995^{1993}$ при $d = 1$, $a_1 = 1995^{1993} - 997$. Да.

Б) $\frac{(2a_1 + 1994d)}{2} \cdot 1995 = 1994^n$; $(a_1 + 997d)1995 = 1994^n$

Первая часть нацело делится на 5, а вторая не делится наце-
ло на 5, значит, равенство невозможно.

Ответ: а) да; б) нет.

(174) Прогрессии. № 14.

Докажите, что для всякой арифметической прогрессии a_1, a_2, … , a_n имеет место равенство:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}.$$

$$\frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{a_2 - a_1} + \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{a_3 - a_2} + \frac{\sqrt{a_4} - \sqrt{a_3}}{a_4 - a_3} + \ldots + \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}{a_n - a_{n-1}} =$$

$$=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}+\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}+\sqrt{a_4}-\sqrt{a_3}+\ldots+\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{d}=$$

$$=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{d}=\frac{a_n-a_1}{d(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1})}=\frac{d(n-1)}{d(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1})}=\frac{n-1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}}.$$

Равенство доказано.

(175) Прогрессии. № 15.

(a_n) 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55.

(b_n) 2; 1; 3; 4; 7; 11; 18; 29; 47.

Первые три числа состоят из множества $\{1;\ 2;\ 3\}$. Начиная с четвертого $a_{n-1} < b_n < a_n$.

Доказательство методом математической индукции, с $n = 5$

для $n = 5$ $\quad a_4 < b_5 < a_5 \qquad 5 < 7 < 8.$

$a_3 < b_4 < a_4 \qquad 3 < 4 < 5.$

Пусть $\qquad a_{k-1} < b_k < a_k$

$a_{k-2} < b_{k-1} < a_{k-1}$

$a_k < b_{k+1} < a_{k+1},$

то есть свойство выполнено и для $n = k + 1$.

Среди (b_n) больше совпадений нет. Все три числа встречаются в двух последовательностях.

Ответ: 3 числа.

(176) Прогрессии. № 16.

$\div\, a, b, c \qquad 2b = a + c,$

1) $\div \frac{1}{a}; \frac{1}{b}; \frac{1}{c} \qquad \frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{a+c}{ac},$

$\frac{2}{b}=\frac{2b}{ac},\quad ac=b^2,\quad a+c=2b.$

Значит, a и c – корни уравнения $x^2 - 2bx + b^2 = 0$, $(x-b)^2 = 0$, $x = b$, $a = b = c$.

2) $\div \frac{1}{b};\frac{1}{a};\frac{1}{c}$ $\qquad \frac{2}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{b+c}{ac}$, $b=\frac{ac}{2c-a}=\frac{a+c}{2}$

$2bc = ab + ac$, $2bc - ab = ac$, $2ac = 2ac - a^2 + 2c^2 - ac$,

$a^2 + ac - 2c^2 = 0$,

$(\frac{a}{c})^2 + (\frac{a}{c})^2 - 2 = 0$, $\qquad \frac{a}{c} = t$,

$t^2 + t - 2 = 0$,

$t_1 = 1$, $\qquad t_2 = -2$.

$\frac{a}{c} = 1$, $a = b = c$, $\quad a = -2c$, $b = -\frac{c}{2}$.

Получили $4b$, b, $-2b$, где b – любое действительное число.

3) $\div \frac{1}{a};\frac{1}{c};\frac{1}{b}$

Итак $(b;\ b;\ b)$, $(4b;\ b;\ -2b)$, где b – любое действительное число.

Ответ: $(b;\ b;\ b)$, $(4b;\ b;\ -2b)$, где b – любое действительное число.

(177) Прогрессии. № 17.

$$\begin{cases} a_1 + 4d = 16, \\ \frac{2a_1 + 5d}{2} \cdot 6 = 51; \end{cases} \quad -\begin{cases} a_1 + 4d = 16, & |-2 \\ 2a_1 + 5d = 17; \end{cases}$$

$-3d = 15$, $d = 5$, $a_1 = 16 - 20 = -4$.

$$\begin{cases} a_n < 38, \\ S_n > 129; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 + (n-1)d < 38, \\ \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n > 129. \end{cases}$$

А) $-4 + (n - 1)\cdot 5 < 38$,

$-4 + 5n - 5 < 38$, $\ 5n < 47$, $\ n < 9{,}4$.

Б) $\frac{-8+(n-1)5}{2} \cdot n > 129$, $\frac{-8+5n-5}{2} \cdot n > 129$,

$(5n - 13)n > 258$, $5n^2 - 13n - 258 > 0$.

1) Обозначим $f(n) = 5n^2 - 13n - 258 > 0$.

2) Определим, где $f(n) = 0$:

$5n^2 - 13n - 258 = 0$,

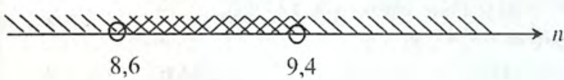
$D = 169 + 5160 = 5329 = 73^2$.

$$n_{1,2} = \frac{13 \pm 73}{10},\ n_1 = -6,\ n_2 = 8{,}6.$$

$f(0) = 258 < 0$

Значит, $5n^2 - 13n - 258 > 0$ на $(-\infty; -6) \cup (8{,}6; +\infty)$. Учитывая, что $n \geq 1$, получаем $(8{,}6; +\infty)$.

Найдем решение системы с учетом $n \geq 1$.



Получили (8,6; 9,4). На этом интервале единственное натуральное число $n = 9$.

Ответ: $n = 9$.

(178) Прогрессии. № 18.

Обозначим корни a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3.

По теореме Виета имеем:

$$\begin{cases} a_1 + a_1q = 4, \\ a_1q^2 + a_1q^3 = 36; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1(1+q) = 4, \\ a_1q^2(1+q) = 36. \end{cases}$$

$a \neq 0$, $q \neq 0$ по определению геометрической прогрессии, поэтому

$$\frac{a_1q^2(1+q)}{a_1(1+q)}=9,\ q^2=9,\ q=3,\ q=-3.$$

Т. к. все числа x_1; x_2; x_3; x_4 положительны, то получаем $q = 3$.

$a_1 + 3a_1 = 4$, $4a_1 = 4$, $a_1 = 1$.

Прогрессия ÷ 1; 3; 9; 27.

$a = x_1x_2 = 3$, $b = x_3x_4 = 9 \cdot 27 = 243$.

Ответ: $a = 3$, $b = 243$.

(179) Прогрессии. № 19.

В геометрической прогрессии произведение членов, равноудаленных от концов прогрессии, равно произведению крайних членов.

$$\begin{cases} a_1 + a_n = 164, \\ a_2 \cdot a_{n-1} = 324. \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 + a_n = 164, \\ a_1 \cdot a_n = 324. \end{cases} \quad a_1 = x, \quad a_n = y.$$

$$\begin{cases} x + y = 164, \\ x \cdot y = 324. \end{cases} \quad y = 164 - x.$$

$x(164 - x) = 324$, $164x - x^2 - 324 = 0$,

$x^2 - 164x + 324 = 0$,

$$\begin{cases} x_1x_2 = 324, \\ x_1 + x_2 = 164. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 162. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 162, \\ y_1 = 2. \end{cases}$$

$a_1 = 2$, $a_n = 162$ возрастающая. Получили $a_n = 162$.

$a_1 = 162$, $a_n = 2$. Убывающая.

Ответ: 162.

(180) Прогрессии. № 20.

$x^2 + bx + c = 0$, $x_1x_2 = c$, $x_1 + x_2 = -b$.

÷ b, x_1, c, x_2

$$\begin{cases} x_1x_2 = c, \\ x_1 + x_2 = -b, \\ 2x_1 = b + c, \\ 2c = x_1 + x_2. \end{cases} \quad \begin{matrix} -2c = b, \\ b = -2c. \end{matrix}$$

1) $2x_1 = -2c + c,\ x_1 = -\frac{1}{2}c$.

2) $x_2 = 2c - x_1 = 2c + \frac{1}{2}c,\ x_2 = \frac{5}{2}c$.

3) $x_1x_2 = c,\ -\frac{5c^2}{c} = c,\ c \neq 0,\ c = -\frac{4}{5}$.

4) $d = x_1 - b = -\frac{1}{2}c + 2c = \frac{3}{2}c$.

$d = -\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{2} = -\frac{6}{5} = -1{,}2.$

Ответ: $-1{,}2$.

(181) Прогрессии. № 21.

$S_n = 0,\ \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = 0,\ a_1 + a_n = 0.$

$a_\ell = -a_n,\ a_2 = -a_{n-1},\ a_3 = -a_{n+2},\ \ldots,\ a_k = 1,\ a_\ell = -1.$

$a_k - a_\ell = 2,\ d = \frac{2}{m},\ m \in N.\ a_\ell = 1 - \frac{2t}{m},\ t \in z.$

$$(1 - \frac{2t}{m} + \frac{6}{m})(1 - \frac{2t}{m} + \frac{20}{m}) = 1,$$

$$\frac{1}{m^2}(m - 2t + 6)(m - 2t + 20) = 1,$$

$m^2 - 2mt + 6m - 2mt + 4t^2 - 12t + 20m - 40t + 120 = m^2,$

$4t^2 - 4mt - 52t + 26m + 120 = 0,$

$2t^2 - 2(m + 13)t + 13m + 60 = 0,$

$\frac{D}{4} = m^2 + 26m + 169 - 26m - 120 = m^2 + 49.$

$m^2 + 49 = y^2,\ y^2 - m^2 = 49.$ Возможны 2 случая.

$\begin{cases} y - m = 1, \\ y + m = 49; \end{cases}$ $\begin{cases} y - m = 7, \\ y + m = 7; \end{cases}$

$2y = 50$, $y = 25$, $2y = 14$, $y = 7$, $m = 0$ нет.

Итак, $y = 25$, $m = 24$.

$2t^2 - 2(37)t^2 + 372 = 0$,

$D = 635$, $t = \dfrac{37 \pm 25}{2}$.

$t_1 = 6$, $t_2 = 31$, $d = \dfrac{1}{12}$.

$t = 6$, $a_1 = 1 - \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2} > 0$, $a_1 < 0$ должно быть.

$t = 31$, $a_1 = 1 - \dfrac{31}{12} = -\dfrac{19}{12}$.

$-\dfrac{19}{12}; -\dfrac{18}{12}; -\dfrac{17}{12}; -\dfrac{16}{12}; -\dfrac{15}{12}; -\dfrac{14}{12}; -\dfrac{13}{12}; -\dfrac{12}{12}$.

Ответ: $d = \dfrac{1}{12}$.

(182) Прогрессии. № 22.

По формуле суммы членов арифметической прогрессии получаем два уравнения:

$(2a_1 + 19d) \cdot 10 = 200$, $(2a_1 + 7d) \cdot 4 = 32$.

После сокращения получаем $2a_1 + 19d = 20$, $2a_1 + 7d = 8$.

После вычитания из первого уравнения второго находим $12d = 12$, $d = 1$. Подставляем в любое из данных уравнений и определяем $a_1 = 0{,}5$.

Теперь найдем сумму первых 28 членов прогрессии.

$S_{28} = (2a_1 + 27d) \cdot 14 = (1 + 27) \cdot 14 = 28 \cdot 14 = 392$.

Ответ: 392.

(183) Прогрессии. № 23.

$a_n = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$, p_n – произведение первых n членов.

$p_{10} = 18$, $p_{20} = 12$. Найти p_{75}.

$a; b; \dfrac{b}{a}; \dfrac{1}{a}; \dfrac{1}{b}; \dfrac{a}{b}; a; b; \dfrac{b}{a}; \dfrac{1}{a}; \dfrac{1}{b}; \dfrac{a}{b}; \ldots$

Последовательность периодическая, $T = 6$.

$P_6 = a \cdot b \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{a}{b} = 1$. $P_6 = 1$.

Произведение любых шести последовательных членов этой последовательности равно 1.

$P_6 = 1$. $P_{10} = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 = 18$, $\frac{ab \cdot b}{a^2} = \frac{b^2}{a} = 18$, $b^2 = 18a$,

$P_{20} = P_2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = P_2 = ab = 12$.

$P_{75} = P_3 = b^2$ $\qquad \frac{b^2}{a} \cdot ab = 18 \cdot 12$, $b^3 = 216$, $b = 6$, $b^2 = 36$.

Ответ: 36.

(184) Прогрессии. № 24.

Пусть данная прогрессия будет a_1, $a_1 + d$, $a_1 + 2d$, $a_1 + 3d$. Прибавив соответственно 7; 1; –3; –6, получим $a_1 + 7$, $a_1 + d + 1$, $a_1 + 2d - 3$, $a_1 + 3d - 6$ – четыре первых члена бесконечной геометрической прогрессии. По характеристическому свойству геометрической прогрессии квадрат любого члена равен произведению двух соседних. Получили два уравнения:

$(a_1 + d + 1)^2 = (a_1 + 7)(a_1 + 2d - 3)$,

$(a_1 + 2d - 3)^2 = (a_1 + d + 1)(a_1 + 3d - 6)$.

Получаем систему:

$$\begin{cases} a_1^2 + d^2 + 1 + 2a_1d + 2d + 2a_1, \\ a_1^2 + 4d^2 + 9 + 4a_1d - 6a_1 - 12d. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 2a_1d - 3a_1 + 7a_1 + 14d - 21, \\ a_1^2 + a_1d + a_1 + 3a_1d + 3d^2 + 3d - 6a_1 - 6d - 6. \end{cases}$$

$$\begin{cases} d^2 - 12d - 2a_1 + 22 = 0, \\ d^2 - 9d - a_1 + 15 = 0. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем:

$-3d - a_1 + 7 = 0$,

$a_1 = 7 - 3d$. Подставим во второе уравнение:

$d^2 - 9d - 7 + 3d + 15 = 0$,

$d^2 - 6d + 8 = 0$, откуда $d = 2$, $d = 4$.

$d = 2$, $\grave{a}_1 = 1$. Арифметическая прогрессия 1; 3; 5; 7, геометрическая – 8, 4, 2, 1. $q = 0{,}5$, $S = \dfrac{a_1}{1-q} = 16$.

$d = 4$, $a_1 = -5$. Арифметическая прогрессия –5; –1; 3; 7, геометрическая – 2; 0; 0; 1. Значит, $d = 4$ не дает нужной геометрической прогрессии.

Ответ: 16.

(185) Прогрессии. № 25.

Найдем $a_1 = S_1 = 5 - 7 + 3 = 1$. $\grave{a}_1 = 1$.

$S_{n+1} = 5(n+1)^2 - 7(n+1) + 3 = 5n^2 + 10n + 5 - 7n - 7 + 3 = 5n^2 + 3n + 1$. Значит, $a_{n-1} = S_{n+1} - S_n = 5n^2 + 3n + 1 - 5n^2 + 7n - 3 = 10n - 2$, откуда $a_n = 10(n-1) - 2 = 10n - 12$, что является формулой общего члена арифметической прогрессии, у которой $d = 10$. Разность $a_{n+1} - a_n = 10n - 2 - 10n + 12 = 10$. Так как разность между последующим и предыдущим членами равна 10, то члены этой последовательности, начиная со второго, образуют арифметическую прогрессию.

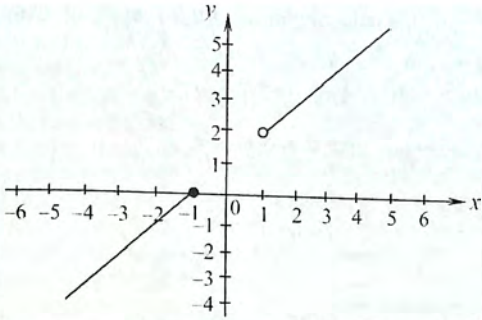
§ 7. ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

(186) Графики. № 1.

Постройте график функции $y = \dfrac{(\sqrt{x^2-1})^2}{x-1}$.

$\begin{cases} x^2 - 1 \ge 0, \\ x \ne 1; \end{cases}$ $\begin{cases} |x| \ge 1, \\ x \ne 1; \end{cases}$ $(-\infty; -1] \cup (1; +\infty)$.

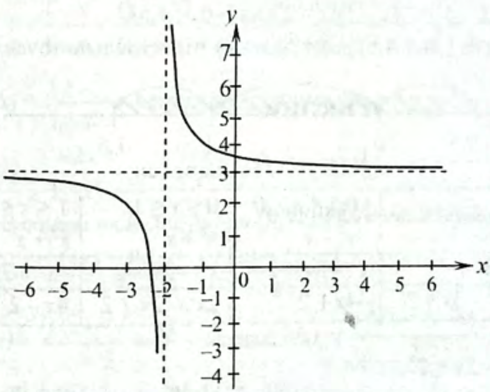
$y = \dfrac{x^2-1}{x-1}$, $y = x + 1$.



(187) Графики. № 2.

$$y=\frac{3x+7}{x+2}=\frac{3x+6}{x+2}+\frac{1}{x+2}=3+\frac{1}{x+2}.$$

Исходный график $y=\frac{1}{x}$ смещен влево на 2 и вверх на 3.



(188) Графики. № 3.

Решая три системы, получим: $A(0; 6)$, $B(-6; 0)$, $C(6; 3)$.

$AB = 6\sqrt{2}$, $BC = 3\sqrt{17}$, $AC = 3\sqrt{5}$.

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C$.

$$\cos C = \frac{7}{\sqrt{5}\sqrt{17}}, \quad \sin C = \frac{6}{\sqrt{5}\sqrt{17}}.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} 3\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{17} \frac{6}{\sqrt{5}\sqrt{17}} = 27.$$

Ответ: 27.

(189) Графики. № 4.

$f(-17) = f(-5) = f(5) = 1{,}25 - 2 = -0{,}75$.

$6f(-17) = 6 \cdot (-0{,}75) = -4{,}5$.

$f(16) = f(4) = 1 - 2 = -1$.

$6f(-17) + f(16) = -4{,}5 - 1 = -5.5$.

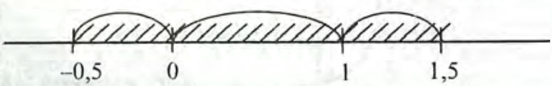
Ответ: $-5{,}5$.

(190) Графики. № 5.

$y = |x^2 + x| + |x^2 - 3x + 2|$ на $[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$.

$y = |x \cdot (x + 1)| + |(x - 1)(x - 2)|$ на $[-0{,}5; 1{,}5]$.

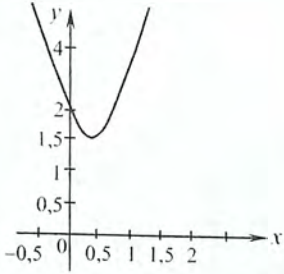
Модули на $[-0{,}5; 1{,}5]$ раскрываются относительно точек 0 и 1.



	$-0{,}5 < x < 0$	$0 \le x \le 1$	$1 < x < 1{,}5$
$\lvert x^2 + x\rvert$	$-x^2 - x$	$x^2 + x$	$x^2 + x$
$\lvert x^2 - 3x + 2\rvert$	$x^2 - 3x + 2$	$x^2 - 3x + 2$	$-x^2 + 3x - 2$
$\lvert x^2 + x\rvert + \lvert x^2 - 3x + 2\rvert$	$-4x + 2$	$2x^2 - 2x + 2$	$4x - 2$

$y = 2x^2 - 2x + 2$.

Графиком является парабола



$x_в = \dfrac{2}{2 \cdot 2} = \dfrac{1}{2}$, $y_в = 2 \cdot \dfrac{1}{4} - 2 \cdot \dfrac{1}{2} + 2 = 0{,}5 + 1 = 1{,}5.$

$F(0{,}5;\ 1{,}5)$ – вершина параболы.

$f(-0{,}5) = 2 + 2 = 4$, $f(0) = 2$, $f(0{,}5) = 1{,}5$, $f(1{,}5) = 4$.

$\max f(x) = f(-0{,}5) = f(1{,}5) = 4$,

$\min f(x) = f(0{,}5) = 1{,}5$.

Ответ: 4 и 1,5.

(191) Графики. № 6.

1) $y = \dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{(1-x)(1-x)}{(1+x)(1-x)} = \dfrac{1-2x-x^2}{1-x^2} = \dfrac{1+x^2}{1-x^2} + \dfrac{-2x}{1-x^2}$.

$G(x) = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ – четная, $g(-x) = g(x)$, $|x| \neq 1$.

$H(x) = \dfrac{-2x}{1-x^2}$ – нечетная, $h(-x) = -h(x)$.

2) В общем виде для $f(x)$ на $D(f)$ симметричной относительно 0.

$f(\tilde{o}) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} + \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$

$g(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ – четная, $h(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ – нечетная,

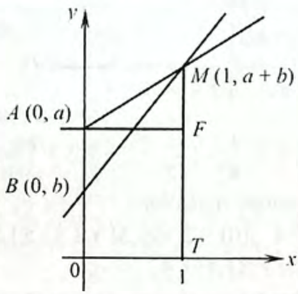
$g(-x) = g(x)$ $\qquad h(-x) = -h(x)$

$$h(-x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2} = -\frac{f(x)-f(-x)}{2} = -f(x).$$

Доказано, что $h(x)$ – нечетная, а $g(x)$ – четная, аналогично.

Ответ: $\frac{1+x^2}{1-x^2} + \frac{-2x}{1-x^2}$.

(192) Графики. № 7.



$\begin{cases} y = ax + b, \\ y = bx + a. \end{cases}$ $\quad ax + b = bx + a,\ (a - b)x = a - b,\ a \neq b.$

$x = 1,\ y = a + b$

$M(1;\ a + b),\ A(0;\ a),\ B(0,\ b).$

$MF = MT - FT = a + b - a = b.$

$MF = b.$

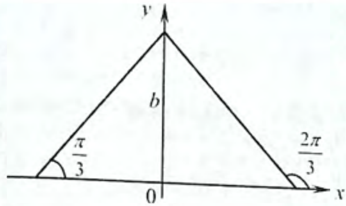
От точки B отложим отрезок $MF = b$ и получим точку O.

(193) Графики. № 8.

$y = 0.$

$y = kx + b,\ k = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3},\ y = \sqrt{3}\,x + b,$

$y = k_1x + b,\ k = \operatorname{tg}\frac{2\pi}{3},\ y = -\sqrt{3}\,x + b.$



Ответ: $y = 0, y = \sqrt{3}\,x + b, y = -\sqrt{3}\,x + b.$

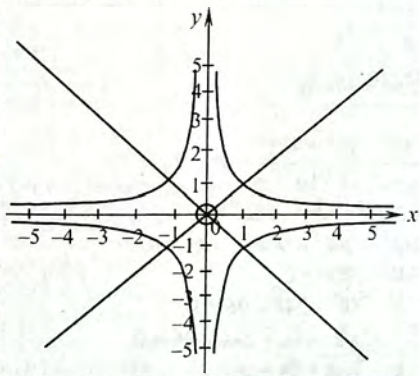
(194) Графики. № 9.

$$|y| = z,\ |x| = t,\ z - t + \frac{1}{|z|} - \frac{1}{|t|} = 0.$$

$$z - t - \frac{z-t}{zt} = 0,\ (z-t)\left(1 - \frac{1}{zt}\right) = 0,$$

$z = t$ или $zt = 0,$

$|x| = |y|$ или $|y| = \dfrac{1}{|x|}.$



(195) Графики. № 10.

1) $y=\frac{k}{3}x+\frac{b}{3}$ – искомая прямая. $y=-\frac{3}{k}x$ – перпендикулярная прямая, проходящая через начало координат. F – основание перпендикуляра из 0 на $y=\frac{k}{3}x+\frac{b}{3}$.

$$\begin{cases} y=\frac{k}{3}x+\frac{b}{3}, \\ y=-\frac{3}{k}x. \end{cases} \qquad \frac{k}{3}x+\frac{b}{3}=-\frac{3}{k}x,\ (\frac{k}{3}+\frac{3}{k})x=\frac{b}{3},\ x=\frac{-bk}{9+k^2}.$$

$$y=\frac{3b}{k^2+9},\ OF^2=\frac{b^2(k^2+9)}{(k^2+9)^2}=\frac{b^2}{k^2+9}=1.$$

$b^2=k^2+9$ – для прямой, касающейся окружности.

2) Условие касания прямой и параболы означает, что уравнение $kx+b=x^2-2x+4$ имеет единственное решение. $D=0$.

$x^2-(k+2)x+4-b=0,$

$D=(k+2)^2-4(4-b)=k^2+4k+4b-12=0.$

$$b=3-\frac{k^2+4k}{4}.$$

$$(3-\frac{k^2+4k}{4})^2-k^2=9,$$

$$9-\frac{3(k^2+4k)}{2}+\frac{(k^2+4k)^2}{16}=k^2+9,$$

$(k^2+4k)^2-24(k^2+4k)-16k^2=0,$

$k^4+8k^3+16k^2-24k^2-96k-16k^2=0,$

$k^4+8k^3-24k^2-96k=0,$

$\underline{k=0}$ $\qquad k^3+8k^2-24k-96=0,$

$k^3-4k^2+12k^2-48k+24k-96=0,$

$\underline{k=4}$ $\quad k^2+12k+24=0,$

$$\frac{D}{4}=36-24=12.$$

$$k_1=-6-2\sqrt{3},\ k_2=-6+2\sqrt{3}.$$

$$k=-2(\sqrt{3}+3),\ b=3-\frac{4(12+6\sqrt{3})-8(\sqrt{3}+3)}{4}=$$

$$=3-12-6\sqrt{3}+2\sqrt{3}+6=-3-4\sqrt{3}.$$

Ответ: $y=1$; $y=\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}$; $y=(-2+\frac{2}{3}\sqrt{3})x-1+\frac{4}{3}\sqrt{3}$;

$y=(-2-\frac{2}{3}\sqrt{3})x-1-\frac{4}{3}\sqrt{3}$.

(196) Графики. № 11.

Постройте график функции

$$y=\frac{(3x+1)\cdot|x-1|+3x^2-2x-1}{|x|+2x+1}.$$

$x=0$, $x=1$ – точки, относительно которых раскрываются модули

	$x<0$	$0\le x\le 1$	$x>1$
$\lvert x\rvert$	$-x$	x	x
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$	$-x+1$	$x-1$
y	$y=0, x\ne 1$	$y=0$	$y=2x-2$

1) $x<0$.

$$y=\frac{(3x+1)\cdot|x-1|+3x^2-2x-1}{|x|+2x+1}=\frac{-3x^2-x+3+1+3x^2-2x-1}{x+1}=$$

$$=\frac{0}{x+1}=0,\ x\ne 1.$$

2) $0\le x\le 1$.

$$y=\frac{(3x+1)\cdot|x-1|+3x^2-2x-1}{|x|+2x+1}=\frac{0}{3x+1}=0,\ x\ne-\frac{1}{3}.$$

$-\frac{1}{3} \notin [0;1]$.

3) $x > 1$.

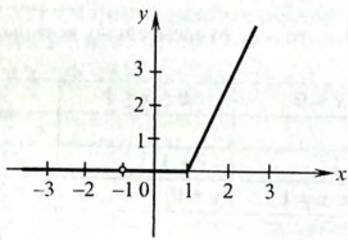
$$y = \frac{(3x+1)\cdot|x-1| + 3x^2 - 2x - 1}{|x| + 2x + 1} = \frac{3x^2 + x - 3x - 1 + 3x^2 - 2x - 1}{3x+1} =$$

$$= \frac{6x^2 - 4x - 2}{3x+1} = \frac{2(3x^2 - 2x - 1)}{3x+1} = \frac{2(x-1)(3x+1)}{3x+1} = 2x - 2,$$

$x \neq -\frac{1}{3}$.

$3x^2 - 2x - 1 = x^2 + 2x^2 - 2x - 1 = (x-1)(x+1) + 2x(x-1) =$
$= (x-1)(x+1+2x) = (x-1)(3x+1)$

$-\frac{1}{3} \notin (1;+\infty)$



$E(f) = [0; +\infty)$.

(197) Графики. № 12.

Постройте график функции $\acute{o} = \frac{(x^2 - 5x + 6)(x+2)}{x^2 - 4} + \frac{|x-1|}{x-1}$ и определите $E(y)$.

Решение:

1) $x \neq 1, x \neq 2, x \neq -2$.

$D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$.

2) $y=\dfrac{(x^2-5x+6)(x+2)}{x^2-4}+\dfrac{|x-1|}{x-1}$, $\acute{o}=x-3+\dfrac{|x-1|}{x-1}$.

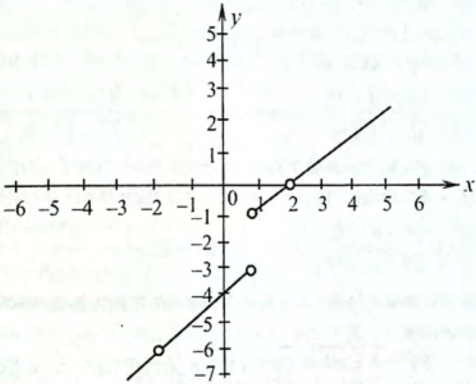
3) Пусть $x > 1$, $x \neq 2$, тогда $|x-1| = x-1$.

$\acute{o}=x-3+\dfrac{x-1}{x-1}$, $y = x-3+1$, $y = x-2$.

4) Пусть $x < 1$, $x \neq -2$, тогда $|x-1| = 1-x$.

$\acute{o}=x-3+\dfrac{-x+1}{x-1}=x-3-1$, $y = x-4$.

$E(f) = (-\infty; -6) \cup (-6; -3) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$.



О т в е т: $E(f) = (-\infty; -6) \cup (-6; -3) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$.

(198) Графики. № 13.

Для того чтобы прямая касалась параболы, необходимо и достаточно, чтобы уравнение $3x^2 - 4x - 2 = ax - 5$ имело ровно один корень.

$3x^2 - 4x - 2 - ax + 5 = 0$,

$3x^2 - (a+4)x + 3 = 0$.

Чтобы квадратное уравнение имело ровно один корень, необходимо, чтобы дискриминант был равен нулю.

$D = (a+4)^2 - 36$, откуда $(a-4)^2 = 36$,

$a - 4 = -6$ или $\quad a - 4 = 6$

$a = -2$ или $a = 10$.

Ответ: $a = -2$, $a = 10$.

(199) Графики. № 14.

Для того чтобы прямая касалась параболы, необходимо и достаточно, чтобы каждое из двух уравнений имело ровно один корень.

$x^2 + ax + b = 5x + 1$,

$x^2 + ax + b = -x - 2$.

Найдем дискриминант каждого уравнения и приравняем его к нулю.

1) $x^2 + (a - 5)x + b - 1 = 0$.

$D_1 = (a - 5)^2 - 4b + 4$.

$(a - 5)^2 - 4b + 4 = 0$,

$(a - 5)^2 = 4b - 4$. (*)

2) $x^2 + (a + 1)x + b + 2 = 0$.

$D_2 = (a + 1)^2 - 4b - 8$.

$(a + 1)^2 - 4b - 8 = 0$,

$(a + 1)^2 = 4b + 8$. (**)

Из уравнений (*) и (**) находим $4b$ и приравниваем найденные выражения.

$4b = (a - 5)^2 + 4$ и $4b = (a + 1)^2 - 8$, откуда

$(a - 5)^2 + 4 = (a + 1)^2 - 8$,

$(a - 5)^2 - (a + 1)^2 = -12$,

$(a - 5 - a - 1)(a - 5 + a + 1) = -12$,

$-6(2a - 4) = -12$,

$(a - 2) = 1$, $a = 3$.

Тогда при $a = 3$ получаем:

$4b - 4 = 4$, $4b = 9$, $b = 2$.

Следовательно $a = 3$, $b = 2$.

Ответ: $a = 3$, $b = 2$.

(200) Графики. № 15.

Координаты вершин: $x_в = -\frac{b}{2}$, $y_в = \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{2} + 1 = -\frac{b^2}{4} + 1$.

Выражаем $b = -2x_в$ и подставляем в $y_в = -4\frac{x_в^2}{4} + 1 = -x_в^2 + 1$.

$y = -x_в^2 + 1$. Это и есть уравнение множества вершин.

Параметр b может иметь любое значение, поэтому и $x_в$ может быть любым числом. Значит, функция $y_в = -x_в^2 + 1$ определена для всех действительных значений $x_в$. Ее график – парабола.

Ответ: $y = 1 - x^2$.

(201) Графики. № 16.

$y = \frac{(x^2 - 10x + 21)(x - 2)}{x^2 - 9x + 14}$. Разложим каждый квадратный трехчлен на линейные множители, определяя корни трехчлена по теореме Виета. Получаем:

$y = \frac{(x-3)(x-7)(x-2)}{(x-7)(x-2)}$. Значит, $y = x - 3$, при $x \neq 2$ и $x \neq 7$.

Искомый график представляет собой прямую $y = x - 3$, из которой исключены две точки с абсциссами $x = 2$ и $x = 7$.

(202) Графики. № 17.

$y = \frac{(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 7x + 12)}{x^2 - 5x + 6}$. Разложим каждый квадратный трехчлен на линейные множители, определяя корни трехчлена по теореме Виета. Получаем:

$y = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(x-2)(x-3)}$. Значит, $y = (x - 1)(x - 4)$ при $x \neq 2$ и $x \neq 3$, $y = x^2 - 5x + 4$ при $x \neq 2$ и $x \neq 3$.

Искомый график представляет собой параболу $y = x^2 - 5x + 4$, из которой выброшены две точки с абсциссами $x = 2$ и $x = 3$.

(203) Графики. № 18.

Поскольку координаты каждой из трех точек удовлетворяют данному уравнению, то, последовательно подставляя координаты точек в уравнение, получаем систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a+b+c=4, \\ a-b+c=10, \\ 4a+2b+c=7. \end{cases}$$

Вычитая первое уравнение из второго, находим: $-2b = 6$, $b = -3$.

Подставим найденное b во второе и третье уравнения, имеем:

$$\begin{cases} a+c=7, \\ 4a+c=13. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, находим: $3a = 6$, $a = 2$, значит, $c = 5$.

Следовательно, искомый график будет $y = 2x^2 - 3x + 5$.

Постройте его в системе координат.

(204) Графики. № 19.

Подставляя координаты двух данных точек, получаем:

$$\begin{cases} a+b+c=1, \\ a-b+c=5. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, находим: $2b = -4$, $b = -2$. Значит, $a + c = 3$, тогда уравнение параболы будет $y = ax^2 - 2x + 3 - a$. Поскольку абсцисса вершины параболы находится по формуле $\frac{-b}{2à}$, то есть $x_в = \frac{-2}{2a} = \frac{1}{a}$. Учитывая, что вершиной является точка $F(1; 1)$, получаем $\frac{1}{a} = 1$, $a = 1$, $c = 2$. Искомая парабола соответствует уравнению $y = x^2 - 2x + 2$. С осью ординат парабола пересекается в точке M (0; 2). Следовательно, ордината точки пересечения параболы с осью ординат равна 2.

Ответ: 2.

(205) Графики. № 20.

Преобразуем относительно параметра a:

$a^2 - 2(x + y)a + x^2 + y^2 - 2 \le 0.$

Решения есть тогда и только тогда, когда $\dfrac{D}{4} = 2xy + 2$;

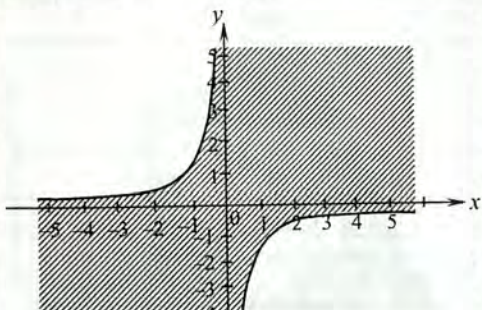
$2xy + 2 \ge 0, xy \ge 1.$

а) при $x > 0, y \ge -\dfrac{1}{x}$;

б) при $x = 0$ неравенство очевидно при любом y;

в) при $x < 0,\ y \le -\dfrac{1}{x}$.

Получаем часть плоскости между ветвями гиперболы:

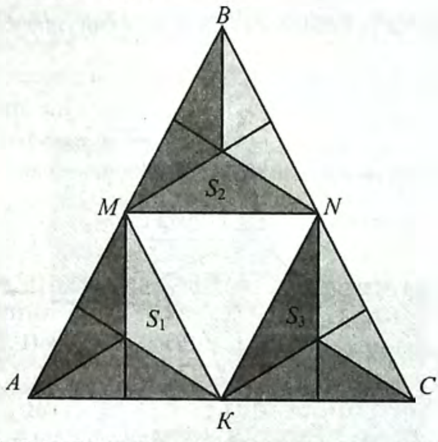


§ 8. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

(206) Геометрия. № 1.

Пусть $ABCD$ – квадрат, вписанный в данный круг. O – точка пересечения диагоналей квадрата AC и BD. $AC = BD = \sqrt{2}$. Получили 4 сектора: ABO, CBO, CDO, ADO. Расстояние между любыми двумя точками одного сектора не больше $\sqrt{2}$, поскольку весь сектор помещается внутри квадрата со стороной равной 1 и диагональю равной $\sqrt{2}$. Если четыре из выбранных произвольно пяти точек лежат в четырёх различных секторах, то пятая точка попадает в один из секторов вместе с одной из уже имеющихся точек. Поэтому найдутся две точки, расстояние между которыми не превосходит $\sqrt{2}$.

(207) Геометрия. № 2.



Во всех треугольниках одинакового цвета равна площадь, так как они равны. (Одна сторона равная, а две другие друг другу параллельны УСУ.)

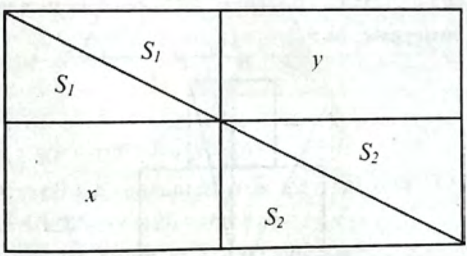
$S_1 + S_2 + S_3 = \frac{1}{4}S_0$

$S_{MNK} = \frac{1}{4}S_0$, $S_{\text{шестиуг}} = \frac{1}{4}S_0 + \frac{1}{4}S_0 = \frac{1}{2}S_0$.

Ответ: $\frac{1}{2}S_0$.

Здравый смысл!	► Виды треугольника по его сторонам: *пусть a, b и c – стороны треугольника, причем c – наибольшая сторона; тогда:* а) *если $c^2 < a^2 + b^2$, то треугольник остроугольный;* б) *если $c^2 = a^2 + b^2$, то треугольник прямоугольный;* в) *если $c^2 > a^2 + b^2$, то треугольник тупоугольный.*	Помни!

(208) Геометрия. № 3.

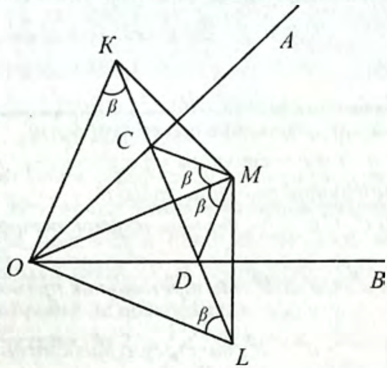


S_0 – площадь всего прямоугольника.

$x = \frac{1}{2}S_0 - S_1 - S_2$,

$$y = \frac{1}{2}S_0 - S_1 - S_2. \quad x = y.$$

(209) Геометрия. № 4.



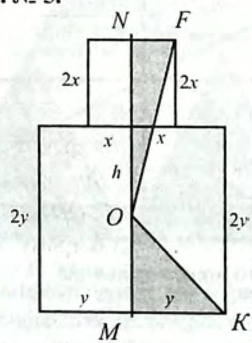
1) $\angle OKL = \angle OLK = \beta$.

2) $\Delta ODM = \Delta ODC$ (CCC), значит, $\angle OMD = \angle OLD = \beta$.

3) $\Delta OKC = \Delta OMC$ (CCC), значит, $\angle CMO = \angle DMO = \beta$.

4) $\angle CMO = \angle DMO = \beta$, значит, MC – биссектриса угла CMD.

(210) Геометрия. № 5.



В ΔOFN $\quad (h + 2x)^2 + x^2 = R^2$, $h^2 + 4hx + 5x^2 = R^2$.

В ΔOKM $OM = 2y - h$, $(2y - h)^2 + y^2 = R^2$, $5y^2 - 4hy + h^2 = R^2$.

$h^2 + 4hx + 5x^2 = 5y^2 - 4hy + h^2$,

$5(x^2 - y^2) + 4h(x + y) = 0$,

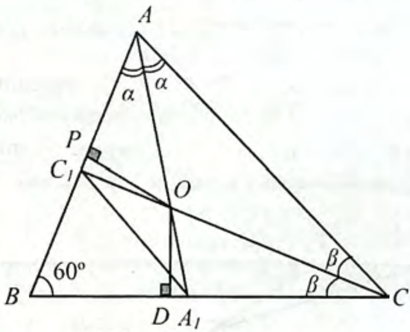
$(x + y)(5(x - y) + 4h) = 0$, $x + y \neq 0$

$5(x - y) = -4h$,

$y - x = \dfrac{4h}{5}$, $2y - 2x = \dfrac{8h}{5}$.

Ответ: $1{,}6h$.

(211) Геометрия. № 6.



$2\alpha + 2\beta + 60^\circ = 180^\circ$, $\alpha + \beta = 60^\circ$.

$\angle AC_1C = 60 + \beta$, внешний угол треугольника ΔCC_1B,

$\angle BA_1A = 120 - \alpha = 120 - (60 - \beta) = 60 + \beta$.

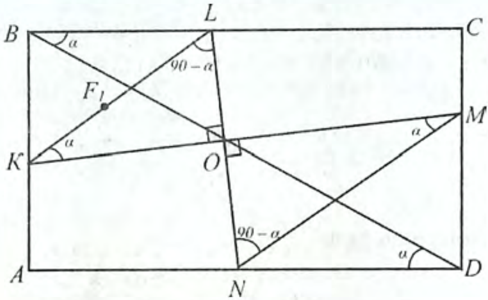
O лежит на биссектрисе $\angle ABC$. $OD = OP$.

$\Delta ODC_1 = \Delta OPA_1$ (по катету и острому углу). Отсюда $C_1O = A_1O$.

ΔA_1OC_1 – равнобедренный.

Ответ: ΔA_1OC_1 – равнобедренный.

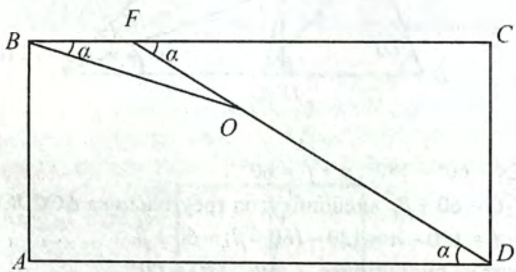
(212) Геометрия. № 7.



$\angle KOL = 90^o$, $\alpha = \angle KLO = \angle OMN$.

Окружность описана около $BLOK$. F_1 – середина, KL – центр. Аналогично F_2 – центр окружности, описанной около $NOMD$.

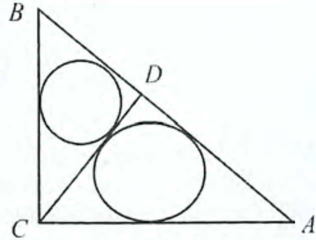
Из двух окружностей, пользуясь формулой вписанных углов, на хордах OL и OD имеем: $\angle OBL = \angle ODN = \alpha$.



Если BOD – ломаная, то продолжим DO, получим F.

$\angle OFC = \alpha$, $\angle OBC = \alpha$, чего быть не может. Значит, BOD – прямая. O – лежит на BD.

(213) Геометрия. № 8.



Обозначим искомый радиус r, положим $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Из подобия треугольников ACD и ABC, у них равные углы при вершине A, имеем $\frac{r}{r_1} = \frac{c}{b}$, откуда $b = \frac{r_1}{r}c$. Прямоугольные треугольники BCD и BAC также подобны, поэтому $\frac{r}{r_2} = \frac{c}{a}$, откуда $a = \frac{r_2}{r}c$. Так как $a^2 + b^2 = c^2$, то, возводя в квадрат выражения для a и b и складывая их, получим $\left(\frac{r_1}{r}c\right)^2 \cdot c^2 + \left(\frac{r_2}{r}c\right)^2 \cdot c^2 = c^2$ или $\frac{r_1^2 + r_2^2}{r^2} = 1$. Находим $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

Ответ: $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$

(214) Геометрия. № 9.

Легко видеть, что треугольники FKM, MQE и PMN подобны треугольнику ABC, поскольку в них все соответственные углы равны, то треугольники подобны. Пусть S – площадь треугольника ABC, тогда $\frac{S_1}{S}=\left(\frac{EM}{A\tilde{N}}\right)^2;\frac{S_2}{S}=\left(\frac{MF}{AC}\right)^2;\frac{S_3}{S}=\left(\frac{PN}{AC}\right)^2$.

$$EM=\sqrt{\frac{S_1}{S}}AC, MF=\sqrt{\frac{S_2}{S}}FC, PN=\sqrt{\frac{S_3}{S}}A\tilde{N}.$$

А так как $EM = AP$, $MF = NC$, то $EM + PN + MF = AP + PN + NC = AC$.

Таким образом, $AC = AC\cdot\left(\sqrt{\frac{S_1}{S}}+\sqrt{\frac{S_2}{S}}+\sqrt{\frac{S_3}{S}}\right)$, откуда следует $S=\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2$.

Ответ: $\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2$.

(215) Геометрия. № 10.

Пусть O – точка пересечения диагоналей трапеции. Обозначим $AD = a$, $BC = b$, $MO = x$, $BO = p$, $OD = q$.

$$\left.\begin{array}{l} BC \parallel AD \\ 1.\ \Delta BOC \sim \Delta DOA \\ \text{(по двум углам)} \end{array}\right| \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{p}{g}$$

$$\left.\begin{array}{l} MO \parallel AD \\ 2.\ \Delta MBO \sim \Delta ABD \end{array}\right| \Rightarrow \frac{x}{a}=\frac{p}{p+g}$$

Из (1) и (2) следует, $x=a\frac{p}{p+q}=a\frac{p/q}{p/q+1}=\frac{ab}{a+b}$, т. е. $MO = \dfrac{ab}{a+b}$.

Аналогично устанавливаем, что $NO = \dfrac{ab}{a+b}$, поэтому $MN = \dfrac{2ab}{a+b}$.

(216) Геометрия. № 11.

По теореме Пифагора получаем:

$(x+9)^2 = (x+7)^2 + (x+5)^2$,

$x^2 + 18x + 81 = x^2 + \underline{14x} + 49 + x^2 + \underline{10x} + 25$,

$x^2 + 6x + 74 - 81 = 0$,

$x^2 + 6x - 7 = 0$,

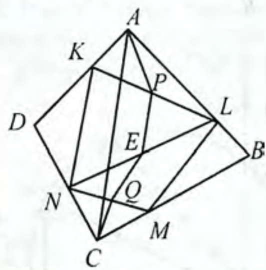
$x^2 + 7x - x - 7 = 0$,

$x(x-1) + 7(x-1) = 0$,

$x = 1$, $x = -7$. Последнее значение не подходит по смыслу задачи, остается $x = 1$.

Ответ: 1.

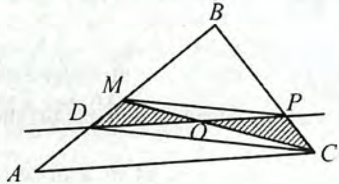
(217) Геометрия. № 12.



Рассмотрим вписанный в $ABCD$ четырехугольник $KLMN$. Пусть P, E, и Q – середины KL, NL и NM соответственно. Поскольку $AP = 0{,}5KL$, $PE = 0{,}5KN$, $EQ = 0{,}5LM$, $QC = 0{,}5NM$, то длина ломаной $APEQC$ равна половине периметра четырехугольника $KLMN$. Из этого и следует утверждение задачи.

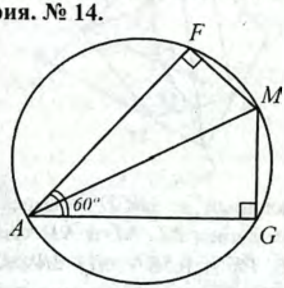
(218) Геометрия. № 13.

Если точка D совпадает с точкой M – серединой AB, то CM – искомая прямая. Пусть точки D и M различны. Не нарушая общности рассуждений, будем для определенности считать, что точка D лежит на отрезке AM. Проведем $MP \parallel DC$. Докажем, что DP – искомая прямая. Отрезок CM делит площадь треугольника ABC пополам. Четырехугольник $DMPC$ – трапеция, O – точка пересечения ее диагоналей MC и DP. В трапеции $DMPC$ при пересечении диагоналей MC и DP образуются четыре треугольника таких, что $S_{\Delta DOM} = S_{\Delta POC}$.



$0{,}5S_{\Delta ABC} = S_{\Delta BCM} = S_{MBPO} + S_{\Delta POC} = S_{MBPO} + S_{\Delta DOM} = S_{\Delta BDP}$. Площадь трсугольника BDP составляст половину площади трсугольника ABC, значит, DP – искомая прямая.

(219) Геометрия. № 14.



1) Окружность, проходящая чсрсз A, F, M, Q, имсст AM – диаметр.

$2R = 4$, $R = 2$.

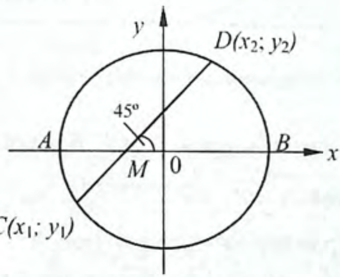
2) $\angle FMA = 180° - 60° = 120°$.

3) По следствию из теоремы синусов получаем:

$$\frac{FQ}{\sin 120°} = 2R,\ FQ = 4 \cdot \sin 120° = 4\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

Ответ: $2\sqrt{3}$.

(220) Геометрия. № 15.



AB – диаметр, $C(x_1; y_1)$, $D(x_2; y_2)$. Так как C и D находятся на окружности, то $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = R^2$.

$$\begin{cases} y = x - b, \\ x^2 + y^2 = R^2. \end{cases}$$

$x^2 + x^2 - 2xb + b^2 - R^2 = 0$,

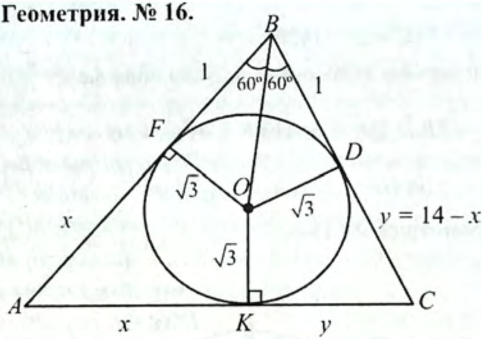
$2x^2 - 2bx + b^2 - R^2 = 0$,

$x_1 + x_2 = b$.

$CM^2 + DM^2 = (x_1 - b)^2 + R^2 - x_1{}^2 + (x_2 - b)^2 + R^2 - x_2{}^2 = b^2 - 2bx_1 + 2R^2 + b^2 - 2bx_2 = 2R^2 + 2b^2 - 2b(x_1 + x_2) = 2R^2 + 2b^2 - 2b^2 = 2R^2$.

$CM^2 + DM^2 = 2R^2$ не зависит от положения точки M на диаметре.

(221) Геометрия. № 16.



1) Пусть OB – биссектриса угла ABC, тогда $\angle FOD = \angle DBO = 60°$.

Рассмотрим прямоугольный ΔBOF. В нем $BF = FO \cdot \mathrm{ctg}\, 60° = \sqrt{3}\dfrac{\sqrt{3}}{3} = 1$, следовательно, $BD = BF = 1$, как две касательные к окружности, проведенные из одной точки B.

Обозначим $AK = AF = x$, $CK = CD = y$, тогда $x + y = AK + CK = AC = 14$. Получаем $P_{ABC} = 2x + 2y + 2$, откуда

$p = x + y + 1 = 14 + 1 = 15.$

$S_{ABC} = p \cdot r = 15\sqrt{3}$,

$y = 14 - x.$

С другой стороны, площадь данного треугольника можно посчитать иначе:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(x+1)(15-x)\sin 120° = \frac{1}{2}(15x + 15 - x^2 - x)\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{4}(15 - x^2 + 14x)$, приравнивая полученное значение, имеем:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(15 - x^2 + 14x) = 15\sqrt{3},$$

$15 - x^2 + 14x = 60,$

$x^2 - 14x + 45 = 0,$

$x_1 = 5, \qquad x_2 = 9.$

Откуда легко находятся стороны треугольника

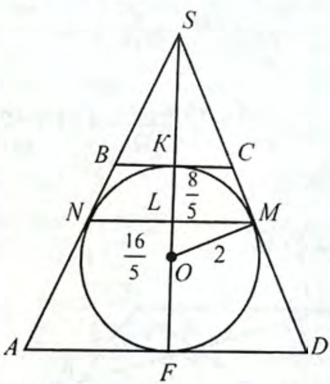
1) $x = 5 \qquad AB = 6, \quad BC = 10.$

2) $x = 9 \qquad AB = 10, \quad BC = 6.$

Фактически получился один и тот же треугольник, различно ориентированный.

Ответ: $S_{ABC} = 15\sqrt{3}$, $AB = 10$, $BC = 6$ или $AB = 6$, $BC = 10$.

(222) Геометрия. № 17.



1) $ML = \frac{1}{2}MN = \frac{8}{5},$

2) Из прямоугольного $\Delta\, OLM$ по теореме Пифагора:

$$OL = \sqrt{4 - \frac{64}{25}} = \sqrt{\frac{36}{25}} = \frac{6}{5}.$$

3) По метрическим соотношениям в прямоугольном треугольнике MOS квадрат высоты, опущенной на гипотенузу, равен произведению проекций катетов на гипотенузу:

$$\frac{8}{5} = \sqrt{\frac{6}{5}\cdot SL}\text{, откуда } \frac{64}{25} = \frac{6}{5}SL, \quad SL = \frac{64}{5\cdot 6} = \frac{32}{15} = 2\frac{2}{15}.$$

4) $LK = OK - OL = 2 - \frac{6}{5} = \frac{4}{5}$; $SK = 2\frac{2}{15} - \frac{4}{5} = 1\frac{2}{15} + \frac{3}{15} = 1\frac{1}{3}$.

Так как $KC \parallel LM$, то прямая KC отсекает треугольник, подобный данному, $\Delta SKC \sim \Delta SLM$.

Из подобия имеем:

$$\frac{KC}{ML} = \frac{SK}{SL},\ KC = \frac{SK \cdot ML}{SL} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 15}{3 \cdot 5 \cdot 32} = 1,$$

$BC = 2KC = 2$.

5) $SF = SK + KF = SK + 4 = \frac{4}{3} + 4 = \frac{16}{3}$.

6) $LM \parallel FD$, поэтому $\Delta SLM \sim \Delta SFD$.

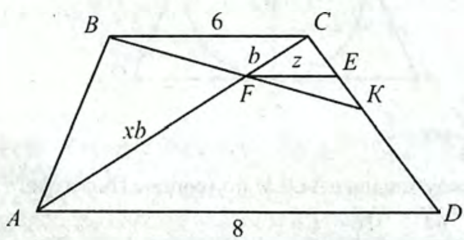
Из подобия имеем:

$$\frac{FD}{LM} = \frac{SF}{SL},\ FD = \frac{SF \cdot LM}{SL} = \frac{16 \cdot 8 \cdot 15}{3 \cdot 5 \cdot 32} = 4,\ AD = 2FD = 8.$$

7) $S_{ABC} = 5 \cdot 4 = 20$.

Ответ: 20.

(223) Геометрия. № 18.



Проведем $FE \parallel AD$. Обозначим $FC = b$, тогда $AF = xb$, $EF = z$. $\Delta FCE \sim \Delta ACD$, так как $FE \parallel AD$. Из подобия имеем:

$$\frac{z}{8} = \frac{b}{b + bx},\ \frac{z}{8} = \frac{b}{b(1+x)},\ z = \frac{8}{1+x}.$$

$\Delta KEF \sim \Delta KCB$, так как $FE \parallel BC$. Из подобия имеем:

$$\frac{z}{6}=\frac{KE}{KC},\ \frac{4}{3x+3}=\frac{KE}{KC},\ \frac{KC}{KE}=\frac{3x+3}{4}.$$

$$\frac{CE+KE}{KE}=\frac{3x+3}{4},\ \frac{CE}{KE}+1=\frac{3x+3}{4},\ \frac{CE}{KE}=\frac{3x+3}{4}-1,$$

$$\frac{CE}{KE}=\frac{3x-1}{4}.$$

Обозначим $S_0 = S_{CEF}$.

$$\frac{S_{CEF}}{S_{FEK}}=\frac{CE}{KE},\ \frac{S_0}{\frac{48}{5}-S_0}=\frac{3x-1}{4},\ \frac{5S_0}{48-5S_0}=\frac{3x-1}{4},$$

$(48-5S_0)(3x-1)=20S_0,$

$144x-48-15S_0x+5S_0=20S_0,$

$144x=20S_0-5S_0+15S_0x+48,$

$144x=15S_0+15S_0x+48,\quad 144x-48=S_0(15+15x),$

$$S_0=\frac{48(3x-1)}{15(x+1)}=\frac{16(3x-1)}{5(x+1)}.$$

$$S_{ACD}=\frac{1}{2}AD\cdot h=\frac{1}{2}8\cdot 7=28,$$

$$\frac{S_0}{28}=\left(\frac{b}{b+bx}\right)^2,\quad \frac{S_0}{28}=\frac{1}{(1+x)^2},\quad S_0(x+1)^2=28,$$

$$\frac{16(3x-1)(x+1)^2}{5(x+1)}=28,\quad \frac{4(3x-1)(x+1)}{5}=7,$$

$4(3x-1)(x+1)=35,$

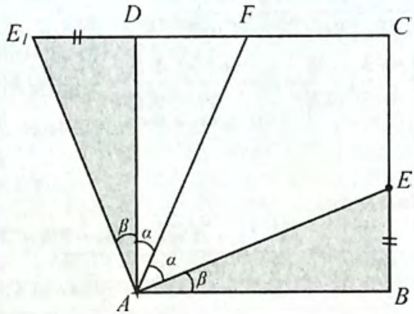
$12x^2+8x-39=0,$

$D=484,$

$$x_{1,2}=\frac{-4\pm 22}{12},\ x=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}$$

Ответ: 1,5.

(224) Геометрия. № 19.



1) Развернем рисунок на 90° против часовой стрелки.

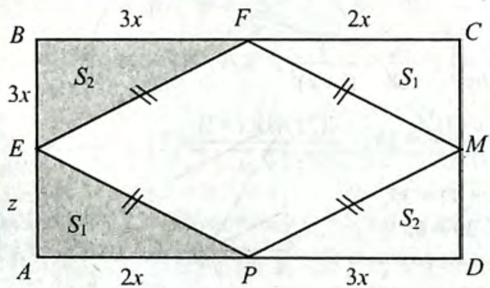
2) $BE = DE_1$, $BE + DF = E_1F$,

$\angle E_1 = \angle E = \alpha + \beta$.

ΔE_1AF – равнобедренный, значит, $E_1F = E_1A = EA = a$.

Ответ: a.

(225) Геометрия. № 20.



1) $AP = 2x$, $PD = 3x$, $AD = 5x$, $AB = CD = 3x$.

2) $AE = z$, $BE = 3x - z$.

3) ΔBEF – прямоугольный, $EF^2 = 9x^2 + (3x - z)^2 = 9x^2 + 9x^2 - 6xz + z^2 = 18x^2 - 6xz + z^2$.

4) ΔAEP – прямоугольный, $PE^2 = z^2 + 4x^2$, $EF^2 = PE^2$, так как $EFMP$ – ромб: $18x^2 - 6xz + z^2 = z^2 + 4x^2$.

$14x^2 - 6xz = 0$, $7x - 3z = 0$, $3z = 7x$, $z = \frac{7}{3}x$.

5) $S_{ABCD} = 5x \cdot 3x = 15x^2$.

6) $S_1 = S_{AEP} = S_{FCM} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot z = xz = x.\ \ \frac{7x}{3} = \frac{7}{3}x^2$,

$BE = 3x - z = 3x - \frac{7}{3}x = \frac{2}{3}x$,

$S_2 = \frac{1}{2}BF \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot \frac{2x}{3} = x^2$.

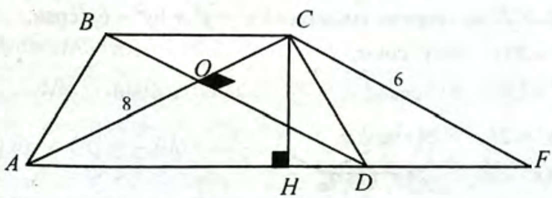
7) $S_{EFMP} = S_{ABCD} - 2S_1 - 2S_2 =$

$= 15x^2 - \frac{14x^2}{3} - 2x^2 = \frac{45x^2 - 14x^2 - 6x^2}{3} = \frac{25x^2}{3}$.

8) $\frac{S_{\text{прям}}}{S_{\text{ромб}}} = \frac{15x^2 \cdot 3}{25x^2} = \frac{9}{5} = 1{,}8$.

Ответ: 1,8.

(226) Геометрия. № 21.



1) Проведем $CF \parallel BD$, $BDCF$ – параллелограмм, $DF = BC$, $CF = BD = 6$.

2) $\angle ACF = \angle AOD = 90^{\circ}$, как соответственные при $BD \parallel CF$ и секущей AC.

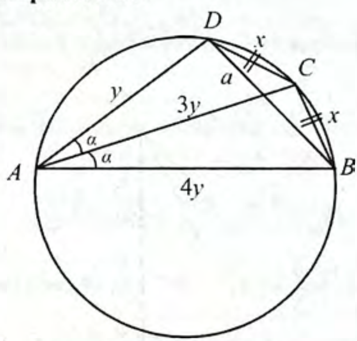
3) В ΔACF – прямоугольном, $CH \perp AD$, $AF = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

4) $S_{ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$.

5) $\frac{1}{2} AF \cdot CH = 24$, $AF \cdot CH = 48$, $CH = 4{,}8$.

Ответ: 4,8.

(227) Геометрия. № 22.



$\angle DAC = \angle BAC = \alpha$.

Из ΔABC по теореме косинусов $x^2 = 16y^2 + 9y^2 - 24y^2\cos\alpha$,

Из ΔACD по теореме косинусов $x^2 = y^2 + 9y^2 - 6y^2\cos\alpha$,

$$\begin{cases} x^2 = 25y^2 - 24y^2\cos\alpha, \\ x^2 = 10y^2 - 6y^2\cos\alpha; \end{cases}$$

$$-\begin{cases} x^2 = 25y^2 - 24y^2\cos\alpha, \\ 4x^2 = 40y^2 - 24y^2\cos\alpha; \end{cases}$$

$-3x^2 = -15y^2$, $x^2 = 5y^2$, $x = y\sqrt{5}$.

$5y^2 = 25y^2 - 24y^2\cos\alpha$,

$5 = 25 - 24\cos\alpha$, $24\cos\alpha = 20$, $\cos\alpha = \dfrac{24}{20} = \dfrac{5}{6}$,

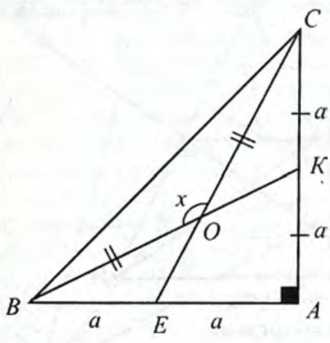
$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\dfrac{25}{36}} = \sqrt{\dfrac{11}{36}} = \dfrac{\sqrt{11}}{6}$.

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 2\cdot\dfrac{\sqrt{11}}{6}\cdot\dfrac{5}{6} = \dfrac{5\sqrt{11}}{18}$.

$\dfrac{a}{\sin 2\alpha} = 2R$, $2R = a : \dfrac{5\sqrt{11}}{18} = \dfrac{18a\sqrt{11}}{5\sqrt{11}\sqrt{11}} = \dfrac{18\sqrt{11}a}{55}$

Ответ: $\dfrac{18\sqrt{11}a}{55}$.

(228) Геометрия. № 23.



Пусть $AK = a$.

1) ΔABK – прямоугольный, $BK = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5}$.

2) $BO = CO = \dfrac{2}{3}BK = \dfrac{2a\sqrt{5}}{3}$.

3) $BC = 2\sqrt{2}\,a$, т. к. $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{8a^2}$.

4) В ΔBOC по теореме косинусов

$BC^2 = BO^2 + OC^2 - 2BO\cdot OC\cos x$,

$$2BO \cdot OC\cos x = BO^2 + OC^2 - BC^2,$$

$$2 \cdot \frac{2a\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{5}}{3}\cos x = \frac{20a^2}{9} + \frac{20a^2}{9} - 8a^2,$$

$$\frac{40a^2}{9}\cos x = \frac{40a^2}{9} - 8\grave{a}^2,$$

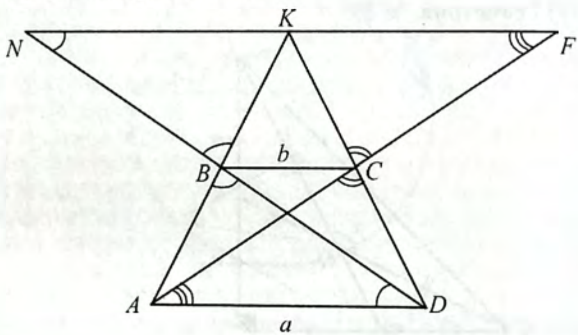
$$40a^2\cos x = 40a^2 - 72a^2,$$

$$40a^2\cos x = -32a^2,$$

$$\cos x = -\frac{32}{40} = -\frac{4}{5} = -0{,}8.$$

Ответ: $-0{,}8$.

(229) Геометрия. № 24.



$BC \parallel AD$, значит, $\Delta AKD \sim \Delta BKC$. Пусть $KC = kb$, $KD = ka$, $BK = tb$, $AK = ta$.

$CD = KD - KC = ka - kb = k(a - b)$. $AB = AK - BK = ta - tb = t(a - b)$.

$\angle NBK = \angle DBA$, как вертикальные. $\angle N = \angle ADB$, как внутренние накрест лежащие при $NK \parallel AD$ и секущей ND.

$\Delta NBK \sim \Delta DBA$ по двум углам.

Из подобия имеем:

$$\frac{NK}{AD}=\frac{BK}{AB},\ NK=\frac{BK\cdot AD}{AB}=\frac{tb\cdot a}{t(a-b)}=\frac{ab}{a-b}.$$

$\angle KCF = \angle DCA$, как вертикальные. $\angle CAD = \angle F$, как внутренние накрест лежащие при $KB \parallel AD$ и секущей AF.

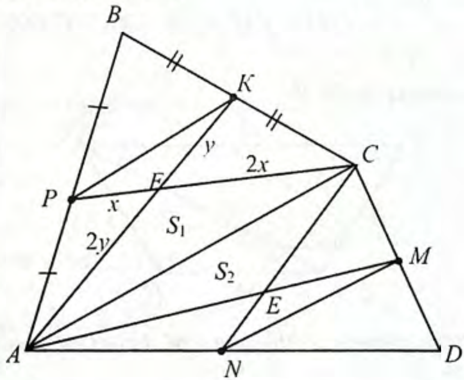
$\Delta KCF \sim \Delta DCA$ по двум углам. Из подобия имеем:

$$\frac{KF}{AD}=\frac{KC}{CD},\ KF=\frac{KC\cdot AD}{CD}=\frac{kba}{k(a-b)}=\frac{ab}{a-b}.$$

$$NK=KF=\frac{ab}{a-b};\ NF=2NK=\frac{2ab}{a-b}.$$

Ответ: $\frac{2ab}{a-b}$.

(230) Геометрия. № 25.



1) По свойству $FK = y$, $AF = 2y$, $PF = x$, $FC = 2x$, $\angle PFK = \angle AFC = \alpha$ – как вертикальные. $S_1 = \frac{1}{2}\cdot 2x\cdot 2y\cdot \sin\alpha$.

$$S_{PFK}=\frac{1}{2}x\cdot y\cdot\sin\alpha=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot 2y\cdot\sin\alpha=\frac{1}{4}S_1.$$

$$S_{AFP} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2y \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 2y \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} S_1.$$

$$S_{KFC} = S_{AFP} = \frac{1}{2} S_1.$$

$$S_{APKC} = S_1 + \frac{S_1}{4} + 2 \cdot \frac{S_1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{4} S_1.$$

Пусть $S_{BPK} = z$, $\Delta ABC \sim \Delta PBK$, т. к. PK – средняя линия $PK \parallel AC$. Площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия. $S_{ABC} = 4z$.

$$S_{APKC} = 4z - z = 3z. \text{ Имеем } 3z = \frac{9}{4} S_1,\ z = \frac{3}{4} S_1.$$

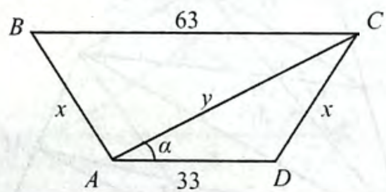
$$S_{ABC} = S_{PBK} + S_{APKC} = \frac{3}{4} S_1 + \frac{9}{4} S_1 = \frac{12}{4} S_1 = 3S_1.$$

Аналогично $S_{ACD} = 3S_2$.

$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = 3S_1 + 3S_2 = 3(S_1 + S_2) = 3 \cdot 666 = 1998.$

Ответ: 1998.

(231) Геометрия. № 26.



В ΔABC по теореме косинусов $\angle BCA = \angle DAC = \alpha$.

1) Пусть $AB = CD = x$, $AC = y$.

$$x^2 = 63^2 + y^2 - 126y\cos\alpha, \quad \cos\alpha = \frac{y^2 - x^2 + 63^2}{126y}.$$

В ΔACD по теореме косинусов $x^2 = 33^2 + y^2 - 66y\cos\alpha$,

$$\cos\alpha = \frac{y^2 - x^2 + 33^2}{66y}.$$

2) $\dfrac{y^2-x^2+63^2}{126y}=\dfrac{y^2-x^2+33^2}{66y}$,

$\dfrac{y^2-x^2+63^2}{21}=\dfrac{y^2-x^2+33^2}{11}$,

$11(y^2-x^2)+11\cdot63^2=21(y^2-x^2)+21\cdot33^2$,

$11\cdot63^2-21\cdot33^2=10(y^2-x^2)$,

$43659-22869=10(y^2-x^2)$,

$y^2-x^2=2079$.

3) Пусть радиусы вписанных окружностей в ΔABC и ΔACD будут соответственно равны $3r_0$ и $2r_0$. Вычислим площадь $S_\Delta=p_0r$.

$\dfrac{3r_0(x+y+63)}{2r_0(x+y+33)}=\dfrac{63}{33}$, $\dfrac{(x+y+63)}{(x+y+33)}=\dfrac{14}{11}$, $x+y=t$,

$(t+63)11=14(t+33)$,

$11t+693=14t+462$,

$3t=231$, $t=77$.

$\begin{cases}x+y=77,\\(y-x)(y+x)=77\cdot27;\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=77,\\(y-x)=27;\end{cases}$

$2y=104$, $y=52$, $x=25$.

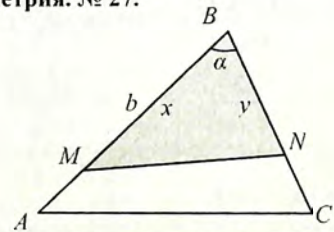
4) $\cos\alpha=\dfrac{y^2-x^2+33^2}{66y}=\dfrac{2079+1089}{66\cdot52}=\dfrac{3168}{66\cdot52}=\dfrac{48}{52}=\dfrac{12}{13}$;

$\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$.

5) $2R=\dfrac{x}{\sin\alpha}=\dfrac{25\cdot13}{5\cdot2}=\dfrac{65}{2}=32{,}5$.

Ответ: 32,5.

(232) Геометрия. № 27.



Пусть AC – наибольшая сторона, MN – искомый отрезок. Площадь треугольника BMN равна половине площади треугольника ABC. Обозначим $BN = y$, $BM = x$, $AB = b$, $BC = a$, $AC = c$. Если треугольник можно прямой MN разрезать на две части равной площади и равного периметра, то получим:

$$\frac{1}{2}xy\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}ab\sin c,\ 2xy = ab,\ xy = \frac{ab}{2}.$$

$$\frac{a+b+c}{2} = x + y.$$

По теореме, обратной теореме Виета, x, y – корни квадратного уравнения:

$$x^2 - \frac{a+b+c}{2}x + \frac{ab}{2} = 0.$$

$$D = \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 - 2ab > 0,$$

$$\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 - 2ab = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc - 8ab) =$$

$$= \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - 2ab + c^2 + 2ac - 2ab + 2bc - 2ab) =$$

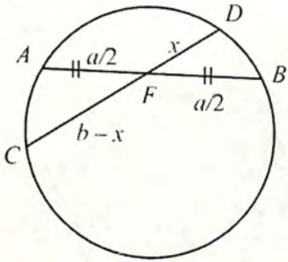
$$= \frac{1}{4}((a-b)^2 + c^2 + 2a(c-b) + 2b(c-a)) > 0.$$

В любом случае дискриминант положителен, можно найти x

и y, значит, всегда треугольник можно какой-нибудь прямой разрезать на две части равной площади и равного периметра.

Ответ: Можно.

(233) Геометрия. № 28.



$$x(b-x)=\frac{a^2}{4};\ x^2-bx+\frac{a^2}{4}=0,$$

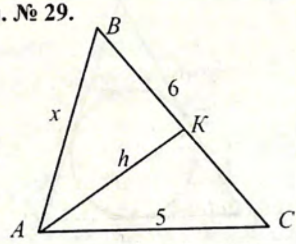
$$D=b^2-a^2;$$

$$x=\frac{b\pm\sqrt{b^2-a^2}}{2},\ x=\frac{b-\sqrt{b^2-a^2}}{2},.$$

$$b-x=\frac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{2},\quad \frac{x}{b-x}=\frac{b-\sqrt{b^2-a^2}}{b+\sqrt{b^2-\grave{a}^2}}.$$

Ответ: $\frac{b-\sqrt{b^2-a^2}}{b+\sqrt{b^2-\grave{a}^2}}$.

(234) Геометрия. № 29.



ΔAKC – прямоугольный, $AC^2=AK^2+KC^2$.

$AK = \dfrac{x}{2},\ KC = 6 - \dfrac{x\sqrt{3}}{2}.$

$x^2 + 36 - 2x \cdot 6 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 25,$

$x^2 - 6\sqrt{3}x + 11 = 0,$

$\dfrac{D}{4} = 27 - 11 = 16.$

$x_{1,2} = \dfrac{3\sqrt{3} \pm 4}{1},\ x_1 = 3\sqrt{3} - 4,\ x_2 = 3\sqrt{3} + 4.$

$H = x \cdot \sin 30^\circ,\ h_1 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - 2,\ h_2 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + 2.$

$\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - 2 \le \dfrac{\sqrt{2}}{2},$ $\qquad 3\sqrt{3} \le 4 + \sqrt{2},$

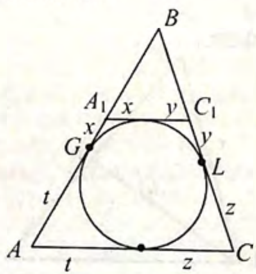
$27 \le 16 + 2 + 8\sqrt{2},$ $\qquad 9 \le 8\sqrt{2},$

$27 \le 128$ верно.

$S = \dfrac{1}{2}x \cdot 6 \cdot \sin 30^\circ = \dfrac{3}{2}x = \dfrac{9\sqrt{3}}{2} - 6.$

Ответ: $\dfrac{9\sqrt{3}}{2} - 6.$

(235) Геометрия. № 30.

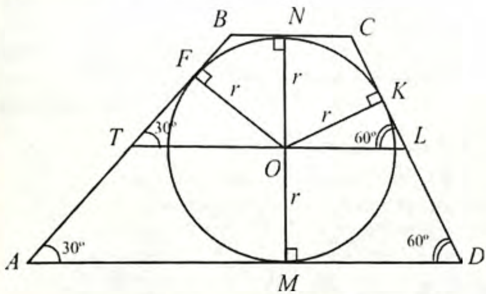


$P_{A_1BC_1} = b,\ \ BA_1 + x + BC_1 + y = BG + BL = b.$

$P_{ABC} = b + 2z + 2t$, $a = b + 2AC$, $AC = \dfrac{a-b}{2}$.

Ответ: $\dfrac{a-b}{2}$.

(236) Геометрия. № 31.



Пусть TL – средняя линия трапеции проходит через O – середину MN.

$\angle BTO = \angle TAM = 30°$ как соответственные при $TL \parallel AD$ и секущей AB.

Аналогично $\angle OLK = \angle D = 60°$.

Из ΔOTF $OT = \dfrac{r}{\sin 30°} = 2r$.

Из ΔOKL $OL = \dfrac{r}{\sin 60°} = \dfrac{2r}{\sqrt{3}}$.

По условию $TO + OL = 9 + 3\sqrt{3}$,

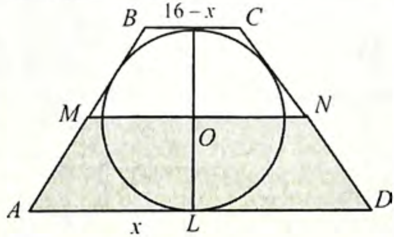
$2r + \dfrac{2r\sqrt{3}}{3} = 9 + 3\sqrt{3}$,

$6r + 2\sqrt{3}r = 27 + 9\sqrt{3}$,

$2r(3 + \sqrt{3}) = 9(3 + \sqrt{3})$, $r = 4{,}5$.

Ответ: 4,5.

(237) Геометрия. № 32.



Так как $AB + CD = BC + AD$, то

$BC + AD = 16$, $MN = 8$, $AD = x$, $BC = 16 - x$.

$S_1 = \dfrac{16 - x + 8}{2} r = \dfrac{24 - x}{2} r$, $S_2 = \dfrac{x + 8}{2} r$.

$\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{5}{11}$, $11S_1 = 5S_2$, $11 \cdot \dfrac{24 - x}{2} r = 5 \cdot \dfrac{x + 8}{2} r$,

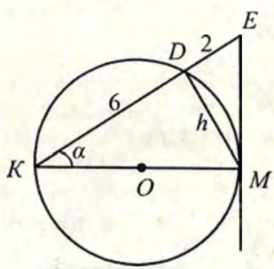
$11(24 - x) = 5(x + 8)$,

$264 - 11x = 5x + 40$,

$264 - 40 = 16x$, $16x = 224$, $x = 14$.

Ответ: 14.

(238) Геометрия. № 33.



ΔKME – прямоугольный, DM – высота.

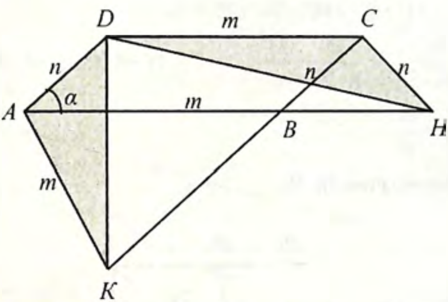
1) $DM^2 = 2 \cdot 6$, $DM = 2\sqrt{3}$, $\angle D = 90^\circ$.

2) $\text{tg}\alpha = \dfrac{2\sqrt{3}}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$.

3) $\cup DM = 2\alpha = 2 \cdot \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$.

О т в е т: $\dfrac{\pi}{3}$. 60° – градусная мера.

(239) Геометрия. № 34.



$AD = BC = CH = n$,

$DC = AB = AK = m$,

$\angle BCH = 180^\circ - 2\alpha$, $\angle BAK = 180^\circ - 2\alpha$.

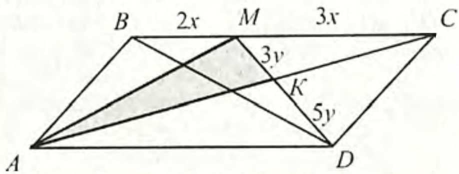
$\angle DCH = \alpha + 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ - \alpha$.

$\angle KAD = \alpha + 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ - \alpha$.

$\Delta DAK = \Delta HCD$ по двум сторонам и углу между ними.

Из равенства треугольников следует, что $DK = DH$, то есть ΔKDH – равнобедренный.

(240) Геометрия. № 35.



$BM = 2x$, $MC = 3x$, $AD = 5x$, т. к. $BC = AD$.

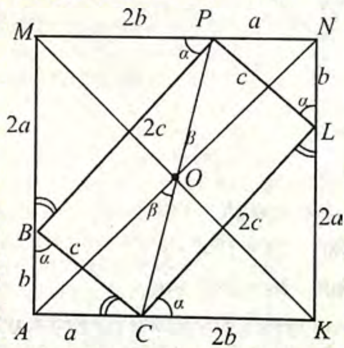
$S_{AMD} = \dfrac{1}{2} AD \cdot h = \dfrac{1}{2} \cdot 1 = \dfrac{1}{2}$, т. к. $S_{ABCD} = AD \cdot h = 1$.

$\Delta MCK \sim \Delta DAK$, $MK = 3y$, $KD = 5y$.

$S_{AMK} = \dfrac{3}{8} S_{AMD} = \dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{16}$.

Ответ: $\dfrac{3}{16}$.

(241) Геометрия. № 36.



Проведем $MN \parallel AC$ и $KN \parallel AB$ через точки P и L соответственно.

$AMNK$ – прямоугольник со сторонами $2a + b$ и $a + 2b$.

O – центр прямоугольника $AMNK$.

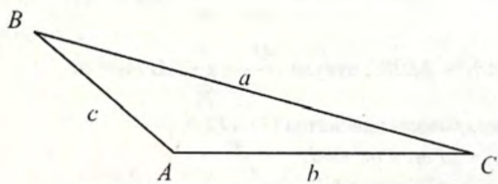
$\Delta ONP = \Delta OAC \Rightarrow \angle PON = \angle COA = \beta$.

PC – диагональ прямоугольника $BPLC$ и O – точка пересечения диагоналей прямоугольника $BPLC$.

$$AO = \frac{1}{2}AN = \frac{1}{2}\sqrt{(2a+b)^2 + (a+2b)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5a^2 + 8ab + 5b^2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{5a^2 + 8ab + 5b^2}$.

(242) Геометрия. № 37.



$c = 0{,}31$ м, $b = 6{,}82$ м.

Используем неравенство треугольника и получим двойное неравенство:

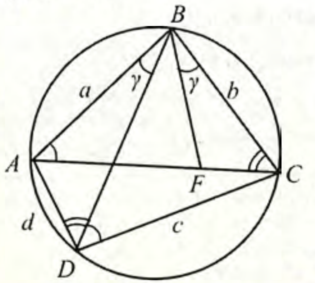
$b - c < a < b + c$,

$6{,}51 < a < 7{,}13$.

Единственное целое число, удовлетворяющее двойному неравенству, будет число 7.

Ответ: 7.

(243) Геометрия. № 38.



Пусть $BD = m_1$, $AC = m_2$.

1) Отложим $\angle CBF = \angle ABD = \gamma$.

2) $\Delta BDA \sim \Delta BCF$, откуда $\dfrac{FC}{d} = \dfrac{b}{m_1}$, $FCm_1 = bd$. (1)

3) $\Delta ABF \sim \Delta DBC$, откуда $\dfrac{AF}{c} = \dfrac{a}{m_1}$, $AFm_1 = ac$. (2)

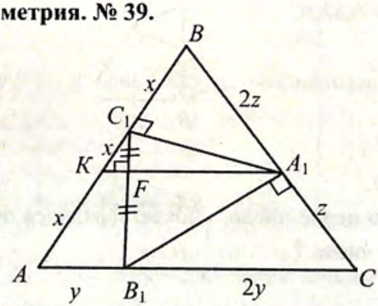
4) Складываем равенства (1) и (2):

$FCm_1 + AFm_1 = ac + bd$,

$m_1(FC + AF) = ac + bd$,

$m_1m_2 = ac + bd$.

(244) Геометрия. № 39.



1) Пусть $CB_1 = x$, $AB_1 = y$, $A_1C = z$.

2) Возьмем K – середина AC_1. $AK = KC_1 = x$. Соединили K и A_1, получили точку F.

3) $KA_1 \parallel AC$ по теореме, обратной теореме Фалеса.

4) Для ΔAB_1C_1 $KF \parallel AB_1$ и KF проходит через середину AC_1. KF – средняя линия ΔAB_1C_1. $C_1F = FB_1$.

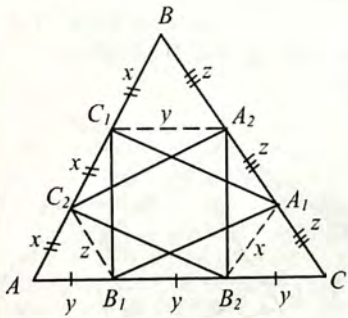
5) Для $\Delta A_1B_1C_1$ A_1F – медиана => A_1F – высота. $\angle C_1FK = 90°$, $A_1K \parallel AC$, значит, $\angle AB_1C_1 = 90°$.

6) Аналогично $\angle A_1C_1B = 90°$ и $\angle B_1A_1C = 90°$.

7) $\angle AC_1B_1 = 180° - 60° - 90° = 30°$. Из ΔAB_1C_1 следует, что $AB_1 = \frac{1}{2}AC_1$, $y = \frac{1}{2} \cdot 2x = x$, $y = x$.

8) Аналогично доказывается, что $y = z$, $x = y = z$, значит, ΔABC – равносторонний.

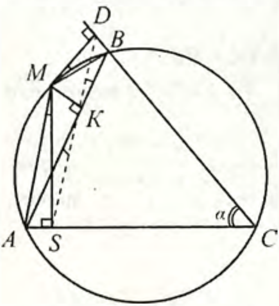
Решение 2:



Отложим $AC_2 = C_2C_1 = CB$, $BA_2 = A_2A_1 = A_1C$, $AB_1 = B_1B_2 = B_2C$. $\Delta C_1BA_2 \sim \Delta ABC$, $C_1A_2 = \frac{1}{3}AC = y$. Аналогично $A_1B_2 = x$, $B_1C_2 = z$.

Получили 3 параллелограмма $B_1C_1A_2B_2$, $C_2A_2A_1B_1$, $C_1C_2B_2A_1$. $C_2A_2 = A_2B_2 = C_2B_2 = A_1B_1 = B_1C_1 = A_1C_1$. $C_2C_1A_2A_1$ – трапеция, в которой $A_2C_2 = A_1C_1$. $\Delta C_2C_1A_2 = \Delta A_2A_1C_1$, значит, $x = z$. Аналогично $y = z$. Получили $x = y = z$, $AB = BC = AC$, значит, ΔABC – равносторонний.

(245) Геометрия. № 40.



1) Основная окружность

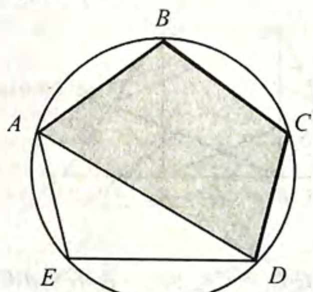
Из $MDCS$ $x + \angle BMS = 180° - \alpha$, $y + \angle BMS = 180° - \alpha$, $\angle x = \angle y$.

2) Около $MKSA$ описана окружность, AM – диаметр. $\angle AKS = \angle y$.

3) Около $MDBK$ описана окружность с диаметром MB. $\angle DKB = \angle x$.

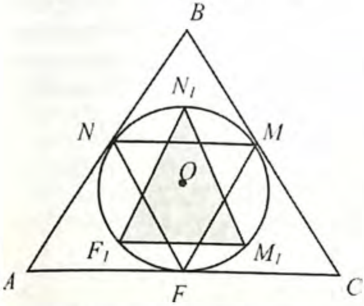
4) $\angle AKS = \angle DKB$, значит, точки D, K, S лежат на одной прямой. И так далее.

(246) Геометрия. № 41.



Искомым будет четырехугольник $ABCD$, вершины которого – четыре последовательные вершины правильного пятиугольника. При этом любая удаляемая вершина заменяется вершиной E.

(247) Геометрия. № 42.

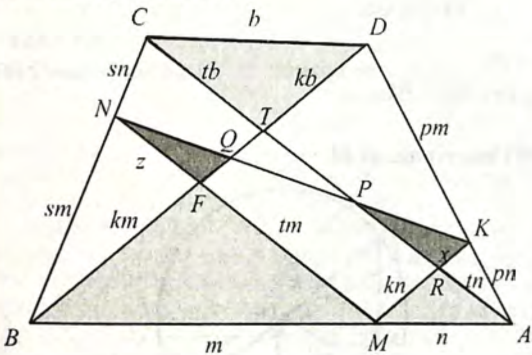


MN, MF, NF – средние линии ΔABC – правильного.

Окружность, вписанная в ΔABC содержит весь ΔMNF. Если вращать ΔABC вокруг точки O, то любой $\Delta M_1N_1F_1$ лежит внутри того же круга.

Переместим 4 синих треугольника, совмещая их центры с центрами ΔBMN, ΔCMF, ΔANF, ΔMNF. ΔABC покрыт синими треугольниками полностью!

(248) Геометрия. № 43.



1) Составим пропорции.

2) $\Delta TDA \sim \Delta RKA$ $\dfrac{x}{kb} = \dfrac{pn}{pm + pn}$; $x = \dfrac{nkb}{m + n}$.

.3) $\Delta PRK \sim \Delta NMK$. Найдем коэффициент пропорциональности.

$$kn + x = kn + \frac{nkb}{m+n} = kn(1 + \frac{b}{m+n}) = \frac{kn(m+n+b)}{m+n}.$$

$$\frac{KR}{MN} = k_1 = \frac{x}{kn+x} = \frac{nkb(m+n)}{(m+n)kn(m+n+b)} = \frac{b}{b+m+n}.$$

4) $\Delta BNF \sim \Delta BCT$. $\frac{z}{tb} = \frac{sm}{sm+sn}$; $z = \frac{mtb}{m+n}$.

$$z + tm = \frac{mtb}{m+n} + mt = mt(\frac{b}{m+n} + 1) = \frac{mt(b+n+m)}{m+n}.$$

5) $\Delta NFQ \sim \Delta NMK$

$$\frac{NF}{NM} = k_2 = \frac{z}{z+tm} = \frac{mtb \cdot (m+n)}{(m+n)mt(b+n+m)} = \frac{b}{b+m+n}.$$

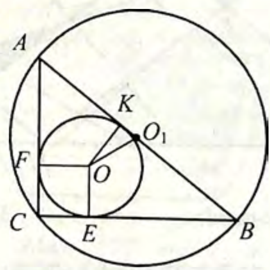
6) $k_1 = k_2$, $\frac{NQ}{NK} = k_1$, $NQ = k_1 \cdot NK$.

$\frac{PK}{NK} = k_2$, $PK = k_2 \cdot NK$.

$NQ = PK$.

Ответ: $NQ = PK$.

(249) Геометрия. № 44.



Проведем OF, OE, OK – радиусы вписанной окружности, тогда $OF \perp AC$, $OE \perp BC$, $OK \perp AB$.

Обозначим $OF = OE = OK = r$, $AO_1 = BO_1 = R$, $BE = x$. По свойству касательной, проведенной к окружности из одной точки, имеем $BE = BK = x$, $CE = CF = r$, $AK = AF = 2R - x$. Применив теорему Пифагора к треугольникам ABC и OKO_1, составим систему уравнений для нахождения r:

$$\begin{cases} AC^2 + BC^2 = AB^2, \\ OK^2 + O_1K^2 = OO_1^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} (2R - x + r)^2 + (r + x)^2 = 4R^2, \\ r^2 + (R - x)^2 = OO_1^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + r^2 - 2Rx + 2Rr = 0, \\ x^2 + r^2 - 2Rx + R^2 = OO_1^2. \end{cases}$$

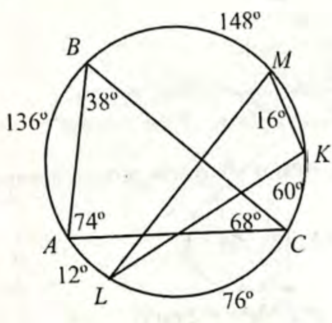
Вычтем из второго уравнения системы первое уравнение:

$$R^2 - 2Rr = OO_1^2;\ r = \frac{R^2 - OO_1^2}{2R}.$$

По условию $R = 4$, $OO_1 = 2$, $r = \dfrac{4^2 - 2^2}{8} = 1{,}5$.

Ответ: 1,5.

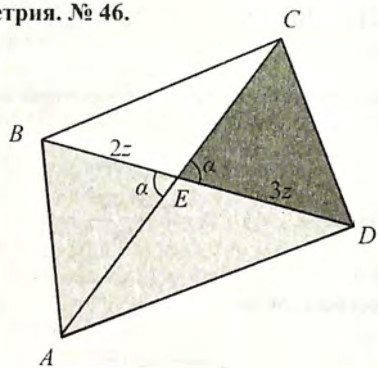
(250) Геометрия. № 45.



$\angle A = 74°$, $\cup BC = 148°$.
$\angle B = 38°$, $\cup AC = 76°$.

$\angle C = 180^\circ - (74^\circ + 38^\circ) = 68^\circ$, $\cup AB = 136^\circ$.
$AK = AB$, $\cup AK = 136^\circ$, $\cup CK = 136^\circ - 76^\circ = 60^\circ$.
$BL = BC$, $\cup BL = 148^\circ$, $\cup AL = 148^\circ - 136^\circ = 12^\circ$.
$CM = CA$, $\cup CM = 76^\circ$, $\cup KM = 76^\circ - 60^\circ = 16^\circ$.
$\angle MLK = 16^\circ : 2 = 8^\circ$.
$\cup LK = (76^\circ - 12^\circ) + 60^\circ = 124^\circ$, $\angle LMK = 124^\circ : 2 = 62^\circ$.
$\angle LKM = 180^\circ - 8^\circ - 62^\circ = 110^\circ$.
Ответ: $8^\circ, 62^\circ, 110^\circ$.

(251) Геометрия. № 46.



$S_{CDE} = S_{ACD} - S_{AED} = 9$ см$^2 - 6$ см$^2 = 3$ см^2.
$S_{ABE} = S_{ABD} - S_{ADE} = 10$ см$^2 - 6$ см$^2 = 4$ см^2.

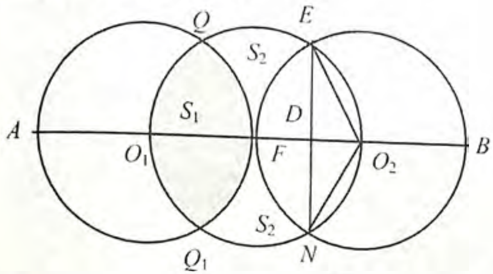
ΔBCE и ΔDCE имеют общую вершину. Значит, $\dfrac{S_{BCE}}{S_{DCE}} = \dfrac{BE}{DE}$.

$\dfrac{BE}{DE} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$, $BE = 2z$, $DE = 3z$.

$\dfrac{S_{BCE}}{S_{CDE}} = \dfrac{2z}{3z}$, $S_{BCE} = \dfrac{2}{3} \cdot 3$см$^2 = 2$ см^2.

$S_{ABCD} = 15$ см^2.
Ответ: 15 см^2.

(252) Геометрия. № 47.



O_2, $FD = DO_2 = \dfrac{R}{2}$.

В ΔO_2ED $\cos\angle EO_2D = \dfrac{R}{2R} = \dfrac{1}{2}$.

$\angle EO_2D = 60^\circ$, $\angle EO_2N = 120^\circ$.

$S_{секEO_2N} = \dfrac{1}{3}\pi R^2$, $S_{\Delta EO_2N} = \dfrac{1}{2}R^2\sin 120^\circ = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$.

$S_{сегм\,EO_2N} = \dfrac{\pi R^2}{3} - R^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

$S_1 = 2S_{сегм\,EFN} = \dfrac{2\pi R^2}{3} - \dfrac{R^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{R^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{6} = R^2(\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2})$.

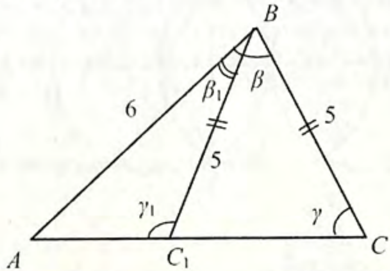
$S_2 = \dfrac{\pi R^2}{2} - S_1 = \dfrac{\pi R^2}{2} - R^2(\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}) = R^2(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}) =$

$= R^2(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{6})$.

$S_1 : S_2 : S_1 : S_2 = (\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}) : (\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{6}) : (\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}) : (\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{6})$.

Ответ: $(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}):(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}):(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}):(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6})$.

(253) Геометрия. № 48.



$$\frac{BC}{\sin 30°}=2R,\ BC=2\cdot 5\cdot\frac{1}{2}=5,\ BC=5.$$

$$\frac{6}{\sin\gamma°}=2R,\ \sin\gamma°=0{,}6.$$

Суть задачи состоит в том, что существуют два треугольника, поскольку $\cos\gamma=0{,}8$ или $\cos\gamma_1=-0{,}8$.

$\cos\gamma=0{,}8,\ \beta=180°-30°-\gamma°=150°-\gamma°.$

$\cos\beta=\cos(150°-\gamma)=\cos150°\cdot\cos\gamma+\sin150°\sin\gamma=$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5},\ \cos\beta=\frac{3-4\sqrt{3}}{10}.$

$AC^2=25+36-\frac{60(3-4\sqrt{3})}{10}=43+24\sqrt{3}=(4+3\sqrt{3})^2.$

$AC=4+3\sqrt{3}.$

$\cos\gamma_1=-0{,}8,$

$\cos\beta=\cos150°\cdot\cos\gamma+\sin150°\cdot\sin\gamma=$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-\frac{4}{5})+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3+4\sqrt{3}}{10}.$

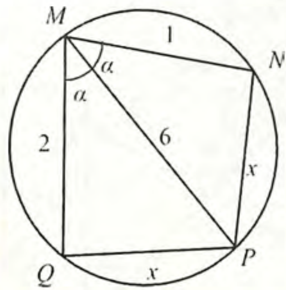
$$AC^2 = 61 - \frac{60(3-4\sqrt{3})}{10} = 61 - 18 - 24\sqrt{3} = 43 - 24\sqrt{3} =$$

$$= (4-3\sqrt{3})^2.$$

$$AC = 4 - 3\sqrt{3}.$$

Ответ: $4 \pm 3\sqrt{3}$.

(254) Геометрия. № 49.



По теореме косинусов

$x^2 = 40 - 24\cos\alpha$, $x^2 = 37 - 12\cos\alpha$,

$$\cos\alpha = \frac{40-x^2}{24};\ \cos\alpha = \frac{37-x^2}{12}.$$

$$\frac{40-x^2}{24} = \frac{37-x^2}{12},$$

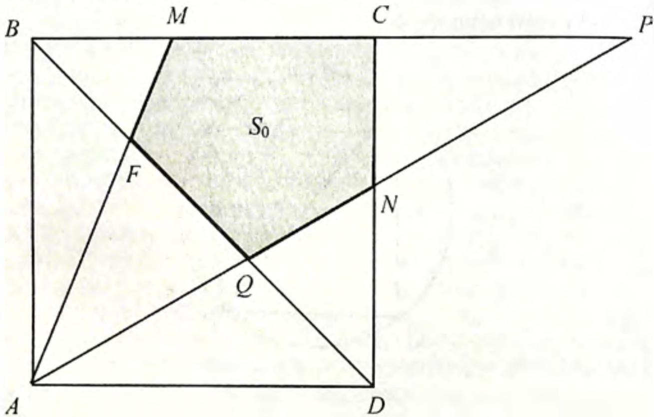
$40 - x^2 = 74 - 2x^2$, $x^2 = 34$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$.

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

$$R = \frac{x}{2\sin\alpha} = \frac{\sqrt{34}\cdot 4}{2\sqrt{15}} = \frac{2\sqrt{34}\cdot\sqrt{15}}{\sqrt{15}\sqrt{15}} = \frac{2\sqrt{510}}{15}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{510}}{15}$.

(255) Геометрия. № 50.



$\Delta CPN \sim \Delta DAN$ по двум углам. $\frac{CD}{AD} = \frac{CN}{DN}$.

$\frac{CP}{a} = \frac{3a\cdot 5}{5\cdot 2a}$, $CP = 1{,}5a$.

$\frac{BF}{FD} = \frac{a}{3a}$, $FB = \frac{1}{4}a\sqrt{2}$.

$S_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{4}\sin 45° = \frac{a^2}{24}$. $S_1 = \Delta BMF$.

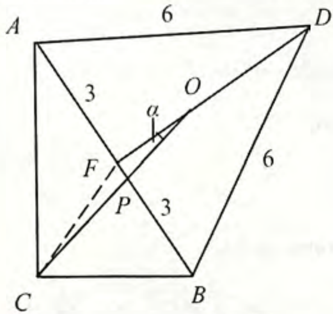
$\frac{QD}{QB} = \frac{a}{2{,}5a}$, $\frac{QD}{QB} = \frac{2}{5}$, $QD = \frac{2}{7}BD = \frac{2a\sqrt{2}}{7}$.

$S_2 = \dfrac{1 \cdot 2a \cdot 2a\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2} = \dfrac{2a^2}{35}$. $S_2 = \Delta DQN$.

$S_0 = \dfrac{a^2}{2} - \dfrac{a^2}{24} - \dfrac{2a^2}{35} = \dfrac{11a^2}{24} - \dfrac{2a^2}{35} = \dfrac{337a^2}{840}$.

Ответ: $\dfrac{337a^2}{840}$.

(256) Геометрия. № 51.



ΔADF – прямоугольный, $\angle ADF = 30^\circ$.

$FD = \dfrac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$, $FO = \sqrt{3}$, $CO = \sqrt{21}$, $CF = FB = 3$.

В ΔFOC по теореме косинусов

$9 = 21 + 3 - 2\sqrt{21}\,\sqrt{3}\cos\alpha$,

$6\sqrt{7}\cos\alpha = 15$, $\cos\alpha = \dfrac{5}{2\sqrt{7}}$,

$\sin\alpha = \sqrt{1 - \dfrac{25}{28}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$

В ΔFOP $PF = FO \cdot \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{5} = \dfrac{3}{5}$.

$BP = 3 - 0{,}6 = 2{,}4.$

$$PO = \sqrt{3 + \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{84}{25}} = \frac{2\sqrt{21}}{5}.$$

$CP = CO - PO = \sqrt{21} - 0{,}4\sqrt{21} = 0{,}6\sqrt{21}.$

Из ΔCPB $CB^2 = 5{,}76 + \dfrac{9 \cdot 21}{25} - 2 \cdot \dfrac{12}{5} \cdot \dfrac{3}{5}\sqrt{21}\dfrac{3}{2\sqrt{21}}.$

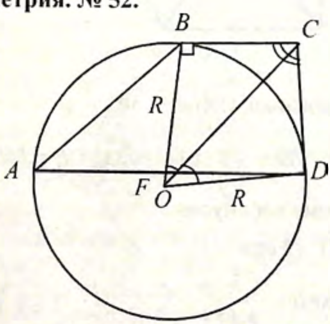
$$CB^2 = 5\frac{19}{25} + \frac{189}{25} - \frac{108}{25} = \frac{144 + 81}{25} = \frac{225}{25} = 9.$$

$CB = 3$, $AC = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3\sqrt{3} = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

(257) Геометрия. № 52.



1) AD пересекается с BO в точке F. $\Delta OBC = \Delta ODC$, $OD = OB = R$.

$\angle BCO = \angle DCO = 120^\circ : 2 = 60^\circ$.

2) $\angle BOC = \angle DOC = 30^\circ$.

3) $\angle FOD = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$, $\angle OFD = 90^\circ$, т. к. $BC \parallel AD$ и $OB \perp BC$.

В ΔFOD $R = \dfrac{FD}{\sin 60^\circ} = \dfrac{3 \cdot 2}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. $R = \sqrt{3}$.

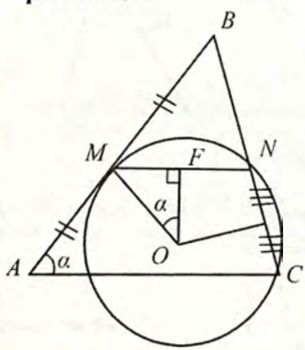
4) ΔFOD $FO = R \cdot \cos 60^\circ = \sqrt{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$BF = R - FO = R - \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

5) $S_{ABD} = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

(258) Геометрия. № 53.



Пусть $\angle A = \alpha$, тогда $\angle AMF = 180 - \alpha$;
$\angle OMF = 180 - \alpha - 90^\circ = 90^\circ - \alpha$, $\angle MOF = 90^\circ - 90^\circ + \alpha = \alpha$.

$MF = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} AC = \dfrac{1}{2}$, $\sin \alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

$MB = x$, $BN = NC = y$, $x^2 = 2y \cdot y$, $x = \sqrt{2}\, y$.

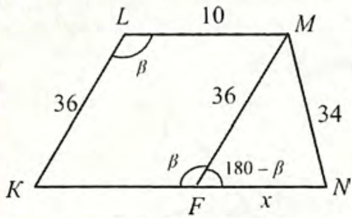
Из ΔABC $\dfrac{\sin C}{2x} = \dfrac{\sin\alpha}{2y}$,

$$\sin\angle C = \frac{\sin\alpha\cdot x}{y} = \frac{1\cdot\sqrt{2}y}{2\sqrt{2}\cdot y} = \frac{1}{2}.$$

$$\sin\angle C = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\sin\angle C = \dfrac{1}{2}$.

(259) Геометрия. № 54.



$MF \parallel KL$, $MF = 36$, $\angle MFN = 180 - \beta$, $\cos(180-\beta) = -\cos\beta = \dfrac{1}{3}$.

$FN = x$.

$34^2 = 36^2 + x^2 - 72\cdot x\cdot\dfrac{1}{3}$,

$x^2 - 24x + 36^2 - 34^2 = 0$,

$x^2 - 24x + 70\cdot 2 = 0$,

$x^2 - 24x + 140 = 0$, $x = 10$, $x = 14$.

Если $x = 10$, то $KN = 20$, $LN^2 = 36^2 + 400 - 2\cdot 36\cdot 20\cdot\dfrac{1}{3}$,

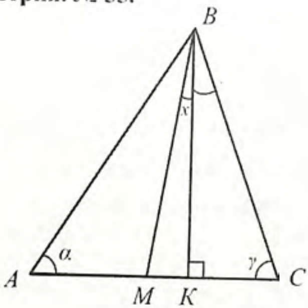
$LN^2 = 1216 = 64\cdot 19$, $LN = 8\sqrt{19}$.

Если $x = 14$, то $KN = 24$, $LN^2 = 1296 + 576 - 2 \cdot 36 \cdot 24 \cdot \dfrac{1}{3}$,

$LN^2 = 1296$, $LN = 36$.

Ответ: $8\sqrt{19}$ или 36.

(260) Геометрия. № 55.



1) $\angle CBK = 90^\circ - \gamma$.

2) $(x + 90^\circ - \gamma) \cdot 2 = 180^\circ - \alpha - \gamma$.

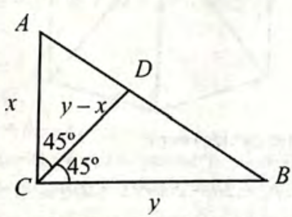
$2x + 180^\circ - 2\gamma = 180^\circ - \alpha - \gamma$,

$2x = \gamma - \alpha$, $x = \dfrac{\gamma - \alpha}{2}$ или $x = \dfrac{\alpha - \gamma}{2}$.

Отдельно рассмотрим случай, если α (или γ) – тупой.

Ответ: $\dfrac{|\alpha - \gamma|}{2}$.

(261) Геометрия. № 56.



Биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные двум другим сторонам.

$\frac{BD^2}{AD^2} = \frac{y^2}{x^2}$. BD и AD найдем по теореме косинусов.

$$\frac{2y^2 - 2xy + x^2 - \sqrt{2}y(y-x)}{y^2 - 2xy + 2x^2 - \sqrt{2}x(y-x)} = \frac{y^2}{\tilde{o}^2}.$$

$$2x^2y^2 - 2x^3y + x^4 - \sqrt{2}\,x^2y(y-x) =$$

$$= y^4 - 2xy^3 + 2x^2y^2 - \sqrt{2}\,xy^2(y-x).$$

$$\sqrt{2}\,xy^2(y-x) - \sqrt{2}\,x^2y(y-x) = y^4 - x^4 + 2x^3y - 2xy^3,$$

$$\sqrt{2}\,xy(y-x)^2 = 2xy(x^2-y^2) - (x^2+y^2)(x^2-y^2),$$

$$\sqrt{2}\,xy(y-x)^2 = (y^2-x^2)(x^2+y^2-2xy),$$

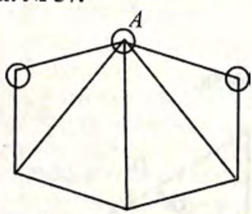
$$\sqrt{2}\,xy(y-x)^2 = (y-x)^3(x+y),$$

$$\sqrt{2}\,xy = y^2 - x^2,\ t = \frac{\tilde{o}}{y},$$

$$t^2 + \sqrt{2}\,t - 1 = 0,\ t = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

(262) Геометрия. № 57.



Правильный – не существует.

$$\frac{n(n-3)}{2} = 1991,\ n^2 - 3n - 2\cdot 1991 = 0,$$

$$D = 9 + 4\cdot 3\cdot 1991 = 15937.$$

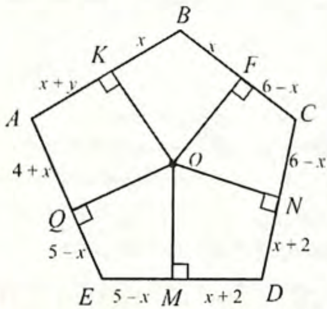
$$n = \frac{3 \pm \sqrt{D}}{2},\ \sqrt{15937} \approx 126{,}24$$

$$n = \frac{3+125}{2} = 64,\ n = \frac{3+127}{2} = 65.$$

$n = 64$ – диагоналей 1952, $n = 65$ – диагоналей 2015.

Ответ: Не может, 1952 при $n = 64$, 2015 при $n = 65$.

(263) Геометрия. № 58.



Докажем методом от противного. Пусть вписать можно. Пусть $BK = x$, тогда по свойству касательных

$BK = BF = x$,

$FC = CN = 6 - x$,

$ND = 8 - (6 - x) = x + 2$, $DM = DN = x + 2$,

$ME = 7 - x - 2 = 5 - x$,

$AQ = 9 - 5 + x = 4 + x$.

В этом случае $AK = AQ = x + 4$.

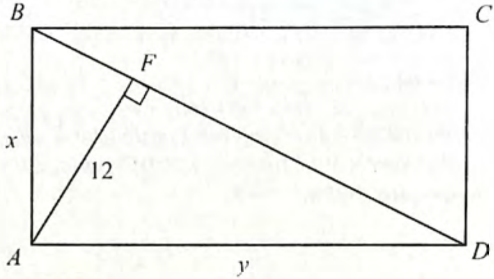
Тогда $AK + KB = 4$,

$x + 4 + x = 4,\ 2x = 0,\ x = 0$ чего быть не может.

Предположение неверно.

Ответ: Вписать нельзя.

(264) Геометрия. № 59.



$xy = 12\sqrt{x^2 + y^2}$,

$xy = 12\sqrt{(x + y)^2 - 2xy}$, $S_{ABCD} = xy = z$,

$P = 2(x + y) = 70,\ x + y = 35.$

$z = 12\sqrt{1225 - 2z}$,

$z^2 = 144 \cdot 1225 - 2 \cdot 144z$,

$z^2 + 2 \cdot 144z - 144 \cdot 1225 = 0$,

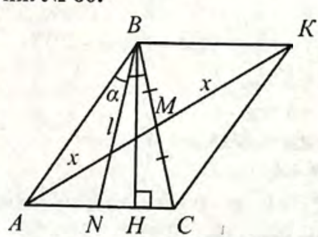
$$\frac{D}{4} = 144^2 + 144 \cdot 1225 = 144(144 + 1225) = (12 \cdot 37)^2.$$

$z_{1,2} = -144 \pm 12 \cdot 37,\quad z_1 < 0$,

$z_2 = -144 + 12 \cdot 37 = 12(37 - 12) = 12 \cdot 25 = 300.$

Ответ: 300.

(265) Геометрия. № 60.



По свойству биссектрисы $AN : NC = 1{,}5 : 1$. Пусть $NC = y$, тогда $AN = 1,5y$. Обозначим $\angle ABN = \angle CBN = \alpha$. Применим дважды теорему косинусов для треугольников ABN и CBN.

Получаем:

$$\begin{cases} 2,25y^2 = 2,25a^2 + a^2 - 3a^2 \cdot \cos\alpha, \\ y^2 = 2a^2 - 2a^2 \cdot \cos\alpha; \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 2,25y^2 = 3,25a^2 - 3a^2 \cdot \cos\alpha, \\ -1,5y^2 = -3a^2 + 3a^2 \cdot \cos\alpha. \end{cases}$$

$0,75y^2 = 0,25a^2,$

$3y^2 = a^2,\ y^2 = \dfrac{a^2}{3}.$

Пусть M – середина отрезка BC. Проведем луч AM и от точки M отложим отрезок MK, равный отрезку AM. Получили $ABKC$ – параллелограмм по признаку: если в четырехугольнике диагонали в точке пересечения делятся пополам, то он является параллелограммом. Пусть длина медианы AM равна x, тогда $MK = AM = x$. Так как сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон, имеем:

$4x^2 + a^2 = 2(2,25a^2 + 6,25y^2),$

$16x^2 + 4a^2 = 2(9a^2 + 25 \cdot \dfrac{a^2}{3}),$

$48x^2 + 12a^2 = 54a^2 + 50a^2,$

$48x^2 = 92a^2,\ 12x^2 = 23a^2,$

$36x^2 = 69a^2,\ x = \dfrac{\sqrt{69}a}{6}.$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{69}a}{6}$.

§ 9. ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

(266) Параметры. № 1.

Разложим на множители два квадратных трехчлена:

$b^2 - 7b + 10 = b^2 - 2b - 5b + 10 = b(b-2) - 5(b-2) = (b-2)(b-5)$,

$b^2 - 6b + 8 = b^2 - 2b - 4b + 8 = b(b-2) - 4(b-2) = (b-2)(b-4)$.

Уравнение принимает вид:

$(b-2)(b-5)x = (b-2)(b-4)$.

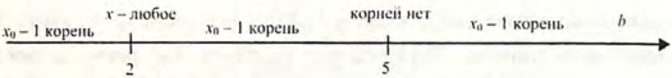
Возможны три случая:

1) $b \neq 2$, $b \neq 5$

$x = \dfrac{b-4}{b-5}$ – уравнение имеет 1 корень.

2) $b = 2$. Уравнение принимает вид: $0x = 0$, значит, x – любое и уравнение имеет бесконечное множество решений.

3) $b = 5$. Уравнение принимает вид: $0x = 3$, корней нет.



$x_0 = \dfrac{b-4}{b-5}$, $b = 2$ и $b = 5$ – особые точки параметра.

(267) Параметры. № 2.

Возможны 2 случая:

1) $a = 1$, уравнение принимает вид:

$-2x + 2 = 0$, $x = 1$ – 1 корень.

2) При $a \neq 1$ получаем квадратное уравнение

$(a-1)x^2 - (a+1)x + a + 1 = 0$.

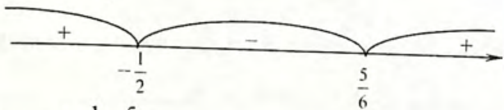
Квадратное уравнение имеет 2 корня тогда и только тогда, когда $D > 0$.

$D = (a+1)^2 - 4(a-1)(a+1)$,

$D = a^2 + 2a + 1 - 4a^2 + 4$,

$D = -3a^2 + 2a + 5$.

$D > 0$, если $-3a^2 + 2a + 5 > 0$.
$3a^2 - 2a - 5 < 0$.
$\frac{D}{4} = 1 + 15 = 16, \qquad a_{1,2} = \frac{1 \pm 4}{6}$.
$a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{5}{6}$.



Получили $(-\frac{1}{2}; \frac{5}{6})$.

Ответ: $(-\frac{1}{2}; \frac{5}{6})$.

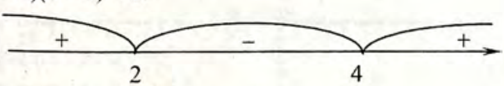
(268) Параметры. № 3.

Рассмотрим 2 случая:
1) $a = 2$. Уравнение принимает вид:
$0x + 2 = 0$, $2 = 0$. Корней нет.
Значит, при $a = 2$ уравнение не имеет корней.
2) $a \neq 2$. Получаем квадратное уравнение:
$(a - 2)x^2 + 2(a - 2)x + 2 = 0$.

Чтобы квадратное уравнение не имело корней, нужно, чтобы $D < 0$.

$$\frac{D}{4} = (a - 2)^2 - 2(a - 2) = (a - 2)(a - 2 - 2) = (a - 2)(a - 4).$$

$(a - 2)(a - 4) < 0$.



Получили $(2; 4)$.

Следовательно, уравнение не имеет корней при всех $a \in \{2\} \cup (2; 4)$, иначе $a \in [2; 4)$.

Ответ: $[2; 4)$.

(269) Параметры. № 4.

$y = |x|$ – прямой угол с вершиной в точке O(0; 0) и сторонами на биссектрисах I и II четверти.

$y = |x - 6|$ – график $y = |x|$ сдвинут на 6 единиц вправо.

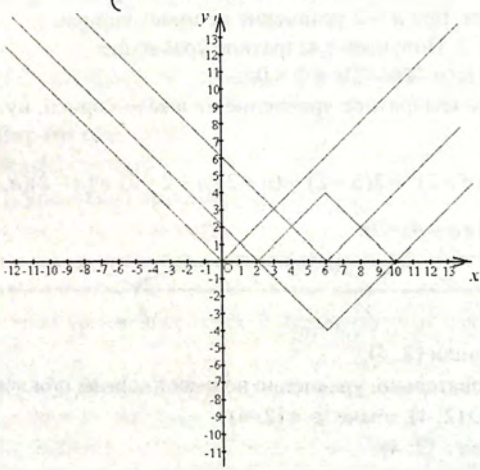
$$y = |x - 6| = \begin{cases} -x + 6, \text{ если } x \le 6, \\ x - 6, \text{ если } x > 6. \end{cases}$$

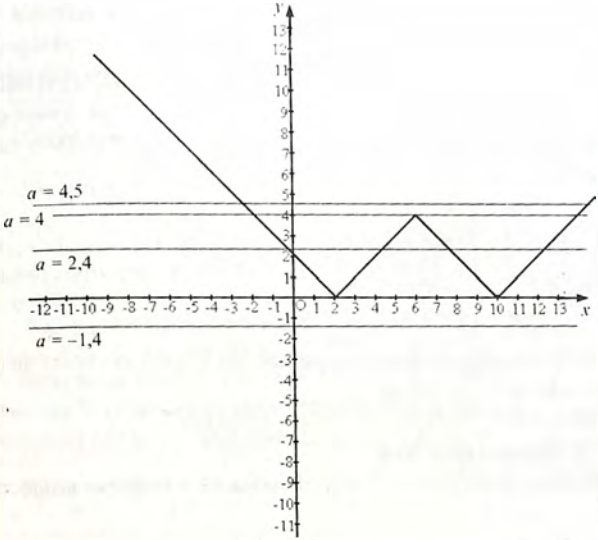
$y = |x - 6| - 4$ – график $y = |x - 6|$ сдвинут на 4 единицы вниз.

$$y = |x - 6| - 4 = \begin{cases} -x + 2, \text{ если } x \le 6, \\ x - 10, \text{ если } x > 6. \end{cases}$$

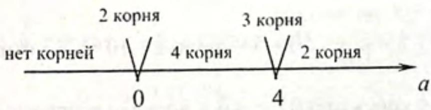
$y = ||x - 6| - 4|$ – график $|x - 6| - 4$ отображается симметрично относительно оси x вверх.

$$y = ||x - 6| - 4| = \begin{cases} -x + 2, \text{ если } x \le 2, \\ x - 2, \text{ если } 2 < x \le 6, \\ -x + 10, \text{ если } 6 < x \le 10, \\ x - 10, \text{ если } x > 10. \end{cases}$$





$||x-6|-4| = a$



Ответ:

Нет корней при $a < 0$;

2 корня при $a = 0$, $a > 4$;

3 корня при $a = 4$;

4 корня при $0 < a < 4$.

(270) Параметры. № 5.

Если модуль выражения равен 3, то само выражение равно 3 или –3.

$x^2 - a + 1 = -3$ или $x^2 - a + 1 = 3$,

$x^2 = a - 4$ или $x^2 = a + 2$.

Для того чтобы уравнение имело 3 корня, первое уравнение должно иметь 2 корня, а второе – 1 корень или первое уравнение должно иметь 1 корень, а второе – 2 корня. Отсюда получаем совокупность двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a-4>0,\\ a+2=0;\end{cases}\\ \begin{cases}a-4=0,\\ a+2>0;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>4,\\ a=-2;\end{cases}\\ \begin{cases}a=4,\\ a>-2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Первая система не имеет решений. Из второй системы получаем $a = 4$.

Ответ: 4.

(271) Параметры. № 6.

Найдем корни, при $a \geq 0$, записывая их в порядке возрастания:

$|x - 10| - 8 = -a$, $\quad$ $|x - 10| - 8 = a$,

$|x - 10| = 8 - a$, $\quad$ $|x - 10| = a + 8$.

При $0 < a < 8$, получаем:

$x - 10 = a - 8$ или $x - 10 = 8 - a$ или $x - 10 = -a - 8$ или $x - 10 = = a + 8$.

Запишем 4 корня при $0 < a < 8$ в порядке возрастания.

$x_1 = 2 - a$, $\quad x_2 = a + 2$, $\quad x_3 = 18 - a$, $\quad x_4 = a + 18$.

Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 – арифметическая прогрессия, тогда по характеристическому свойству арифметической прогрессии получаем:

$2x_2 = x_1 + x_3$,

$2(a + 2) = 2 - a + 18 - a$,

$2a + 4 = 20 - 2a$,

$4a = 16$,

$a = 4$.

Убедимся, что при $a = 4$, четыре корня образуют арифметическую прогрессию. При $a = 4$, получаем корни -2; 6; 14; 22, образующие арифметическую прогрессию с разностью $d = 8$.

Ответ: $a = 4$.

(272) Параметры. № 7.

Рассмотрим функцию $f(x) = \left|x+\frac{9}{x}\right| - \left|x-\frac{9}{x}\right|$, где $D(f) = (-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, так как на 0 делить нельзя. Исследуем функцию на четность. Для любого $x \neq 0$, имеем

$$f(-x) = \left|-x-\frac{9}{x}\right| - \left|-x+\frac{9}{x}\right| = \left|x+\frac{9}{x}\right| - \left|x-\frac{9}{x}\right| = f(x).$$

Получили $f(-x) = f(x)$ для любого $x \in D(f)$. Значит, данная функция четная и ее график симметричен относительно оси Oy. Построим его на промежуткс $(0; +\infty)$.

При $x > 0$ $x+\frac{9}{x} > 0$ и $\left|x+\frac{9}{x}\right| = x+\frac{9}{x}$.

Опрсделим, где $x-\frac{9}{\eth} \geq 0$, так как $x > 0$, то $x^2 - 9 \geq 0$, $x^2 \geq 9$,

$|x| \geq 3$, $x \geq 3$, так как $x > 0$, значит, при $x \geq 3$ $\left|x-\frac{9}{x}\right| = x-\frac{9}{x}$.

При $0 < x < 3$ $\left|x-\frac{9}{x}\right| = -x+\frac{9}{x}$.

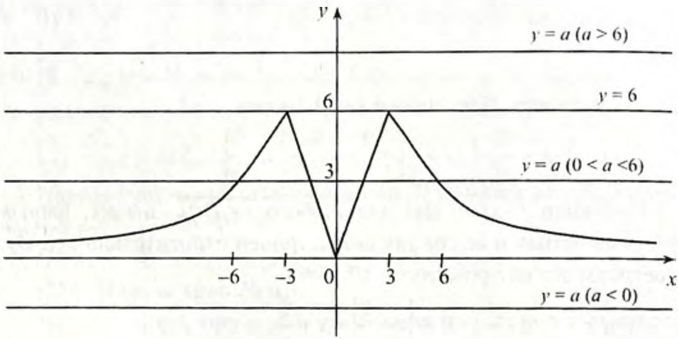
Рассмотрим два случая:

1) $0 < x < 3$,

тогда $f(x) = x+\frac{9}{x}-\left(-x+\frac{9}{x}\right) = x+\frac{9}{x}-\left(-x+\frac{9}{x}\right) = 2x$. График

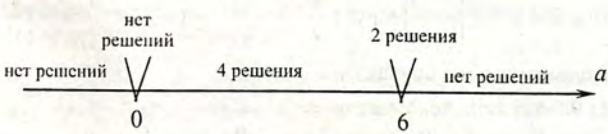
в данном случае будет отрезком.

2) $x \ge 3$, тогда $f(x) = x + \dfrac{9}{x} - \left(x - \dfrac{9}{x}\right) = \dfrac{18}{x}$. График в данном случае – часть ветви гиперболы. Строим график, учитывая, что он симметричен относительно оси Oy.



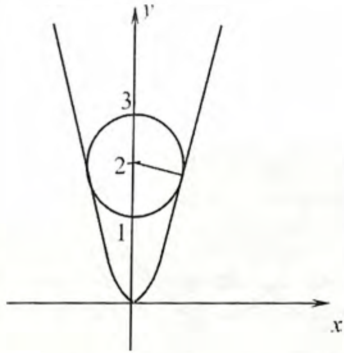
$E(f) = (0;6]$.

Рассмотрим уравнение $\left|x + \dfrac{9}{x}\right| - \left|x - \dfrac{9}{x}\right| = a$ в зависимости от значений параметра a, начертив ось параметров.



О т в е т: нет решений при $a \le 0$ и $a > 6$;
2 решения при $a = 6$;
4 решения при $0 < a < 6$.

(273) Параметры. № 8.



$x^2 = \frac{1}{a} y$, $\frac{1}{a} = b$.

$by + y^2 - 4y + 3 = 0$,

$y^2 + (b-4)y + 3 = 0$,

$D = (b-4)^2 - 12 = 0$,

$b - 4 = 2\sqrt{3}$ или $b - 4 = -2\sqrt{3}$,

$b = 4 + 2\sqrt{3}$ или $b = 4 - 2\sqrt{3}$.

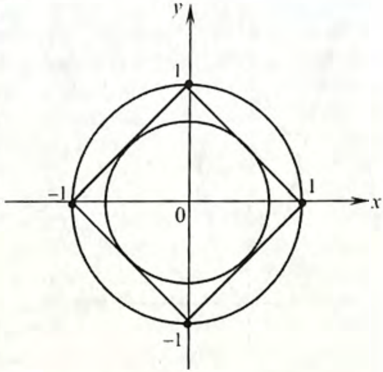
$a = \frac{1}{4+2\sqrt{3}} = \frac{4-2\sqrt{3}}{4}$ $a = \frac{1}{4-2\sqrt{3}} = \frac{4+2\sqrt{3}}{4}$.

$a = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ $a = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Не может быть, т. к. ветви параболы направлены вниз.

Ответ: $a \geq 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(274) Параметры. № 9.



При $a = 1$ и $a = 1/2$.

Ответ: При $a = 1$ и $a = 1/2$.

(275) Параметры. № 10.

$$\frac{D}{4} = (3a + b + 1)^2 - 2a^2 + 7b =$$

$$= 9a^2 + b^2 + 1 + 6ab + 6a + 2b + 2a^2 + 7b =$$

$$= 7a^2 + 9b + b^2 + 1 + 6ab + 6a = 0.$$

$$b^2 + (6a + 9)b + 7a^2 + 6a + 1 = 0.$$

$$D = (6a + 9)^2 - 28a^2 - 24a - 4 =$$

$$= 36a^2 + 108a + 81 - 28a^2 - 24 - 4 = 0.$$

$$8a^2 + 84a + 77 = 0,$$

$$\frac{D}{4} = 1764 - 616 = 1148 > 0,$$

$$a_1 + a_2 = -\frac{84}{8} = -10,5.$$

Ответ: Два, их сумма: – 10,5.

(276) Параметры. № 11.

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = -a-3, \\ x_1 + x_2 = a-2. \end{cases}$$

$(x_1 + x_2)^2 = (a-2)^2$,

$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = a^2 - 4a + 4$,

$x_1^2 + x_2^2 = a^2 - 4a + 4 - 2x_1x_2$, $x_1^2 + x_2^2 = a^2 - 4a + 4 - 2(-a-3)$,

$x_1^2 + x_2^2 = a^2 - 4a + 4 + 2a + 6$, $x_1^2 + x_2^2 = a^2 - 2a + 10$,

$x_1^2 + x_2^2 = a^2 - 2a + 1 + 9$, $x_1^2 + x_2^2 = (a^2 - 1)^2 + 9$.

При $a = 1$ – наименьшее значение.

При $a = 1$ $x^2 + x - 4 = 0$, $D = 1 + 16 = 17 > 0$.

Ответ: $a = 1$.

(277) Параметры. № 12.

Раскроем все скобки и запишем как квадратное уравнение относительно a.

$ax^3 + 2x^3 - 2ax^2 - x^2 - 6x + a^2 + 4a - 5 > 0$,

$\grave{a}^2 + (x^3 - 2x^2 + 4)a + (2x^3 - x^2 - 6\tilde{o} - 5) > 0$.

Определим такие значения x, при которых данное условие не выполняется ни при одном значении a из отрезка $[-2; 1]$.

На промежутке $[-2; 1]$ квадратный трехчлен должен принимать неположительные значения.

$$\begin{cases} f(-2) \le 0, \\ f(1) \le 0; \end{cases}$$

$f(-2) = 4 - 2(x^3 - 2x^2 + 4) + (2x^3 - x^2 - 6\tilde{o} - 5) =$

$= 4 - 2x^3 + 4x^2 - 8 + 2x^3 - x^2 - 6x - 5 = 3x^2 - 6x - 9$.

$f(1) = 1 + (x^3 - 2x^2 + 4) + (2x^3 - x^2 - 6\tilde{o} - 5) =$

$= 1 + x^3 - 2x^2 + 4 + 2x^3 - x^2 - 6x - 5 = 3x^3 - 3x^2 - 6x$.

$$\begin{cases} 3x^2-6x-9\le 0, \\ 3x^3-3x^2-6x\le 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-3)(x+1)\le 0, \\ x(x-2)(x+1)\le 0. \end{cases}$$

Найдем решение системы.

Получили $\{-1\}\cup(0;2)$.

Значит, условию задачи удовлетворяют все значения $x \in (-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(2;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(2;+\infty)$.

(278) Параметры. № 13.

Узел назовем началом координат и проведем прямую, например $y = \sqrt{2}\,x$. Если она пересекает узел (m, n) то $n = \sqrt{2}\,m$ и $\sqrt{2} = \dfrac{n}{m}$ – рационально, что невозможно.

Ответ: Например, $y = \sqrt{2}\,x$.

(279) Параметры. № 14.

Зная, что на нуль делить нельзя, получаем $a \ne 0$, $x \ne -1$, $x \ne -2$. Значит, $a = 0$ – особая точка параметра.

$$\frac{x(x+2)-2a(x+1)}{a(x+1)(x+2)} = \frac{3-a^2}{a(x+1)(x+2)}.$$

Учитывая в дальнейшем, что $a \ne 0$, $x \ne -1$, $x \ne -2$, получаем:

$x(x+2)-2a(x+1) = 3-a^2$,

$x^2+2x-2ax-2a-3+a^2 = 0$,

$x^2+2(1-a)x+a^2-2a-3 = 0$.

$$\frac{D}{4} = (1-a^2)-a^2+2a+3 = 1-2a+a^2-a^2+2a+3 = 4.$$

$x_{1,2} = a-1\pm\sqrt{4} = a-1\pm 2$, $x_1 = a-1-2 = a-3$, $x_2 = a+1$.

Получили 2 корня $x_1 = a - 3$, $x_2 = a + 1$, при условии $a \neq 0$, $x \neq -1$, $x \neq -2$.

Если $x_1 = -1$, то $a - 3 = -1$, $a = 2$.

При $a = 2$ $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

Значит, при $a = 2$ – один корень $x = 3$.

Если $x_1 = -2$, то $a - 3 = 2$, $a = 1$; при $a = 1$ $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

Значит, при $a = 1$ $x = 2$.

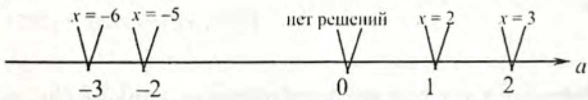
Если $x_2 = -1$, то $a + 1 = -1$, $a = -2$, при $a = -2$ $x_1 = -5$, $x_2 = 1$.

Значит, при $a = -2$ $x = 5$.

Если $x_2 = -2$, то $a + 1 = -2$, $a = -3$, при $a = -3$ $x_1 = -6$ $x_2 = -2$.

Значит, при $a = -3 x = -6$.

Получили особые точки параметра $a = -3$, $a = -2$, $a = 0$, $a = 1$, $a = 2$.

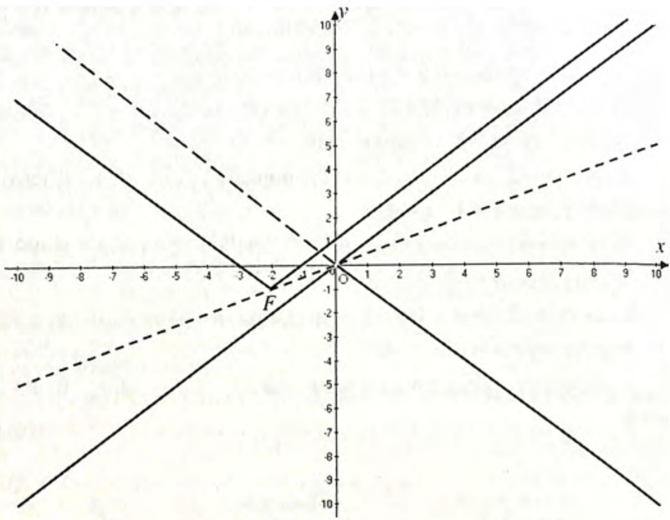


Во всех остальных случаях два корня $x_1 = a - 3$, $x_2 = a + 1$.

(280) Параметры. № 15.

$|x + 2| - 1 = ax$.

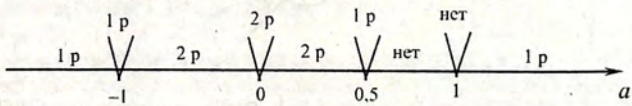
Построим график $y = |x + 2| - 1$. Он получен из графика $y = |x|$ сдвигом влево на 2 и вниз на 1. График – прямой угол с вершиной K(–2; –1).



Прямые $y = x$, $y = -x$ являются прямыми, которые определяют особые точки параметра $a = 1$, $a = -1$. F – вершина графика $y = |x + 2| - 1$. Особую точку параметра определяет прямая OF.

$y = kx$; $F(-2; -1)$ лежит на прямой OF. Значит, $-1 = k(-2)$, откуда $k = \dfrac{1}{2}$.

$a = -1$, $a = 0$, $a = \dfrac{1}{2}$, $a = 1$.



Ответ: при $0,5 < a \le 1$ решений нет, при $a \le 1$ и $a = \frac{1}{2}$, $a > 1$ – одно решение, при $-1 < a < 0,5$ – два решения.

(281) Параметры. № 16.

$(a-2)x^2 + 2(a-2)x - 4 \ge 0$

1) При $a = 2$ получим $-4 \ge 0$ не выполняется ни при каком значении x.

2) При $a \ne 2$ для выполнения условия необходимо и достаточно одновременное выполнение условий

$$\begin{cases} \frac{D}{4} < 0, \\ a - 2 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (a-2)^2 + 4(a-2) < 0, \\ a < 2; \end{cases} \quad \begin{cases} -2 < a < 2, \\ a < 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow -2 < a < 2.$

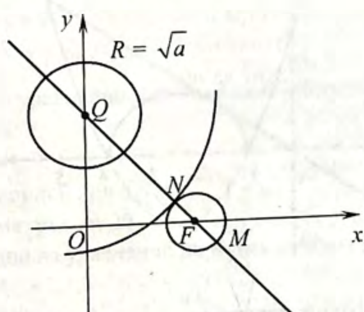
3) Окончательно имеем $(-2; 2) \cup \{2\} = (-2; 2]$.

Ответ: $(-2; 2]$.

(282) Параметры. № 17.

$x^2 - 6x + y^2 + 8 = 0,$

$x^2 - 6x + 9 + y^2 = 1, (x-3)^2 + y^2 = 1.$



Окружность $(F; R)$ $F(3; 0)$, $R = 1$. Вторая окружность с центром $Q(0, 4)$ и радиусом $\sqrt{a}$.

$OF = \sqrt{9+16} = 5$.

Две окружности должны касаться друг друга либо в точке N – внешнее касание, либо в точке M – внутреннее касание.

$R_1 = QN = 5 - 1 = 4$, $\sqrt{a} = 4$, $a = 16$.

$R_2 = QM = 5 + 1 = 6$, $\sqrt{a} = 6$, $a = 36$.

Ответ: $a = 16$ или $a = 36$.

(283) Параметры. № 18.

Графики $y = -x^2 + 5x - 4$ и $y = ax$ должны иметь единственную общую точку пересечения на $[1; 4]$.

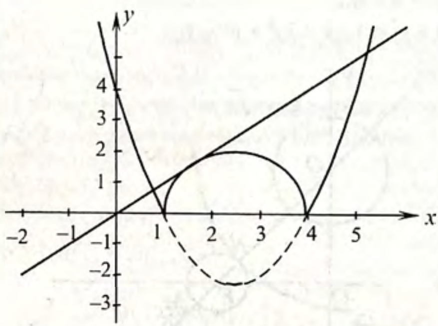
$-x^2 + 5x - 4 = ax$,

$x^2 + (a - 5)x + 4 = 0$.

Чтобы квадратное уравнение имело один корень, необходимо: $D = 0$.

$D = a^2 - 10 + 25 - 16 = a^2 - 10a + 9$.

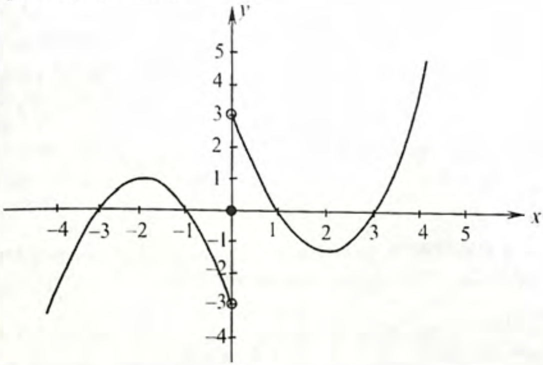
$D = 0$, $a = 1$, $a = 9$.



$a = 9$ не подходит, так как при этом $x \notin [1; 4]$. Получили $a = 1$.

Ответ: $a = 1$.

Параметры. № 19.



1) Корни при $x > 0$.

$x^2 - 4x + 3 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Значит, при $x < 0$ корни $x_1 = -1$, $x_2 = -3$; значит, уравнение $y = -x^2 - 4x - 3$

2) Учитывая, что функция определена для всех x, получаем:

$$y = \begin{cases} -x^2 - 4x - 3, \text{при } x < 0, \\ 0, \text{ при } x = 0, \\ x^2 - 4x + 3, \text{при } x > 0. \end{cases}$$

3) При $a = 0$ уравнение $f(x) = a$ будет иметь наибольшее количество корней: 5.

Корни: −3, −1, 0, 1, 3.

Ответ: 5 корней при $a = 0$.

(285) Параметры. № 20.

Пусть ни одно из уравнений не имеет ни одного корня, тогда

$$\begin{array}{l} \ \ b^2 - ac < 0, \\ +\, a^2 - bc < 0, \\ \ \ \underline{c^2 - ab < 0.} \\ a^2 + b^2 + c^2 - ac - bc - ab < 0, \end{array}$$

$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ac - 2bc - 2ab < 0,$

$a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bc + c^2 < 0,$

$(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 < 0.$

Последнее неравенство невозможно при a, b, c, отличных от нуля.

(286) Параметры. № 21.

$x^2 + ax + b = 0$ $\qquad\qquad$ $x^2 + cx + d = 0$

корни c, d $\qquad\qquad$ корни a, b

По теореме Виета:

$$\begin{cases} c + d = -a, \\ cd = b, \\ a + b = -c, \\ ab = d; \end{cases} \qquad \begin{cases} a + c + d = 0, \\ cd = b, \\ a + b + c = 0, \\ ab = d; \end{cases}$$

В первой системе получаем $d - b = 0$, $d = b$.

Система принимает вид

$$\begin{cases} a + b + c = 0, \\ cb = b, \\ ab = b; \end{cases} \qquad \begin{cases} a + b + c = 0, \\ b(c - 1) = 0, \\ b(a - 1) = 0. \end{cases}$$

Получаем 3 случая $b = 0$ или $c = 1$, или $a = 1$.

1) $b = 0$, $a + c = 0$, $c = -a$, $d = 0$.

Получаем два уравнения

$x^2 + ax = 0$, $x^2 - ax = 0$.

Действительно

$x^2 + ax + 0 = 0$, корни 1: $x = 0$, $x = -a$,

$x^2 - ax + 0 = 0$, корни 2: $x = 0$, $x = a$.

2) $c = 1$.

$$\begin{cases} a + b = -1, \\ ab - b = 0; \end{cases} \qquad a = -1 - b,$$

$(-1 - b)b - b = 0$, $-b - b^2 - b = 0$, $b^2 + 2b = 0$,

$b = 0$, $\qquad b = -2$,

$a=-1, \qquad a=-1+2=1,$

$c=1, \qquad c=-b-a=2-1=1.$

Получаем $a=1$, $b=-2$, $c=1$, $d=-2$.

$x^2+x-2=0$ и $x^2+x-2=0,$

$\begin{cases} x_1x_2=-2, \\ x_1+x_2=-1. \end{cases}$ $x_1=-2, x_2=1.$ $x_1=-2, x_2=1.$

Итак, $a=c=1$, $b=d=-2$.

$a=1.$

$\begin{cases} b+c=-1, \\ bc=b; \end{cases}$ $c=-1-b.$

$b(-1-b)-b=0, \ -b-b^2-b=0, -b^2-2b=0,$

$b^2+2b=0, \ \ b(b+2)=0,$

$b=0$ или $b=-2.$

а) $b=0$, $a=1$, $c=-1$ часть первого результата.

б) $b=-2$, $-2c=-2$, $c=1$, $a=1$.

Итак: 1) $a=1$, $c=1$, $b=-2$, $d=-2$.

2) $b=0$, a – любое, $c=-a$, $d=0$.

Ответ: $(1; -2; 1; -2)$, $(a; 0; -a; 0)$, где a – любое число.

(287) Параметры. № 22.

Если x_0 – корень, то $-x_0$ тоже корень. Получаем прогрессию $-x_1, -x_0, x_0, x_1$.

$d=x_0-(-x_0)=2x_0$, $x_1=3x_0$. Имеем: $-3x_0, -x_0, x_0, 3x_0$. Подставим x_0 и $3x_0$:

$$-\begin{cases} 81x_0^4+(a-5)9x_0^2+(a+2)^2=0, \\ x_0^4+(a-5)x_0^2+(a+2)^{\,2}=0. \end{cases}$$

$80x_0^4+8(a-5)x_0^2=0, \qquad x_0^2\neq 0$

$10x_0^2+a-5=0, a=5-10x_0^2.$

Из первого уравнения $x_0^4-10x_0^4+(5-10x_0^2+2)^2=0,$

$-9x_0^4 + (7 - 10x_0^2) = 0,\ x_0^2 = z,$

$13z^2 + 20z + 7 = 0,$

$z_1 = 1,\ z_2 = \frac{7}{13}$. Откуда $a_1 = -5,\ a_2 = -\frac{5}{13}$.

Ответ: $a_1 = -5,\ a_2 = -\frac{5}{13}$.

(288) Параметры. № 23.

$x^4 + 2x^2 + a - 4x = x^4 + 2x^2 - 4x + 2 + a - 2 = x^4 + 2(x-1)^2 + (a-2).$

При $a = 2$ неравенство выполняется для любого x. При целых $a \le 1$ для $x = \frac{1}{2}$ данное неравенство не выполняется и поэтому целые $a \le 1$ нас не устраивают. Наименьшее целое a будет $a = 2$.

Ответ: $a = 2$.

(289) Параметры. № 24.

Имеем биквадратное уравнение, $z = x^2$

$z^2 + (a-3)z + (a+10)^2 = 0.$

Последнее уравнение должно иметь два различных корня $x^2 = z_1,\ x^2 = z_2$, где $z_1 > 0,\ z_2 > 0$.

Получили 4 корня, составляющие арифметическую прогрессию: $-\sqrt{z_1}$, $-\sqrt{z_2}$, $\sqrt{z_2}$, $\sqrt{z_1}$.

По характеристическому свойству получаем:

$$\sqrt{z_2} = \frac{\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2}}{2};\ 2\sqrt{z_2} = \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2};\ 3\sqrt{z_2} = \sqrt{z_1}.$$

Значит, 4 числа, составляющие арифметическую прогрессию, будут $-3\sqrt{z_2}$, $-\sqrt{z_2}$, $\sqrt{z_2}$, $3\sqrt{z_2}$.

Обозначим $\sqrt{z_2} = b > 0$, имеем: $-3b$, $-b$, b, $3b$ – арифметическая прогрессия с разностью $d = 2b$, где $b > 0$ корень данного уравнения, $3b > 0$ тоже корень данного уравнения.

Подставим $x = b$ в данное уравнение.

$b^4 + (a-3)b^2 + (a+10)^2 = 0.$

Подставим $x = 3b$ в данное уравнение.

$81b^4 + 9(a-3)b^2 + (a+10) = 0.$

Составим систему:

$$\begin{cases} 81b^4 + 9(a-3)b^2 + (a+10)^2 = 0, \\ b^4 + (a-3)b^2 + (a+10)^2 = 0. \end{cases}$$

Вычитаем из первого уравнения второе, имеем:

$80b^4 + 8(a-3)b^2 = 0,$

$8b^2(10b^2 + (a-3)) = 0.$

$b = 0$ или $10b^2 + a - 3 = 0,$

$b = 0$ или $10b^2 = 3 - a.$

1) Если $b = 0$, то данные числа будут 0, 0, 0, 0. Эти числа не расставлены в порядке возрастания, что противоречит условию.

2) $10b^2 = 3 - a,\ b^2 = \dfrac{3-\grave{a}}{10}$

Подставим во 2-е уравнение системы, получим:

$$\frac{(3-a)^2}{100} + \frac{(a-3)(3-a)}{10} + (a+10)^2 = 0,$$

$$\frac{(a-3)^2}{100} + \frac{(a-3)^2}{10} + (a+10)^2 = 0,$$

$(a-3)^2 - 10(a-3)^2 + 100(a+10)^2 = 0,$

$100(a+10)^2 = 9(a-3)^2,$

$(10a + 100)^2 = (3a-9)^2$, значит,

$10a + 100 = 3a - 9$ или $10a + 100 = 9 - 3a,$

$7a = -109$ или $13a = -91,$

$a = -\dfrac{109}{7}$ или $a = -7.$

Проверим оба значения:

1) Пусть $a = -\dfrac{109}{7}$, тогда уравнение примет вид

$$x^4+(-\frac{109}{7}-3)x^2+(-\frac{109}{7}+10)^2=0,$$

$$x^4-\frac{130}{7}x^2+\left(-\frac{39}{7}\right)^2=0,$$

$$x^4-\frac{130}{7}x^2+\frac{1521}{49}=0,$$

$$z^2-\frac{130}{7}z+\frac{1521}{49}=0,$$

$$D=\frac{16900}{49}-\frac{4\cdot 1521}{49}=\frac{16900-6084}{49}=\frac{10816}{49}=\left(\frac{104}{7}\right)^2$$

$$z_{1,2}=\frac{\frac{130}{7}\pm\frac{104}{7}}{2},\ z_1=\frac{13}{7},\ z_2=\frac{117}{7}=\frac{9\cdot 13}{7}.$$

$$x^2=\frac{13}{7}\quad \text{или}\quad x^2=\frac{9\cdot 13}{7}.$$

Получили корни $-3\sqrt{\frac{13}{7}}$, $-\sqrt{\frac{13}{7}}$, $\sqrt{\frac{13}{7}}$, $3\sqrt{\frac{13}{7}}$, которые образуют возрастающую арифметическую прогрессию.

2) $a=-7$.

Данное уравнение примет вид:

$x^4-10x^2+9=0$, откуда

$x^2=9$ или $x^2=1$,

$x_1=-3,\ x_2=3,\ x_3=-1,\ x_4=1.$

Корни -3; -1; 1; 3 образуют возрастающую арифметическую прогрессию.

Значит, оба найденных значения параметра удовлетворяют данному уравнению.

Ответ: $a=-\frac{109}{7}$, $a=-7$.

(290) Параметры. № 25.

$(a+2)x^2 - 3ax - 18 < 0,$

$ax^2 + 2x^2 - 3ax - 18 < 0,$

$a(x^2 - 3x) + 2x^2 - 18 < 0,$

$(x^2 - 3x)a + 2x^2 - 18 < 0,$

$x(x-3)a + 2(x-3)(x+3) < 0,$

$(x-3)(ax + 2x + 6) < 0.$

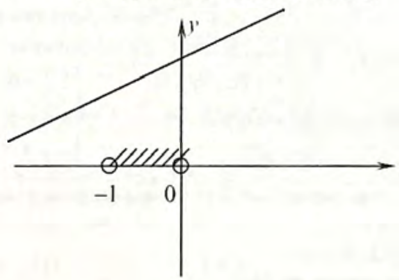
1) $x = 3$, тогда $0 < 0$ ложно при всех значениях a.

2) $x < 3$, тогда неравенство принимает вид

$ax + 2x + 6 > 0,$

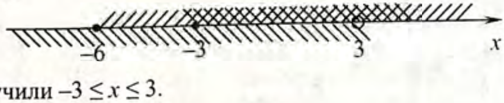
$xa + 2x + 6 > 0.$

Получили линейную функцию относительно a.



$$\begin{cases} f(-1) > 0, \\ f(0) > 0, \\ x < 3; \end{cases} \quad \begin{cases} -x + 2x + 6 \geq 0, \\ 2x + 6 \geq 0, \\ x < 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x + 6 \geq 0, \\ 2x \geq -6, \\ x < 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -6, \\ x \geq -3, \\ x < 3. \end{cases}$$



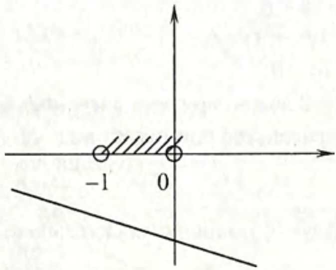
Получили $-3 \leq x \leq 3$.

3) $x > 3$, неравенство принимает вид

$ax + 2x + 6 < 0$.

Получили линейную функцию относительно a

$xa + 2x + 6 < 0$



$$\begin{cases} f(-1) \le 0, \\ f(0) \le 0, \\ x > 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} -x + 2x + 6 \le 0, \\ 2x + 6 \le 0, \\ x > 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \le -6, \\ x \le -3, \\ x > 3. \end{cases}$$

Два последних неравенства системы несовместны.

Итак, $-3 < x < 3$.

Ответ: $[-3; 3)$.

(291) Параметры. № 26.

$a \neq 0$, поэтому $x^2 - \dfrac{20}{3a} \cdot x + 75 = 0$, $x_1 x_2 = 75$, $3x_2 x_2 = 75$, $x_2^2 = 25$,

$x_2 = -5$ или $x_2 = 5$.

$x_1 + x_2 = \dfrac{20}{3a}$, $4x_2 = \dfrac{20}{3a}$, $x_2 = \dfrac{5}{3a}$,

$\dfrac{5}{3a} = -5$ или $\dfrac{5}{3a} = 5$,

$1 = -3a$ или $1 = 3a$,

$a = -\dfrac{1}{3}$ или $a = \dfrac{1}{3}$.

$a = -\frac{1}{3}$ $\quad -x^2 - 20x - 75 = 0$, $x^2 + 20x + 75 = 0$,

$\begin{cases} x_1 x_2 = 75, \\ x_1 + x_2 = -20. \end{cases}$ $\quad x_1 = -15$, $x_2 = -5$.

$a = \frac{1}{3}$ $\quad x^2 - 20x + 75 = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = 15$.

При $a = -\frac{1}{3}$ нельзя сказать, что один корень в три раза больше другого, хотя равенство $x_1 = 3x_2$ выполняется.

Ответ: $a = \frac{1}{3}$.

(292) Параметры. № 27.

Если x_0 – корень, то $-x_0$ тоже корень. Получаем прогрессию $-x_1, -x_0, x_0, x_1$.

$d = x_0 - (-x_0) = 2x_0$, $x_1 = 3x_0$. Имеем: $-3x_0, -x_0, x_0, 3x_0$. Подставим x_0 и $3x_0$:

$$-\begin{cases} 81x_0^4 + (a-5)9x_0^2 + (a+2)^2 = 0, \\ x_0^4 + (a-5)x_0^2 + (a+2)^2 = 0. \end{cases}$$

$80x_0^4 + 8(a-5)x_0^2 = 0$, $\qquad x_0^2 \neq 0$

$10x_0^2 + a - 5 = 0$, $a = 5 - 10x_0^2$.

Из первого уравнения $x_0^4 - 10x_0^4 + (5 - 10x_0^2 + 2)^2 = 0$,

$-9x_0^4 + (7 - 10x_0^2) = 0$, $x_0^2 = z$,

$13z^2 + 20z + 7 = 0$,

$z_1 = 1$, $z_2 = \frac{7}{13}$. Откуда $a_1 = -5$, $a_2 = -\frac{5}{13}$.

Ответ: $a_1 = -5$, $a_2 = -\frac{5}{13}$.

(293) Параметры. № 28.

1) $6x^2 - 5\sqrt{a}\,x + a = 0$,

$D = 25a - 24a = a$,

$x_{1,2} = \dfrac{5\sqrt{a} \pm \sqrt{a}}{12}$, $x_1 = \dfrac{\sqrt{a}}{3}$, $x_2 = \dfrac{\sqrt{a}}{2}$.

2) $6ax^2 - 5\sqrt{a}\,x + 1 = 0$,

$D = 2a - 24a = a$

$x_{3,4} = \dfrac{5\sqrt{a} \pm \sqrt{a}}{12a}$, $x_3 = \dfrac{1}{3\sqrt{a}}$, $x_4 = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

Получились 4 числа: $\dfrac{\sqrt{a}}{3}$; $\dfrac{\sqrt{a}}{2}$; $\dfrac{1}{3\sqrt{a}}$; $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$, образующие геометрическую прогрессию. Если числа a; aq; aq^2; aq^3 образуют геометрическую прогрессию, то произведение крайних членов равно произведению средних: $a \cdot aq^3 = aq \cdot aq^2$ – верно.

Учитывая, что $\dfrac{\sqrt{a}}{3} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{2} \cdot \dfrac{1}{3\sqrt{a}}$ получаем 4 различных варианта расположения корней в геометрической прогрессии.

Рассмотрим эти 4 случая:

а) $\dfrac{\sqrt{a}}{2}$; $\dfrac{\sqrt{a}}{3}$; $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$; $\dfrac{1}{3\sqrt{a}}$ $\dfrac{a}{9} = \dfrac{1}{4}$, $a = \dfrac{9}{4}$,

$\dfrac{3}{4}$; $\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{2}{9}$.

б) $\dfrac{\sqrt{a}}{2}$; $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$; $\dfrac{\sqrt{a}}{3}$; $\dfrac{1}{3\sqrt{a}}$

1) $\dfrac{1}{4\grave{a}} = \dfrac{a}{6}$; $4a^2 = 6$, $a = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

2) $\frac{a}{9}=\frac{1}{6a}$; $6a^2=9$, $a^2=\frac{3}{2}$, $a=\sqrt{\frac{3}{2}}$.

в) $\frac{\sqrt{a}}{3}$; $\frac{\sqrt{a}}{2}$; $\frac{1}{3\sqrt{a}}$; $\frac{1}{2\sqrt{a}}$.

$\frac{a}{4}=\frac{1}{9}$, $a=\frac{4}{9}$.

г) $\frac{\sqrt{a}}{3}$; $\frac{1}{3\sqrt{a}}$; $\frac{\sqrt{a}}{2}$; $\frac{1}{2\sqrt{a}}$

$\frac{1}{9a}=\frac{a}{6}$, $a^2=\frac{2}{3}$, $a=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

$\frac{a}{4}=\frac{1}{6a}$, $6a^2=4$, $a^2=\frac{2}{3}$, $a=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Таким образом, получилось 4 значения параметра a, удовлетворяющих всем условиям задачи $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{\frac{3}{2}}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{9}{4}$.

Ответ: $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{\frac{3}{2}}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{9}{4}$.

(294) Параметры. № 29.

Из условия $1 < 2a$, $2a > 1$, $a > 0{,}5$.

$D = (2a^2 - 5a - 2)^2 + 4a\cdot 2(2a - 5) = 4a^4 + 25a^2 + 4 - 20a^3 - 8a^2 + 20a + 16a^2 - 40a = 4a^4 - 20a^3 + 33a^2 - 20a + 4$.

$4a^4 - 20a^3 + 33a^2 - 20a + 4 = 0, \quad a \neq 0.$

$4a^2 - 20a + 33 - \frac{20}{a} + \frac{4}{a^2} = 0,$

$4(a^2 + \frac{1}{a^2}) - 20(a + \frac{1}{a}) + 33 = 0.$

Пусть $a + \frac{1}{a} = z$, тогда $a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} = z^2$, $a^2 + \frac{1}{a^2} = z^2 - 2$.

$4(z^2 - 2) - 20z + 33 = 0,$

$4z^2 - 20z + 25 = 0,$

$(2z - 5)^2 = 0,\ 2z - 5 = 0,\ z = \frac{5}{2}.$

$a + \frac{1}{a} = \frac{5}{2},$

$2a^2 - 5a + 2 = 0,$

$D = \frac{1}{2},\ a_2 = 2.$

$D = (2a^2 - 5a + 2)^2 = 4a^4 + 25a^2 + 4 - 20a^3 + 8a^2 - 20a = 4a^4 - 20a^3 + 33a^2 + 4 - 20a.$

$$x_{1,2} = \frac{2a^2 - 5a - 2 \pm (2a^2 - 5a + 2)}{2a}, \text{ где } a > \frac{1}{2},$$

$$x_1 = \frac{2a^2 - 5a - 2 - 2a^2 + 5a - 2}{2a} = \frac{-4}{2a} = -\frac{2}{a},$$

$$x_2 = \frac{2a^2 - 5a - 2 + 2a^2 - 5a + 2}{2a} = \frac{4a^2 - 10a}{2a} = 2a - 5.$$

$x_1 = -\frac{2}{a},\ x_2 = 2a - 5$, где $a > \frac{1}{2}$.

$$x_1 < 0,\ |x| = \frac{2}{a}, \quad \begin{cases} \frac{2}{a} > 1, \\ \frac{2}{a} < 2a; \end{cases} \quad \begin{cases} 2 > a, \\ \frac{1}{a} < 1; \end{cases} \quad \begin{cases} a < 2, \\ a > 1. \end{cases}$$

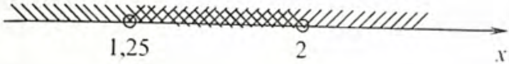
Получили $1 < a < 2$.

$x_2 = 2a - 5$, где $a > \frac{1}{2}$. $\begin{cases} |x_2| > 1, \\ |x_2| < 2a. \end{cases}$

Рассмотрим 2 случая:

1) $\frac{1}{2} < a < 2\frac{1}{2},\ 2a - 5 < 0,\ |2a - 5| = 5 - 2a.$

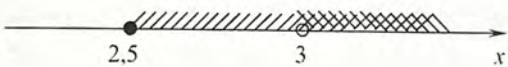
$$\begin{cases} 5-2a>1, \\ 5-2a<2a; \end{cases} \quad \begin{cases} -2a>-4, \\ -4a<-5; \end{cases} \quad \begin{cases} a<2, \\ a<1{,}25; \end{cases}$$



Получили (1,25; 2).

2) $a \geq 2{,}5$; $|2a-5| = 2a-5$.

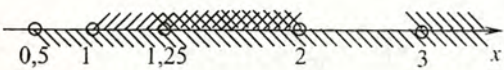
$$\begin{cases} 2a-5>1; \\ 2a-5<2a; \end{cases} \quad \begin{cases} 2a>6; \\ -5<0. \end{cases} \quad a>3.$$



Получили $(3; +\infty)$.

Значит, $1 < |x_2| < 2a$ на $(1{,}25; 2) \cup (3; +\infty)$.

Определим, при каких a оба корня удовлетворяют условию задачи:



Ответ: (1,25; 2).

(295) Параметры. № 30.

При любом x из отрезка [2; 17] выражение имеет смысл, если $x \geq 1$, так как подкоренное выражение для корня четной степени неотрицательно.

Преобразуем оба подкоренных выражения:

$$\sqrt{x-1+4-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-1+9-6\sqrt{x-1}}=a,$$

$$\sqrt{x-1-4\sqrt{x-1}+4}+\sqrt{x-1-6\sqrt{x-1}+9}=a,$$

$\sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2}=a,$

$|\sqrt{x-1}-2|+|\sqrt{x-1}-3|=a.$

Пусть $z=\sqrt{x-1}$, $z \geq 0$.

$|z-2|+|z-3|=a.$

По условию корни уравнения удовлетворяют условию:

$2 \leq x \leq 17$, $1 \leq x-1 \leq 16$,

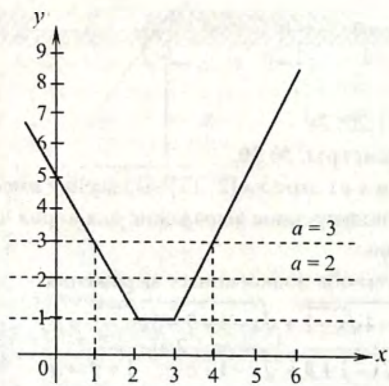
Так как функция $y=\sqrt{t}$ монотонно возрастающая, то

$1 \leq \sqrt{x-1} \leq 4$, $1 \leq z \leq 4$.

Задача сводится к нахождению таких значений параметра a, при которых корни уравнения будут на отрезке [1; 4].

Построим график функции $y=|z-2|+|z-3|$, используя таблицу:

	$z<2$	$2 \leq z \leq 3$	$z>3$
$\lvert z-2\rvert$	$2-z$	$z-2$	$z-2$
$\lvert z-3\rvert$	$3-z$	$3-z$	$z-3$
$\lvert z-2\rvert+\lvert z-3\rvert$	$-2z+5$	1	$2z-5$

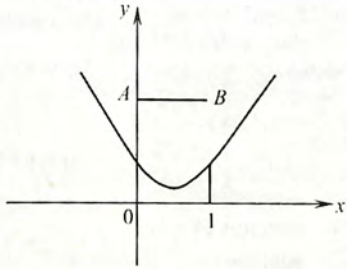


$y(1) = 3$, $y(4) = 3$.

Условию задания удовлетворяют $1 \le a \le 3$.

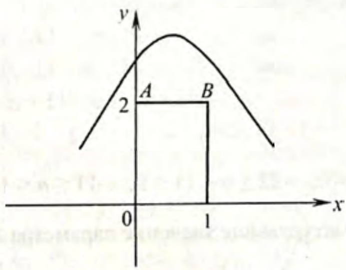
Ответ: $1 \le a \le 3$.

(296) Параметры. № 31.



$$\begin{cases} a > 0, \\ f(0) < 2, \\ f(1) < 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} a > 0, \\ a - 17 < 2, \\ 4a - 27 < 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} a > 0, \\ a < 19, \\ a < 7{,}25. \end{cases}$$

Получили $(0;\ 7{,}25)$.



$$\begin{cases} a < 0, \\ f(0) > 2, \\ f(1) > 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} a < 0, \\ a - 17 > 2, \\ 4a - 27 > 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} a < 0, \\ a > 19, \\ a > 7{,}25. \end{cases}$$

Система несовместна.

Ответ: (0; 7,25).

(297) Параметры. № 32.

$|2a-5+3|x||=3$

$2a-5+3|x|=-3$ или $2a-5+3|x|=3,$

$3|x|=2-2a$ или $3|x|=8-2a.$

Чтобы было 3 корня, необходимо

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2-2a=0,\\8-2a>0.\end{cases}\\\begin{cases}8-2a=0,\\2-2a>0.\end{cases}\end{array}\right.\qquad\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=1,\\a<4.\end{cases}\\\begin{cases}a=4,\\a<1.\end{cases}\end{array}\right.\qquad a=1$$

Система несовместна.

Получили $a=1$.

Ответ: $a=1$.

(298) Параметры. № 33.

Так как $x<0$, то $|x-4|=4-x$. Получаем уравнение:

$|x-a|+4-x=15$, $|x-a|=11+x$, где $-11\le x<0$.

Возможны два случая:

$x-a=11+x$ или $x-a=-11-x,$

$a=-11$ или $2x=a-11,$

$-11\notin N$ $\qquad x=\dfrac{a-11}{2}.$

$$-11\le\frac{a-11}{2}<0,\ \ -22\le a-11<0,\ \ -11\le a<11.$$

Наибольшее натуральное значение параметра a будет 10.

Ответ: 10.

(299) Параметры. № 34.

1) $x^2+ax+b=5x+1,$

$x^2+(a-5)x+b-1=0,$

$D=(a-5)^2-4(b-1);\ (a-5)^2=4(b-1).$

2) $x^2 + ax + b = -x - 2$

$x^2 + (a + 1)x + b + 2 = 0,$

$D_1 = (a + 1)^2 - 4(b + 2) = 0;\ (a + 1)^2 = 4(b + 2).$

3) $\begin{cases}(a-5)^2 = 4(b-1), \\ (a+1)^2 = 4(b+2);\end{cases}$ $-\begin{cases}\dfrac{1}{4}(a-5)^2 = b-1, \\ \dfrac{1}{4}(a+1)^2 = b+2.\end{cases}$

$-12 = a^2 - 10a + 25 - a^2 - 2a - 1,$

$12a = 36,\ a = 3.$

$b = 1 + \dfrac{1}{4} \cdot 4 = 2.$

Ответ: $a = 3, b = 2.$

(300) Параметры. № 35.

$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = (x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2)(x - x_3) = x_3 - (x_1 + x_2)x^2 + x_1x_2x - x_3x^2 + (x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3.$

Теорема Виета для приведенного уравнения третьей степени!

$x_1, x_1 + d, x_1 + 2d.$

$x^3 + x^2 - a = 0,$

$x_1 + x_1 + d + x_2 + 2d = -1,$

$3(x_1 + d) = -1,$

$x_1 + d = -\dfrac{1}{3}.$

$(-\dfrac{1}{3})^3 + (-\dfrac{1}{3})^2 = a,$

$-\dfrac{1}{27} + \dfrac{3}{27} = a,\ a = \dfrac{2}{27}.$

Получим уравнение: $x^3 + x^2 - \dfrac{2}{27} = 0,\ x_0 = -\dfrac{1}{3}.$

$$x^3+\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{9}x-\frac{2}{9}x-\frac{2}{27}=0,$$

$$x^2(x+\frac{1}{3})+\frac{2}{3}x\cdot(x+\frac{1}{3})-\frac{2}{9}(x+\frac{1}{3})=0,$$

$$(x+\frac{1}{3})(x^2+\frac{2}{3}x-\frac{2}{9})=0,$$

$$x=-\frac{1}{3},\ x^2+\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}=0.$$

$$\frac{D}{4}=\frac{1}{9}+\frac{2}{9}=\frac{3}{9},\ x_1=-\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3},\ x_2-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\div -\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3};\ -\frac{1}{3};\ -\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $a=\frac{2}{27}$.

(301) Параметры. № 36.

Пусть $(x_0;\ y_0)$ – решение, тогда будет еще одно решение (y_0, x_0). Поэтому единственное решение будет, если $x_0=y_0$.

$$-\begin{cases} x^2-(2a+1)x+a^2-3=y, \\ y^2-(2a+1)y+a^2-3=x. \end{cases}$$

$x^2-y^2-(2a+1)(x-y)=y-x,$

$(x+y)(x-y)-2a(x-y)-x+y-y+x=0,$

$(x+y)(x-y)-2a(x-y)=0,$

$(x-y)(x+y-2a)=0,$

$x=y$ или $x+y=2a.$

1) $x=y,\ a=-2.$

$x^2-(2a+1)x+a^2-3=x,$

$x^2-2(a+1)x+a^2-3=0.$

Данное уравнение имеет единственное решение, если $\frac{D}{4}=0.$

$(a+1)^2 - a^2 + 3 = 0,$

$a^2 + 2a + 1 - a^2 + 3 = 0,\ 2a = -4,\ a = -2.$

2) $y = 2a - x.$

$x^2 - (2a+1)x + a^2 - 3 = 2a - x,$

$x^2 - 2ax - x + a^2 - 3 - 2a + x = 0,$

$x^2 - 2ax + a^2 - 2a - 3 = 0.$

$\frac{D}{4} = a^2 - a^2 + 2a + 3 = 0,$

$2a + 3 = 0,\ a = -1{,}5.$

$y = -3 - x$

$x^2 + 2x + 2{,}25 - 3 = -3 - x,$

$x^2 + 3x + 2{,}25 = 0,$

$(x + 1{,}5)^2 = 0,\ x = -1{,}5,\ y = -1{,}5.$

Ответ: $a = -2,\ a = -1{,}5.$

(302) Параметры. № 37.

$x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a \le 0$

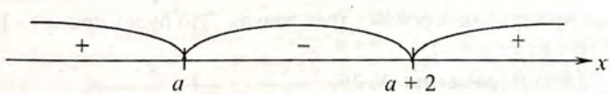
Обозначим $f(x) = x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a \le 0$.

Определим, где $f(x) = 0$.

$x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a = 0$

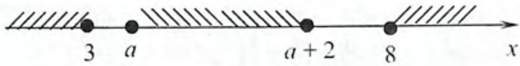
$$\begin{cases} x_1 x_2 = a(a+2), \\ x_1 + x_2 = 2a + 2. \end{cases}$$

$x_1 = a,\ \ x_2 = a + 2$



Значит, $x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a \le 0$ на $[a;\ a+2]$.

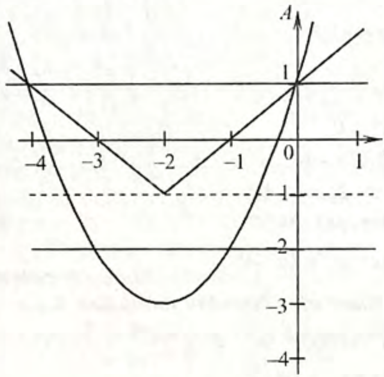
$x^2 - 11x + 24 \ge 0$ на $(-\infty;\ 3] \cup [8;\ +\infty)$.



$$\begin{cases} a > 3, \\ a + 2 < 8; \end{cases} \qquad \begin{cases} a > 3, \\ a < 6. \end{cases}$$ Получили (3; 6).

Ответ: (3; 6).

(303) Параметры. № 38.



Уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{aligned} &a = |x + 2| - 1, \\ &a = x^2 + 4x + 1. \end{aligned}\right.$$

Горизонтальная прямая $a = a_0$ должна пересекать объединение этих графиков ровно в трех точках. Это будет при $a = -1$.

Ответ: $a = -1$.

(304) Параметры. № 39.

$x^2 = z$, $z + 4a^2z^2 + 12az - 4 + 9 = 0$,

$4a^2z^2 + (12a + 1)z + 5 = 0$.

При $a = 0$ решений нет.

При $a \neq 0$ $z_1 z_2 = \frac{5}{4a^2} > 0$ корни одинаковых знаков.

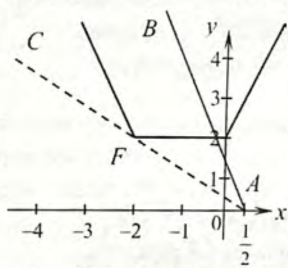
Два неположительных, если $12a + 1 < 0$ и $D \geq 0$.

$$\begin{cases} 12a+1<0, \\ 64a^2+24a+1 \geq 0. \end{cases} \qquad \begin{matrix} a < -\frac{1}{2} \\ a \leq -\frac{3+\sqrt{5}}{16} \quad \text{или} \quad a \geq \frac{\sqrt{5}-3}{16}. \end{matrix}$$

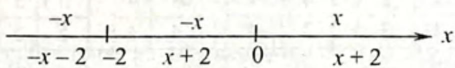
Получаем $(-\infty;\ -\frac{3+\sqrt{5}}{16})$.

Ответ: $(-\infty;\ -\frac{3+\sqrt{5}}{16})$.

(305) Параметры. № 40.



$$|x+2| + |x| = -\frac{a}{2} + ax, \quad |x+2| + |x| = a(x - \frac{1}{2}).$$



$y = -2x - 2$ $\qquad$ $y = 2$ $\qquad$ $y = 2x + 2$

Если луч падает внутрь угла BAC, то 2 корня

$k_1 = -2$, $F(-2;\,2)$ $y = k_2(x - \frac{1}{2})$ для AC.

$2 = k_2(-2 - \frac{1}{2})$, $2 = -\frac{5}{2}k_2$, $k = -\frac{4}{5} = -0{,}8$.

Значит, $-2 < a < -0{,}8$.

Ответ: $-2 < a < -0{,}8$.

§ 10. ПОЧТИ ПРОСТО

(306) Почти просто. № 1.

$(100a + 10x + y)(100a + 10x + y) = \ldots + 20xy + y^2$, где a не цифра, а число, x, y – цифры.

Имеем $20xy$, либо $20xy + p$ оканчиваются на 7, p – перенос.

p – нечетное, иначе $2xy + 2t$ не равно 7.

В любом случае последняя цифра 6.

Ответ: 6.

(307) Почти просто. № 2.

Если a и b уменьшить в 2 раза, то числитель дроби уменьшится в 8 раз, а знаменатель дроби уменьшится в 2 раза. Следовательно, дробь уменьшится в 4 раза.

Ответ: уменьшится в 4 раза.

(308) Почти просто. № 3.

а) Можно. На рисунках показан способ получения из первой таблицы второй.

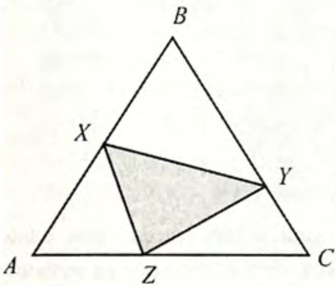
3	2		4	3		5	4		5	5
3	3		3	4		4	4		5	5

б) Нельзя. Сумма чисел в первой таблице равна 8, что при делении на 3 даёт остаток два. После каждого хода сумма увеличивается на 3 и остаток при делении на 3 не меняется.

В последней таблице сумма чисел равна 16, что при делении на 3 даёт остаток 1, поэтому получить вторую таблицу из первой в этом случае нельзя.

(309) Почти просто. № 4.

Первый может обеспечит $S_{XYZ} = \frac{1}{4}$ вне зависимости от игры соперника.

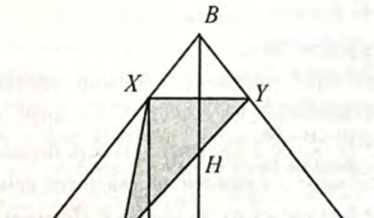


Для этого: X – середина AB и Z – середина AC.

При любом положении $У$ $S_{XYZ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} BC \cdot \frac{1}{2} H = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$.

Итак, $\frac{1}{4}$ первый получить может.

Укажем стратегию второго игрока, чтобы $S_{XYZ} \leq \frac{1}{4}$.



1) X – любая точка на AB у первого.

2) $XY \parallel AC$, Y – точка второго на BC, обеспечивающая $XY \parallel AC$.

3) Z – любая.

$$\frac{x}{b}=\frac{H-h}{H},\ xH=bH-bh,\ bh=H(b-x),\ h=\frac{H}{b}(b-x).$$

$$S_{XYZ}=\frac{1}{2}x\cdot\frac{H}{b}(b-x)=\frac{1}{2}\frac{H}{b}(bx-x^2).$$

$$f(x)=bx-x^2,\ x_в=\frac{b}{2}.$$

При $x=\dfrac{b}{2}$ имеем

$$S_{XYZ}=\frac{H}{2b}\cdot\frac{b^2}{4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{Hb}{2}=\frac{1}{4}.$$

$$S_{XYZ}\le\frac{1}{4}.$$

(310) Почти просто. № 5.

Рассмотрим наибольшее из записанных чисел (или одно из них, если таких чисел несколько). Из того, что оно не меньше своих соседей и равно их среднему арифметическому, следует, что оно равно своим соседям. Проводя аналогичные рассуждения, получаем, что все числа равны.

(311) Почти просто. № 6.

Покажем, что на 5 трехтонках можно увезти весь груз за один раз. Действительно, на каждой из четырех первых трехтонок можно увезти более 2 т камней. То есть первые 4 машины увезут по крайней мере 8 т камней. Оставшиеся камни (суммарным весом менее 2 т) увезет пятая машина. Покажем теперь, что 4 машин может не хватить. Действительно, если бы изначально было 13 камней весом по 10/13 т каждый, то каждая трехтонка может увезти только три таких камня. То есть 4 трехтонки могут увезти лишь 12 из этих 13 камней.

Ответ: На 5 трехтонках.

(312) Почти просто. № 7.

X_1	X_2	X_3
	a	
Y_1	Y_2	Y_3

1) $x_1 + a + y_3 + x_2 + a + y_2 + x_3 + a + y_1 = 0$

$(x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3) + 3a = 0,$

$3a = 0,\ a = 0.$

2) $x_1 + 0 + y_3 = 0,\ y_3 = -x_1,$

$x_2 + 0 + y_2 = 0,\ y_2 = -x_2,$

$x_3 + 0 + y_1 = 0,\ y_1 = -x_3.$

3) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = (-x_1)^2 + (-x_2)^2 + (-x_3)^2 =$

$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = n.$

Ответ: n.

(313) Почти просто. № 8.

1) Располагаем гири наиболее «плотно» в порядке возрастания

$x, x + 1, x + 2, x + 3, x + 4, x + 5, x + 6, x + 7, x + 8, x + 9, x + 10.$

2) Если семь самых «маленьких» гирь дает в сумме больше, чем четыре самых «больших» гири, то при перемещении гири из одной группы в другую меньшая сумма уменьшается, а большая увеличивается. Поэтому, если для группы $a_1 + \ldots + a_7$ и $a_8 + \ldots + a_{11}$ требовать неравенство величины, то оно будет выполнено и для любых других наборов из 7 и 4 гирь.

3) Получаем

$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4 + x + 5 + x + 6 > x + 7 + x + 8 +$
$+ x + 9 + x + 10$

$7x + 21 > 4x + 34,$

$3x > 13,\ x > 4\frac{1}{3}.$

Наименьшее возможное $x = 5$. Тогда

$7 \cdot 5 + 21 > 5 \cdot 4 + 34$, $56 > 54$.

Есть возможность уменьшить первую сумму на единицу $55 > 54$. $55 + 54 = 109$.

Имеем 4; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15.

Ответ: 109.

(314) Почти просто. № 9.

$$a_n = \frac{((n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1})}{((n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1})((n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1})} =$$

$$= \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{n^3 + 2n^2 + n - n^3 - n^2} = \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{n(n+1)} =$$

$$= \frac{(n+1)\sqrt{n}}{n(n+1)} - \frac{n\sqrt{n+1}}{n(\sqrt{n+1})^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Имеем

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1996}} - \frac{1}{\sqrt{1997}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{1997}}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{1997}} < \frac{7}{10},$$

$$\frac{1}{2} < \frac{7}{10} + \frac{1}{\sqrt{1997}},$$

$$\frac{1}{4} < \frac{49}{100} + \frac{1}{1997} + \frac{7}{5\sqrt{1997}},$$

$$0 < \frac{24}{100} + \frac{1}{1997} + \frac{7}{5\sqrt{1997}}.$$

Значит, $S_{1996} < 0{,}7 < 0{,}71$.

Ответ: Сумма меньше, чем 0,7 и 0,71.

(315) Почти просто. № 10.

Числа x, y, z, t, v. Числа даны последовательно и по возрастанию.

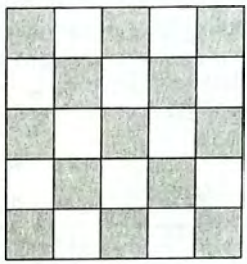
$4(x + y + z + t + v) = 132.$

$\underbrace{x + y}_{0} + z + \underbrace{t + v}_{29} = 33.$

$z = 4$, $x = -3$, $t = 8$, $y = 3$, $v = 21$.

Ответ: –3, 3, 4, 8, 21.

(316) Почти просто. № 11.



$13 - 12 = 1$. Одна клетка пустая. Шахматная раскраска.

Ответ: обязательно.

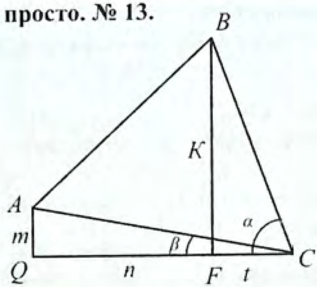
(317) Почти просто. № 12.

$a = 100005$.

$(a + 2)(a + 8)(a - 4) + 55 = (a^2 + 10a + 16)(a - 4) + 55 = a^3 + 10a^2 + 16a - 4a^2 - 40a - 64 + 55 = a^3 + 6a^2 - 24a - 9 = a^3 - 3a^2 + 9a^2 - 27a + 3a - 9 = a^2(a - 3) + 9a(a - 3) + 3(a - 3) = (a - 3)(a^2 + 9a + 3)$.

Значит, данное число равно $100002(100005^2 + 9 \cdot 100005 + 3)$ и является составным.

(318) Почти просто. № 13.



Если можно построить, то получаем два треугольника ΔBCF и ΔACQ, где BC и AC – стороны, не совпадающие с горизонталью и вертикалью. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{k}{t}$, $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{m}{n}$.

$$\operatorname{tg}60^\circ = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = \frac{\dfrac{k}{t} - \dfrac{m}{n}}{1 + \dfrac{k}{t} \cdot \dfrac{m}{n}} = \frac{kn - mt}{tn + km}$$ – рациональное число, в то время как $\operatorname{tg}60^\circ = \sqrt{3}$ – иррациональное.

Ответ: построить нельзя.

(319) Почти просто. № 14.

$D < 0$. Ось Ox парабола не пересекает. $f(1) = a + b + c$. $f(1) < 0$. Значит, вся парабола лежит в нижней полуплоскости и точка пересечения с осью ординат $K(0; c)$ имеет отрицательную ординату c. $c < 0$.

Ответ: $c < 0$.

(320) Почти просто. № 15.

Впишем в окружность правильный пятиугольник. По крайней мере три точки одного цвета. Но три любые вершины правильного пятиугольника будут вершинами равнобедренного треугольника.

(321) Почти просто. № 16.

Период 0,(142857), $100 = 6 \cdot 16 + 4$. 100-я цифра – четвертая цифра периода, то есть цифра 8.

Ответ: 8.

(322) Почти просто. № 17.

$c + h > a + b$,

$c^2 + 2ch + h^2 > a^2 + b^2 + 2ab$,

$c^2 + 4S + h^2 > c^2 + 4S$,

$h^2 > 0$ очевидно.

Неравенство доказано методом сведения к очевидному.

(323) Почти просто. № 18.

$2; 3; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 2; 3.$ $\qquad T = 6.$

$1996 = 332 \cdot 6 + 4$, $a_{1996} = a_4 = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

(324) Почти просто. № 19.

$a \neq 1$ $(a - 1)(a^2 + a + 1)$,

$a = 1 = 2^t$ $\quad a^2 + a + 1 = 2^m$ $\quad a = 2^t \neq 1$ $\qquad a$ – нечетно

$a^2 + a + 1 = a^2 + 2a + 1 - a = (a + 1)^2 - a$,

$(a + 1)^2 - a = 2^m$,

$\underline{(a + 1)^2} = \underline{2^m + 2^t + 1}$

Четно Нечетно

Поэтому равенство невозможно.

(325) Почти просто. № 20.

1) Если $a = 0$ и $b = 0$, то данное неравенство невозможно.

2) Если $a = 0$ и $b \neq 0$, то $b^2 > 4ac$ принимает вид $b^2 > 0$, что верно.

3) Пусть $a \neq 0$. Рассмотрим квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$. $y(0) \cdot y(1) = (a + b + c)c$. По условию $y(0) \cdot y(1) < 0$. Таким образом, $y(0)$ и $y(1)$ разных знаков. В этом случае парабола пересекает ось OX дважды, поэтому $D > 0$, $b^2 - 4ac > 0$, $b^2 > 4ac$.

(326) Почти просто. № 21.

$y = -x^2 + 4x + a$. $x_в = \dfrac{-b}{2a} = 2$, $y_в = -4 + 8 + a = a + 4$. Поскольку ветви параболы направлены вниз ($a = -1 < 0$), то множество значений данной функции будет $(-\infty; a + 4]$. Найдем область определения функции $y = \sqrt{3x + a}$. Так как подкоренное выражение для квадратного корня неотрицательно, то область определения будет $3x + a \geq 0$, $x \geq \dfrac{-a}{3}$, то есть $[\dfrac{-a}{3}; +\infty)$.

Чтобы множество значений функции $y = -x^2 + 4x + a$ не пересекалось с областью определения функции $y = \sqrt{3x + a}$ необходимо $a + 4 < \dfrac{-a}{3}$, $3a + 12 < -a$, $4a < -12$, $a < -3$.

Ответ: $a < -3$.

(327) Почти просто. № 22.

Есть два способа решения этой задачи:

1-й способ.

Пусть $\underbrace{11...1}_{n} = a$, тогда $9a + 1 = 10^n$.

Вычислим подкоренное выражение:

$4(10^n a + a) + 10a + 1 - 6a = 4a(10^n + 1) + 4a + 1 = 4a(9a + 2) + 4a + 1 = 36a^2 + 12a + 1 = (6a + 1)^2$. Поэтому значение корня равно $6a + 1 = \underbrace{66...6}_{n} + 1 = \underbrace{66...67}_{n-1}$.

2-й способ.

Пусть $10^n = b$, тогда $\underbrace{11...1}_{n} = \dfrac{10^n - 1}{9} = \dfrac{b-1}{9}$.

Подкоренное выражение в этом случае:

$$4\left(b\cdot\frac{b-1}{9}+\frac{b-1}{9}\right)+10\frac{b-1}{9}+1-6\frac{b-1}{9}=$$

$$=\frac{1}{9}\left(4b^2-4b+4b-4\right)+\frac{1}{9}(10b-10+9-6b+6)=$$

$$=\frac{1}{9}\left(4b^2-4+10b-1+6-6b\right)=\frac{1}{9}\left(4b^2+4b+1\right)=\left(\frac{2b+1}{3}\right)^2.$$

Извлекая корень, получим: $\dfrac{2b+1}{3}=\dfrac{2\cdot 10^n+1}{3}$.

Ответ: $\dfrac{2\cdot 10^n+1}{3}$ èëè $\underbrace{66...67}_{n-1}$.

(328) Почти просто. № 23.

Диагональ пересекает 1993 вертикальных и 1994 горизонтальных прямых. Каждое пересечение есть переход из одной клетки в другую, и еще пересечена первая клетка. Важно, что $D(1994,\ 1995)=1$ и прямая не пересекает узлов сетки внутри прямоугольника. Всего $1993+1994+1=3988$.

Ответ: 3998.

(329) Почти просто. № 24.

$S_{n+1}=1+10+\ldots+10^{n-1}+10^n,\quad a_1=1,\ q=10.$

$$S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1};\quad S_{n+1}=\frac{1(q^{n+1}-1)}{9}=\frac{10^{n+1}-1}{9};$$

$$\frac{10^{n+1}-1}{9}(10^{n+1}+5)+1=$$

$$=\frac{(z-1)(z+5)}{9}+1=\frac{(z-1)(z+5)+9}{9}=\frac{z^2-z+5z-5+9}{9}=$$

$$=\frac{z^2+4z+4}{9}=\left(\frac{z+2}{3}\right)^2 \text{ – полный квадрат.}$$

$10^{n+1} + 2 = 100\ldots02$ сумма цифр $1 + 0 + \ldots + 0 + 2 = 3$.

$(10^{n+1} + 2) \vdots 3$ – точный квадрат.

(330) Почти просто. № 25.

Узел назовем началом координат и проведем прямую, например $y = \sqrt{2}\,x$. Если она пересекает узел (m, n), то $n = \sqrt{2}\,m$ и $\sqrt{2} = \dfrac{n}{m}$ – рационально, что невозможно.

Ответ: Например, $y = \sqrt{2}\,x$.

(331) Почти просто. № 26.

1) $P(x) = h(x) \cdot (x - 1) + 2 \quad P(1) = 2$,

$P(x) = g(x) \cdot (x - 2) + 1 \qquad P(2) = 1$,

$P(x) = s(x) \cdot (x - 1)(x - 2) + ax + b$.

2) $P(1) = 2$, $P(2) = 1$.

$$-\begin{cases} a + b = 2, \\ 2a + b = 1. \end{cases}$$

$-a = 1$, $a = -1$, $b = 3$.

Ответ: $-x + 3$.

(332) Почти просто. № 27.

Возьмем из первого столбца 1 монету, из второго – две, … из десятого – все десять. Всего взято $1 + 2 + 3 + \ldots + 10 = 55$ монет. Их вес $55k$. Определим модуль разности между результатом взвешивания m_0 и числом $55k$, подбирая k таким образом, чтобы $t = |m_0 - 55k| \le 0$. t и будет номер столбца с фальшивыми монетами.

(333) Почти просто. № 28.

$m = 0 \qquad S = K$,

$m = 1 \qquad S = K + K$,

$m = 2 \qquad S = K + 2 \cdot K$,

$m = 3 \qquad S - K + 3 \cdot K$.

$S = K + mK$, $S = (m + 1)K$.

Ответ: $(m + 1)K$.

(334) Почти просто. № 29.

1) Если в круге $N = 2^k$ человек, то в результате останется первый:

Пример $N = 128$. 1, 2, 3, 4, ...128, ост. 1, 3, 5...127 и т. д.

Каждый раз начинается с нечетного первого и заканчивается четным последним.

2) Если после нескольких выдергиваний останется 2^k, то первый из оставшихся и останется в результате. Ближайшее число к 1996 будет $2^{10} = 1024$. Вычтем $1996 - 1024 = 972$. Вычеркнем сначала четные: 2, 4, ... 972-й будет иметь номер $972 \times 2 = 1944$ и, начиная с 1945, в круге останется $1024 = 2^{10}$ и идет счет, начиная с 1945-го, который и будет в результате.

Ответ: 1945.

(335) Почти просто. № 30.

$$\begin{cases} n^2 + an + b = m^2, \\ (n+1)^2 + a(n+1) + b = m+1)^2; \end{cases}$$

$$-\begin{cases} n^2 + an + b = m^2, \\ n^2 + 2n + 1 + an + a + b = m^2 + 2m + 1. \end{cases}$$

$2n + 1 + a = 2m + 1,$ $\underline{a = 2m - 2n,}$

$n^2 + (2m - 2n)n + b = m^2,$

$n^2 + 2mn - 2n^2 + b = m^2,$ $b = m^2 + n^2 - 2mn,$

$y = x^2 + 2(m - n)x + (m - n^2),$

$y = (x + m - n)^2.$

m и n – целые. Значит, при всех целых x значение трехчленов – точные квадраты.

(336) Почти просто. № 31.

1) $(a + b + c)^2 = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = 0$, $ab + ac + bc = -0{,}5$.

2) $a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = 1.$ $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = z.$

3) $(ab + ac + bc)^2 = 0{,}25,$

$a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 + 2ab^2c + 2a^2bc + 2abc^2 = 0{,}25.$

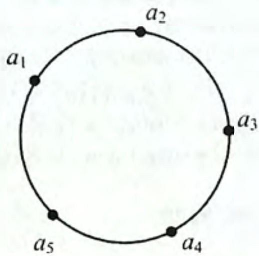
$z + 2abc(a + b + c) = 0{,}25.$

$z = 0{,}25.$

4) $a^4 + b^4 + c^4 + 2 \cdot 0{,}25 = 1;\quad a^4 + b^4 + c^4 = 0{,}5.$

Ответ: $a^4 + b^4 + c^4 = 0{,}5.$

(337) Почти просто. № 32.



1) $a_1 \geq a_5 + a_2$,

2) $a_2 \geq a_1 + a_3$,

3) $a_3 \geq a_2 + a_4$,

4) $a_4 \geq a_3 + a_5$,

5) $a_5 \geq a_4 + a_1$

$S_0 \geq 2S_0$

6) $a_1 \leq a_3 + a_4$,

7) $a_2 \leq a_4 + a_5$,

8) $a_3 \leq a_1 + a_5$,

9) $a_4 \leq a_1 + a_2$,

10) $a_5 \leq a_2 + a_3$.

$S_0 \leq 2S_0$

$S_0 \geq 0$, $S_0 \leq 0$, значит, $S_0 = 0$.

Докажем, что $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$. Пусть, не нарушая общности рассуждений, $a_1 > 0$. Тогда из (6) $a_1 < a_3 + a_4$. Значит, по крайней мере одно из них положительно. Пусть $a_3 > 0$, тогда из (2) $a_2 > a_1 + a_3$. $a_2 > 0$, $a_2 > a_1$, $a_2 > a_3$. Из (7) $a_2 < a_4 + a_5$. Одно из $\{a_4, a_5\}$ неположительно. Пусть $a_4 > 0$, тогда из (5) $a_5 > 0$. Т. е. из $a_1 > 0$ следует, что $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, $a_4 < 0$, $a_5 < 0$. Аналогично доказывается, что если $a_1 < 0$, то $a_2 < 0$, $a_3 < 0$, $a_4 < 0$, $a_5 < 0$.

И то и другое противоречит условию $S = 0$. Значит, среди них нет ни одного положительного и ни одного отрицательного. Значит, $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$.

Ответ: все нули.

(338) Почти просто. № 33.

A	Z
B	C

Если известно, что до клеток a, b, c количество путей a, b, c, то количество путей, ведущих к клетке z, будет: $z = a + b + c$.

1	11	61	231	681	1683
1	9	41	129	321	681
1	7	25	63	129	231
1	5	13	25	41	61
1	3	5	7	9	11
1	1	1	1	1	1

Используя количество путей к базовым (заштрихованным) клеткам, находим последовательно методом волны по диагоналям.

Получаем 1683 варианта.

Ответ: 1683.

(339) Почти просто. № 34.

$x + y - 2\sqrt{xy} = -(\sqrt{-x})^2 - (\sqrt{-y})^2$, $x < 0, y < 0$.

$-2\sqrt{-x}\,\sqrt{-y} = -(\sqrt{-x}+\sqrt{-y})^2$, значит,

$$\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{\sqrt{-x}+\sqrt{-y}} = \frac{-(\sqrt{-x}+\sqrt{-y})^2}{\sqrt{-x}+\sqrt{-y}} = -(\sqrt{-x}+\sqrt{-y}).$$

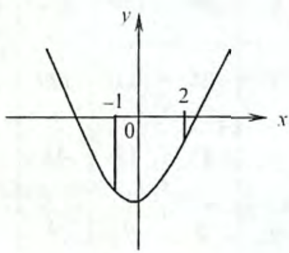
Ответ: $-(\sqrt{-x}+\sqrt{-y})$.

(340) Почти просто. № 35.

Машина выиграла 10 минут. 5 минут на пути от дома до места встречи и еще 5 минут от места встречи до дома. Значит, от момента встречи до Казанского вокзала ей оставалось ехать еще 5 минут, то есть встреча произошла в 3 часа 55 минут, значит, доцент шел 55 минут.

Ответ: 55 минут.

(341) Почти просто. № 36.



Определим, при каких значениях a $f(-1) \le 0$.

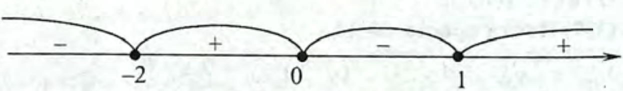
1-й способ:

$1 - a^3 - 2a^2 + 4 - 2a^3 - a^2 + 6a - 5 \le 0,$

$-3a^3 - 3a^2 + 6a \le 0,$

$a^3 + a^2 - 2a \ge 0,$

$a(a+2)(a-1) \ge 0.$



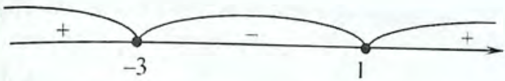
Получили $[-2; 0] \cup [1; +\infty)$.

Определим, при каких значениях a $f(2) \le 0$.

$4 + 2a^3 + 4a^2 - 8 - 2a^3 - a^2 + 6a - 5 \le 0$,

$3a^2 + 6a - 9 \le 0$,

$a^2 + 2a - 3 \le 0$.



Получили $[-3; 1]$.

Определим, при каких значениях a $\begin{cases} f(-1) \le 0, \\ f(2) \le 0. \end{cases}$

Имеем $[-2; 0] \cup \{1\}$.

При этих a данное неравенство не имеет на $[-1; 2]$ ни одного решения.

Значит, есть хотя бы одно решение при всех остальных a, то есть $(-\infty;2) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

2-й способ:

1) $f(-1) > 0$ на $(-\infty; -2) \cup (0; 1)$.

2) $f(2) > 0$ на $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

3) Определим, при каких значениях a выполняется хотя бы одно из неравенств, найдя решение совокупности

$\left[\begin{array}{l} f(-1) > 0, \\ f(2) > 0. \end{array} \right.$ Имеем $(-\infty;2) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty;2) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

(342) Почти просто. № 37.

Можно. Например, в стаканы 1–29 нальем 100 г молока, а в 30-й – 200 г.

$S = 2900 + 200 = 3100$ г. В среднем $3100 : 30 = \dfrac{310}{3}$ г молока.

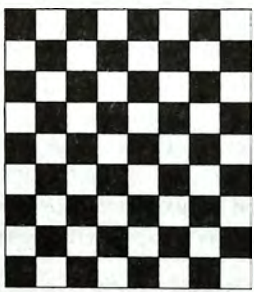
После n-го переливания количество молока в каждом стакане, умноженное на 2^n, выражается целым числом граммов. Если мальчик добился своей цели, то после n переливаний $2^n \cdot \dfrac{310}{3}$ – целое, но это невозможно ни при каком натуральном n.

Ответ: Можно.

(343) Почти просто. № 38.

Раскрасим поле 8×9 как шахматное поле. Получим $8 \times 9 = 72$, $72 : 2 = 36$. 36 белых и 36 черных клеток. Начинает и выигрывает первый. Он будет ставить свои фишки только на черное поле.

После одного хода первого и за ним второго будет закрыто три клеточки и из них две будут черными, т. к. второй обязательно закроет одну белую и одну черную клеточку.



После 18-го хода (хода первый–второй) будет закрыто 36 черных и 18 белых клеток, всего $3 \times 18 = 54$ клетки. Осталось

72 – 54 = 18 белых клеток, на них может ходить первый, но нет хода для второго, и он проигрывает.

Ответ: Выигрывает первый.

(344) Почти просто. № 39.

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}-1)}=\frac{2+\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}-1)}=$$

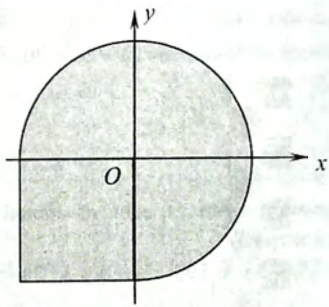
$$=\frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-1)}=$$

$$=\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-1)(2+\sqrt{3})}{(3-1)(2-1)}=\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-1).$$

Ответ: $\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-1)$.

(345) Почти просто. № 40.

Пересечение двух множеств, лежащих ниже $y=\sqrt{1-x^2}$ и левее $x=\sqrt{1-y^2}$:



Получим $S=1+\frac{3\pi}{4}$.

Ответ: $S=1+\frac{3\pi}{4}$.

(346) Почти просто. № 41.

	1 0	

1) Назовем осью 19 кубиков, лежащих вместе с центральным кубиком k ($k = 10$) не в одном столбике. S_1 – сумма этих 19 кубиков.

$S_1 + 10 = 1$, $S_1 = -9$.

2) Рассмотрим слой $1 \times 20 \times 20$, содержащий центральный кубик.

S_0	S_1	S_0
S_1	K	S_1
S_0		S_0

Общая сумма всех кубиков слоя $1\times 20 = 20$. S_0 – сумма кубиков слоя без $S_1 = S_1' = -9$ и $k = 10$.

Имеем $k + S_1 + S_1' + S_0 = 20$,

$S_0 = 20 - k - S_1 - S_1'$,

$S_0 = 20 - 10 + 9 + 9 = 28$.

3) Искомая сумма получится, если из общей суммы $S = 400$ вычесть K, три оси и три S_0.

$x = 400 - 10 - 3S_1 - 3S_0 = 390 - 3(-9) - 3 \cdot 28 = 390 + 27 - 84 =$
$= 333$.

Ответ: 333.

(347) Почти просто. № 42.

Пусть $\underbrace{11...1}_{n} = z$, тогда $10^n = 9z + 1$.

Таким образом, имеем:

$$\underbrace{111\ldots1}_{2n}-\underbrace{22\ldots2}_{n}=z\cdot10^n+z-2z=z(9z+1)-z=9z^2+z-z=9z^2=$$

$$=(3z)^2.$$

Мы получили полный квадрат, данное утверждение доказано.

(348) Почти просто. № 43.

Пусть $17{,}3=z$, тогда

$$\left(\frac{1-2z^3}{1+z^3}\right)^3+\left(\frac{2z-z^4}{1+z^3}\right)^3+z^3=$$

$$=\frac{(1-2z)^3+z^3(2-z^3)^3+z^3(1+z^3)^3}{(1+z^3)^3}$$

$z^3=a$

$$\frac{(1-2a)^3+a(2-a)^3+a(1+a)^3}{(1+a)^3}=$$

$$=\frac{(1-2a)^3+a((2-a)^3+(a+1)^3)}{(1+a)^3}=$$

$$=\frac{(1-2a)^3+a\cdot3\cdot(4-4a+a^2-(2-a)(a+1)+a^2+2a+1)}{(1+a)^3}=$$

$$=\frac{(1-2a)^3+3a\cdot(4-4a+a^2-(2a-a^2+2-a)+a^2+2a+1)}{(1+a)^3}=$$

$$=\frac{(1-2a)^3+3a\cdot(2a^2-2a+5-2a+a^2-2+a)}{(1+a)^3}=$$

$$=\frac{(1-2a)^3+3a\cdot(3a^2-3a+3)}{(1+a)^3}=$$

$$=\frac{1-6a+12a^2-8a^3+9a^3-9a^2+9a}{(a+1)^3}=$$

$$=\frac{a^3+3a^2+3a+1}{a^3+3a^2+3a+1}=1.$$

Ответ: 1.

(349) Почти просто. № 44.

x ч, y мин.

Скорость минутной стрелки 6° в минуту. Скорость часовой $\left(\frac{1}{2}\right)^{\circ}$ в минуту или 30° в час.

$\left(30x+\frac{y}{2}\right)^{\circ}$ – прошла часовая стрелка.

$6y$ – прошла минутная стрелка.

$\left|30x+\frac{y}{2}-6y\right|=1$, $|60x+y-12y|=2$, $|60x-11y|=2$,

$60x-11y=\pm 2$, $y=\frac{60x\pm 2}{11}$.

1) $x=0$, $y=\frac{\pm 2}{11}$ дробное,

2) $x=1$, $y=\frac{60\pm 2}{11}$ дробное,

3) $x=2$, $y=\frac{120\pm 2}{11}$ дробное,

4) $x=3$, $y=\frac{180\pm 2}{11}$ дробное,

5) $x=4$, $y=\frac{240\pm 2}{11}$,

$y=\frac{242}{11}=22$.

Итак, 4 ч 22 мин.

Ответ: 4 ч 22 мин.

(350) Почти просто. № 45.

Это разновидность *Игры Баше.* Особые позиции, которые получаем, рассматривая выигрышные номера, начиная с конца: 66, 56, 46, 36, 26, 16, 6.

Выигрывает первый, захватив особую позицию 6. Второй выигрывает, если первый ошибается и не займет очередную особую позицию.

Ответ: первый.

(351) Почти просто. № 46.

$$\sqrt[3]{\frac{1}{3}\left(\frac{10^{3n}-1}{9}-\frac{3(10^n-1)}{9}\cdot 10^n\right.},$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{3}\left(\frac{a^3-1}{9}-\frac{3a^2-3a}{9}\right.}=\sqrt[3]{\frac{a^3-a-3a^2+3a}{27}}=\sqrt[3]{\frac{(a-1)^3}{27}}=$$

$$=\frac{a-1}{3}=\frac{10^n-1}{3}=\underbrace{333...3}_{n}.$$

Ответ: $\underbrace{333...3}_{n}$.

(352) Почти просто. № 47.

$a^3 + a^2 = 7b$, $a^2(a + 1) = 7b$, $10 < a < 22$.

Либо $a \vdots 7$, либо $(a + 1) \vdots 7$.

$a = 13$, $7b = 2366$,

$a = 14$, $7b = 2940$,

$a = 20$, $7b = 8400$,

$a = 21$, $7b = 9702$.

Ответ: 2366, 2940, 8400, 9702.

(353) Почти просто. № 48.

$\overline{aaaa} = a \cdot 1111$, $1111 = 11 \cdot 101$.

$\overline{aaaa} = a \cdot 11 \cdot 101$, $a = 1$.

Данное число 1111, его делители 11 и 101.

Ответ: 1111, делители 11 и 101.

(354) Почти просто. № 49.

$\frac{a}{b}=\frac{a+4}{b+10}$, $a(b + 10) = b(a + 4)$, $ab + 10a = ab + 4b$, $10a = 4b$,
$5a = 2b$.

$a = 2$, $b = 5$.

Итак, $\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$.

Ответ: $\frac{2}{5}$.

(355) Почти просто. № 50.

$0{,}008x = 0{,}64(162 - x)$,

$8x = 640(162 - x)$,

$x = 80(162 - x)$, $81x = 162 \cdot 80$, $x = 160$, $y = 2$.

Ответ: 160; 2.

(356) Почти просто. № 51.

Обозначим $a = 2378$.

$(a + 1) \cdot a \cdot 10001 - a \cdot (a + 1) \cdot 10001 = 0$.

Ответ: 0.

(357) Почти просто. № 52.

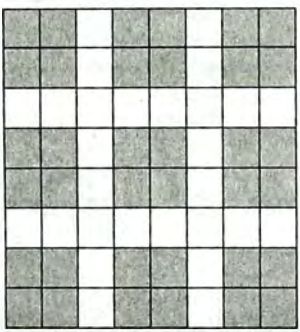


Рис. 1

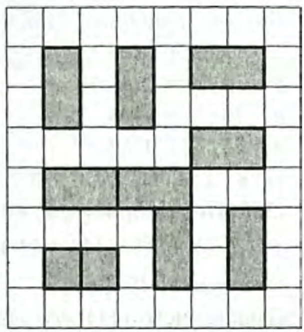


Рис. 2

Рассмотрим 9 квадратов, отмеченных на рис. 1. Любой прямоугольник 1×2 клетки пересекается не более чем с одним из отмеченных квадратов. Значит, нам потребуется закрасить не менее 9 прямоугольников. На рис. 2 показано, как закрасить 9 прямоугольников 1×2 клетки, чтобы любой квадрат 2×2 содержал по крайней мере одну закрашенную клетку.

Ответ: 9 прямоугольников.

(358) Почти просто. № 53.

1) Раскрасим доску, как показано на рисунке.

2) Стратегия второго должна быть такой:

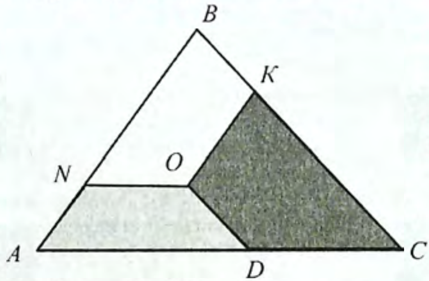
– если первый закрасил какую-либо клетку прямоугольника размера 1×2, отмеченного на нашем рисунке, – то второй закрашивает другую клетку этого прямоугольника.

– если первый закрасил одну из 8 «свободных» (черных) клеток, то второй тоже закрасит другую «свободную» клетку.

3) Поскольку в любой квадрат 2×2 полностью входит ровно один прямоугольник размером 1×2, изображенный на нашем рисунке, то первый никогда не сможет закрасить квадрат 2×2.

О т в е т: Да.

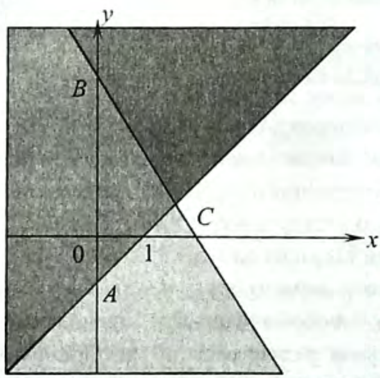
(359) Почти просто. № 54.



Выберем точку O внутри треугольника и проведем $OK \parallel AB$, $ON \parallel AC$, $OD \parallel BC$. Задача решена.

(360) Почти просто. № 55.

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq x - 1, \\ y \leq -2x + 5. \end{cases}$$



Найдем координаты точки C:

$$\begin{cases} y = x - 1, \\ y = -2x + 5. \end{cases} \qquad x - 1 = -2x + 5,$$

$3x = 6$, $x = 2$, $y = 1$.

$AB = 5 - 1(-1) = 6$,

$h = x_c = 2$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 = 6$.

Ответ: 6.

(361) Почти просто. № 56.

Пусть $10000t + 1996 = k^2$, тогда k – четное, $k = 2n$.

$10000t + 1996 = 4n^2$,

$2500t + 499 = n^2$, следовательно, n – нечетное, $n = 2l + 1$,

$2500t + 499 = (2l + 1)^2$,

$2500t + 499 = 4l^2 + 4l + 1$,

$2500t + 498 = 4l^2 + 4l$,

$1250t + 249 = 2l^2 + 2l$.

Левая часть нечетна, а правая четна, что невозможно.

Ответ: нельзя.

(362) Почти просто. № 57.

$$\sqrt{a^2 - 4a + 4} + \sqrt{a^2 - 12a + 36} = \sqrt{(a-2)^2} + \sqrt{(a-6)^2} =$$

$$= |a-2| + |a-6|.$$

Так как $2 \le a \le 6$, то $|a - 2| = a - 2$, $|a - 6| = a - 6$,

Поэтому $|a-2| + |a-6| = a - 2 + 6 - a = 4$.

Значит, при любом $2 \le a \le 6$ значение данного выражения равно 4.

Ответ: 4.

(363) Почти просто. № 58.

$\sqrt{ab}$ и $\sqrt{\frac{a}{b}}$ имеют смысл, если a и b одинаковых знаков, причем $b \ne 0$.

Рассмотрим два случая:

1) $a \ge 0$, $b > 0$, тогда

$$\frac{\sqrt{ab}-\sqrt{b^2}}{b}-\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{b}-\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}=-1.$$

2) $a \le 0$, $b < 0$, тогда

$$\frac{\sqrt{ab}-\sqrt{b^2}}{b}-\sqrt{\frac{a}{b}}=$$

$$=\frac{\sqrt{-a}\sqrt{-b}-\sqrt{-b}\sqrt{-b}}{b}-\sqrt{\frac{a}{b}}=-\frac{\sqrt{-a}\sqrt{-b}}{\sqrt{-b}\sqrt{-b}}+1-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=$$

$$=-\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}+1-\sqrt{\frac{a}{b}}=1-\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{a}{b}}=1-2\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Ответ: -1, если $a \ge 0$, $b > 0$; $1-2\sqrt{\frac{a}{b}}$, если $a \le 0$, $b < 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Агаханов, Н. Х.* Математические олимпиады Московской области 1993–2005 / Н. Х. Агаханов, О. К. Подлинский. – М., 2006.

2. *Балаян, Э. Н.* 1001 олимпиадная и занимательная задачи по математике / Э. Н. Балаян. – 2-е изд. – Ростов н/Д. : Феникс, 2007.

3. *Виленкин, Н. Я.* Математика. 6 класс / Н. Я. Виленкин [и др.]. – М. : Мнемозина, 2006.

4. *Выгодский, М. Я.* Справочник по элементарной математике / М. Я. Выгодский. – М. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1959.

5. *Галицкий, М. Л.* Сборник задач по алгебре для 8–9 классов / М. Л. Галицкий [и др.]. – М. : Просвещение, 1992.

6. *Генкин, С. А.* Ленинградские математические кружки : пособие для внеклассной работы / С. А. Генкин, И. В. Итенберг, Д. В. Фомин. – Киров : АСА, 1994.

7. *Гольдич, В.* 3000 задач по алгебре для 5–9 классов / В. Гольдич, С. Злотин. – СПб. : Литера, 2002.

8. *Грицаенко, Н. П.* Ну-ка реши! / Н. П. Грицаенко. – М. : Просвещение, 1998.

9. *Задачи* LXXI Московской математической олимпиады // Квант. – 2008. – № 4.

10. *Золотой* фонд. Школьная энциклопедия. Математика. Репринтное издание 1996 года. – М. : Научное издательство «Большая Российская энциклопедия», 2003.

11. *Игнатьев, Е. И.* В царстве смекалки / Е. И. Игнатьев. – М. : Наука, 1978.

12. *Канель-Белов, А. Я.* Подготовительные задачи к LVII Московской олимпиаде 1994 года для 8–11 классов / А. Я. Каннель-Белов, А. К. Ковальджи, Н. Б. Васильев. – М. : Московское математическое общество, 1994.

13. *Канин, Е. С.* Метод исчерпывающих проб (полного перебора) / Е. С. Канин // Потенциал. – 2008. – № 4.

14. *Кенгуру*–2006. Задачи. Решения. Итоги. – СПб., 2006.

15. *Кноп, К.* Математическая карусель / К. Кноп // Математика. – 2008. – № 16.

16. *Кострикина, Н. П.* Задачи повышенной трудности в курсе математики 4–5 классов / Н. П. Кострикина. – М. : Просвещение, 1986.

17. *Кремень, Э. А.* Развивающие задачи для математического досуга / Э. А. Кремень, З. С. Сухотина. – М. : Школа-Пресс, 1993.

18. *Лурье, М. В.* Задачи на составление уравнений / М. В. Лурье, Б. И. Александров. – М. : Наука, 1976.

19. *Маркова, И. С.* Новые олимпиады по математике / И. С. Маркова. – Ростов н/Д. : Феникс, 2005.

20. *Математика.* ЕГЭ–2009 : учебно-тренировочные тесты / под ред. Ф. Ф. Лысенко. Ч. II. – Ростов н/Д. : Легион-М, 2009.

21. *Пойа, Д.* Как решать задачу / Д. Пойа. – М. : Учпедгиз, 1959.

22. *Спивак, А. В.* Математический праздник : прил. к журн. «Квант». – 2000. – № 2. – М. : Бюро «Квантум», 2000.

23. *Спивак, А. В.* Тысяча и одна задача по математике / А. В. Спивак. – М. : Просвещение, 2002.

24. *Фарков, А. Ф.* Математические олимпиады / А. Ф. Фарков. – 6-е изд. – М. : Айрис-пресс, 2007.

25. *Швецов, К. И.* Справочник по элементарной математике / К. И. Швецов, Г. П. Бевз. – Киев : Наукова Думка, 1965.

26. *Шевкин, А. В.* Школьная олимпиада по математике : задачи и решения / А. В. Шевкин. – М. : Русское слово, 2002.

27. *Шевкин, А. В.* Школьная олимпиада по математике : задачи и решения / А. В. Шевкин. Вып. 2. – М. : Русское слово, 2004.

28. *Шестаков, С. А.* Сборник задач для подготовки и проведения письменного экзамена по алгебре за курс основной школы / С. А. Шестаков, И. Р. Высоцкий, Л. И. Звавич. – М. : АСТ, Астрель, 2006.

29. *Шустеф, Ф. М.* Сборник олимпиадных задач по математике / Ф. М. Шустеф, А. М. Фельдман, В. Ю. Гуревич. – Минск : Народная асвета, 1965.

30. *Чулков, П. В.* Математика. Школьные олимпиады. 5–6 классы / П. В. Чулков. – М. : Изд-во НЦ ЭНАС, 2007.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

9 класс

Решение задач повышенной сложности

Автор-составитель

Юрий Васильевич Лепёхин

Ответственные за выпуск

Л. Е. Гринин, Н. Е. Волкова-Алексеева

Ответственный методист **Г. П. Попова**

Редактор-корректор **Н. М. Болдырева**

Компьютерная верстка **О. Г. Быковской**

Издательство «Учитель»

400079, г. Волгоград, ул. Кирова, 143

Адрес электронной почты (e-mail): met@uchitel-izd.ru

Тел.: 8-800-1000-299 (звонок по России бесплатный), **(8442) 42-17-71, 42-25-58 (доб. 119)**

Формат 60×84/16.

Бумага газетная. Гарнитура Тип Таймс. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 17,00. Тираж 3 000 экз. (1-й з-д 1–1 000). Заказ № 1760.

Отпечатано с оригинал-макетов ООО «Николаевская межрайонная типография».

404033, г. Николаевск Волгоградской обл., ул. Октябрьская, 4.

2940

В помощь преподавателю математики

12+

2019671982

ФГОС

В пособии представлены нестандартные математические задачи с подсказками и ответами по темам: «Натуральные числа», «Уравнения и системы уравнений», «Текстовые задачи», «Неравенства», «Последовательности и прогрессии», «Функции и графики», «Геометрические задачи», «Задачи с параметром».

Учащиеся найдут разнообразный и полезный материал для подготовки к итоговой аттестации, познакомятся с наиболее важными идеями и методами решения задач повышенной сложности, а учитель может использовать наборы задач при подготовке школьников к ГИА, олимпиадам и конкурсам.

Адресовано учителям образовательных учреждений, приступившим к выполнению ФГОС ООО, репетиторам по математике; полезно учащимся.

ISBN 978-5-7057-5697-1

9 785705 756971

СРОК ИСПОЛЬЗОВАНИЯ НЕ ОГРАНИЧЕН

ИЗДАТЕЛЬСТВО «УЧИТЕЛЬ»