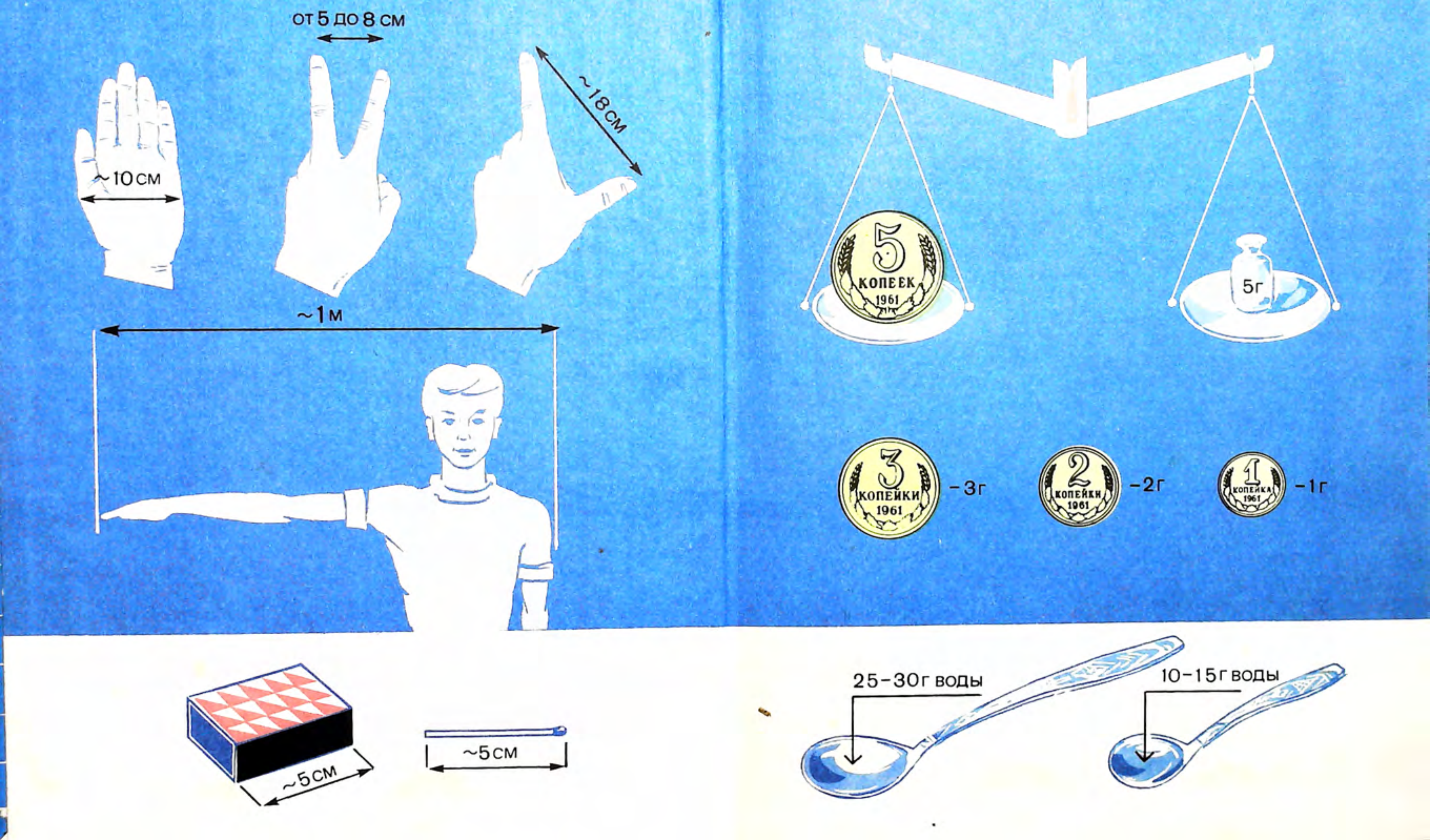
М. В. ТКАЧЁВА

ДОМАШНЯЯ МАТЕМАТИКА

ЭТО ПОЛЕЗНО ЗНАТЬ



М. В. ТКАЧЕВА

ДОМАШНЯЯ МАТЕМАТИКА

КНИГА ДЛЯ УЧАЩИХСЯ
7 КЛАССА СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

МОСКВА
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
1993

ББК 22.1
Т48

Рецензент: учитель математики школы № 5 г. Люберцы В. В. Гузеев

Ткачева М. В.

Т48 Домашняя математика: Кн. для учащихся 7 кл. сред. шк.— М.: Просвещение, 1993.—191 с.: ил.— ISBN 5-09-002959-8.

Издательство «Просвещение» планирует выпуск трех книг под названием «Домашняя математика», предназначенных для учащихся VII, VIII и IX классов соответственно. Все они предполагают семейное чтение и призваны помочь школьнику и его родителям при совместных занятиях математикой.

Настоящая книга адресуется семиклассникам.

Т $\frac{4306020000-591}{103(03)-93}$ 49—93, III—IV кварт. 1993 г. ББК 22.1

ISBN 5-09-002959-8

Посвящаю моим родителям
Зеничевой Н. И. и Ходакову В. А.

ОТ АВТОРА

Вспоминаю... Мне 12 лет. У мамы много хлопот с младшими братом и сестрой, и папа берет меня с собой в отпуск. Едем в Ленинград: походить по городу, посетить Эрмитаж, Русский музей, Петергоф... В дороге отец задает мне вопросы: «Почему в туннеле шум от колес поезда громче, чем когда едем по открытой местности?», «Почему солнце в зените кажется меньше, чем когда оно садится за горизонт?», «Почему «усы» троллейбуса касаются двух проводов, а трамвая — одного?», «А как бы ты поступила, если б попала, например, в такую ситуацию...?» (ситуации разные: «встретила нищего», «стала директором школы» и т. д.). Иногда подолгу молчим, обдумываем какую-то проблему, решаем задачу. Бывает, что я прошу папу рассказать что-нибудь из его детских или военных воспоминаний, почитать стихи...

Сегодня уже я пытаюсь у своих детей пробудить желание постоянной работы ума и души. Получилось бы...

ПРЕДИСЛОВИЕ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

Уважаемые ребята! Перед вами — не обычная книга по математике. С одной стороны, названиями параграфов первых двух глав она напоминает учебник. С другой стороны, написана она совсем не как учебник: здесь много решенных примеров, занимательных задач и шуток. Да и параграфы главы III имеют необычные названия. Прочтя эту главу, можно научиться многим полезным для жизни вещам.

Для чего эта книга вам будет нужна?

Чтобы ответить на этот вопрос, решите для себя, как вы относитесь к математике, и причислите себя к одной из следующих групп.

I группа. Люблю математику, нравится решать задачи, нравятся строгие рассуждения.

II группа. Равнодушен к математике, занимаюсь ею только когда нужно выполнить задание учителя.

III группа. Не люблю или боюсь математики (причины могут быть разные: тяжело дается, запустил материал из-за болезни или лени и т. д.).

Теперь прочтите, чем будет полезна эта книга для каждой группы.

Для ребят I группы. В книге, помимо обычных задач по алгебре и геометрии, вы найдете занимательные математические задачи, рассуждения, исторические сведения, практические советы. Вам будет интересно и полезно прочитать главу III. Книга поможет углубить и расширить ваши знания по математике, а также увидеть интересные применения математики в жизни.

Вы вполне сможете прочитать всю книгу самостоятельно. Однако будет неплохо, если интересные ее страницы вы прочтете вместе с родителями или товарищами, обсудите спорные вопросы.

Для ребят II группы. Ваше равнодушие к математике, скорее всего, объясняется тем, что вы не видите от нее никакой пользы, или все-таки что-то недопонимаете (при решении задач, в доказательстве теорем). Неприятно заниматься делом без удовольствия.

Давайте попробуем изменить ваше отношение к математике. Начните с чтения главы III «Математика в жизни». Думаю, что каждый из вас найдет там для себя интересные и полезные сведения.

Если у вас в течение учебного года возникают трудности с усвоением математики, читайте и разбирайте параграфы глав I и II. В них вы найдете решения основных типов задач, которые встречаются в учебнике, примеры контрольных работ по основным темам алгебры и геометрии. Прорешайте их, проверьте, как вы усвоили ту или иную тему курса математики.

На страницах книги «разбросаны» различные задачи, для решения которых чаще всего не требуется особых знаний, а нужны здравый смысл и логическое чутье.

Попробуйте разобрать решения задач, предложенных на «Занимательных страницах» после каждого параграфа. Если что-то не будет получаться, обратитесь за помощью к старшим или учителю, посмотрите ответы.

Главное — сделайте усилие над собой и постарайтесь прочитать всю или почти всю книгу. Результат не замедлит сказаться не только в повышении отметок в журнале, но и в изменении вашего взгляда на обыденные вещи и явления.

Для ребят III группы. Перед вами сейчас стоят две проблемы: первая — устранить пробелы в знаниях и научиться решать задачи хотя бы так, чтобы контрольные работы не вызывали страха и затруднений: вторая — попробовать подружиться с математикой.

Первую проблему нужно решать так: самостоятельно или с помощью товарищей, родителей, учителя разбирайте *примеры*, расположенные слева на страницах книги; после того как примеры понятны, переходите к самостоятельному выполнению *заданий*, расположенных справа от примеров. Так продвигайтесь до конца параграфа.

Когда будете уставать от решения заданий, отвлекайтесь на чтение «Занимательных страниц» и параграфов главы III «Математика в жизни». Там все должно быть доступно вашему пониманию.

ПРЕДИСЛОВИЕ ДЛЯ РОДИТЕЛЕЙ

Уважаемые родители! Вы, конечно, прежде всего прочли предисловие, обращенное к вашим детям. Наверное, основная цель книги стала ясна — помочь ребятам, интересующимся математикой, поддержать и развить интерес к ней, а ребятам, у которых математика вызывает те или иные затруднения,— помочь понять и полюбить ее.

Вам, как людям, изучавшим в свое время математику, а сейчас еще и имеющим жизненный опыт, будет легче сориентироваться в структуре книги и организовать занятия вашего ребенка по ней.

Особое внимание следует уделить ребятам, которые отнесли себя к III группе. Они, возможно, не смогут воспользоваться указаниями предисловия и начать работать самостоятельно.

Наберитесь терпения и регулярно, от 30 мин до 1 ч в день, занимайтесь со своим ребенком по этой книге, если она понравится вам. Занятия следует организовать так: повторяйте с помощью книги пройденный в школе материал, а в какие-то моменты *опережайте* школьные задания (чтобы ребенок на уроки приходил подготовленным к восприятию объясняемой учителем темы). Книга поможет правильно решать задачи домашнего задания по математике.

Варианты контрольных работ предлагайте сначала решать ребенку самостоятельно, а потом проверяйте решенное вместе с ним по образцу, который предложен после контрольной работы.

Внимание уставшего ребенка переключайте на решение занимательных нетрудных задач, на чтение параграфов главы III.

Помните, что «пик интереса» учащихся к математике приходится на 12—13 лет и наша с вами задача — пробудить его, развить и удержать.

ПРЕДИСЛОВИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ

Уважаемые коллеги! Данное пособие может помочь вам организовать:

индивидуальные и дополнительные занятия с различными по уровню подготовленности учащимися;

домашние занятия учащихся с помощью их родителей;

кружковые и дофакультативные занятия (используя материалы «Занимательных страниц» и главы III «Математика в жизни»).

Наличие в пособии главы III «Математика в жизни» призвано в основном:

послужить основой совместного досуга родителей и их детей, а также для организации целенаправленных их совместных занятий математикой;

показать на понятных примерах применение уже имеющихся у детей математических знаний в практической и повседневной жизни (§ 14, 15, 20, 22);

дополнить математический багаж учащихся на пропедевтическом уровне умениями собирать и обрабатывать поступающую информацию и составлять элементарные частотные характеристики (§ 12, 13), умением строить графы (§ 16, 17, 19), знанием азов комбинаторики (§ 16), решением задач на оптимизацию (§ 17), топологическими навыками (§ 18, 21), алгоритмической культурой (§ 14—17, 19, 22).

Предполагается издание еще двух книг, объединенных общими идеями с данным пособием и предназначенных для учащихся двух последующих классов и их родителей.

Выражаю искреннюю признательность Борису Николаевичу Кукушкину и Рубену Гургеновичу Газаряну за ряд ценных замечаний и дополнений к содержанию рукописи.

Прошу все замечания и пожелания по совершенствованию данной части пособия, дополнения в ее содержание присылать автору по адресу: 127521, Москва, а/я 24, издательство «Просвещение», редакция математики.

§ 1. Числовые и алгебраические выражения

I. Действия с обыкновенными дробями.

Основное свойство дроби.

Величина дроби не изменится, если числитель и знаменатель дроби умножить (или разделить) на одно и то же число, отличное от нуля:

числитель → $\frac{\blacktriangle}{\blacksquare} = \frac{\blacktriangle \cdot \bullet}{\blacksquare \cdot \bullet}$ *и* $\frac{\blacktriangle}{\blacksquare} = \frac{\blacktriangle : \bullet}{\blacksquare : \bullet}$
знаменатель →

ПРИМЕРЫ

1) Приведем дробь $\frac{2}{5}$ к знаменателю 20.

$\triangle$* $20 = 5 \cdot 4$, $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{8}{20}$. $\blacktriangle$

2) Запишем число 3 в виде дроби со знаменателем 7.

$\triangle$ $3 = \frac{3}{1} = \frac{3 \cdot 7}{1 \cdot 7} = \frac{21}{7}$. $\blacktriangle$

3) Сократим дробь $\frac{16}{20}$.

$\triangle$ $\frac{16}{20} = \frac{16:2}{20:2} = \frac{8}{10}$.

Но обычно сокращают дробь на наибольший общий делитель числителя и знаменателя (в данном случае это число 4):

$\frac{16}{20} = \frac{4}{5}$. $\blacktriangle$

ЗАДАНИЯ

1) Привести дроби $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$ к знаменателю 6.

2) Записать число 9 в виде дроби со знаменателем 5.

3) Сократить дроби $\frac{2}{14}$, $\frac{18}{27}$, $\frac{12}{48}$, $\frac{15}{65}$.

* Знаки $\triangle$ и $\blacktriangle$ ставятся в начале и конце рассуждения, решения задачи, доказательства утверждения.

Сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями

$$\frac{\blacktriangle}{\blacksquare}+\frac{\bullet}{\blacksquare}=\frac{\blacktriangle+\bullet}{\blacksquare};\qquad \frac{\blacktriangle}{\blacksquare}-\frac{\bullet}{\blacksquare}=\frac{\blacktriangle-\bullet}{\blacksquare}$$

ПРИМЕРЫ

Выполним действия:

1) $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{1+2}{5}=\frac{3}{5}$.

2) $\frac{1}{6}+\frac{2}{3}=\frac{1}{6}+\frac{2\cdot 2}{3\cdot 2}=\frac{1}{6}+\frac{4}{6}=\frac{1+4}{6}=\frac{5}{6}$.

3) $2\frac{3}{8}-1\frac{5}{8}=\frac{19}{8}-\frac{13}{8}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$,

так как $2\frac{3}{8}=2+\frac{3}{8}=\frac{16}{8}+\frac{3}{8}=\frac{19}{8}$

$\left(\text{или } 2\frac{3}{8}=\frac{2\cdot 8+3}{8}=\frac{19}{8}\right)$ и $1\frac{5}{8}=\frac{13}{8}$.

4) $\frac{3}{8}+1\frac{3}{10}=\frac{\overset{5}{3}}{8}+\frac{\overset{4}{13}}{10}=\frac{3\cdot 5+13\cdot 4}{40}=\frac{15+52}{40}=$

$=\frac{67}{40}=1\frac{27}{40}$.

ЗАДАНИЯ

Выполнить действия:

1) $\frac{4}{17}-\frac{1}{17}$.

2) $\frac{4}{15}+\frac{3}{5}$.

3) $2\frac{7}{12}+3\frac{9}{12}$.

4) $5\frac{5}{6}-\frac{7}{8}$.

Умножение дробей

$$\frac{\blacktriangle}{\blacksquare}\cdot\frac{\bullet}{\blacklozenge}=\frac{\blacktriangle\cdot\bullet}{\blacksquare\cdot\blacklozenge}$$

ПРИМЕРЫ

Выполним действия:

1) $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}=\frac{2\cdot 3}{5\cdot 7}=\frac{6}{35}$.

2) $\frac{7}{11}\cdot 3\frac{1}{7}=\frac{7}{11}\cdot\frac{22}{7}=\frac{\overset{1}{\cancel{7}}\cdot\overset{2}{\cancel{22}}}{\underset{1}{\cancel{11}}\cdot\underset{1}{\cancel{7}}}=2$.

3) $1\frac{2}{15}\cdot 2\frac{6}{7}=\frac{17}{15}\cdot\frac{20}{7}=\frac{17\cdot\overset{4}{\cancel{20}}}{\underset{3}{\cancel{15}}\cdot 7}=\frac{68}{21}=3\frac{5}{21}$.

ЗАДАНИЯ

Выполнить действия:

1) $\frac{15}{17}\cdot\frac{3}{5}$.

2) $5\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{41}$.

3) $1\frac{2}{13}\cdot 8\frac{2}{3}$.

Деление дробей.

$$\frac{\triangle}{\square}:\frac{\bigcirc}{\lozenge}=\frac{\triangle\cdot\lozenge}{\square\cdot\bigcirc}$$

ПРИМЕРЫ

Выполним действия:

1) $\frac{3}{11}:\frac{2}{7}=\frac{3\cdot 7}{11\cdot 2}=\frac{21}{22}$.

2) $\frac{8}{15}:3\frac{1}{3}=\frac{8}{15}:\frac{10}{3}=\frac{\overset{4}{\cancel{8}}\cdot\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{5}{\cancel{15}}\cdot\underset{5}{\cancel{10}}}=\frac{4}{25}$.

ЗАДАНИЯ

Выполнить действия:

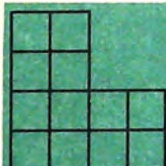
1) $\frac{7}{15}:\frac{4}{7}$.

2) $2\frac{3}{5}:1\frac{4}{15}$.

Связь умножения и деления дробей.

$$\frac{\triangle}{\square}:\frac{\bigcirc}{\lozenge}=\frac{\triangle}{\square}\cdot\frac{\lozenge}{\bigcirc}$$

1



Фигуру разрезать: 1) на две одинаковые фигуры; 2) на 3 одинаковые фигуры; 3) на 4 одинаковые фигуры.

II. Действия с десятичными дробями аналогичны действиям с целыми числами.

ПРИМЕРЫ

Вычислим:

1) 2,035 − 1,7483. △

$$\begin{array}{r} -\,2{,}035 \\ 1{,}7483 \\ \hline 0{,}2867 \end{array}$$ ▲

ЗАДАНИЯ

Вычислить:

1) 4,531 + 8,0297.
2) 12,41 − 5,371.

2) $3{,}451 \cdot 20{,}4$.

$$\begin{array}{r l}
\triangle\ \ \ 3{,}451 & \text{3 знака после запятой} \\
\times\ \ \ \ 20{,}4 & \text{1 знак после запятой} \\
\hline
13804 & \\
+\ 6902\ \ & \\
\hline
70{,}4004 & \text{4 знака после запятой}
\end{array}$$

3) $24{,}36:1{,}2$.

$\triangle$ $24{,}36:1{,}2=243{,}6:12$.

$$\begin{array}{r|l}
243{,}6 & 12 \\
\cline{2-2}
-24\ \ \ \ & 20{,}3 \\
\hline
36 & \\
-36 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$ ▲

4) Запишем десятичную дробь 7,045 в виде обыкновенной.

$\triangle$ $7{,}045=7\frac{45}{1000}=7\frac{9}{200}$. ▲

3) $0{,}53 \cdot 2{,}01$.
4) $5{,}061 \cdot 2{,}3$.
5) $74{,}2:0{,}14$.
6) $16{,}856:5{,}6$.

7) Записать в виде обыкновенных следующие десятичные дроби:

0,03; 1,12 $-5{,}5$; 12,65.

III. Правила действий с числами с одинаковыми и разными знаками.

> Чтобы *сложить два числа с одинаковыми знаками,* нужно сложить их абсолютные величины и в результате поставить их общий знак.

ПРИМЕРЫ

Вычислим:

1) $4+1=5$.
2) $(-4)+(-1)=-(4+1)=-5$.

В выражении $(-4)+(-1)$ можно опустить знак «плюс», тогда оно будет выглядеть так: $-4-1=-5$.

ЗАДАНИЯ

Вычислить (устно):

1) $17+8$.
2) $(-13)+(-21)$.
3) $-31-19$.
4) $-10+(-15)$.

> Чтобы *сложить два числа с разными знаками,* нужно из большей абсолютной величины вычесть меньшую и в результате поставить знак числа, имеющего большую абсолютную величину.

ПРИМЕРЫ

Вычислим:

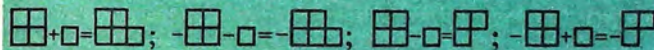
1) $-1+4=4-1=3$.
2) $-4+1=-(4-1)=-3$.
3) $3-7=-(7-3)=-4$.
4) $8-5=3$.

ЗАДАНИЯ

1) $-3+8$.
2) $-8+3$.
3) $13-18$.
4) $18-13$.

Подумайте, иллюстрацией какого правила и конкретно какого примера могли бы послужить следующие рисунки:

2



Чтобы *умножить (разделить) одно число на другое,* нужно перемножить (разделить) их абсолютные величины и, если числа имеют одинаковые знаки, поставить в результате знак «плюс»; если разные — знак «минус».

ПРИМЕРЫ

Вычислим:

1) $2\cdot 3=6$.
2) $(-2)\cdot(-3)=6$.
3) $(-2)\cdot 3=-6$.
4) $2\cdot(-3)=-6$.

ЗАДАНИЯ

Вычислить (устно):

1) $7\cdot 8$.
2) $15\cdot\frac{2}{3}$.
3) $12:\left(-\frac{1}{2}\right)$.
4) $-\frac{1}{2}:12$.
5) $(-16)\cdot(-3)$.
6) $-52:(-13)$.

IV. Числовые и алгебраические выражения.

Числовые выражения состоят из чисел, знаков арифметических действий и скобок. Например:

$$-12+2\frac{1}{3}:\left(0{,}5-\left(3{,}2+4\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}\right)\right).$$

Чтобы найти значение числового выражения, нужно знать *порядок выполнения действий.*

1. Если есть скобки, то сначала выполняются *действия в скобках* (в установленном в следующих пунктах порядке). Если скобок несколько, то сначала выполняются действия во внутренних скобках.

2. Выполняются по порядку следования *действия второй ступени (умножение и деление).*

3. Выполняются по порядку следования *действия первой ступени (сложение и вычитание).*

4. Если выражение записано в виде дроби, то находят по правилам 1—3 значения числителя и знаменателя дроби, затем — значение числителя делят на значение знаменателя.

ПРИМЕР

Найдем значение числового выражения (над знаками действий в кружках укажем порядок выполнения действий):

$$7 \overset{4}{-} 5{,}4 \overset{3}{:} 0{,}06 \overset{5}{-} \left(-3{,}5 \overset{2}{+} 2\frac{3}{4} \overset{1}{:} \frac{1}{2}\right).$$

1) $2\frac{3}{4}:\frac{1}{2}=\frac{11}{4}:\frac{1}{2}=\frac{11\cdot\cancel{2}^{\,1}}{\cancel{4}_{\,2}\cdot 1}=\frac{11}{2}=5\frac{1}{2}.$

2) $-3{,}5+5\frac{1}{2}=-3{,}5+5{,}5=2.$

3) $5{,}4:0{,}06=540:6=90.$

4) $7-90=-83.$

5) $-83-2=-85.$

ЗАДАНИЯ

Вычислить:

1) $\frac{5{,}6-24\cdot 2{,}4-12}{-15{,}6:5{,}2+2{,}2}.$

2) $\frac{2}{7}:(1{,}5+(-2{,}1+4{,}5\cdot 3)).$

3) $5\frac{1}{2}-7\cdot 2{,}1+3{,}2:(-8).$

Алгебраические выражения состоят из чисел и букв, соединенных знаками арифметических действий. Алгебраические выражения могут содержать скобки.

Например: $aa+(2ab-\frac{2}{3}b^2:c).$

Заметим, что **числовое выражение** — это частный случай алгебраического выражения.

Числовое значение алгебраического выражения — это число, которое получается в результате вычислений при замене букв числами.

ПРИМЕР

Найдем числовое значение выражения

$$2a-5ab+3$$

при $a=-1$; $b=0{,}2$:

$\triangle$ $2\cdot(-1)-5\cdot(-1)\cdot 0{,}2+3=-2+$
$+1+3=2$. $\blacktriangle$

ЗАДАНИЕ

Найти значение выражения

$$-x+8xy-1 \text{ при:}$$

1) $x=0$; $y=-1$.
2) $x=-2$; $y=0$.
3) $x=7$; $y=-2$.

ПРИМЕР

Куплено x тетрадей по 3 р. и y стержней для ручек по 8 р. Запишем формулу для нахождения стоимости s всей покупки. Сколько стоит покупка, если куплено 20 тетрадей и 3 стержня?

$\triangle$ $s=x\cdot 3+y\cdot 8$. При $x=20$; $y=3$
$s=20\cdot 3+3\cdot 8=60+24=84$ (р.). $\blacktriangle$

ЗАДАНИЕ

В первый день турист шел a часов со скоростью 5 км/ч. Во второй день он шел b часов со скоростью 4 км/ч. Записать формулу для нахождения пройденного за два дня пути s. По формуле найти числовое значение пути s, если $a=8$; $b=5$

С помощью букв удобно записать основные **законы сложения и умножения чисел.**

1. Переместительные законы:

$$a+b=b+a,\ a\cdot b=b\cdot a.$$

2. Сочетательные законы:

$$(a+b)+c=a+(b+c),\ (ab)c=a(bc).$$

3. Распределительный закон:

$$a(b+c)=ab+ac.$$

ПРИМЕРЫ

Вычислим рационально:

1) $\left(4{,}7+2\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{3}$. 2) $15\frac{4}{7}\cdot 7$.

$\triangle$ 1) $\left(4{,}7+2\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{3}=4{,}7+\left(2\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)=$
$=4{,}7+3=7{,}7$.

2) $15\frac{4}{7}\cdot 7=\left(15+\frac{4}{7}\right)\cdot 7=105+4=109$. $\blacktriangle$

ЗАДАНИЯ

Вычислить (используя законы сложения и умножения чисел):

1) $\left(7\frac{2}{9}+0{,}98\right)+0{,}02$.
2) $\left(0{,}48\cdot\frac{4}{9}\right)\cdot 2\frac{1}{4}$.
3) $100(2{,}23-0{,}15)$.

Правила раскрытия скобок.

1. Если перед скобками стоит знак «плюс» (в начале выражения знак «плюс» обычно не пишется), то скобки и знак «плюс» можно опустить, сохранив знаки всех членов выражения. Например:

$$2a+(b-c)=2a+b-c,\quad (a-3b)-d=a-3b-d.$$

2. Если перед скобками стоит знак «минус», то скобки и знак «минус» можно опустить, поменяв знаки всех членов выражения, стоящего в скобках, на противоположные. Например:

$$-(a-b)=-a+b,\quad 2a-(3b-c+d)=2a-3b+c-d.$$

ПРИМЕРЫ

Раскроем скобки в выражении.

1) $-12x-(2y-7z)$.

$\triangle$ $-12x-(2y-7z)=-12x-2y+7z.$ $\blacktriangle$

2) $3a+(2ab-(5b-2c))$.

$\triangle$ $3a+(2ab-(5b-2c))=3a+$
$+(2ab-5b+2c)=3a+2ab-5b+2c.$ $\blacktriangle$

ЗАДАНИЯ

Раскрыть скобки в выражении:

1) $3a+(-2c+10b)$.
2) $14x-(3y+6z)$.
3) $-(12ab+b)+$
$+(4a+8db)-d$.
4) $21x-(3y-(28xy+z))$.

ПРИМЕР

Запишем формулу для вычисления площади S закрашенной на рисунке 1 фигуры.

$\triangle$ $S=mn-x^2-xy.$ $\blacktriangle$

ЗАДАНИЕ

Записать формулу для вычисления площади S закрашенной на рисунке 2 фигуры.

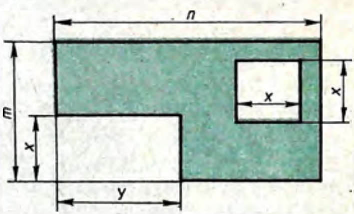


Рис. 1

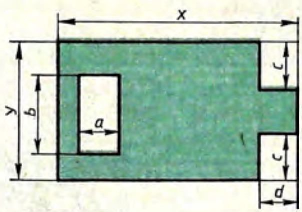


Рис. 2

Алгебраическая сумма состоит из числовых и алгебраических выражений, соединенных знаком «плюс» или «минус». Поэтому выражение, например, такого вида: $a-b$ — мы можем назвать суммой (алгебраической суммой), имея в виду, что $a-b=a+(-b)$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

1. Найти значение числового выражения:

а) $\frac{3}{7}-\frac{1}{7}$; б) $2\frac{2}{11}-1\frac{3}{11}$; в) $\frac{4}{9}+\frac{1}{12}$; г) $10\frac{3}{8}+2\frac{1}{4}$.

2. Вычислить:

а) $21{,}307-19{,}9375$; б) $0{,}281\cdot 30{,}2$; в) $21{,}762:3{,}1$.

3. Вычислить:

а) $15-21$; б) $-4+32$; в) $-17+(-49)$; г) $-\frac{1}{2}-1\frac{1}{2}$;

д) $56:(-8)$; е) $-4\cdot(-18)$; ж) $-42:6$.

4. Найти значение выражения:

$$-5{,}12+4{,}8:0{,}16-\left(3\frac{1}{5}-2\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot(-0{,}2).$$

5. Найти числовое значение алгебраического выражения $-2x+\frac{5}{8}y$ при $x=2\frac{4}{7}$; $y=-0{,}4$.

Решение (возможный вариант оформления)

1. а) $\frac{3}{7}-\frac{1}{7}=\frac{3-1}{7}=\frac{2}{7}$;

б) $2\frac{2}{11}-1\frac{3}{11}=\frac{24}{11}-\frac{14}{11}=\frac{24-14}{11}=\frac{10}{11}$;

в) $\frac{4^{(4}}{9}+\frac{1^{(3}}{12}=\frac{4\cdot 4+1\cdot 3}{36}=\frac{16+3}{36}=\frac{19}{36}$;

г) $10\frac{3}{8}+2\frac{1}{4}=\frac{83^{(1}}{8}+\frac{9^{(2}}{4}=\frac{83+18}{8}=\frac{101}{8}=12\frac{5}{8}$.

2. а) $\begin{array}{r} -\,21{,}307 \\ 19{,}9375 \\ \hline 1{,}3695; \end{array}$ б) $\begin{array}{r} \times\; 0{,}281 \\ 30{,}2 \\ \hline +\;562 \\ 843 \\ \hline 8{,}4862; \end{array}$ в) $\begin{array}{r|l} -\,217{,}62 & 3{,}1 \\ \cline{2-2} 217 & 70{,}2. \\ \hline -\,62 & \\ 62 & \\ \hline 0 & \end{array}$

3. а) $15-21=-6$; б) $-4+32=28$; в) $-17+(-49)=-66$;
г) $-\frac{1}{2}-1\frac{1}{2}=-2$; д) $56:(-8)=-7$; е) $-4\cdot(-18)=72$;
ж) $-42:6=-7$.

4. $-5{,}12\overset{⑤}{+}4{,}8\overset{③}{:}0{,}16\overset{⑥}{-}\left(3\frac{1}{5}\overset{②}{-}2\frac{3}{4}\overset{①}{:}\frac{1}{2}\right)\overset{④}{\cdot}(-0{,}2)=24{,}42.$

1) $2\frac{3}{4}:\frac{1}{2}=\frac{11}{4}:\frac{1}{2}=\frac{11\cdot\cancel{2}^{1}}{\cancel{4}_{2}\cdot 1}=\frac{11}{2}$,

2) $3\frac{1}{5}-\frac{11}{2}=\frac{16^{\backslash 2}}{5}-\frac{11^{\backslash 5}}{2}=\frac{32-55}{10}=-\frac{23}{10}=-2{,}3$,

3) $4{,}8:0{,}16=480:16=30$,
4) $-2{,}3\cdot(-0{,}2)=0{,}46$,
5) $-5{,}12+30=24{,}88$,
6) $24{,}88-0{,}46=24{,}42$.

5. $-2\overset{①}{\cdot}2\frac{4}{7}\overset{③}{+}\frac{5}{8}\overset{②}{\cdot}(-0{,}4)=-5\frac{11}{28}.$

1) $-2\cdot 2\frac{4}{7}=-2\cdot\frac{18}{7}=-\frac{36}{7}$,

2) $\frac{5}{8}\cdot(-0{,}4)=\frac{5}{8}\cdot\left(-\frac{4}{10}\right)=\frac{5}{8}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)=-\frac{{}^{1}\cancel{5}\cdot\cancel{2}^{1}}{{}_{4}\cancel{8}\cdot\cancel{5}_{1}}=-\frac{1}{4}$,

3) $-\frac{36}{7}+\left(-\frac{1}{4}\right)=-\left(\frac{36^{\backslash 4}}{7}+\frac{1^{\backslash 7}}{4}\right)=-\frac{144+7}{28}=-\frac{151}{28}=-5\frac{11}{28}.$

ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ СТРАНИЦЫ

1. Игра (для тренировки умения выполнять действия с разными знаками).

В игре участвует любое количество человек. Играть можно как на улице, так и дома. Если игра проходит на улице, то чертят на земле несколько окружностей и присваивают центральному кругу и каждому кольцу определенное число: положительное, отрицательное или нуль, как, например, на рисунке 3.

Все играющие набирают себе по одинаковому количеству бит (камешков). Первый по жребию бросает свои биты и в зависимости от попада-

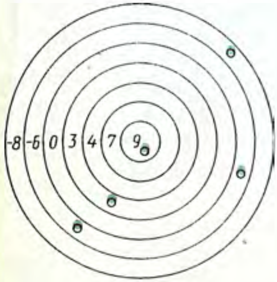


Рис. 3

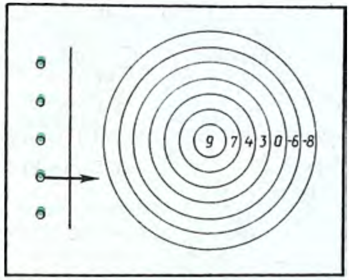


Рис. 4

ния в то или иное кольцо считает сумму набранных им очков (в нашем случае это $-8+(-6)\cdot 2+3+9=-8-12+3+9=-8$). Затем то же проделывают другие игроки. Победит тот, кто не только наберет большее количество очков, но и не ошибется при подсчете их количества.

Если играют дома, то чертят аналогичные круги циркулем на большом листе бумаги. На этом же листе проводят прямую линию (рис. 4) и за ней выстраивают фишки (ими могут служить, например, пуговицы, монеты, шашки), которые направляют в круги щелчками.

2. От 1 до 100. В квадрат размером 10×10 клеток запишем натуральные числа от 1 до 100, как показано на рисунке 5.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Рис. 5

Выберем внутри этого квадрата любой квадрат размером 2×2 (например, см. выделенный на рисунке 5 квадрат):

35	36
45	46

Сравним суммы чисел, записанных в противоположных углах квадрата:

$$\underbrace{35+46}_{81}=\underbrace{45+36}_{81}.$$

Будут ли обладать этим же свойством аналогичные суммы в любом другом квадрате размером 2×2?

△ Число, расположенное в левом верхнем углу любого квадрата 2×2, взятого из исходного квадрата 10×10, обозначим буквой n. Тогда нетрудно видеть, что остальные числа этого квадрата выразятся через n следующим образом: $n+1$, $n+10$, $n+11$ (рис. 6). Суммы чисел, расположенных в противоположных углах такого квадрата, будут всегда одинаковы:

$$n+(n+11)=2n+11,\quad (n+10)+(n+1)=2n+11. \ ▲$$

ЗАДАНИЕ.

Рассмотрите теперь квадраты 3×3, 4×4 и т. д. (рис. 5). Найдите расположение групп чисел в этих квадратах, суммы которых будут одинаковы (например, в любом квадрате 4×4 суммы чисел в заштрихованных и в зеленых квадратах одинаковы) — (рис. 7). Докажите это и аналогичным образом заштрихуйте другие группы чисел, обладающих таким же свойством.

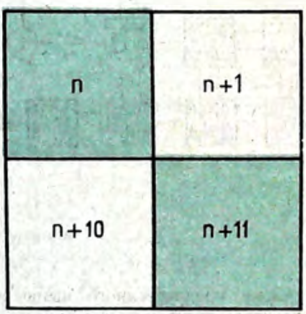


Рис. 6

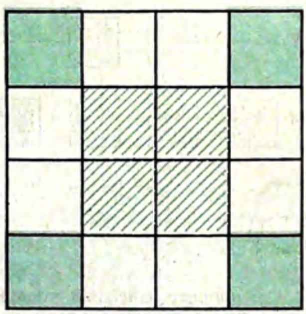


Рис. 7

3. Числа Фибоначчи.

З а д а ч а. Допустим, что в январе тебе подарили пару новорожденных кроликов. Через 2 месяца они рождают новую пару кроликов. Каждая новая пара через 2 месяца после своего рождения рождает новую пару. Старая пара кроликов рождает новую пару уже каждый месяц (рис. 8). Сколько пар кроликов у тебя будет в декабре?

△ Количество кроликов, имеющихся у тебя в январе, феврале, ..., декабре, образуют следующий ряд чисел

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144.$$

Эти числа обладают следующим свойством: каждое из них, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих. Числа, полученные таким образом, называются числами *Фибоначчи*. Сложим все эти числа. Получим результат: в декабре у тебя будет 376 кроликов. ▲

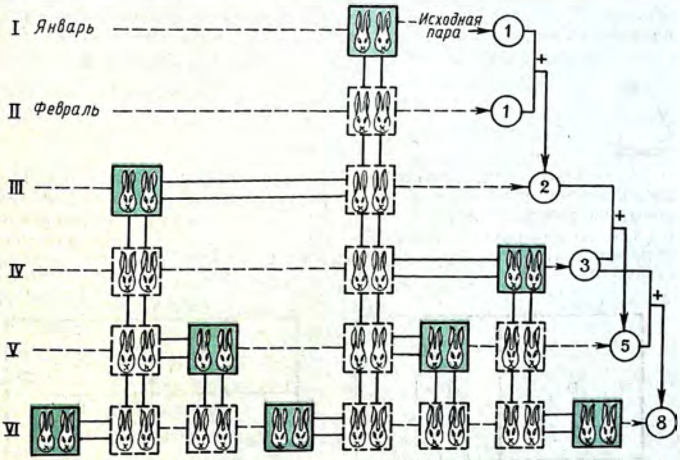


Рис. 8

ЗАДАНИЯ.

1. Запишите еще два следующих члена предложенного выше ряда Фибоначчи и найдите сумму чисел полученного ряда.

2. Если бы в качестве первых двух чисел мы взяли любые числа, а по-

следующие составляли бы по тому же правилу (сумма двух предыдущих), то получили бы другой ряд чисел, также называемых числами Фибоначчи.

Обозначив первые два числа буквами a и b, запишите 10 последовательных чисел Фибоначчи.

Подумайте, почему сумма первых 10 чисел Фибоначчи может быть найдена умножением седьмого по порядку числа на 11.

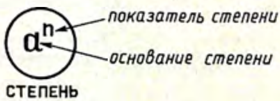
§ 2. Степень с натуральным показателем

Степенью числа a с натуральным показателем n, большим 1, называется произведение n множителей, каждый из которых равен a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}.$$

Степенью числа a с показателем 1 называется само число a:

$$a^1 = a.$$



При нахождении значения выражения сначала выполняются действия возведения в степень, затем — все остальные действия в известном порядке.

ПРИМЕРЫ

1) Основание степени 5^3 равно 5, показатель этой степени равен 3.

2) Запишем произведение в виде степени:

$(-3{,}2) \cdot (-3{,}2) \cdot (-3{,}2) = (-3{,}2)^3$.

ЗАДАНИЯ

1) Назвать основание и показатель степени:

$6{,}3^{12}$; 0^2; $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$; x^{10}.

2) Записать произведение в виде степени:

а) $15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15$;

б) $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$.

3) Вычислим:

-5^2; $(-5)^2$; -5^3; $(-5)^3$.

$\triangle$ $-5^2=-5\cdot5=-25$;

$(-5)^2=(-5)\cdot(-5)=25$;

$-5^3=-5\cdot5\cdot5=-125$;

$(-5)^3=(-5)\cdot(-5)\cdot(-5)=-125$. $\blacktriangle$

3) Вычислить:

1^3; $(-1)^5$, $(-1)^4$; 6^1;

$(-6)^2$; $(-6)^1$; $(-6)^3$.

4) Найдем значение выражения:

$2^4-(-5)^3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2-(-0{,}3)^2=2\cdot2\cdot2\cdot2-$

$-(-5)\cdot(-5)\cdot(-5)\cdot\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)-$

$-(-0{,}3)\cdot(-0{,}3)=16-(-125)\times$

$\times\left(\frac{4}{25}\right)-0{,}09=16+20-0{,}09=35{,}91.$

4) Найти значение выражения:

а) $3^2-\left(\frac{1}{2}\right)^3$;

б) $(-3)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^3$;

в) $(-1)^3\cdot(-1)^3-\left(\frac{2}{3}\right)^2\times$

$\times(-3)^2$.

5) Запишем числа 8, 16, 64 в виде степени с основанием 2:

$8=2\cdot2\cdot2=2^3$;

$16=2\cdot2\cdot2\cdot2=2^4$;

$64=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=2^6$.

5) Записать числа 3, 9, 81 в виде степени с основанием 3.

a^2 читается «a в квадрате» или «квадрат числа a»,
a^3 читается «a в кубе» или «куб числа a».

Возведи в квадрат числа 33 и 99. Посмотри, чем отличаются друг от друга полученные числа.

ПРИМЕРЫ

Запишем:

1) квадрат разности чисел a и b:

$$(a-b)^2;$$

2) разность квадратов чисел a и b:

$$a^2-b^2;$$

3) куб суммы чисел x и 8:

$$(x+8)^3;$$

ЗАДАНИЯ

Записать:

1) квадрат суммы чисел u и v;

2) сумму квадратов чисел x и 5;

3) куб разности чисел a и 3;

4) сумму кубов чисел x и 8:

$$x^3+8^3.$$

4) разность кубов чисел a и 7.

ПРИМЕР

Ребро куба равно x см. Запишем выражение для его объема V и площади поверхности S:

$$\triangle\ V=x^3;$$
$$S=6x^2.\ \blacktriangle$$

ЗАДАНИЕ

Найти площадь закрашенной фигуры (рис. 9).

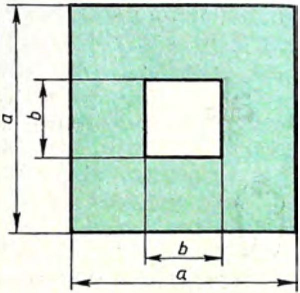


Рис. 9

Две девочки родились в один и тот же день одного и того же года у одних и тех же родителей, но не двойняшки. Объясните, как это могло произойти.

Действия со степенями.

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}.$$

Чтобы перемножить степени с одинаковыми основаниями, нужно основание оставить прежним, а показатели сложить.

ПРИМЕРЫ

Запишем произведение в виде степени:

1) $(-3)^2\cdot(-3)^9=(-3)^{2+9}=(-3)^{11}$.

2) $\left(\frac{1}{5}\right)\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3=\left(\frac{1}{5}\right)^{1+4+3}=\left(\frac{1}{5}\right)^8$.

3) $x^6\cdot x^3=x^{6+3}=x^9$.

4) $(a+b)^3\cdot(a+b)=(a+b)^4$.

ЗАДАНИЯ

Записать произведение в виде степени:

1) $2^3\cdot 2^{15}$.

2) $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4$.

3) $(-5)^3\cdot(-5)\cdot(-5)^5$.

4) $a^{20}\cdot a^5\cdot a^2$.

$a^m:a^n=a^{m-n}$, $m>n$; $a\neq 0$.

Чтобы разделить степени с одинаковыми основаниями, нужно основание оставить прежним, а из показателя делимого вычесть показатель делителя.

ПРИМЕРЫ

Запишем частное в виде степени:

1) $14^8:14^5=14^{8-5}=14^3$.

2) $\left(\frac{y}{2}\right)^4:\left(\frac{y}{2}\right)^3=\left(\frac{y}{2}\right)^{4-3}=\frac{y}{2}$.

ЗАДАНИЯ

Записать частное в виде степени:

1) $5^7:5^3$.

2) $\left(\frac{8}{11}\right)^6:\left(\frac{8}{11}\right)^2$.

3) $(2z)^{16}:(2z)^{15}$.

$(a^m)^n=a^{mn}$.

Чтобы возвести степень в степень, нужно основание оставить прежним, а показатели перемножить.

ПРИМЕРЫ

1) Запишем число $(a^{15})^2$ в виде степени с основанием a:

△ $(a^{15})^2=a^{15\cdot 2}=a^{30}$. ▲

2) Запишем число x^{10} в виде степени с показателем 2:

△ $x^{10}=x^{5\cdot 2}=(x^5)^2$. ▲

ЗАДАНИЯ

1) Записать число $(2^8)^3$ в виде степени с основанием 2.

2) Записать число a^{15} в виде степени с показателем 3.

3) Представим числа 16, 64, 128 в виде степени с основанием 2:

△ $16=4^2=(2^2)^2=2^{2\cdot 2}=2^4$;

$64=8^2=(2^3)^2=2^{3\cdot 2}=2^6$;

$128=2\cdot 64=2\cdot 2^6=2^7$. ▲

3) Представить числа 9, 81, 243 в виде степени с основанием 3.

$(ab)^n=a^n\cdot b^n$. Чтобы возвести произведение в степень, нужно в эту степень возвести каждый множитель.

ПРИМЕРЫ

Возведем в степень произведение:

1) $(3b)^6=3^6\cdot b^6$.

2) $(x^2y^3)^4=(x^2)^4\cdot(y^3)^4=x^{2\cdot 4}\cdot y^{3\cdot 4}=$
$=x^8y^{12}$.

3) $(-n^2m^3)^4=(-1)^4\cdot(n^2)^4\cdot(m^3)^4=$
$=1\cdot n^{2\cdot 4}\cdot m^{3\cdot 4}=n^8m^{12}$.

Запишем произведение в виде степени:

1) $5^2\cdot b^2=(5b)^2$.

2) $3^3\cdot a^6=3^3(a^2)^3=(3a^2)^3$.

3) $16n^2m^{10}=4^2n^2(m^5)^2=(4n^2m^5)^2$.

Вычислим:

1) $(0{,}5)^{10}\cdot 2^{10}=(0{,}5\cdot 2)^{10}=1^{10}=1$.

2) $\left(\frac{1}{9}\right)^6\cdot(4{,}5)^6=\left(\frac{1}{9}\cdot 4{,}5\right)^6=(0{,}5)^6=$
$=\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$.

ЗАДАНИЯ

Возвести в степень произведение:

1) $(5a)^{10}$.

2) $\left(\frac{1}{2}x^3\right)^4$.

3) $(-2x^2y^5)^6$.

Записать произведение в виде степени:

1) 3^3x^3.

2) $\frac{1}{4}b^2$.

3) $8a^3b^{12}$.

4) $\frac{4}{9}x^2y^{14}$.

Вычислить:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^9\cdot 3^9$.

2) $\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot 4^3$.

3) $\left(\frac{2}{5}\right)^8\cdot 2{,}5^8$.

$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$. Чтобы возвести дробь в степень, нужно в эту степень возвести числитель и знаменатель дроби.

ПРИМЕРЫ

Возведем в степень дробь:

1) $\left(-\frac{1}{m}\right)^8=\frac{(-1)^8}{m^8}=\frac{1}{m^8}.$

2) $\left(\frac{15^2}{(a-b)^3}\right)^4=\frac{(15^2)^4}{((a-b)^3)^4}=\frac{15^8}{(a-b)^{12}}.$

Запишем дробь в виде степени:

1) $\frac{49}{100}=\frac{7^2}{10^2}=(0{,}7)^2.$

2) $\frac{1}{-8}=\frac{1^3}{(-2)^3}=\left(\frac{1}{-2}\right)^3=\left(-\frac{1}{2}\right)^3.$

3) $\frac{(2x)^5}{(6y)^5}=\left(\frac{2x}{6y}\right)^5=\left(\frac{x}{3y}\right)^5.$

Вычислим:

$\left(\frac{2}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^5=\frac{2^3}{5^3}\cdot\frac{5^5}{2^5}=$

$=\frac{\overset{1}{\cancel{2^3}}\cdot\overset{5^2}{\cancel{5^5}}}{\underset{1}{\cancel{5^3}}\cdot\underset{2^2}{\cancel{2^5}}}=\frac{5^2}{2^2}=\frac{25}{4}=6\frac{1}{4}.$

ЗАДАНИЯ

Возвести в степень дробь:

1) $\left(\frac{2}{n}\right)^5.$ 3) $\left(\frac{m^3}{n^5}\right)^2.$

2) $\left(-\frac{3}{a}\right)^3.$ 4) $\left(\frac{2a^5}{(x+y)^2}\right)^4.$

Записать дробь в виде степени:

1) $\frac{1}{3^2}.$ 4) $\frac{a^4}{(2b)^4}.$

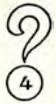
2) $\frac{4}{25}.$ 5) $\frac{(4a)^7}{(12b)^7}.$

3) $\frac{-1}{64}.$

Вычислить:

1) $\left(\frac{5}{12}\right)^4\cdot\left(\frac{6}{25}\right)^3.$

2) $\left(1\frac{2}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^5.$



"Вот вам три таблетки — сказал доктор, — принимайте их через каждые полчаса". На какое время хватит прописанных доктором таблеток?

ПРИМЕР

Определим, как изменится площадь квадрата, если его сторона увеличится: 1) в 2 раза; 2) в 5 раз; 3) в n раз.

△ 1) Пусть длина стороны квадрата x см, тогда его площадь равна:

$$S_1=x^2.$$

ЗАДАНИЯ

1) Как изменится площадь квадрата, если его сторону увеличить в 3 раза? уменьшить в 2 раза?

После увеличения стороны квадрата в 2 раза его длина станет $2x$ см, площадь нового квадрата будет:

$$S_2=(2x)^2=2^2x^2=4x^2.$$

После увеличения стороны квадрата в 2 раза его площадь увеличится в 4 раза:

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{4x^2}{x^2}=4.$$

2) Если сторону квадрата увеличить в 5 раз, то длина стороны станет $5x$ см и

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{(5x)^2}{x^2}=\frac{5^2x^2}{x^2}=5^2.$$

3) Если сторону квадрата увеличить в n раз, то

$$\frac{S_n}{S_1}=\frac{(nx)^2}{x^2}=\frac{n^2x^2}{x^2}=n^2.$$

Таким образом, при увеличении стороны квадрата в n раз его площадь увеличивается в n^2 раз. ▲

2) Как изменится объем куба, если его ребро увеличить в 2 раза; в 3 раза; в n раз?

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

1. Вычислить:

а) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$; б) $\left(-1\frac{1}{2}\right)^3$; в) 0^5; г) $(-10)^1$.

2. Найти значение выражения:

а) $(-4)\cdot(-4)^3$; б) $12^{15}:12^{13}$; в) $(2^3)^2$.

3. Возвести в степень:

а) $(2ab^3c^5)^2$; б) $\left(-\frac{1}{2}x^3y^8\right)^3$.

4. Записать выражение в виде степени и найти значение полученного выражения:

а) $0{,}25^3\cdot4^3$; б) $\left(2\frac{1}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{10}{11}\right)^2$; в) $\frac{12^5}{6^5}$.

5. Вычислить значение выражения $\frac{(a+b)^4}{b^4}$ при $a=16$; $b=4$.

Решение (возможный вариант оформления)

1. а) $\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{2^4}{3^4}=\frac{16}{81}$;

б) $\left(-1\frac{1}{2}\right)^3=\left(-\frac{3}{2}\right)^3=-\frac{3^3}{2^3}=-\frac{27}{8}=-3\frac{3}{8}$;

в) $0^5=0$;

г) $(-10)^1=-10$.

2. а) $(-4)\cdot(-4)^3=(-4)^{1+3}=(-4)^4=256$;

б) $12^{15}:12^{13}=12^{15-13}=12^2=144$;

в) $(2^3)^2=2^{3\cdot 2}=2^6=64$.

3. а) $(2ab^3c^5)^2=(2)^2(a)^2(b^3)^2(c^5)^2=4a^2b^6c^{10}$;

б) $\left(-\frac{1}{2}x^3y^8\right)^3=\left(-\frac{1}{2}\right)^3x^{3\cdot 3}y^{8\cdot 3}=-\frac{1}{8}x^9y^{24}$.

4. а) $0{,}25^3\cdot 4^3=(0{,}25\cdot 4)^3=1^3=1$;

б) $\left(2\frac{1}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{10}{11}\right)^2=\left(\frac{11}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{10}{11}\right)^2=\left(\frac{11}{5}\cdot\frac{10}{11}\right)^2=\left(\frac{11\cdot 10}{5\cdot 11}\right)^2=2^2=4$;

в) $\frac{12^5}{6^5}=\left(\frac{12}{6}\right)^5=2^5=32$.

5. $\frac{(a+b)^4}{b^4}=\left(\frac{a+b}{b}\right)^4$, $\left(\frac{16+4}{4}\right)^4=\left(\frac{20}{4}\right)^4=5^4=625$.

ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ СТРАНИЦЫ

1. Задача. Какая цифра будет последней после возведения числа 1989 в степень 1989?

△ Проследим, какой цифрой будет оканчиваться число 1989 при возведении в натуральные степени (очевидно, последние цифры будут те же, что и при возведении числа 9 в соответствующие степени):

$$1989^1=1989;$$
$$1989^2=\ldots 1;$$
$$1989^3=\ldots 9;$$
$$1989^4=\ldots 1;$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Видим, что при возведении в натуральную степень числа, оканчивающегося цифрой 9, результат будет оканчиваться цифрой 9 при возведении в нечетную степень и цифрой 1 — при возведении в четную степень. (Напомним, четное число — это число, делящееся нацело на 2, т. е. число вида $2n$, где n — целое число; нечетное число — это число, не делящееся нацело на 2, т. е. число вида $2n+1$, где n — целое число.)

Таким образом, число 1989^{1989} будет оканчиваться цифрой 9. ▲

Очевидно, что числа, оканчивающиеся цифрой 0, 1, 5, 6, после возведения в натуральную степень дадут число, оканчивающееся той же цифрой.

ЗАДАНИЕ.

Попробуйте найти способ нахождения последней цифры числа, получаемого после возведения в натуральную степень целого числа, оканчивающегося цифрой 2, 3, 4, 7, 8.

2. Почти фокус. Попросите своих близких задумать двузначное число, возвести его в третью степень и написать на бумажке результат вычислений. Взглянув на результат, вы почти моментально сообщите, какое число было задумано.

Например, вам показывают число 103823. Через секунду вы можете сказать, что было задумано число 47.

Как узнать задуманное число?

△ Прежде всего нужно выписать и запомнить кубы чисел от 1 до 10:

$$1^3=1;\ 2^3=8;\ 3^3=27;\ 4^3=64;\ 5^3=125;$$
$$6^3=216;\ 7^3=343;\ 8^3=512;\ 9^3=729;\ 10^3=1000.$$

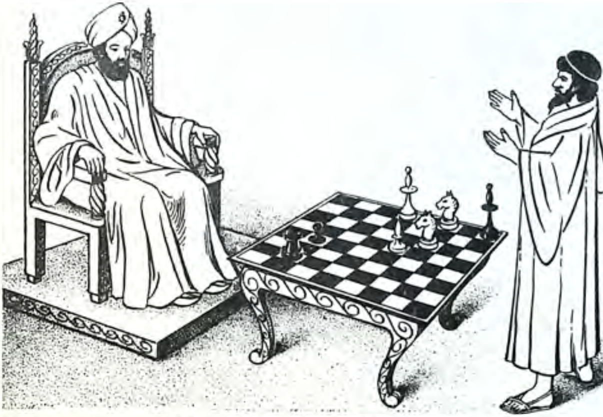
Замечаем, что все кубы этих чисел оканчиваются разными цифрами. При этом кубы чисел 1, 4, 5, 6, 9, 10 оканчиваются той же цифрой, что и возводимое в степень число. У кубов чисел 2, 3, 7, 8 последняя цифра равна разности десяти и числа, которое возводилось в куб. Например, $7^3=343$; последняя цифра 3 может быть получена как $10-7$.

Таким образом, когда вам сообщили число 103823, вы сразу можете определить последнюю цифру задуманного двузначного числа — это цифра 7.

Для того чтобы определить первую цифру задуманного числа, поступают следующим образом. Отбрасывают последние 3 цифры у сообщенного вам числа и рассматривают оставшееся число (в нашем случае это 103). Далее определяют, между кубами каких чисел оно находится (в нашем случае между 4 и 5). Меньшее из этих двух чисел даст первую цифру задуманного двузначного числа. Значит, в нашем случае было задумано число 47. ▲

3. Историческая задача. Когда индийский царь Шерам узнал об удивительной игре в шахматы, он приказал позвать к себе ее изобретателя — ученого Сету.

Царь пообещал наградить бедного ученого, чем тот сам пожелает. Сета попросил в награду за свое изобретение столько пшеничных зерен, сколько получится, если на первую клетку шахматной доски положить одно



зерно, на вторую — в 2 раза больше, т. е. 2 зерна, на третью — еще в 2 раза больше, т. е. 4 (2^2), на четвертую — еще в 2 раза больше, т. е. 8 (2^3) зерен, и т. д. до 64-й клетки.

Царь подивился такой скромности ученого и велел слугам принести Сете мешок требуемой пшеницы. Слуги ушли, но... выполнить просьбу Сеты они не смогли. Почему же?

△ Подсчитаем, сколько всего зерен должны были выдать Сете в награду за изобретение шахмат. Нужно найти сумму:

$$S = \underbrace{1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{62} + 2^{63}}_{64 \text{ слагаемых}}.$$

Можно непосредственно найти значение суммы. Но это займет очень много времени. А можно попробовать оценить величину этой суммы, сравнив ее с каким-нибудь числом. Очевидно, что сумма S больше, чем каждое из слагаемых, ее составляющих. Вот и давайте считать, что S больше последнего слагаемого 2^{63}, и найдем значение 2^{63}:

$$2^{63} = 2^{60} \cdot 2^3 = (2^{10})^6 \cdot 8 = 1024^6 \cdot 8 = (1024^2)^3 \cdot 8 = (1048576)^3 \cdot 8 =$$
$$= 9\,223\,372\,036\,854\,775\,808.$$

Но может быть, такое количество зерен действительно уместится в мешке (ведь зерно очень маленькое по размеру)?

Известно, что куб, ребро которого равно 1 м (так называемый кубический метр), вмещает около 15 млн. зерен пшеницы.

Теперь подсчитайте, сколько таких кубических метров, заполненных зернами, нужно поставить друг на друга, чтобы в них поместилось требуемое количество зерен. Какова будет высота такой «башни»? (Для сравнения скажем, что среднее расстояние от Земли до Солнца равно 150 000 000 км.)

§ 3. Одночлены и многочлены

Выражение, являющееся произведением чисел, букв и их натуральных степеней, называется **одночленом**.

ПРИМЕР

В одночлене $-3a(2a^2b^4c^2b^{12})$ выполним действия умножения так, чтобы числовой множитель и каждая буква в его записи встречались только один раз. Для этого воспользуемся переместительным и сочетательным законами умножения:

$$-3a\cdot 2a^2b^4c^2b^{12}=(-3\cdot 2)\,(a\cdot a^2)(b^4\cdot b^{12})\times c^2=-6a^3b^{16}c^2.$$

Такой вид одночлена называется *стандартным видом одночлена*. Числовой множитель одночлена называется коэффициентом одночлена.

Подумайте, почему именно такой вид одночлена называется стандартным видом.

Сообщим в качестве подсказки, что слово «стандарт» произошло от английского слова standard — норма, образец, принимаемый за исходное для сопоставления с ним других подобных объектов.

ЗАДАНИЯ

Записать одночлен в стандартном виде:

1) $2xyx^3$.

2) $-5x^2y\frac{1}{3}x^5y^6$.

3) $0{,}8ab^7c^3ab^7$.

4) $-1{,}2u^{15}v^3 0{,}4u^3$.

ПРИМЕРЫ

1) Умножим одночлен $2\frac{1}{2}x^{25}y^4z$ на одночлен $-4y^2z^{13}$:

$\triangle$ $(2\frac{1}{2}x^{25}y^4z)\cdot(-4y^2z^{13})=(2\frac{1}{2}\cdot(-4))\times(y^4\cdot y^2)\cdot(z\cdot z^{13})\cdot x^{25}=-10x^{25}y^6z^{14}$. $\blacktriangle$

ЗАДАНИЯ

1) Выполнить действие умножения и результат записать в стандартном виде:

$\left(\frac{1}{4}a^{12}b^6c\right)\cdot(2{,}14ab^3)$.

2) Возведем в пятую степень одночлен $2a^3bc^{10}$:

$\triangle$ $(2a^3bc^{10})^5=2^5(a^3)^5\cdot b^5\cdot(c^{10})^5=$
$=32a^{15}b^5c^{50}$. $\blacktriangle$

2) Возвести в степень:

$$\left(-\frac{2}{3}x^8y^5z\right)^3$$

3) Выполним действия:

$\left(-1\frac{3}{5}x^2y^3\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}x^3a\right)^3=\left(-1\frac{3}{5}x^2y^3\right)\times$
$\times\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot(x^3)^3\cdot a^3=-\frac{8}{5}x^2y^3\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)\times$
$\times x^9a^3=\frac{1}{5}x^{11}y^3a^3$.

3) Выполнить действия:

$(1\frac{1}{5}a^3b)^2\cdot(-2\frac{1}{2}a^2b^3)^3$.

4) Найдем значение полученного в примере 3 одночлена при $x=1$; $y=5$; $a=3$:

$\triangle$ $\frac{1}{5}\cdot 1^{11}\cdot 5^3\cdot 3^3=\frac{1}{5}\cdot 125\cdot 27=25\cdot 27=$
$=675$. $\blacktriangle$

4) Найти числовое значение полученного в задании 3 одночлена при $a=-1$; $b=1$.

Степенью одночлена называется сумма показателей степеней входящих в него букв.

ПРИМЕР

Степень одночлена $\frac{1}{3}x^2y^3$ равна 5 $(2+3=5)$;
степень одночлена $-0{,}5ab^6c^{12}$ равна 19 $(1+6+12=19)$.

ЗАДАНИЕ

Определить степень одночлена:

$2x^2y^5$; $7xy$; $-\frac{1}{9}xy^7z^8$; $0{,}01x^2y^4z$.

Многочленом называется сумма одночленов.
Одночлены, из которых состоит многочлен, называются *членами многочлена*.

Например:

$2a^2-b$ — двучлен
$3a+d^8-b^2c$ — трехчлен

частные случаи многочленов

Члены многочлена, имеющие одинаковую буквенную часть, называются *подобными членами.*

Замена суммы подобных членов одним одночленом называется *приведением подобных членов.*

Чтобы привести подобные члены, нужно сложить их коэффициенты, оставив без изменения буквенную часть.

Примеры приведения подобных членов.

($\square$ *и* $\triangle$ *— обозначение буквенной части одночлена*)

1) $5\square+2\square=7\square$

2) $\underline{4\square}-\underline{\underline{3\triangle}}-\underline{\square}+\underline{\underline{7\triangle}}=(4-1)\square+(-3+7)\triangle=3\square+4\triangle$

3) $\underline{6a}+\underline{ab}-3b-\underline{a}+5b-\underline{\underline{2ab}}=(6-1)a+(1-2)ab+(-3+5)b=$
$=5a-ab+2b.$

ПРИМЕРЫ

Приведем подобные члены в многочлене:

$12a^2+3-6b-2{,}5a^2+4b-5=$
$=(12-2{,}5)a^2+(-6+4)b+(3-5)=$
$=9{,}5a^2-2b-2.$

ЗАДАНИЯ

Привести подобные члены в многочлене:

1) $45a-12b-16a.$
2) $14x^3-5-y^2-8x^3-y^2-9.$

После приведения подобных членов многочлен имеет *стандартный вид.*

Приведем к стандартному виду многочлен:

$\underline{5xy^2}+\underline{\underline{4x^3}}-7x^2y-\underline{\underline{6x^3}}+7x^2y-\underline{7xy^2}=$
$=(5-7)xy^2+(4-6)x^3+(7-7)x^2y=$
$=-2xy^2-2x^3+0x^2y=-2xy^2-2x^3.$

Записать в стандартном виде многочлен:

1) $\frac{1}{2}ab-3c+1\frac{1}{2}ab+5c.$
2) $-15a^3b+21ab^3-ab+$
$+29a^3b-23ab^3.$

Наибольшая из степеней одночленов, составляющих многочлен, называется *степенью многочлена.*

5

Сколько нужно сделать распилов, чтобы распилить бревно на 4 части?

ПРИМЕР

Степень многочлена

$$\underbrace{7x^2y^6}_{\text{одночлен 8-й степени}} - \underbrace{\frac{1}{3}ab^8}_{\text{одночлен 9-й степени}} + \underbrace{0{,}5xy^7z^2}_{\text{одночлен 10-й степени}}$$

равна 10, так как 10 — наибольшая из степеней одночленов, входящих в данный многочлен.

ЗАДАНИЯ

Определить степень многочлена:

1) $2ab^2-5\frac{1}{7}a^2bc^8+0{,}1x^{15}$.

2) $18+\frac{3}{11}x^5y-23xy^5+1\frac{4}{9}x^3z^3$.

6

В колесе 10 спиц. Сколько промежутков между спицами?

ПРИМЕРЫ

1) Найдем сумму многочленов:

$$(4a^2+4ab+b^2)+(-2b^2+3ab-7a^2)=$$
$$=\underline{4a^2}+\underline{4ab}+b^2-2b^2+\underline{\underline{3ab}}-\underline{7a^2}=$$
$$=-3a^2+7ab-b^2.$$

2) Найдем разность многочленов:

$$(1\frac{1}{2}d^3-cd^2+0{,}5c)-(2{,}5c-2cd^2+$$
$$+0{,}5d^3-3)=\underline{1\frac{1}{2}d^3}-\underline{\underline{cd^2}}+0{,}5c-2{,}5c+$$
$$+\underline{\underline{2cd^2}}-0{,}5d^3+3=d^3+cd^2-2{,}5c+3.$$

ЗАДАНИЯ

1) Найти сумму многочленов:

$$9x^2-6xy+y^2 \text{ и}$$
$$-9x^2-6xy+2y^2.$$

2) Найти разность многочленов:

$$16a^4-8a^2b+b^2 \text{ и}$$
$$8a^4-2b-4a^2b.$$

3) Представим многочлен

$$6xy-3x^2+2xy^2-4$$

в виде суммы, а затем — в виде разности каких-нибудь двух многочленов:

△ $6xy-3x^2+2xy^2-4=(6xy)+$
$+(-3x^2+2xy^2-4)$,
$6xy-3x^2+2xy^2-4=(6xy-3x^2)-$
$-(-2xy^2+4)$. ▲

4) Представим в виде суммы двух двучленов трехчлен $x^2-3x^2y+y^3$:

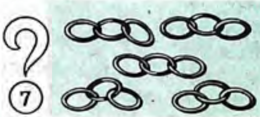
△ $x^2-3x^2y+y^3=x^2-(2x^2y+x^2y)+y^3=$
$=x^2-2x^2y-x^2y+y^3=$
$=(x^2-2x^2y)+(y^3-x^2y)$ ▲.

3) Представить многочлен

$$34a^2b+3a-19ab^2+b^2$$

в виде суммы, а затем — в виде разности любых двух многочленов.

4) Представить трехчлен $5a^3b^2-2ab-b^3$ в виде разности двух двучленов; в виде суммы трех двучленов.



Как из пяти кусков цепи по 3 звена в каждом собрать цепь из пятнадцати звеньев, сделав только 3 распила?

Чтобы *умножить многочлен на одночлен*, нужно каждый член многочлена умножить на этот одночлен и полученные произведения сложить:

$$\square\cdot(\bigcirc+\triangle+\Diamond)=\square\cdot\bigcirc+\square\cdot\triangle+\square\cdot\Diamond$$

ПРИМЕРЫ

1) Найдем произведение многочлена и одночлена:

$$2a(b-3a^2+2ab)=$$
$$=2a\cdot b-2a\cdot 3a^2+2a\cdot 2ab=$$
$$=2ab-6a^3+4a^2b.$$

2) Найдем значение выражения $(5x-3y)\cdot 4x^2-5x^2(4x+y)$ при $x=\frac{1}{3}$; $y=-27$:

ЗАДАНИЯ

1) Записать произведение в виде многочлена в стандартном виде:

1) $-3x(2xy^2-8y+15x^2y)$.

2) $\left(\frac{1}{3}ab^2c-2a^7b-0{,}1bc^3\right)\cdot ab$.

2) Найти значение выражения $12x(x-y)-8y(y-x)$ при $x=0{,}5$; $y=2$.

$\Delta\,(5x-3y)\cdot 4x^2-5x^2(4x+y)=$
$=\cancel{20x^3}-12yx^2-\cancel{20x^3}-5x^2y=-17x^2y.$

$-17\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot(-27)=-17\cdot\frac{1}{9}\cdot(-27)=$

$=\frac{17\cdot 27}{9}=51.$ ▲

Вынесение общего множителя за скобки осуществляется на основании распределительного закона:

$$ac+bc=(a+b)c.$$

ПРИМЕРЫ

Разложим многочлен на множители с помощью вынесения общего множителя за скобки:

1) $2ab+3bc=b(2a+3c)$.
2) $8x-6x^2=2x\cdot 4+2x\cdot(-3x)=$
$=2x(4-3x)$.
3) $4a^2-12a^5=(4a^2)\cdot(1)+(4a^2)\times$
$\times(-3a^3)=4a^2\cdot(1-3a^3)$.

Можно заметить, что одночлены $4a^2$ и $-12a^5$ имеют и другие общие множители, например, $-a$, т. е. можно записать

$4a^2-12a^5=-a\cdot(-4a)-a\cdot(12a^4)=$
$=-a(-4a+12a^4)=-a(12a^4-4a)$.

ЗАДАНИЯ

Разложить на множители многочлен:

1) $xy-5xz$.
2) $12a^2+8$.
3) $3x^3-12x^5$.
4) $-4ab^2+20a^2b$.
5) $ux^2-2ux+3x^3$.
6) $-8x^2y^3+6x^2y^4-16x^3y^5$.
7) $32t^5u^2-24t^2u-60t^3u^3$.
8) $-12a^{12}b^{20}c^{11}+72a^{10}b^{22}c^{15}+$
$+48a^{15}b^{18}$.

Правила вынесения одночлена за скобки

1. Обычно за скобки выносят одночлен (со знаком «плюс» или «минус»), коэффициент которого равен наибольшему общему делителю всех коэффициентов одночленов.

2. Из буквенных множителей выносятся за скобки те, которые имеются во всех членах, причем в наименьшей из встречающихся степеней.

3. В скобках от каждого слагаемого остается одночлен, который при умножении на вынесенный за скобки множитель дает исходный член.

4) $8x^4y^4 - 12x^4y^3 - 18x^3y^5z^2 = 2 \cdot 4x^3 \cdot x \times$
$\times y^3 \cdot y - 2 \cdot 6x^3 \cdot xy^3 - 2 \cdot 9x^3y^3y^2z^2 =$
$= 2x^3y^3(4xy - 6x - 9y^2z^2)$.

Убедимся в правильности выполненных действий:

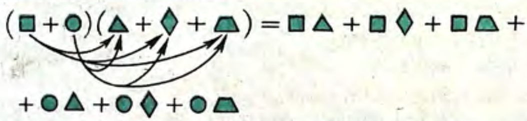
$2x^2y^3(4xy - 6x - 9y^2z^2) =$

$= (2x^3y^3)(4xy) + (2x^3y^3)(-6x) +$
$+ (2x^3y^3)(-9y^2z^2) = 8x^4y^4 - 12x^4y^3 -$
$- 18x^3y^5z^2$.

Такую проверку делать необязательно. Однако, если сомневаетесь в верности результата, проверьте (устно или письменно).

8 Попробуйте записать каждое натуральное число от 1 до 9 с помощью только четырех "четверок", знаков арифметических действий и скобок. Например: $1 = (4:4):(4:4)$, $2 = 4:4 + 4:4$.

Чтобы умножить *многочлен на многочлен*, нужно умножить каждый член одного многочлена на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить:



ПРИМЕРЫ

Выполним умножение многочленов:

1) $(3a - 2b^2)(-4a^2 + b^3) =$

$= (3a)(-4a^2) + (3a) \cdot (b^3) +$
$+ (-2b^2) \cdot (-4a^2) + (-2b^2) \cdot (b^3) =$
$= -22a^3 + 3ab^3 + 8b^2a^2 - 2b^5$.

ЗАДАНИЯ

Записать произведение в форме многочлена в стандартном виде:

1) $(x-3)(y+2)$.
2) $(2x+1)(3-4y)$.
3) $(a-5)(13-a)$.

2) $(3x-3y+4z)(3x-5y)=$

$=9x^2-9xy+12xz-15yx+15y^2-20yz=$
$=9x^2-24xy+12xz+15y^2-20yz.$

3) $(6a^2-b)(a+b^2)(2a^2-b^2)=$

$=(6a^3-ab+6a^2b^2-b^3)(2a^2-b^2)=$

$=12a^5-2a^3b+12a^4b^2-2a^2b^3-6a^3b^2+$
$+ab^3-6a^2b^4+b^5.$

4) $(7+20b)(b-3)$.
5) $(x-2y+5)(4x-y)$.
6) $(-x+4)(2x^2-4y+8)$.
7) $(2a^3+b^2-c)(9a^2-b^4)$.
8) $(5a^2b-2ab^2)(-a+3b-b^3)$.
9) $(3a-2)(4b-1)(a-5b)$.
10) $(-x^2+3y)(x^2-5)(y^3-4)$.

> Некоторые многочлены можно разложить на множители *способом группировки*.

ПРИМЕРЫ

1) Разложим многочлен

$$ab-3a+2b-6$$

на множители, объединив отдельные члены в группы и вынося общие множители за скобки (способом группировки):

△ $ab-3a+2b-6=(ab-3a)+$
$+(2b-6)=$
$=a(b-3)+2(b-3)=(b-3)(a+2).$ ▲

2) Разложим на множители способом группировки многочлен $x^2y^2+xy-y^3-x^3$:

△ I способ.

$x^2y^2+xy-y^3-x^3=(x^2y^2-y^3)+$
$+(xy-x^3)=y^2(x^2-y)+x(y-x^2)=$
$=y^2(x^2-y)-x(x^2-y)=$
$=(x^2-y)(y^2-x).$

ЗАДАНИЯ

Разложить на множители способом группировки многочлен:

1) $ab-5b+4a-20$.
2) $a^2+ab-7a-7b$.
3) $2ab-3b-18a+24$.
4) $8ab-2b^2+12a^2-3ab$.
5) $a^3-ab+3a+ab^2-b^3+3b$.
6) $7x-x^2+xy-7y^2+xy^2-y^3$.
7) $x^2y+xy-x+xy^2+y^2-y$.
8) $2x^3y-3x^2y^2-5x^2y-14x+$
$+21y+35$.

II способ.

$x^2y^2+xy-y^3-x^3=$
$=(x^2y^2-x^3)+(xy-y^3)=$
$=x^2(y^2-x)+y(x-y^2)=$
$=x^2(y^2-x)-y(y^2-x)=$
$=(y^2-x)(x^2-y)$. ▲

3) Разложим на множители многочлен:

$ab^2-ac+b^3-bc-db^2+dc=$
$=(ab^2+b^3-db^2)+(-ac-bc+dc)=$
$=b^2(a+b-d)+c(-a-b+d)=$
$=b^2(a+b-d)-c(a+b-d)=$
$=(a+b-d)(b^2-c)$.

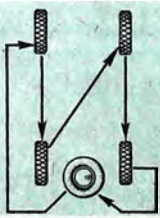
4) Найдем значение выражения:

$11{,}5\cdot 2{,}3-1{,}5\cdot 5{,}4+11{,}5\cdot 5{,}4-1{,}5\cdot 2{,}3=$
$=(11{,}5\cdot 2{,}3-1{,}5\cdot 2{,}3)+(11{,}5\cdot 5{,}4-$
$-1{,}5\cdot 5{,}4)=$
$=2{,}3(11{,}5-1{,}5)+5{,}4(11{,}5-1{,}5)=$
$=(11{,}5-1{,}5)(2{,}3+5{,}4)=10\cdot 7{,}7=77$.

Найти значение выражения:

1) $9{,}5\cdot 1{,}7-0{,}4\cdot 9{,}5+0{,}5\cdot 1{,}7-0{,}5\cdot 0{,}4$.
2) $7{,}3+7{,}3\cdot 2{,}7-2{,}3\cdot 7{,}3-2{,}3\cdot 2{,}7$.
3) $2\frac{1}{4}\cdot 4\frac{2}{3}-2\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\cdot 4\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}$.
4) $2{,}2\cdot 0{,}3+2{,}2\cdot 0{,}6+2{,}2\cdot 0{,}1-0{,}3\cdot 0{,}2-0{,}2\cdot 0{,}6-0{,}2\cdot 0{,}1$.

9



Машина имеет пять колес (одно запасное). Чтобы покрышки снашивались равномерно, водитель периодически меняет колеса местами так, как показано на схеме. Через 30 000 км оказалось, что все колеса сносились одинаково. Сколько километров "прошло" каждое колесо?

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

1. Записать произведение в форме одночлена в стандартном виде:

а) $(2ab^3c^2)\cdot\left(-\frac{1}{4}a^2bc^5\right)$; б) $(3xy^2)^3\cdot\left(\frac{1}{3}x^2y\right)^2$.

2. Выполнить действия и результат записать в форме многочлена в стандартном виде (привести подобные члены):

а) $(0{,}5cd^2-3c^2d+1\frac{1}{2}d)-(1{,}5c^2d-0{,}8cd^2+1{,}5d)$;

б) $4a(a-5b)$;

в) $(x^3-17y)x^5$;

г) $(3a-7)(8-2a)$;

д) $(-6xy+y)(3x-5y^2)$;

е) $(a-b)(3a-5b+8)$.

3. Разложить на множители многочлен:

а) $2ac+cb+2ad+bd$;

б) $4xy+2x^2-6y-3x$.

Решение (возможный вариант оформления)

1. а) $(2ab^3c^2)\cdot\left(-\frac{1}{4}a^2bc^5\right)=2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)a\cdot a^2\cdot b^3\cdot b\cdot c^2\cdot c^5=$
$=-\frac{2\cdot 1}{4}a^{1+2}b^{3+1}c^{2+5}=-\frac{1}{2}a^3b^4c^7$;

б) $(3xy^2)^3\cdot\left(\frac{1}{3}x^2y\right)^2=27x^3y^6\cdot\frac{1}{9}x^4y^2=3x^7y^8$.

2. а) $(0{,}5cd^2-3c^2d+1\frac{1}{2}d)-(1{,}5c^2d-0{,}8cd^2+1{,}5d)=\underline{0{,}5cd^2}-\underline{\underline{3c^2d}}+$
$+\cancel{1\frac{1}{2}d}-\underline{\underline{1{,}5c^2d}}+\underline{0{,}8cd^2}\cancel{-1{,}5d}=1{,}3cd^2-4{,}5c^2d$;

б) $4a(a-5b)=4a\cdot a-4a\cdot 5b=4a^2-20ab$;

в) $(x^3-17y)x^5=x^8-17x^5y$;

г) $(3a-7)(8-2a)=3a\cdot 8+3a\cdot(-2a)+(-7)\cdot 8+(-7)\cdot(-2a)=$
$=24a-6a^2-56+14a=38a-6a^2-56$;

д) $(-6xy+y)(3x-5y^2)=-18x^2y+30xy^3+3xy-5y^3$;

е) $(a-b)(3a-5b+8)=3a^2-\underline{5ab}+8a-\underline{3ab}+5b^2-8b=3a^2-8ab+$
$+8a+5b^2-8b$.

3. а) $2ac+cb+2ad+bd=(2ac+cb)+(2ad+bd)=c\cdot(\underline{2a+b})+$
$+d\cdot(\underline{2a+b})=(2a+b)(c+d)$;

б) $4xy+2x^2-6y-3x=(4xy+2x^2)+(-6y-3x)=2x(2y+x)-$
$-3(2y+x)=(2y+x)(2x-3)$.

ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ СТРАНИЦЫ

1. **Делимость суммы чисел.** Докажем, что сумма трех последовательных целых чисел делится на 3.

△ Если первое число обозначить буквой n, то два следующих за ним натуральных числа будут равны $n+1$ и $n+2$. Их сумма $n+(n+1)+(n+2)=$ $=3n+3=3\cdot(n+1)$. Число $3\cdot(n+1)$ делится на 3, так как $3\cdot(n+1)$ — произведение двух множителей, один из которых равен 3. ▲

ЗАДАНИЕ 1.

Докажите, что:
1) Сумма пяти последовательных натуральных чисел делится на 5.
2) Сумма трех последовательных четных чисел делится на 6.

ЗАДАНИЕ 2.

Выясните, на какое число делится сумма трех последовательных нечетных чисел.

2. **Сумма разрядных слагаемых.** Если некоторое число записано буквами, например буквами a, b, c, d, то, чтобы не спутать запись числа с произведением $a \cdot b \cdot c \cdot d$, принято обозначение $\overline{abcd}$.

Докажем, что если $a+b$ делится на 7, то число $\overline{aba}$ делится на 7.
△ Число $\overline{aba}$ представим в виде суммы разрядных слагаемых: $\overline{aba} = 100a+10b+a$ или $\overline{aba}=101a+10b$. (✻)

Так как по условию задачи $a+b$ делится на 7, то $a+b=7n$, где n — натуральное число, откуда $b=7n-a$.

В равенство (✻) вместо b подставим его выражение $(7n-a)$:

$$\overline{aba}=101a+10(7n-a)=101a+70n-10a=91a+70n=7\cdot(13a+10n),$$

а такое число, очевидно, делится на 7. ▲

ЗАДАНИЕ

Попробуйте аналогичным образом доказать, что число $\overline{baa}$ делится на 7, если сумма его цифр $(b+2a)$ делится на 7.

3. **Задумай число.** Попросите своего товарища задумать какое-нибудь трехзначное число. Пусть он найдет сумму цифр этого числа и отнимет ее от задуманного числа. После этого попросите в полученной разности зачеркнуть любую одну цифру и сообщить вам две оставшиеся. Теперь вы сразу можете назвать зачеркнутую цифру. Секрет ответа таков.

△ Пусть задумано число $\overline{abc}$: $\overline{abc}=100a+10b+c$.

Сумма цифр задуманного числа равна $a+b+c$. Отнимем от задуманного числа сумму его цифр:

$$100a+10b+c-(a+b+c)=99a+9b=9(11a+b).$$

Число $9(11a+b)$ делится на 9, значит, при вычитании из задуманного числа суммы его цифр всегда получится число, делящееся нацело на 9.

После того как названы две оставшиеся после зачеркивания цифры, вы их суммируете и подыскиваете такое число, какое нужно сложить с полученной суммой, чтобы получить ближайшее делящееся на 9 число. Это число и определит зачеркнутую цифру. (Напомним признак делимости на 9: если сумма цифр числа делится на 9, то и само число делится на 9.)

Например, пусть задумано число 589: $589-(5+8+9)=589-22=567$. Зачеркнем цифру 6 — останутся 5 и 7. Сумма $5+7=12$. До ближайшего числа, делящегося на 9 (до 18), не хватает шести. Как видно, это число и определяет зачеркнутую цифру. В том случае, когда после суммирования двух оставшихся цифр получается число, делящееся на 9, была зачеркнута либо цифра 0, либо цифра 9. ▲

ЗАДАНИЕ

Можно ли продемонстрировать аналогичный «фокус» с другими многозначными (четырехзначными, пятизначными и т. д.) числами?

§ 4. Формулы сокращенного умножения

$$(\square+\triangle)(\square-\triangle)=\square^2-\triangle^2 \qquad (a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

ПРИМЕРЫ

Представим произведение в виде многочлена:

1) $(\boxed{a}-2)(\boxed{a}+2)=$
$=\boxed{a}^2-2^2=a^2-4.$

2) $(3x-y)(3x+y)=(3x)^2-y^2=$
$=9x^2-y^2.$

3) $\left(\frac{m}{4}-5n\right)\left(-\frac{m}{4}-5n\right)=$
$=\left(\frac{m}{4}-5n\right)\cdot\left(-\left(\frac{m}{4}+5n\right)\right)=$
$=-\left(\left(\frac{m}{4}\right)^2-(5n)^2\right)=$
$=-\left(\frac{m^2}{16}-25n^2\right)=25n^2-\frac{m^2}{16}.$

4) $(0{,}7a^3+b^5)(0{,}7a^3-b^5)=$
$=(0{,}7a^3)^2-(b^5)^2=0{,}49a^6-b^{10}.$

ЗАДАНИЯ

Представить произведение в виде многочлена:

1) $(x-4)(x+4)$.
2) $(5-2a)(5+2a)$.
3) $(3x+2y)(3x-2y)$.
4) $(a-8b)(8b+a)$.
5) $\left(\frac{n}{2}+3m\right)\left(\frac{n}{2}-3m\right)$.
6) $(-2a-0{,}5b)(0{,}5b-2a)$.
7) $(x^3-y^2)(x^3+y^2)$.
8) $(5a^4+8b^5)(8b^5-5a^4)$.

10 Ответь не считая, какой цифрой оканчивается произведение первых девяти натуральных чисел.

ПРИМЕРЫ

Вычислим (устно):

1) $47 \cdot 33 = (40+7) \cdot (40-7) = 40^2 - 7^2 =$
$= 1600 - 49 = 1551.$

2) $0{,}95 \cdot 1{,}05 = (1-0{,}05) \cdot (1+0{,}05) =$
$= 1^2 - (0{,}05)^2 = 1 - 0{,}0025 = 0{,}9975.$

ЗАДАНИЯ

Вычислить:

1) $58 \cdot 42.$ 2) $99 \cdot 101.$
3) $0{,}97 \cdot 1{,}03.$ 4) $0{,}999 \cdot 1{,}001.$

ПРИМЕРЫ

Упростим выражение:

1) $(-x-y)(x-y) - 2y^2 = -(x+y) \times$
$\times (x-y) - 2y^2 = -(x^2-y^2) - 2y^2 =$
$= -x^2 + y^2 - 2y^2 = -x^2 - y^2.$

2) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2) = (a^2-b^2) \times$
$\times (a^2+b^2) = (a^2)^2 - (b^2)^2 = a^4 - b^4.$

ЗАДАНИЯ

Упростить выражение:

1) $(a+b) \cdot (a-b) - 3a^2.$
2) $(2x+5y)(5y-2x) + 4x^2.$
3) $(x^2+y^2)(x+y)(x-y).$
4) $\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{3}\right)\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right)\left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{9}\right).$

$$\square^2 - \triangle^2 = (\square - \triangle)(\square + \triangle) \qquad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

ПРИМЕРЫ

Разложим на множители:

1) $m^2 - 9 = \boxed{m}^2 - 3^2 =$
$= (\boxed{m} - 3)(\boxed{m} + 3).$

2) $-0{,}64x^2 + \frac{16}{81}y^2 =$

$= \left(\boxed{\frac{4}{9}y}\right)^2 - (0{,}8x)^2 =$

ЗАДАНИЯ

Разложить на множители:

1) $b^2 - a^2.$
2) $x^2 - 4.$
3) $16a^2 - 36b^2.$
4) $\frac{4}{9}x^2 - \frac{1}{4}z^2.$
5) $0{,}04a^2 - 0{,}01b^2.$

$$=\left(\boxed{\frac{4}{9}y}-0{,}8x\right)\left(\boxed{\frac{4}{9}y}+0{,}8x\right).$$

3) $4a^8b^4-36c^6=(2a^4b^2)^2-(6c^3)^2=$
$=(2a^4b^2-6c^3)(2a^4b^2+6c^3).$

4) $x^6-(8y+x^3)^2=(x^3)^2-(8y+x^3)^2=$
$=(x^3-(8y+x^3))(x^3+(8y+x^3))=$
$=(x^3-8y-x^3)(x^3+8y+x^3)=$
$=-8y(2x^3+8y)=-16y(x^3+4y).$

6) $9a^4-16b^6.$
7) $64a^2b^4-49c^8d^{10}.$
8) $\frac{1}{81}x^{12}y^{14}-25x^8z^{16}.$
9) $a^2-(3a+b)^2.$
10) $\left(\frac{b^6}{2}+b^4\right)-b^8.$

11

Дотрагиваясь только до одного стакана, сделать так, чтобы пустые и полные стаканы чередовались.

$$(\square\pm\triangle)^2=\square^2\pm2\cdot\square\cdot\triangle+\triangle^2$$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

ПРИМЕРЫ

Представим квадрат двучлена в виде многочлена:

1) $(\boxed{b}+5)^2=\boxed{b}^2+2\cdot\boxed{b}\cdot5+5.$

2) $(x-0{,}4)^2=x^2-2\cdot x\cdot0{,}4+(0{,}4)^2=$
$=x^2-0{,}8x+0{,}16.$

3) $(2x+3y)^2=(2x)^2+2\cdot(2x)\cdot(3y)+$
$+(3y)^2=4x^2+12xy+9y^2.$

4) $\left(-n+\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{2}{3}-n\right)^2=$

$=\left(\frac{2}{3}\right)^2-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)n+n^2=\frac{4}{9}-\frac{4}{3}n+n^2.$

5) $(-m-11)^2=(-(m+11))^2=$
$=(-1)^2(m+11)^2=(m+11)^2=$
$=m^2+2m\cdot11+11^2=m^2+22m+121.$

6) $(3a^3-7a^4)^2=(3a^3)^2-2\cdot(3a^3)\cdot(7a^4)+$
$+(7a^4)^2=9a^6-42a^7+49a^8.$

ЗАДАНИЯ

Представить в форме многочлена стандартного вида:

1) $(b-a)^2.$
2) $(c+d)^2.$
3) $(-x+y)^2.$
4) $(x+2)^2.$
5) $(a-3)^2.$
6) $(2a-3b)^2.$
7) $(-4x-5)^2.$
8) $(5x^2-b)^2.$
9) $(3a^3+6b^4)^2.$

ПРИМЕРЫ

Возведем в квадрат число 1,01:

△ $1{,}01^2=(1+0{,}01)^2=1^2+2\cdot1\cdot0{,}01+$
$+0{,}01^2=1+0{,}02+0{,}0001=1{,}0201\approx$
$\approx1{,}02.$ ▲

Для вычисления квадрата числа, близкого к 1, в практических вычислениях пользуются формулой

$$(1\pm\alpha)^2\approx1\pm2\alpha$$

(отбросив значение квадрата числа α, которое мало по сравнению с 1):

1) $1{,}01^2=(1+0{,}01)^2\approx1+2\cdot0{,}01=$
$=1+0{,}02=1{,}02.$
2) $0{,}997^2=(1-0{,}003)^2\approx1-2\cdot0{,}003=$
$=1-0{,}006=0{,}994.$

ЗАДАНИЯ

Пользуясь формулой
$(1\pm\alpha)^2\approx1\pm2\alpha$,
найти приближенное значение квадрата числа:

1) 1,02.
2) 0,97.
3) 1,004.
4) 0,998.

$$\square^2\pm2\cdot\square\cdot\triangle+\triangle^2=(\square\pm\triangle)^2$$

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

ПРИМЕРЫ

Представим выражение в виде квадрата одночлена:

1) $4a^2=(2a)^2.$
2) $x^{10}=(x^5)^2.$
3) $\frac{9}{64}n^6m^8=\left(\frac{3}{8}n^3m^4\right)^2.$

ЗАДАНИЯ

Представить выражение в виде квадрата одночлена:

1) $9x^2$. 2) a^{12}. 3) $\frac{1}{4}x^2y^2$.
4) $0{,}25a^4b^6$. 5) $0{,}0001x^8y^{12}$.
6) $\frac{64}{81}a^2b^6c^{20}$.

ПРИМЕРЫ

Представим одночлен в виде удвоенного произведения:

1) $6ab=2\cdot3ab.$
2) $\frac{1}{3}x^3y=2\cdot\frac{1}{6}x^3y.$

ЗАДАНИЯ

Представить одночлен в виде удвоенного произведения:

1) $10xy$. 2) $25a^2b$.
3) $\frac{1}{5}ab^2$. 4) $\frac{1}{6}x^2y^3$.

ПРИМЕРЫ

Представим трехчлен в виде квадрата двучлена:

1) $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$.

2) $m^2+6m+9=\boxed{m}^2+2\boxed{m}\cdot\triangle{3}+\triangle{3}^2=$
$=(\boxed{m}+\triangle{3})^2$.

3) $4a^2-20ab+25b^2=$
$=(2a)^2-2\cdot 2a\cdot 5b+(5b)^2=(2a-5b)^2$.

4) $x^6+\frac{1}{2}x^3y^5+\frac{1}{16}y^{10}=$
$=(x^3)^2+2x^3\cdot\frac{1}{4}y^5+\left(\frac{1}{4}y^5\right)^2=$
$=\left(x^3+\frac{1}{4}y^5\right)^2$.

ЗАДАНИЯ

Представить трехчлен в виде квадрата двучлена:

1) $x^2+2xy+y^2$.
2) $m^2-2mn+n^2$.
3) a^2-4a+4.
4) $9b^2+6bc+c^2$.
5) $4a^2-12ab+9b^2$.
6) $\frac{1}{4}x^2+xy+y^2$.
7) $a^4+4a^2b^3+4b^6$.
8) $9c^6-24c^3d^4+16d^8$.

$$\square^3+\triangle^3=(\square+\triangle)(\square^2-\square\triangle+\triangle^2)$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$\square^3-\triangle^3=(\square-\triangle)(\square^2+\square\triangle+\triangle^2)$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

ПРИМЕРЫ

Представим выражение в виде куба одночлена:

1) $8a^3=(2a)^3$.
2) $\frac{1}{27}x^9y^6=\left(\frac{1}{3}x^3y^2\right)^3$.

ЗАДАНИЯ

Представить выражение в виде куба одночлена:

1) $27x^3$. 2) $\frac{1}{8}y^6$.

3) $\frac{27}{64}a^3b^9$. 4) $0{,}001x^{12}y^6$.

12

Имеется 8 кошельков. В пяти кошельках лежат 10-рублевые купюры, в трех — 5-рублевые, в двух —и те и другие. Сколько пустых кошельков?

ПРИМЕРЫ

Разложим на множители:

1) $27-64x^3=3^3-(4x)^3=(3-4x)\times$
$\times(3^2+3\cdot(4x)+(4x)^2)=(3-4x)\times$
$\times(9+12x+16x^2)$.

2) $\frac{1}{125n^6}+8m^3=\left(\frac{1}{5}n^2\right)^3+(2m)^3=$
$=\left(\frac{1}{5}n^2+2m\right)\left(\left(\frac{1}{5}n^2\right)^2-\frac{1}{5}n^2\cdot 2m+\right.$
$\left.+(2m)^2\right)=\left(\frac{1}{5}n^2+2m\right)\cdot\left(\frac{1}{25}n^4-\right.$
$\left.-\frac{2}{5}n^2m+4m^2\right)$.

ЗАДАНИЯ

Разложить на множители:

1) x^3-y^3.
2) $27a^3+b^3$.
3) $\frac{27}{25}a^3-8b^3$.
4) $216x^6-y^3$.
5) $a^{12}+b^{15}$.
6) $8x^9-\frac{1}{27}y^{21}$.

$$(\square+\triangle)(\square^2-\square\triangle+\triangle^2)=\square^3+\triangle^3$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

$$(\square-\triangle)(\square^2+\square\triangle+\triangle^2)=\square^3-\triangle^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

ПРИМЕРЫ

Представим в виде двучлена:

1) $(z+3)(z^2-3z+9)=z^3+27$.
2) $(3x-7y)(9x^2+21xy+49y^2)=$
$=(3x)^3-(7y)^3=27x^3-343y^3$.
3) $(a^3b^2-3a)(a^6b^4+3a^4b^2+9a^2)=$
$=(a^3b^2)^3-(3a)^3=a^9b^6-27a^3$.

ЗАДАНИЯ

Запишем в виде двучлена:

1) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$.
2) $(z-5)(z^2+5z+25)$.
3) $(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)$.
4) $(ab^3+a^2b)(a^2b^6-a^3b^4+$
$+a^4b^2)$.

13

На каком из рисунков 2—5 изображен вид сверху фигуры, вид сбоку которой изображен на рисунке 1?

ПРИМЕРЫ

Вычислим:

1) $\dfrac{341^3-218^3}{341^2+341\cdot 218+218^2}=$

$=\dfrac{(341-218)\ (341^2+341\cdot 218+218^2)}{341^2+341\cdot 218+218^2}=$

$=341-218=123.$

2) $\dfrac{38^2-2\cdot 38\cdot 18+18^2}{38^2-22^2}=$

$=\dfrac{(38-18)^2}{(38-22)\ (38+22)}=\dfrac{20^2}{16\cdot 60}=\dfrac{20\cdot 20}{16\cdot 60}=\dfrac{5}{12}.$

ЗАДАНИЯ

Вычислить:

1) $\dfrac{148^3-121^3}{148^2+148\cdot 121+121^2}.$

2) $\dfrac{59^2-41^2}{59^2+2\cdot 59\cdot 41+41^2}.$

ПРИМЕР

Найдем значение выражения

$(a+2)\,(a^2-2a+4)-a\,(a-3)\,(a+3)$

при $a=-3$:

$\triangle$ $(a+2)\,(a^2-2a+4)-a\,(a-3)\,\times$
$\times\,(a+3)=(a^3+2^3)-a\,(a^2-3^2)=$
$=a^3+8-a^3+9a=8+9a,$
$8+9\cdot(-3)=8-27=-19.$ $\blacktriangle$

ЗАДАНИЯ

Найти значение выражения

1) $(x+1)\,(x^2-x+1)-$
$-x\,(x-1)\,(x+1)$
при $x=12.$

2) $(2a-b)\,(4a^2+2ab+b^2)+$
$+(2a+b)\,(4a^2-2ab+b^2)$
при $a=7.$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4

1. Записать в форме многочлена в стандартном виде:

а) $(3-x)\,(3+x)$; б) $(a+5)^2$; в) $(4x-y^2)^2$.

2. Разложить на множители:

а) a^2-c^2; б) x^2-16y^6.

3. Представить в виде квадрата двучлена:

а) $x^2-2xy+y^2$; б) $4a^2+12ab+9b^2$.

4. Разложить на множители:

а) x^3+y^3; б) $\frac{1}{8}a^6-1$.

5. Найти значение выражения:

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)-a(a-b)(a+b) \text{ при } a=3,\ b=-2.$$

Решение (возможный вариант оформления)

1. а) $(3-x)(3+x)=3^2-x^2=9-x^2$;
   б) $(a+5)^2=a^2+2\cdot a\cdot 5+5^2=a^2+10a+25$;
   в) $(4x-y^2)^2=(4x)^2-2\cdot(4x)\cdot y^2+(y^2)^2=16x^2-8xy^2+y^4$.
2. а) $a^2-c^2=(a-c)(a+c)$;
   б) $x^2-16y^6=x^2-(4y^3)^2=(x-4y^3)(x+4y^3)$.
3. а) $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$;
   б) $4a^2+12ab+9b^2=(2a)^2+2\cdot 2a\cdot 3b+(3b)^2=(2a+3b)^2$.
4. а) $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$;
   б) $\frac{1}{8}a^6-1=\left(\frac{1}{2}a^2\right)^3-1^3=\left(\frac{1}{2}a^2-1\right)\left(\left(\frac{1}{2}a^2\right)^2+\frac{1}{2}a^2\cdot 1+1^2\right)=$
   $=\left(\frac{1}{2}a^2-1\right)\left(\frac{1}{4}a^4+\frac{1}{2}a^2+1\right)$.
5. $(a-b)(a^2+ab+b^2)-a(a-b)(a+b)=a^3-b^3-a(a^2-b^2)=$
   $=a^3-b^3-a^3+ab^2=ab^2-b^3$,
   $3(-2)^2-(-2)^3=3\cdot 4-(-8)=12+8=20$.

ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ СТРАНИЦЫ

1. **Снова о делимости.**
Докажем, что число n^3-n, где n — натуральное число, делится на 6:

$$\triangle\ n^3-n=n(n^2-1)=n(n-1)(n+1)=(n-1)\cdot n\cdot(n+1).$$

Заданное число есть произведение трех последовательных чисел, из которых одно обязательно делится на 3 и хотя бы одно делится на 2 (убедитесь в этом самостоятельно). Если произведение делится и на 3, и на 2, то оно делится и на 6. ▲

ЗАДАНИЯ

1) Докажите, что число n^3+17n при любом натуральном n делится на 6. (Указание. Представьте $17n$ в виде $18n-n$.)

2) Докажите, что при любом натуральном n число n^5-5n^3+4n делится на 120.

3) Разложите на три множителя многочлен x^8+x^4+1. (Указание. Представьте x^4 в виде $2x^4-x^4$.)

4) Разложите на два множителя двучлен x^4+4. (Указание. Добавьте и вычтите из данного двучлена одночлен $4x^2$.)

2. **Чем не может оканчиваться квадрат числа.**

Докажем, что, какое бы натуральное число мы ни возвели в квадрат, оно не будет оканчиваться ни на 11, ни на 91.

△ Квадрат числа оканчивается цифрой 1, если само число оканчивалось цифрой 1 или 9. В общем виде такие числа можно записать как

$$10n+1 \text{ и } 10n+9,$$

где n — натуральное число (например, $3441=10\cdot344+1$; $589=10\cdot58+9$).

Рассмотрим квадраты этих чисел и попробуем в них определить предпоследнюю цифру:

1) $(10n+1)^2=100n^2+20n+1=100n^2+10\cdot2n+1$

2) $(10n+9)^2=100n^2+180n+81=100n^2+180n+80+1=$
$=100n^2+10\cdot(18n+8)+1=100n^2+10\cdot2\cdot(9n+4)+1.$

По такой записи чисел видно, что первое слагаемое в них оканчивается двумя нулями, второе — одним нулем и последняя цифра равна 1. Таким образом, предпоследние цифры квадратов исходных чисел будут равны последним цифрам чисел $2n$ (в первом случае) и $2\cdot(9n+4)$ (во втором случае). Но числа $2n$ и $2\cdot(9n+4)$ четны, значит, и предпоследние цифры квадратов исходных чисел четны, т. е. не могут быть равны ни 1, ни 9. ▲

§ 5. Линейные уравнения с одним неизвестным

Уравнение — это равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой.

Корень уравнения — это число, которое при подстановке его в уравнение вместо неизвестного обращает уравнение в верное числовое равенство.

Решить уравнение — это значит найти все его корни или установить, что их нет.

ПРИМЕРЫ

1) Число 6 является корнем уравнения $x-2=4$, так как $6-2=4$, $4=4$.

2) Число 3 не является корнем уравнения $\frac{1}{2}x=1$, так как $\frac{1}{2}\cdot3=\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}\neq1$.

ЗАДАНИЯ

Установить (устно):

1) Является ли число 7 корнем уравнения $x+5=12$.

2) Является ли число -5 корнем уравнения $\frac{1}{25}x=-\frac{1}{5}$.

3) Является ли число $\frac{3}{2}$ корнем уравнения $\frac{1}{2}x-1=2$.

4) Какое из чисел -3, 6, 12 является корнем уравнения $6-\frac{1}{3}x=2$.

Любой член уравнения можно перенести из одной части в другую с противоположным знаком.

Обе части уравнения можно разделить или умножить на одно и то же число, отличное от нуля.

Уравнения вида $ax=b$, где x — неизвестное, a и b — заданные числа, а также уравнения, приводимые к этому виду, называются **линейными уравнениями** с одним неизвестным.

ПРИМЕРЫ

Решим линейное уравнение:

1) $x-2=3$, $x=3+2$, $x=5$.
2) $17-x=20$, $17-20=x$, $x=-3$.

ЗАДАНИЯ

Решить линейное уравнение:

1) $x-4=5$. 2) $x+3=8$.
3) $12+x=3$. 4) $x-1{,}5=2{,}5$.
5) $20-x=13$. 6) $7-x=8$.
7) $\frac{1}{2}-x=\frac{1}{2}$. 8) $\frac{3}{4}-x=1\frac{1}{4}$.

ПРИМЕРЫ

Решим уравнение:

1) $2x=10$, $x=10:2$, $x=5$.
2) $-\frac{2}{3}\cdot y=4$, $y=4:\left(-\frac{2}{3}\right)$, $y=-6$.

ЗАДАНИЯ

Решить уравнение:

1) $3x=72$. 2) $-5x=45$.
3) $4x=-128$. 4) $-2x=-39$.

3) $5{,}3x=0$, $x=0:5{,}3$, $x=0$.
4) $0{,}7x=-49$, $x=-49:0{,}7$, $x=-70$.

5) $\frac{1}{3}x=9$. 6) $-\frac{3}{4}x=6$.
7) $-\frac{3}{7}x=-12$. 8) $1\frac{1}{2}x=-24$.
9) $-0{,}9y=-36$.
10) $-1{,}2x=0{,}24$.

ПРИМЕРЫ

Решим уравнение:

1) $15x-1=9$, $15x=9+1$, $15x=10$, $x=10:15$, $x=\frac{2}{3}$.

2) $12y+3=7y-7$, $12y-7y=-7-3$, $5y=-10$, $y=-10:5$, $y=-2$.

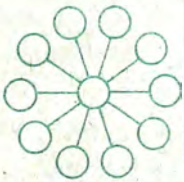
3) $5(x-3)-2(x-7)+7(2x+6)=7$,
$5x-15-2x+14+14x+42=7$,
$5x-2x+14x=7+15-14-42$,
$17x=-34$,
$x=-2$.

ЗАДАНИЯ

Решить уравнение:

1) $25x-1=9$. 2) $3x+8=11$.
3) $3x-5=10-x$.
4) $8x-(7x+8)=9$.
5) $8y-9-4y+5=12y-5-5y$.
6) $4+8x+8=2x-10-7x+9$.
7) $5(8z-1)-7(4z+1)+8+(z-4)=9$.
8) $10(3x-2)-3(5x+2)+5(11-4x)=25$.

14



Расставить в кружках числа от 1 до 11 так, чтобы суммы трех чисел по всем прямым линиям были равны 18.

ПРИМЕРЫ

Решим уравнение:

1) $\frac{x^{5}}{3}+\frac{x^{3}}{5}=8 \mid \cdot 15$

(умножаем обе части уравнения на 15):
$5x+3x=120$, $8x=120$, $x=120:8$, $x=15$.

2) $\frac{6x+7^{4}}{6}=1^{24}-\frac{5x-3^{3}}{8}, \mid \cdot 24.$

(умножаем обе части уравнения на 24):

ЗАДАНИЯ

Решить уравнение:

1) $\frac{y}{3}+\frac{y}{4}=14$.
2) $\frac{3x}{5}=\frac{6+x}{3}$.
3) $\frac{4x-51}{3}-\frac{17-3x}{4}=\frac{3-x}{2}$.

$$24x+28=24-15x+9,$$
$$24x+15x=24+9-28,$$
$$39x=5,\ x=\frac{5}{39}.$$

4) $\frac{3x-7}{4}-\frac{9x+11}{8}=\frac{3-x}{2}.$

ПРИМЕР

Найдем неизвестный размер детали (рис. 10):

△ $150+x=875,\ x=875-150,\ x=725$ ▲

ЗАДАНИЕ

Найти неизвестный размер детали (рис. 11, 12).

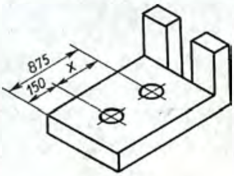


Рис. 10

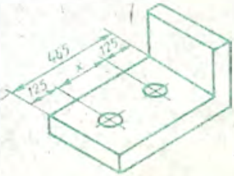


Рис. 11

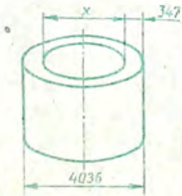


Рис. 12

ПРИМЕРЫ

Решим следующие задачи:

1) Знайка задумал число. Если это число умножить на 4, а к произведению прибавить 8 и полученную сумму разделить на 2, то получится 14. Какое число задумал Знайка?

△ x — число, задуманное Знайкой:

$$\frac{x\cdot 4+8}{2}=14,\ 4x+8=28,$$
$$4x=28-8,\ 4x=20,\ x=5.$$ ▲

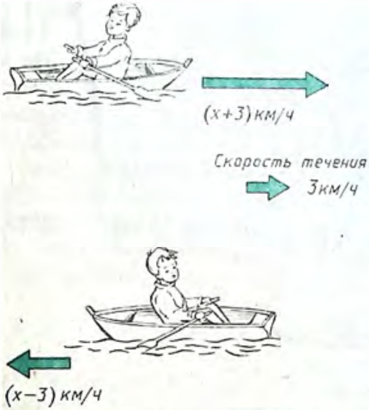
ЗАДАНИЯ

Решить задачи:

1) Незнайка задумал число и отнял от него 3, затем разделил результат на 2 и к полученному частному прибавил 6. В результате получилось задуманное число. Какое число задумал Незнайка?

2) По всей границе прямоугольного участка вырыли канаву. Ширина участка 150 м. Длина канавы 1 км. Найти длину участка.

3) Лодка шла по течению реки 3 ч и против течения 5 ч. Путь, пройденный лодкой по течению, оказался на 7 км длин-



путь = скорость · время

$$s = v \cdot t$$

$$v = \frac{s}{t}$$

$$t = \frac{s}{v}$$

2) Лодка шла по течению реки 2 ч, затем — против течения 4 ч. Найти скорость лодки в стоячей воде, если она прошла в общей сложности 48 км, а скорость течения реки равна 3 км/ч.

△ x км/ч — скорость лодки в стоячей воде,

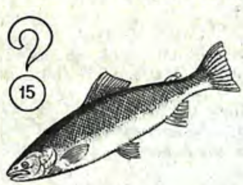
$(x+3)$ км/ч — скорость лодки по течению,

$(x-3)$ км/ч — скорость лодки против течения:

$$2(x+3)+4(x-3)=48,$$
$$2x+6+4x-12=48,$$
$$2x+4x=48-6+12,$$
$$6x=54,\ x=9\ (\text{км/ч}).\ ▲$$

нее пути, пройденного против течения. Найти скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения реки 4 км/ч.

4) Я задумал число, прибавил к нему 5, результат умножил на 3, после чего получил число в 2 раза больше задуманного. Какое число я задумал?



Масса рыбы 8 кг плюс половина ее собственной массы. Какова масса рыбы?

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 5

1. Выяснить, какое из чисел -2; 0; $3{,}5$ является корнем уравнения $1-x=-2{,}5$.

2. Решить уравнение:

а) $x-23=-17$; б) $3x-18=0$; в) $\frac{5}{9}x=0$;

г) $7x-1=5$; д) $13y+3=3y-17$; е) $4(x-2)-3(4+x)-2(x-3)=-19$.

3. Одна сторона треугольника в 2 раза больше другой, а третья — на 4 см меньше большей из них. Найти стороны треугольника, если его периметр равен 21 см.

Решение (возможный вариант оформления)

1. $1-(-2)\neq-2{,}5$; $1-0\neq-2{,}5$; $1-3{,}5=-2{,}5$.

Ответ. Число 3,5 является корнем уравнения $1-x=-2{,}5$.

2. а) $x-23=-17$, $x=-17+23$, $x=6$;
   б) $3x-18=0$, $3x=18$, $x=18:3$, $x=6$;
   в) $\frac{5}{9}x=0$, $x=0:\frac{5}{9}$, $x=0$;
   г) $7x-1=5$, $7x=5+1$, $7x=6$, $x=\frac{6}{7}$;
   д) $13y+3=3y-17$, $13y-3y=-17-3$, $10y=-20$, $y=-2$;
   е) $4(x-2)-3(4+x)-2(x-3)=-19$,
   $4x-8-12-3x-2x+6=-19$, $4x-3x-2x=-19+8+12-6$,
   $-x=-5$, $x=-5:(-1)$, $x=5$.

3. x см — одна сторона треугольника;
   $2x$ см — вторая сторона треугольника;
   $(2x-4)$ см — третья сторона треугольника.
   $x+2x+(2x-4)=21$,
   $x+2x+2x-4=21$, $5x=21+4$, $5x=25$,
   $x=5$ (см), $2\cdot5=10$ (см), $10-4=6$ (см).

Ответ. 5 см, 10 см, 6 см.

ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ СТРАНИЦЫ

1. Числовые ребусы.

В предложенных ниже числовых ребусах нужно вместо точек поставить цифры так, чтобы получился верный числовой пример. Фактически решение числового ребуса сводится к решению своеобразно увязанной группы уравнений.

Решим сначала следующий ребус:

$$\begin{array}{r} 7.8 \\ +\ \ .4. \\ \hline .041 \end{array}$$

$\triangle$ Сложение «столбиком» начинается с последнего разряда (разряда единиц):

$$\begin{array}{r} 8 \\ +\ . \\ \hline 1 \end{array}$$

Очевидно, вместо точки может быть поставлена только цифра 3, так как $8+3=11$. После сложения единиц в разряд десятков переносится цифра 1 («один в уме»).

Складываем десятки:

$$\begin{array}{r} . \\ +\ 4 \\ \hline 4 \end{array}.$$

К какому однозначному числу нужно прибавить 4 и прибавить 1 (перенесенную из разряда единиц), чтобы получилось либо число 4, либо 14? Очевидно, число 4 получить от сложения $x+4+1$ не удастся. Значит, нужно решить уравнение $x+4+1=14$, откуда $x=9$ (единица перейдет в разряд сотен).

Переходим к сложению сотен:

$$\begin{array}{r} 7 \\ +\ . \\ \hline 0 \end{array}.$$

Решаем уравнение $7+x+1=10$ (единица добавлена из разряда сотен). В разряде тысяч может стоять только цифра 1, откуда $x=2$.

Таким образом, предложенный пример сложения выглядит так:

$$\begin{array}{r} 798 \\ +\ 243 \\ \hline 1041 \end{array}. \ \blacktriangle$$

Решите (расшифруйте) самостоятельно следующие числовые ребусы:

1) $\begin{array}{r} .0. \\ -\ \ .7 \\ \hline 754 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} .. \\ +\ \ 5 \\ \hline ...2 \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 36.87 \\ +529.4 \\ .3802 \\ \hline .1.43. \end{array}$ 4) $\begin{array}{r} ...43 \\ -\ 4185. \\ \hline 181.9 \end{array}$

5) $\begin{array}{r} \times\ .5. \\ .8 \\ \hline 2.64 \\ +\ 1.3. \\ \hline .718. \end{array}$ 6) $\begin{array}{r} \times\ 2.9 \\ .. \\ \hline ... \\ +\ .... \\ \hline ...08 \end{array}$ 7) $\begin{array}{r} \times\ ... \\ 1.. \\ \hline 22.. \\ 90. \\ +\ ..2 \\ \hline 56... \end{array}$ 8) $\begin{array}{r|l} -\ 1.5 & .. \\ \cline{2-2} .. & .3 \\ \cline{1-1} -\ \ .. & \\ 4. & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$

2. Фокусы с отгадыванием чисел.

Пример	Объяснение
Задумай число. →	x
Умножь его на 2. →	$2x$
Прибавь к результату 7. →	$2x+7$
Прибавь задуманное число. →	$3x+7$
Отними 1. →	$3x+6$
Раздели на 3. →	$x+2$
Сообщи результат. →	Пусть в результате получилось число a, т. е. $x+2=a$, значит, задуманное число $x=a-2$ (задуманное число на 2 меньше того, которое сообщили). Например, если в результате вам сообщили число 18, значит, задумано было число 16.

Пример	Объяснение
Задумай число. →	x
Прибавь к нему 3. →	$x+3$
Результат помножь на 2. →	$2x+6$
Прибавь 4. →	$2x+10$
Отними задуманное число. →	$x+10$
Прибавь 5. →	$x+15$
Отними задуманное число. →	15
У вас получилось 15.	

ЗАДАНИЕ.

Придумайте новые фокусы с отгадыванием чисел.

3. Софизм — последовательность высказываний, содержащая скрытую ошибку, за счет чего удается сделать неправдоподобный вывод. Обычно в математических софизмах скрыто выполняются запрещенные действия или нарушаются условия применения правил или теорем. Задача заключается в том, чтобы найти ошибку в рассуждениях.

Например, попробуем доказать, что $5=4$.

$\triangle$ Пусть $x=\frac{1}{3}$, тогда $3x=1$. Представим $3x$ как $15x-12x$, а 1 — как $5-4$, тогда вместо равенства $3x=1$ можно записать

$$15x-12x=5-4.$$

Решим это уравнение:

$$15x-5=12x-4,\ 5(3x-1)=4(3x-1).$$

Разделим обе части равенства на $(3x-1)$ и получим $5=4$.

Где в рассуждениях мы допустили ошибку?

Ошибку мы допустили в том шаге рассуждений при решении уравнения, где обе части равенства $5(3x-1)=4(3x-1)$ разделили на $(3x-1)$. По нашему предположению, сделанному в начале рассуждений, $x=\frac{1}{3}$, т. е. $3x=1$, или $3x-1=0$. Мы обе части уравнения разделили на 0, чего делать нельзя. ▲

Предлагаем еще один софизм.

△ Пусть дано числовое равенство

$$b=a\ (a\neq 0;\ b\neq 0).$$

Умножим обе части равенства на a и получим $ab=a^2$. От обеих частей отнимем b^2: $ab-b^2=a^2-b^2$. Разложим на множители левую и правую части последнего равенства: $b(a-b)=(a-b)(a+b)$. Разделим обе части на $(a-b)$, получим $b=a+b$; так как по условию $a=b$, то имеем $b=b+b$, т. е. $b=2b$ или после деления обеих частей равенства на $b\neq 0$ придем к равенству $1=2$. ▲

Где же была допущена ошибка?

4. Задачи, решаемые с помощью уравнений.

З а д а ч а. — Бабушка, сколько лет твоему внуку?

— Моему внуку столько месяцев, сколько мне лет. А вместе нам 65 лет.

Сколько же лет бабушке и внуку?

С т а р и н н а я з а д а ч а. Некто согласился работать с условием, что по истечении года он получит одежду и 9 флоринов. По истечении 7 месяцев он прекратил работу и получил одежду и 4 флорина. Во сколько была оценена одежда?

5. Игра «18 спичек».

Из имеющихся 18 спичек (или любых других предметов) каждый из двух играющих по очереди берет спички. За один раз можно брать 1, 2, 3 или 4 спички. Выигрывает тот, кто берет последнюю спичку. Рассчитайте, сколько спичек должен брать начинающий игру, чтобы выиграть.

△ Секрет игры прост. Чтобы взять последнюю спичку (или спички), не-

обходимо, чтобы перед последним ходом партнера на столе было 5 спичек; тогда он вынужден будет оставить 1, 2, 3 или 4 спички, которые и заберет начинающий игру. Так, рассуждая от последних ходов к первым, мы придем к заключению, что, для того чтобы выиграть начиная игру первым, необходимо взять сначала 3 спички, а затем после каждого своего хода противнику оставлять столько спичек, чтобы их число делилось на 5. ▲

6. Когда произведение равно нулю.

Очевидно, для того, чтобы произведение нескольких сомножителей равнялось нулю, нужно, чтобы хотя бы один из сомножителей был равен нулю.

Например: 1) $x \cdot y=0$, когда $x=0$ или $y=0$, т. е. решениями такого уравнения будут $x=0$; $y=0$.

2) $x(x-1)=0$ при $x=0$ и $x-1=0$, т. е. при $x=0$ и $x=1$.

Решим уравнение $3x^3-2x^2-12x+8=0$, разложив предварительно его левую часть на множители:

$$\triangle\ 3x^2-2x^2-12x+8=3x(x^2-4)-2(x^2-4)=$$
$$=(x^2-4)(3x-2)=(x-2)(x+2)(3x-2).$$

Таким образом, исходное уравнение можно переписать в виде $(x-2)\times$ $\times(x+2)\cdot(3x-2)=0$. Его решения находятся из решений уравнений $x-2=0$, $x+2=0$, $3x-2=0$.

Ответ. $x=2$, $x=-2$, $x=\frac{2}{3}$. ▲

Решим уравнение $x^2-5x+6=0$ (разложив предварительно его левую часть на множители):

$$\triangle\ x^2-5x+6=x^2-2x-3x+6=(x^2-2x)-(3x-6)=$$
$$=x(x-2)-3(x-2)=(x-2)(x-3).$$

Таким образом исходное уравнение принимает вид

$$(x-2)(x-3)=0.$$

Его решения находятся из решения уравнений $x-2=0$ и $x-3=0$.

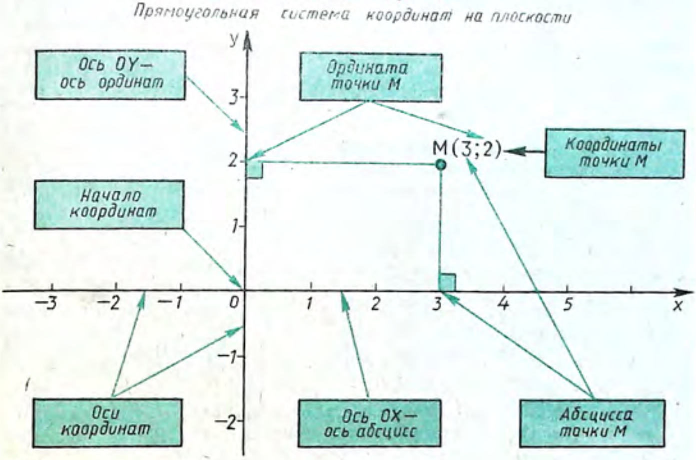
Ответ. $x=2$, $x=3$. ▲

ЗАДАНИЕ.

Решите уравнение, разложив предварительно на множители многочлен, записанный в его левой части:

1) $x^3-x^2+x-1=0$.
2) $x^3-2x^2+2x-4=0$.
3) $(1-y)^2-4=0$.
4) $x^3-3x-2=0$.
5) $x^2-7x+12=0$.
6) $x^2-7x+10=0$.
7) $x^5-x=0$.

§ 6. Линейная функция



ПРИМЕРЫ

1) Укажем координаты точек *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *K*, *L*, *O* (рис. 13):

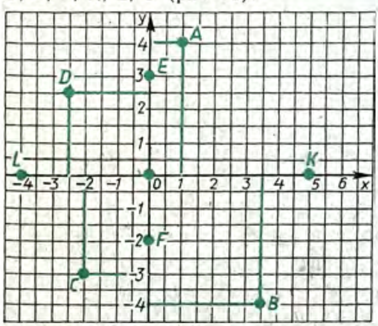


Рис. 13

ЗАДАНИЯ

1) Записать координаты точек *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *K*, *L*, *O*, отмеченных на рисунке 14.

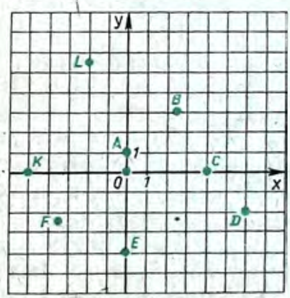


Рис. 14

$A(1;4)$, $B(3{,}5;-4)$,
$C(-2;-3)$, $D(-2{,}5;2{,}5)$,
$E(0;3)$, $F(0;-2)$,
$K(5;0)$, $L(-4;0)$,
$O(0;0)$.

2) Построим отрезки AB и MN по координатам их концов, $A(-3;-1)$, $B(1;3)$, $M(-2;-2)$, $N(4;1)$ (рис. 15).

Запишем координаты точек пересечения отрезков AB и MN с осями координат: $C(-2;0)$, $D(0;2)$, $P(0;-1)$, $Q(2;0)$.

2) Построить треугольник ABC по координатам его вершин $A(3;4)$, $B(0;-5)$, $C(3;0)$. Найти значения координат точек пересечения сторон треугольника ABC с осями координат.

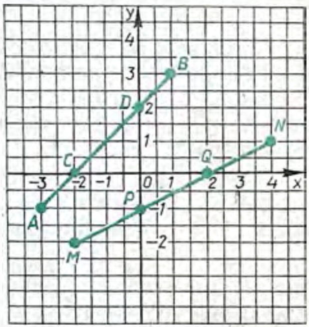


Рис. 15

Переменная y называется **функцией** переменной x, если каждому значению x из некоторого числового множества соответствует единственное значение y.

Чтобы подчеркнуть зависимость y от x, часто пишут $y(x)$; при этом x называют *независимой переменной* (или *аргументом*), а y называют *зависимой переменной* (или *функцией*).

ПРИМЕРЫ

1) Площадь квадрата y есть функция длины его стороны x: $y(x)=x^2$.

При длине стороны квадрата 3 единицы площадь его равна 9 квадратным единицам. Можно записать

$$y(3)=3^2, \text{ или } y(3)=9.$$

ЗАДАНИЯ

1) Объем куба V есть функция длины его ребра x:

$$V(x)=x^3.$$

Найти значение объема куба $V(x)$ при $x=1$ см; 5 см; 1,2 дм; 0,8 м.

Аналогично можно найти по формуле $y(x)=x^2$ значение площади квадрата при других значениях длины стороны. Например: $y(6)=36$; $y(7)=49$ и т. д.

2) Найдем значение функции, заданной формулой $y(x)=x^3-x+1$, при $x=0$; -2; 3.

△ 1) $y(0)=0^3-0+1$, $y(0)=1$.
2) $y(-2)=(-2)^3-(-2)+1$,
$y(-2)=-8+2+1$, $y(-2)=-5$.
3) $y(3)=3^3-3+1$, $y(3)=27-3+1$,
$y(3)=25$.

2) Найти значение функции:

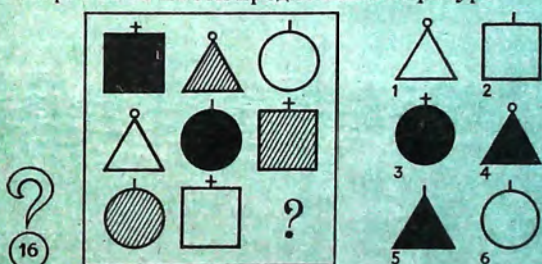
а) $y(x)=x^2-1$
при $x=-2$; -1; 0; 1; 2; 3.
б) $u(x)=x^5+x$
при $x=-1$; 0; 2.
в) $y(x)=0{,}3(x+5)$
при $x=-5$; 0; 5; 10.
г) $t(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ при
$x=-1$; 0; 2; 2,5.

3) Найдем значение аргумента, при котором значение функции $y=\frac{1}{2}(3x-1)$ равно -5.

△ $y=\frac{1}{2}(3x-1)$, $-5=\frac{1}{2}(3x-1)$,
$-10=3x-1$, $3x=-9$, $x=-3$.
Таким образом, $y(-3)=-5$. ▲

3) Найти значение аргумента, при котором функция $y=3(1-2x)$ принимает значение, равное -6; 0; 1,5.

Вместо знака "?" поставьте нужную фигуру, выбрав ее из шести предложенных фигур.



Функция может быть задана *формулой*, *таблицей*, *графиком* или *словесным описанием*.

ПРИМЕРЫ

Зависимость пути h, пройденного телом, от времени t задана таблицей:

t, с	0	0,5	1	2	3	4	5	6
h, м	0	1,25	5	20	45	80	125	180

(в верхней строке указаны определенные значения времени t, в нижней — соответствующие значения пройденного телом пути h за это время). По таблице можно, например, определить, что:
1) через 2 с тело прошло путь 20 м; через 5 с — 125 м;
2) путь в 180 м тело прошло за 6 с; путь в 5 м — за 1 с.

ЗАДАНИЯ

Функция $s(x)$ задана таблицей:

x	0	1	2	4	6	9	10
$s(x)$	1	3	5	9	13	19	21

Определить:
1) значение функции при значении аргумента, равном 2; 4; 9;
2) при каком значении аргумента функция принимает значение, равное 1; 5; 9; 21.

График функции — это множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

ПРИМЕР

На рисунке 16 изображен график некоторой функции. С его помощью заполним таблицу:

x	-4	-2	0	1	2	3
$y(x)$						

△ Для этого нужно найти точки, абсциссы которых равны значениям, указанным в таблице, восстановить из этих точек

ЗАДАНИЕ

На рисунке 17 дан график функции $y(x)$. Используя этот рисунок, заполнить таблицу:

x	-3	-2		0	1		
$y(x)$			-1			3	2

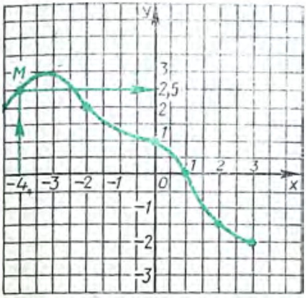


Рис. 16

Рис. 17

перпендикуляры до пересечения с графиком и определить значения ординат точек пересечения. Например, абсциссу —4 имеет точка M, ее ордината равна 2,5. В результате будем иметь:

x	-4	-2	0	1	2	3
y	$2{,}5$	2	1	0	$-1{,}5$	-2

ПРИМЕРЫ

Функция $y(x)$ задана графиком (рис. 18). По графику можем определить, что:

ЗАДАНИЯ

Функция $y(x)$ задана графически (рис. 19). По графику найти:

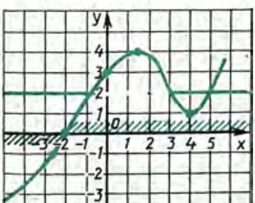


Рис. 18

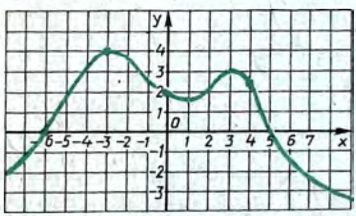


Рис. 19

1) $y(-2{,}5)=-1$; $y(0)=3$;
$y(1{,}5)=4$; $y(4)=1$;

2) значение функции $y(x)$ равно 2 при $x=-1$; 3; 5;

3) значения функции $y(x)$ положительны, например, при $x=-1$; 2,8; 5 (все значения x, при которых данная функция принимает положительные значения, выделены штриховкой над осью Ox);

4) значения функции $y(x)$ отрицательны, например, при $x=-3$; $-2{,}5$ (все значения x, при которых данная функция принимает отрицательные значения, выделены штриховкой под осью Ox);

5) $y(x)=0$ при $x=-2$.

ПРИМЕР

Показание уличного термометра в течение суток заносили через каждый час в таблицу:

x, ч	0	1	2	3	4	5	6	7
y, °С	0	−0,5	−2	−3,5	−4	−3,5	−3	−2,5

x, ч	8	9	10	11	12
y, °С	−2	−1	0	1	2,5

x, ч	13	14	15	16	17	18
y, °С	4	5	5,5	6	5,5	5

x, ч	19	20	21	22	23	24
y, °С	4	2	1	0	−1	−1,5

1) $y(-6)$; $y(-3)$; $y(0)$; $y(4)$;

2) значения аргумента, при которых функция принимает значение, равное 2;

3) несколько значений аргумента, при которых функция принимает положительные значения; отрицательные значения; значение, равное нулю.

ЗАДАНИЕ

На протяжении послеоперационного периода у больного через каждый час измеряли температуру и показания заносили в таблицу, часть которой приведена ниже:

t, ч	11	12	13	14
T, °С	38,5	38,7	39	38,8

t, ч	15	16	17	18	19	20
T, °С	38,7	38,5	38,3	38,2	38,1	37,9

Построить график зависимости $T(t)$, считая, что температура менялась плавно. Отложить по оси абсцисс значения времени суток (1 ч — 1 клетка, или 1 см), а по оси ординат — значения

Построим график зависимости y от x (1 деление на оси Ox соответствует 1 ч, 1 деление на оси Oy соответствует 1°C). Для этого отметим на координатной плоскости 25 точек, координаты которых указаны в таблице. Считая, что температура изменялась плавно, соединим полученные точки плавной линией (рис. 20).

По графику можно легко увидеть, например, что самая высокая температура в течение суток была равна 6°C в 16 ч дня, а самая низкая -4°C — в 4 ч ночи; что с 4 до 16 ч температура повышалась, а с 0 до 4 ч утра и с 16 ч до полуночи температура воздуха понижалась.

температуры тела (0,1 °C — 1 клетка, или 1 см), приняв за начало отсчета момент: $t=10$ ч, $T=37{,}5$°C (назвать это условным нулем).

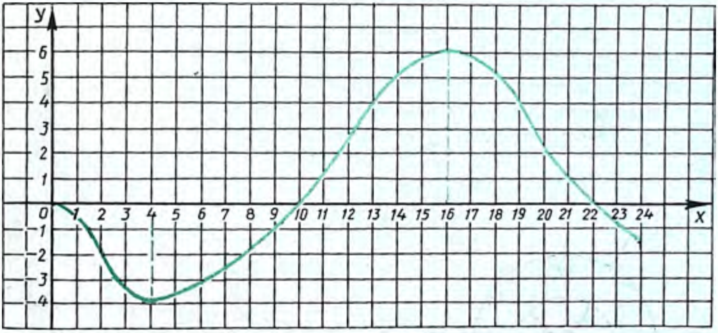


Рис. 20

> Функцию вида $y=kx$, где k — постоянное число, не равное нулю, называют *прямой пропорциональностью*. Число k называют коэффициентом пропорциональности.
>
> Графиком функции прямой пропорциональности является прямая, проходящая через начало координат.

Так как начало координат принадлежит графику функции $y=kx$, то для построения этого графика достаточно найти еще одну точку, затем с помощью линейки провести через эти точки прямую.

ПРИМЕРЫ

1) Построим график функции $y=kx$ при $k=\frac{1}{2}$, т. е. график функции $y=\frac{1}{2}x$.

△ Так как графиком функции является прямая линия, то будем строить ее по любым двум несовпадающим точкам. В качестве первой можно выбрать начало координат; вторую точку выберем, например, с абсциссой, равной 2. При $x=2$ $y=\frac{1}{2}\cdot 2=1$.

Координаты точек, по которым будем строить график функции, удобно занести в таблицу:

x	0	2
y	0	1

Отметим на координатной плоскости точки (0;0), (2;1) и через них проведем прямую, которая будет графиком функции $y=\frac{1}{2}x$ (рис. 21). ▲

2) На рисунке 22 изображены графики функций:

$y=x$; $y=-x$;

ЗАДАНИЯ

1) Построить график функции:

а) $y=2x$; б) $y=-2x$;

в) $y=\frac{1}{2}x$; г) $y=-\frac{1}{2}x$.

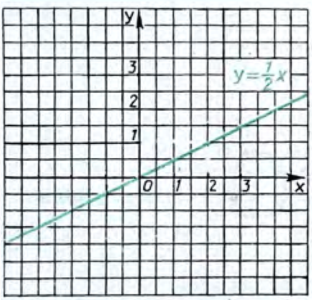


Рис. 21

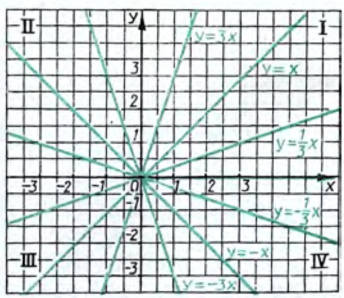


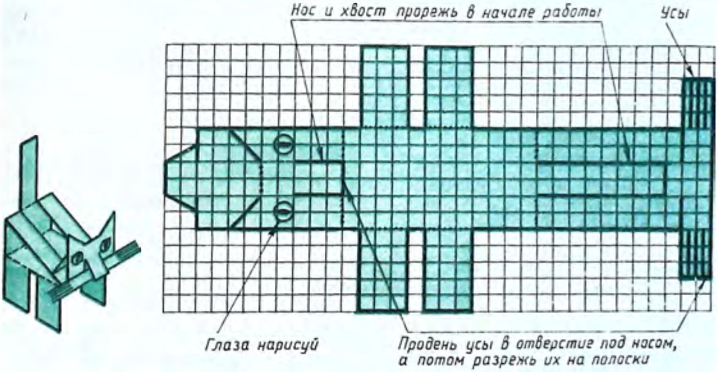
Рис. 22

$y=3x$; $y=-3x$;
$y=\frac{1}{3}x$; $y=-\frac{1}{3}x$.

Из рисунка видно, что графики функций вида $y=kx$ при положительных значениях k расположены в I и III координатных четвертях, при отрицательных значениях k — во II и IV четвертях.

Сделайте подарок младшему другу!

Разрежьте по сплошным линиям и согните выкройку по штриховым линиям. Рисунок подскажет вам, что должно получиться.



Линейной функцией называется функция вида $y=kx+b$, где k и b — заданные числа.
Графиком линейной функции является прямая.

ПРИМЕРЫ

Построим график функции
$$y=-2x+3.$$

△ Выберем два произвольных значения x и по формуле, задающей функцию, най-

ЗАДАНИЯ

1. Построить график функции:

1) $y=x-2$.
2) $y=-x+3$.
3) $y=3x-1$.

дем соответствующие значения y. Всегда для вычислений удобно в качестве одного из значений x брать $x=0$. При $x=0$ $y=-2\cdot0+3=3$; при $x=3$ $y=-2\cdot3+$ $+3=-3$.

Вычисления можно произвести устно, а результаты полезно занести в таблицу:

x	0	3
y	3	-3

По точкам (0;3), (3;-3) строим график функции $y=-2x+3$. ▲

По рисунку 23 можно найти точки пересечения графика функции $y=-2x+3$ с осями координат: $A(0;3)$, $B(1{,}5;0)$. Эти точки можно было найти и по формуле: 1) так как в точке пересечения графика с осью Oy абсцисса ее равна нулю (т. е. $x=0$), то ординату y найдем из уравнения $y=-2\cdot0+3$, $y=3$ (точка (0;3)); 2) так как в точке пересечения графика с осью Ox ордината $y=0$, то значение абсциссы x найдем из уравнения $0=-2x+3$, $2x=3$, $x=1{,}5$ (точка (1,5; 0)).

На рисунке 24 изображены графики

4) $y=-3x-2$.
5) $y=\frac{1}{3}x+4$.
6) $y=-\frac{1}{3}x+1{,}5$.
7) $y=3$.
8) $y=-2$.

2. Не строя графика функции:

1) $y=2x+6$,
2) $y=-5x-1$,
3) $y=\frac{1}{5}x+2$,

найти координаты точек пересечения его с осями координат.

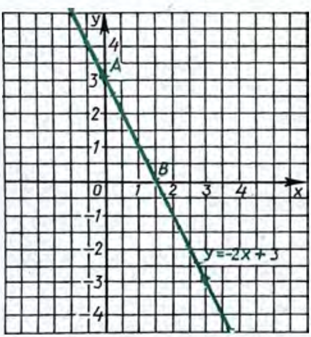


Рис. 23

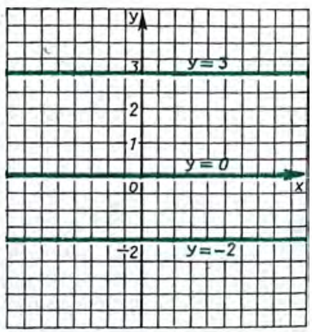
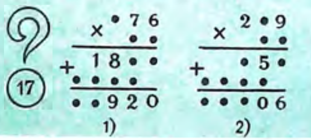


Рис. 24

функций вида $y=kx+b$ при $k=0$ и $b=3$; 0; -2, т. е. графики функций $y=3$; $y=0$; $y=-2$.

Решите числовые ребусы:



ПРИМЕР

Не строя графика функции $y=-\frac{1}{2}x+5$, определим, какая из точек $P(4;3)$, $M(-4;6)$ принадлежит графику этой функции.

△ 1) Если точка $P(4;3)$ принадлежит графику функции $y=-\frac{1}{2}x+5$, то должно выполняться равенство $3=-\frac{1}{2}\cdot 4+5$. Равенство верное $(3=3)$, значит, точка P принадлежит графику функции.

2) Если точка $M(-4;6)$ принадлежит графику функции $y=-\frac{1}{2}x+5$, то должно выполниться равенство $6=-\frac{1}{2}(-4)+5$. Равенство неверное $(6\neq 7)$, значит, точка M не принадлежит графику функции. ▲

ЗАДАНИЕ

Не строя графика функции $y=7x-13$, определить, какие из точек $A(0;13)$, $B(-1;-20)$, $C(1;-6)$, $D(2;-1)$ принадлежат графику этой функции.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 6

1. Функция задана формулой $y(x)=x^3+2x^2-1$. Найти значения функции при $x=0$; -2; 3.

2. При каком значении аргумента функция $y(x)=-5x+\frac{1}{2}$ принимает значение, равное 3?

3. Построить график функции $y=\frac{1}{4}x+2$. По графику найти значение

функции при $x=-4$ и определить, при каком значении x функция принимает значение, равное 0.

4. Не строя графика функции $y=-8x+13$, определить, какая из точек $A(-2;29)$, $B(3;10)$ принадлежит графику этой функции.

Решение (возможный вариант оформления)

1. $y(0)=0^3+2\cdot0^2-1=-1;$
$y(-2)=(-2)^3+2(-2)^2-1=-8+2\cdot4-1=-8+8-1=-1;$
$y(3)=3^3+2\cdot3^2-1=27+2\cdot9-1=27+18-1=44.$

2. $y(x)=3$, $3=-5x+\frac{1}{2}$, $5x=\frac{1}{2}-3$, $5x=-2\frac{1}{2}$, $x=-2\frac{1}{2}:5$,

$x=-\frac{5}{2}:5$, $x=-\frac{1}{2}$.

3. $y=\frac{1}{4}x+2$.

x	0	4
y	2	3

График изображен на рисунке 25.
При $x=-4$ $y=1$; $y=0$ при $x=-8$.

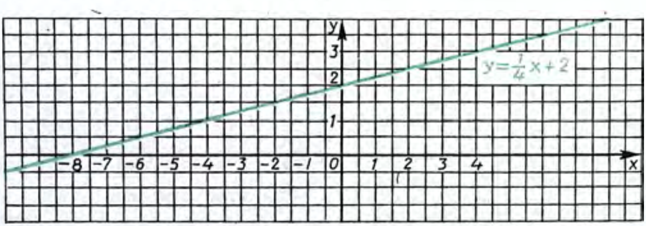


Рис. 25

4. $y=-8x+13$.

1) $A(-2;29)$: $29=-8\cdot(-2)+13$, $29=29$. Точка A принадлежит графику функции $y=-8x+13$.

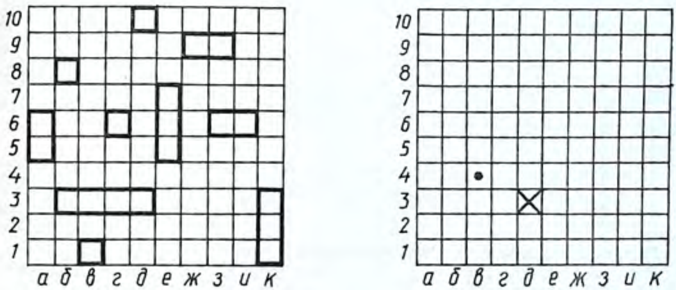
2) $B(3;10)$: $10\neq-8\cdot3+13$, так как $10\neq-11$. Точка B не принадлежит графику функции $y=-8x+13$.

ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ СТРАНИЦЫ

1. Игра «Морской бой». Эта игра способствует закреплению навыков нахождения точки координатной плоскости по ее координатам и, наоборот, нахождения координат определенной точки.

П р а в и л а: играют двое, каждый на листе бумаги в клетку чертит два квадрата размером 10×10 клеток.

Клетки нумеруются буквами и числами так, как это показано на рисунке 26. Затем втайне друг от друга в первом квадрате располагают по клеткам корабли:



а) б)

Рис. 26

один линкор (*четыре клетки*),

два крейсера (*три клетки*),

три эсминца (*две клетки*),

четыре катера (*одна клетка*)

Причем по договоренности корабли могут либо касаться, либо не касаться друг друга и бортов отведенного поля. На рисунке 26, *а* дан один из вариантов расположения кораблей.

Игроки по очереди называют клетку второго поля — поля противника (рис. 26, *б*) и ставят в этой клетке точку (например, в клетке «*в*4»). Партнер должен ответить, «попал» или «не попал» стреляющий по его кораблю (в случае попадания в одноклеточный корабль говорится слово «потонул»). При попадании нападающий зачеркивает клетку крестом в его втором квадрате (например, клетка «*д*3»), а обороняющийся — в его первом квадрате. При попадании нападающий имеет право на внеочередной «выстрел» и так поступает до тех пор, пока не промахнется. Если партнер сообщит что что корабль «потонул», то нападающий снова имеет право на «выстрел». После промаха в нападение переходит второй играющий.

Проигрывает тот, кто первым потеряет все корабли.

2. Задача. Крабовидная туманность в созвездии Тельца расширяется со скоростью 1500 км/с. На какое расстояние расширяется туманность за минуту, за час?

3. Задача. Медиками установлено, что для нормального развития ребенок или подросток, которому T лет (T меньше 18), должен спать в сутки t часов, где t определяется по формуле $t = 17 - \frac{T}{2}$. Найдите $t(2)$; $t(13)$; $t(14)$.

4. Задача. Волосы на голове человека растут примерно со скоростью 0,4 мм в сутки. Определите, как часто мальчики вашего класса должны посещать парикмахерскую, если они хотят носить волосы не короче 3 см, но не длиннее 5 см.

5. О функциях, заданных описанием. Не каждая функция может быть задана формулой. Например, каждому числу x поставим в соответствие его целую часть, т. е. ближайшее целое число, не превосходящее данное: числу $2{,}7 \to$ число 2; числу $5 \to$ число 5; числу $(-3{,}2) \to$ число (-4) (мы не ошиблись: число (-3) превосходит число $(-3{,}2)$).

Для сокращения описания задания такой функции придумали символ $[x]$, который и означает, что рассматривается часть числа x. Таким образом, $[2{,}7] = 2$; $[5] = 5$; $[-3{,}2] = -4$. Построим график функции $y = [x]$.

Рассмотрим, например, числа от 0 до 1. Целая часть каждого из них (не включая 1) равна 0, т. е. для всех этих чисел $y = 0$. Построим график функции $y = [x]$ на участке от 0 до 1 (рис. 27). Им будет горизонтальный отрезок с концами в точках 0 и 1, которому, однако, не при-

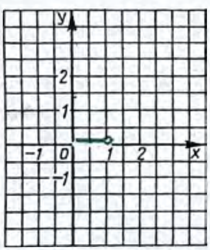


Рис. 27

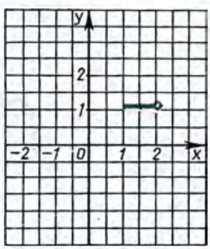


Рис. 28

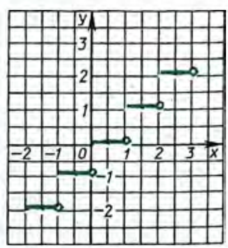


Рис. 29

надлежит точка 1 (она отмечена светлым кружком), так как $[1]=1$.

Рассмотрим теперь числа от 1 до 2, не включая число 2. Целая часть каждого из них будет равна 1, т. е. на отрезке от 1 до 2 функция примет вид: $y=1$. На рисунке 28 эта часть графика изображена отрезком (без правого конца) прямой $y=1$.

Рассуждая аналогичным образом, можно построить график функции $y=[x]$ для любых x (рис. 29).

Понятие дробной части числа определяется как разность между самим числом и его целой частью и обозначается символом $\{x\}$, т. е. $\{x\}=x-[x]$. Например:

$$\{2{,}53\}=2{,}53-[2{,}53]=2{,}53-2=0{,}53;$$
$$\{-13\}=-13-[-13]=-13-(-13)=-13+13=0;$$
$$\{-7{,}5\}=-7{,}5-[-7{,}5]=-7{,}5-(-8)=-7{,}5+8=0{,}5.$$

ЗАДАНИЕ

Попробуйте построить график функции $y=\{x\}$.

§ 7. Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными

Системой двух линейных уравнений с двумя неизвестными называется система вида

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2, \end{cases} \qquad (*)$$

где a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 — заданные числа, x и y — неизвестные.

Решением системы уравнений $(*)$ называют такую пару чисел x; y, которые при подстановке в эту систему обращают каждое ее уравнение в верное равенство.

Решить систему уравнений — это значит найти все ее решения или показать, что их нет.

ПРИМЕРЫ

1) Проверим, является ли пара чисел $x=10$, $y=15$ решением системы

$$\begin{cases} x+y=25, \\ 2x-y=5. \end{cases}$$

ЗАДАНИЯ

1) Является ли пара чисел $x=-2$, $y=1$ решением системы

$$\begin{cases} 3x-y=-7, \\ -x+y=3? \end{cases}$$

$$\triangle \begin{cases} 10+15=25 \text{— верное равенство,} \\ 20-15=5 \text{— верное равенство.} \end{cases}$$

Пара чисел $x=10$; $y=15$ является решением данной системы уравнений. ▲

2) Покажем, что пара чисел $x=0$, $y=-2$ не удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} 5x+\frac{1}{2}y=-1, \\ -3x-y=-2 \end{cases}$$

(т. е. не является ее решением).

$$\triangle \begin{cases} 5\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot(-2)=-1 \text{ — верное равенство,} \\ -3\cdot 0-(-2)=-2 \text{ — неверное равенство } (2\neq -2). \end{cases}$$

Пара чисел $x=0$, $y=-2$ не является решением данной системы. ▲

ПРИМЕРЫ

1) Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x+5y=7, \\ 3x-2y=4 \end{cases}$$

способом подстановки.

△ Поступим следующим образом.

Из одного уравнения выразим одно неизвестное через другое. В данном случае удобнее из первого уравнения $x+5y=7$ выразить x через y:

$$x=7-5y.$$

В другое уравнение (в данном случае во второе $3x-2y=4$) подставим вместо неизвестного его значение, выраженное из первого уравнения:

$$3(7-5y)-2y=4.$$

2) Какая пара чисел:

а) $x=4$, $y=-1$;

б) $x=-1$, $y=1$;

в) $x=4$, $y=1$

является решением системы уравнений

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x-3y=1, \\ x-2y=2? \end{cases}$$

ЗАДАНИЯ

Решить систему линейных уравнений способом подстановки:

1) $\begin{cases} x-y=-1, \\ 2x+y=4. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+3y=-1, \\ -x+4y=1. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x-y=5, \\ -x+y=-4\frac{1}{2}. \end{cases}$

4) $\begin{cases} -2x+3y=-7, \\ 2x-5y=5. \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{1}{2}x+y=-4, \\ -6x-7y=33. \end{cases}$

Решим полученное линейное уравнение с одним неизвестным:

$$21-15y-2y=4,\quad -15y-2y=4-21,$$
$$-17y=-17,\ y=1.$$

Найденное значение неизвестного ($y=1$) подставим в выражение для другого неизвестного

$$(x=7-5y):$$
$$x=7-5\cdot 1=2.$$

Найденная пара чисел $x=2$, $y=1$ является решением данной системы.

Кратко это решение можно записать так:

△ $\begin{cases} x+5y=7, \\ 3x-2y=4; \end{cases}$ $\quad x=7-5y.$

$3(7-5y)-2y=4$, $21-15y-2y=4$,
$-17y=-17$, $y=1$;
$x=7-5\cdot 1=2$.

Ответ. $x=2$; $y=1$. ▲

2) Решим систему

$$\begin{cases} 2x-4y=14, \\ -3x+2y=-9 \end{cases}$$

способом подстановки.

△ $\begin{cases} 2x-4y=14, \\ -3x+2y=-9. \end{cases}$

Из первого уравнения:

$2x=14+4y$, $x=\frac{14+4y}{2}$,

$x=\frac{2(7+2y)}{2}$, $x=7+2y$.

Подставляем это выражение вместо x во второе уравнение:

$$-3(7+2y)+2y=-9,$$
$$-21-6y+2y=-9,$$
$$-4y=21-9,\ -4y=12,$$
$$y=12:(-4),$$
$$y=-3;$$

$x=7+2(-3)$, $x=1$.

Ответ. $x=1$; $y=-3$. ▲

6) $\begin{cases} -\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y=4, \\ 5x-2y=-27. \end{cases}$

Относительные размеры планет Солнечной системы. Система (от греческого слова sistema — целое, составленное из частей) — множество элементов, находящихся в отношениях и связях друг с другом, образующих определенную целостность, единство. Какие еще системы (кроме Солнечной и систем уравнений) вы знаете?

ПРИМЕРЫ

1) Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 4x+3y=5, \\ 2x+y=3 \end{cases}$$

способом сложения.

△ Поступим следующим образом.

Коэффициенты при одном из неизвестных, например при x, сделаем равными по модулю, но противоположными по знаку. Для этого обе части второго уравнения умножим на -2:

$$\begin{cases} 4x+3y=5, \\ 2x+y=3 \end{cases} \quad \Big| \cdot (-2),$$

получим систему

$$\begin{cases} 4x+3y=5, \\ -4x-2y=-6. \end{cases}$$

Сложим почленно оба уравнения (что-

ЗАДАНИЯ

Решить систему уравнений способом сложения:

1) $\begin{cases} x-y=-1, \\ x+y=7. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x-y=1, \\ 2x+3y=13. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+5y=25, \\ 3x-2y=-10. \end{cases}$

4) $\begin{cases} -2x+y=3, \\ 4x-5y=-12. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 6x+8y=-2, \\ 3x-7y=10. \end{cases}$

6) $\begin{cases} -\frac{1}{2}x-3y=17, \\ x-4y=16. \end{cases}$

бы исключить неизвестное x):

$$+\begin{array}{r} 4x+3y=5, \\ -4x-2y=-6 \end{array}$$
$$\overline{\quad y=-1. \quad}$$

Найденное значение y подставим в одно из уравнений исходной системы, например во второе $2x+y=3$, и найдем значение x:

$$2x+(-1)=3,\ 2x=4,\ x=2.$$

Пара чисел $x=2$, $y=-1$ является решением исходной системы уравнений. ▲

2) Запишем кратко решение системы уравнений

$$\begin{cases} 3x-2y=3, \\ 4x+3y=-13 \end{cases}$$

способом сложения.

$$\triangle \begin{cases} 3x-2y=3, \\ 4x+3y=-13; \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot 2 \end{array} \right.$$

$$+\begin{array}{l} 9x-6y=9, \\ 8x+6y=-26; \end{array}$$

$17x=-17$, откуда $x=-1$;

$$3\cdot(-1)-2y=3,\ -3-2y=3,$$
$$2y=-6,\ y=-3.$$

Ответ. $x=-1$; $y=-3$. ▲

Графиком линейного уравнения с двумя неизвестными

$$ax+by=c$$

называется множество точек $M(x;y)$ координатной плоскости, координаты которых x и y при подстановке в это уравнение обращают его в верное равенство.

Графиком линейного уравнения с двумя неизвестными является прямая.

ПРИМЕРЫ

Построим график уравнения:

1) $3x-y=4$; 2) $2y=5$; 3) $\frac{1}{2}x-2=0$.

ЗАДАНИЯ

Построить график уравнения:

1) $-2x+y=1$.

△ 1) Выразим из уравнения $3x-y=4$ y через x:

$$-y=4-3x,\ y=3x-4.$$

Так как полученное и исходное уравнения выражают одну и ту же зависимость, то строим график функции $y=3x-4$ (рис. 30). ▲

△2) $2y=5$, откуда $y=2{,}5$ (рис. 31).▲

△3) $\frac{1}{2}x-2=0$, $\frac{1}{2}x=2$, $x=4$ (рис. 32).▲

2) $5x-y=-2$.
3) $3x+2y=2$.
4) $-x-2y=6$.
5) $y=-3$.
6) $x+5=0$.

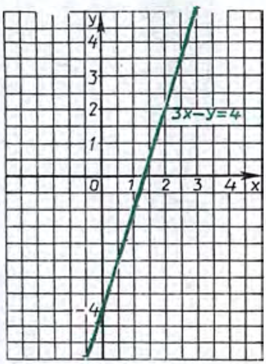


Рис. 30

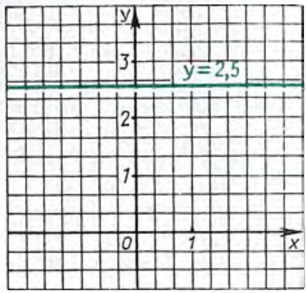


Рис. 31

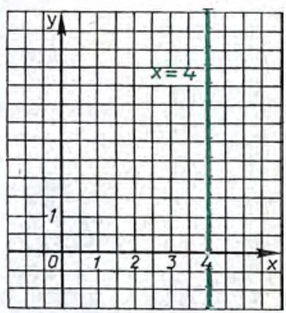


Рис. 32

ПРИМЕР

Решим *графическим способом* систему уравнений

$$\begin{cases} -2x+y=-1, \\ 3x-2y=0. \end{cases}$$

$\triangle$ Построим в одной системе координат график каждого уравнения системы. Для этого из каждого уравнения выразим y через x:

$-2x+y=-1$, $y=2x-1$;

$3x-2y=0$, $-2y=-3x$, $y=\frac{3}{2}x$.

Графики функций $y=2x-1$ и $y=\frac{3}{2}x$ (рис. 33) пересекаются в точке $(2;3)$. Координаты этой точки являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} y=2x-1 \\ y=\frac{3}{2}x, \end{cases}$$

а значит и решением исходной системы.

Ответ: $x=2$; $y=3$. ▲

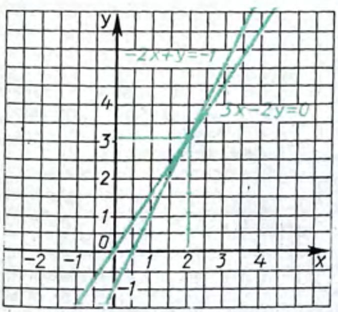


Рис. 33

ЗАДАНИЯ

Решить графически систему уравнений:

1) $\begin{cases} 3x+y=11, \\ x-y=1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+2y=6, \\ -x-y=-2. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 6x+3y=-3, \\ -2x+y=-5 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{1}{2}x-2y=7, \\ -3x+\frac{1}{2}y=4. \end{cases}$

Система линейных уравнений с двумя неизвестными может:

1) иметь одно решение (рис. 34);

2) не иметь решений (рис. 35);

3) иметь бесконечное множество решений (рис. 36).

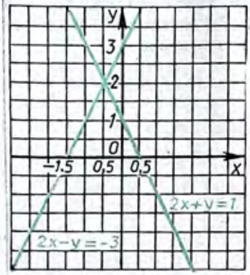


Рис. 34

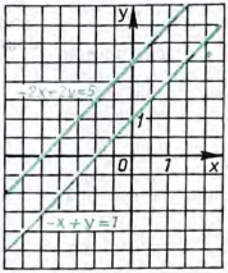


Рис. 35

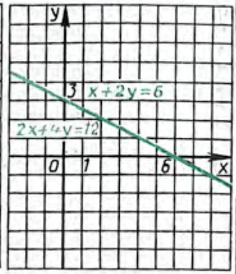


Рис. 36

ПРИМЕРЫ

1) Найдем два числа, сумма которых равна 22, а разность между удвоенным первым числом и вторым равна 2.

△ Пусть x — первое число; y — второе число, тогда из условия следует, что

$$\begin{cases} x+y=22, \\ 2x-y=2. \end{cases}$$

Решим систему способом сложения:

$$\begin{array}{l} +\begin{array}{l} x+y=22, \\ 2x-y=2 \end{array} \\ \hline 3x \quad\; =24,\ x=8; \end{array}$$

$8+y=22$, $y=22-8$, $y=14$.

Ответ. 8; 14. ▲

2) Расстояние между двумя пристанями реки равно 75 км. Это расстояние катер проходит по течению реки за 3 ч, а против течения — за 5 ч. Найти ско-

ЗАДАНИЯ

1) Найти два числа, разность которых равна 3, а сумма первого и удвоенного второго числа равна 15.

2) Туристы проплыли на моторной лодке вниз по течению реки 48 км, а затем — 24 км против течения. На преодоление расстояния по течению реки туристы затратили 4 ч, а против течения — 3 ч. Каковы собственная скорость лодки и скорость течения реки?

3) Двое рабочих получили за работу 51 300 р.; первый работал 20 дней, а второй — 21 день. Сколько получает в день каждый из этих рабочих, если первый за 3 дня работы получает на 1000 р. больше, чем второй за 2 дня?

рость движения катера в стоячей воде и скорость течения реки.

$\triangle$ x км/ч — скорость катера в стоячей воде;
y км/ч — скорость течения реки,
тогда
$(x+y)$ км/ч — скорость катера по течению реки,
$(x-y)$ км/ч — скорость катера против течения реки;
$(x+y)\cdot 3$ км — расстояние, пройденное катером по течению реки за 3 ч.

По условию $(x+y)\cdot 3=75$.
$(x-y)\cdot 5$ км — расстояние, пройденное катером против течения реки за 5 ч.
По условию $(x-y)\cdot 5=75$.

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases}(x+y)\cdot 3=75,\\(x-y)\cdot 5=75.\end{cases}$$

Решим ее:

$$\begin{cases}3x+3y=75, & \Big|\cdot 5\\5x-5y=75. & \Big|\cdot 3\end{cases}$$

$$+\begin{array}{l}15x+15y=375,\\15x-15y=225\\\hline 30x\qquad\quad=600,\end{array}$$

откуда $x=600:30$, $x=20$;
$3\cdot 20+3y=75$, $3y=75-60$,
$3y=15$, $y=5$.

Ответ. Скорость катера в стоячей воде 20 км/ч; скорость течения реки 5 км/ч. ▲

4) Две бригады за январь изготовили 1320 деталей. В феврале первая бригада увеличила выпуск деталей на 10%, а вторая — на 8%; поэтому в феврале две бригады изготовили вместе 1438 деталей. Сколько деталей изготовила каждая бригада в январе?

Вспомним!

Один процент (1%) — это сотая часть от числа.
n% от числа A находятся так:

$$\frac{A\cdot n}{100}.$$

Например, 5% от числа 520 находят так: $\frac{520\cdot 5}{100}=26$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 7

1. Решить способом подстановки систему уравнений

$$\begin{cases} x-y=2, \\ 2x+5y=11. \end{cases}$$

2. Решить способом сложения систему уравнений

а) $\begin{cases} 3x-y=7, \\ -2x+y=-3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x+3y=-1, \\ 3x+2y=0. \end{cases}$

3. Решить графически систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=1, \\ 2x-y=-4. \end{cases}$$

4. Длина прямоугольника равна удвоенной его ширине без 2 см. Периметр прямоугольника равен 44 см. Найти длину и ширину прямоугольника.

Решение (возможный вариант оформления)

1. $\begin{cases} x-y=2, \\ 2x+5y=11, \end{cases}$ $x=2+y;$

$2(2+y)+5y=11,\ 4+2y+5y=11.$

$7y=11-4,\ 7y=7,\ y=1;$

$x=2+1=3.$

Ответ. $x=3,\ y=1.$

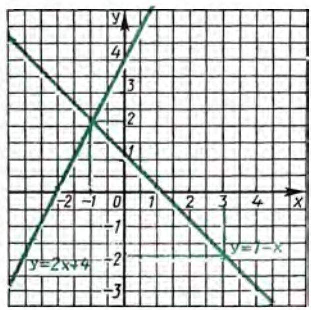


Рис. 37

2. а) $+\begin{cases} 3x-y=7, \\ -2x+y=-3 \end{cases}$

$\overline{\quad x=4; \quad}$

$3\cdot4-y=7,\ 12-y=7,\ -y=-5,\ y=5.$

Ответ. $x=4,\ y=5.$

б) $\begin{cases} 5x+3y=-1, \\ 3x+2y=0; \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot 2 \\ \cdot(-3) \end{vmatrix} \quad + \begin{array}{l} 10x+6y=-2, \\ -9x-6y=0, \\ \hline x=-2; \end{array}$

$3\cdot(-2)+2y=0,\ -6+2y=0,\ 2y=6,\ y=3.$

Ответ. $x=-2,\ y=3.$

3. $\begin{cases} x+y=1, \\ 2x-y=-4, \end{cases}$ $\begin{cases} y=1-x, \\ y=2x+4. \end{cases}$

Ответ. $x=-1,\ y=2$ (рис. 37).

x	0	3
y	1	−2

x	0	−2
y	4	0

4. Пусть x см — ширина прямоугольника; $(2x-2)$ см — длина прямоугольника.

Периметр прямоугольника равен 44 см. Периметр P прямоугольника со сторонами a и b находится по формуле $P=2a+2b$, поэтому

$$2x+2(2x-2)=44,\ 2x+4x-4=44,\ 6x-4=44,$$
$6x=44+4,\ 6x=48,\ x=8;\ 2\cdot 8-2=14.$

Ответ. Ширина прямоугольника 8 см; длина 14 см.

ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ СТРАНИЦЫ

1. Диофантовы уравнения. Как мы знаем, графиком линейного уравнения с двумя неизвестными $ax+by=c$ является прямая линия. Пары чисел — координаты x и y каждой точки этой прямой — есть решения данного линейного уравнения, т. е. каждое линейное уравнение имеет бесконечное множество решений. Уравнение с несколькими неизвестными называется неопределенным.

В математике существует класс задач, занимающихся решением неопределенных уравнений в целых числах. Рассмотрением решений уравнений в целых числах занимался знаменитый александрийский математик *Диофант* (II—III вв.), поэтому такие уравнения часто называют «диофантовыми». Но и теперь еще нет общих методов решения таких уравнений. Может быть, их когда-нибудь найдете вы.

Например, уравнение $2x-y=0$ имеет среди целых чисел бесконечное множество решений (для нахождения его решений достаточно взять вместо x любое целое число, тогда y будет равен числу, в два раза большему: $y=2x$).

Однако ряд практических задач на нахождение решений линейного уравнения с двумя неизвестными имеет по ряду причин либо ограниченное число решений, либо единственное. Рассмотрим примеры таких задач.

Задача 1. Допустим, что имеются только пятирублевые и трехрублевые купюры. Как этими деньгами заплатить 35 р.? (Сдачи получить нельзя.)

△ Пусть x — количество пятирублевых, а y — количество трехрублевых купюр. По условию

$$5x+3y=35,$$

откуда

$$5x=35-3y,$$

$$x=\frac{35-3y}{5}=\frac{35}{5}-\frac{3y}{5},\quad x=7-\frac{3y}{5}.$$

Очевидно, что x и y — целые неотрицательные числа; поэтому в последнем соотношении y должен принимать только такие значения, при которых $\frac{3y}{5}$ будет целым числом, причем не большим 7.

Такие значения y можно найти, перебирая подряд числа 1, 2, 3, ..., 10, 11. Указанным условиям удовлетворяют значения $y_1=5$ и $y_2=10$. Зная, что $x=7-\frac{3y}{5}$, находим $x_1=4$, $x_2=1$.

Ответ. 1) 4 пятирублевых и 5 трехрублевых купюр.
2) 1 пятирублевая и 10 трехрублевых купюр. ▲

Задача 2. Найти двузначное число, первая цифра которого равна разности между этим числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке.

△ Пусть a — первая цифра, b — вторая цифра числа. По условию

$$a=\overline{ab}-\overline{ba} \text{ или } a=(10a+b)-(10b+a),$$
$$a=10a+b-10b-a.$$

Выразим одно из неизвестных через другое:

$$9b=8a,\ b=\frac{8}{9}a.$$

Полученное уравнение имеет бесконечное множество решений среди целых чисел (достаточно в качестве a взять числа, делящиеся нацело на 9). Однако предложенная задача имеет единственное решение, так как по условию числа a и b — однозначные (они являются цифрами в двузначном числе). Тогда решение становится очевидным: $a=9$; $b=8$. Искомое число 98. ▲

Задача 3. Нашей учительнице в 1979 году исполнилось столько лет, какова сумма цифр года ее рождения. В каком году она родилась?

△ Пусть учительница родилась в $\overline{19xy}$ году. Тогда из условия

$$1+9+x+y=1979-\overline{19xy},$$

или

$$10+x+y=1979-(1900+10x+y),$$
$$10+x+y=79-10x-y,\ 11x+2y=69,$$
$$x=(69-2y):11.$$

Для решения последнего уравнения учитываем, что:
1) x и y — однозначные числа; 2) выражение $69-2y$ должно нацело разделиться на 11.

Можно, конечно, перебрать в качестве y все натуральные числа от 0 до 9 — это тоже нетрудоемкая работа. А можно рассуждать так: самое большое значение y может быть равно 9, $2\cdot y=2\cdot 9=18$, $69-18=51$. Между 51 и 69 только два числа делятся нацело на 11 — это 55 и 66, значит, $2y$ может быть равно либо 14, либо 3 ($69-2y=55$ или $69-2y=66$). Но $2y$ не может равняться 3, так как y должно быть целым, значит, $2y=14$, откуда $y=7$. Тогда $x=(69-14):11=5$. Дата рождения учительницы 1957 год. ▲

Подумайте, а не могла ли учительница родиться в прошлом веке?

ЗАДАНИЕ.

Решите еще задачи.

Задача 4. Трехзначное число оканчивается цифрой 7. Если переставить эту цифру на первое место, то получится число, в 2 раза и еще на 21 единицу большее первоначального. Определите это число.

Задача 5. В комнате было несколько стульев на четырех ножках и табуреток на трех ножках. После того как их все заняли, оказалось, что ног у сидящих людей и ножек у всех стульев и табуреток 49. Сколько было стульев и табуреток?

2. График уравнения с двумя переменными. Графиком уравнения с двумя переменными служат все точки координатной плоскости, координаты которых $(x; y)$ являются решениями данного уравнения.

Так как в уравнении с двумя переменными неизвестные x и y, вообще говоря, могут встречаться в любых степенях, под знаком модуля и т. д., вид графиков уравнений может быть разнообразен. Например:

1) Графиком уравнения $x^2+y^2=R^2$ является окружность с центром в начале координат и радиусом R. График уравнения $x^2+y^2=9$ $(R=3)$ изображен на рисунке 38.

2) График уравнения $x-y^2=0$ изображен на рисунке 39.

Очевидно, в обоих случаях зависимости переменной y от переменной x, заданные уравнениями, не являются функциями, так как не каждому значению x соответствует единственное значение y.

Попробуйте построить график уравнения $x^2-y=0$. Выясните, является ли зависимость $y(x)$, определяемая данным уравнением, функцией.

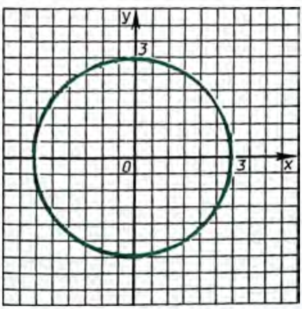


Рис. 38

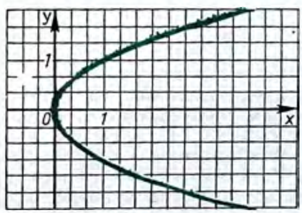


Рис. 39

3. Решите следующие **задачи** с помощью уравнений или систем уравнений.

1) У мальчика столько сестер, сколько и братьев, а у его сестры вдвое меньше сестер, чем братьев. Сколько сестер и братьев в этой семье?

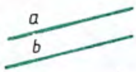
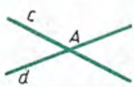
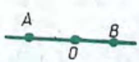
2) Летели галки,
Сели на палки.
Сели по одной —
Галка лишняя.
Сели по две —
Палка лишняя.
Сколько было галок
И сколько было палок?

3) Отец говорит сыну: «10 лет назад я был в 10 раз старше тебя, а через 22 года я буду только в 2 раза старше тебя». Сколько сейчас лет отцу и сколько сыну?

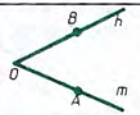
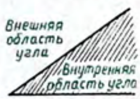
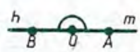
4) На 1000 р. купили 40 экземпляров книг по ценам 10, 40 и 120 рублей. Сколько книг и по какой цене было куплено?

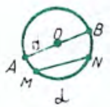
ГЛАВА II. ГЕОМЕТРИЯ

§ 8. Основные понятия геометрии

Название геометрической фигуры	Рисунок и обозначение на рисунке	Возможные обозначения в тексте	Определения и свойства
Точка		$A, B, C, \ldots$ (большими буквами латинского алфавита)	
Прямая		$a, b, c, \ldots$ (малыми буквами латинского алфавита) AB (большими буквами латинского алфавита)	
Параллельные прямые		$a \parallel b$	Определение. Две прямые называются параллельными, если они не имеют общих точек
Пересекающиеся прямые		$c \times d = A$	Определение. Две прямые называются пересекающимися, если они имеют только одну общую точку
Луч		h или OA	Определение. Лучом называется часть прямой, ограниченная с одной стороны точкой
Дополнительные лучи		OA и OB дополнительные лучи	Определение. Дополнительными лучами называются два луча с общим началом и расположенные на одной прямой

Продолжение

Название геометрической фигуры	Рисунок и обозначение на рисунке	Возможные обозначения в тексте	Определения и свойства
			Свойство. Любая точка делит прямую на два луча
Отрезок		AB	Определение. Отрезком называется часть прямой, ограниченная двумя точками. Определение. Концами отрезка называются точки, ограничивающие отрезок
Угол	 	$\angle AOB$ $\angle O$ $\angle mh$ O — вершина угла OA и OB — стороны угла	Определение. Углом называется геометрическая фигура, состоящая из точки и двух лучей, исходящих из нее
Развернутый угол			Определение. Угол называется развернутым, если его стороны являются дополнительными лучами
Треугольник		$\triangle ABC$; A, B, C — вершины треугольника; $\angle A$ или $\angle BAC$ $\angle B$ или $\angle ABC$ $\angle C$ или $\angle ACB$ — углы треугольника; AB, BC, CA — стороны треугольника ABC	Определение. Треугольником называется геометрическая фигура, состоящая из трех точек и трех отрезков, попарно соединяющих эти точки

Название геометрической фигуры	Рисунок и обозначение на рисунке	Возможные обозначения в тексте	Определения и свойства
Окружность	 	$(O;\ r)$ или $(O;\ OM)$; O — центр окружности; r или OM — радиус; MN — хорда; d или AB — диаметр; MLN — дуга окружности	Определения. 1) Окружностью называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, расположенных на заданном расстоянии от одной точки плоскости, называемой центром окружности. 2) Радиус — отрезок, соединяющий центр с точкой окружности. 3) Хорда — отрезок, соединяющий две точки одной окружности. 4) Диаметр — хорда, проходящая через центр окружности. 5) Дуга — часть окружности, ограниченная двумя точками.

Сравнение геометрических фигур.
Две плоские геометрические фигуры Φ_1 и Φ_2 называются равными, если их можно совместить наложением (записывают $\Phi_1 = \Phi_2$).

ПРИМЕРЫ

Среди фигур, изображенных на рисунке 40:
1) Окружности с центрами O_1 и O_3 равны;
2) Отрезки AB и MN равны ($AB = MN$).

ЗАДАНИЕ

Среди треугольников, изображенных на рисунке 41, назвать равные.

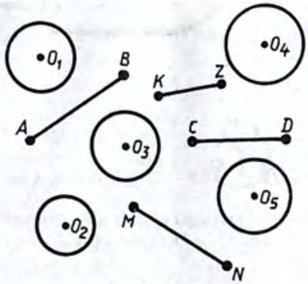


Рис. 40

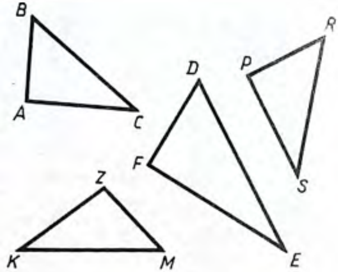


Рис. 41

Из двух отрезков меньшим считается тот, который при наложении на другой отрезок так, чтобы конец одного совпал с концом другого отрезка, составляет его часть.

Например, на рисунке 42 отрезок AC меньше отрезка AB (записывают $AC<AB$ или $AB>AC$).

Рис. 42

ПРИМЕР

На рисунке 43 $AB<CD$, $CD>MN$, $AB>MN$.

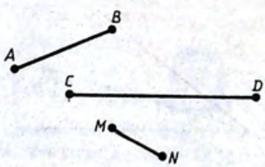


Рис. 43

ЗАДАНИЕ

На рисунке 44 сравнить отрезки KL и MN, XY и BC.

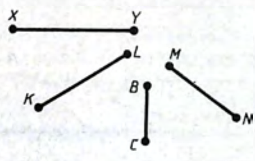


Рис. 44

Серединой отрезка называется точка, делящая его на два равных отрезка.

ПРИМЕР

На рисунке 45 точка D — середина отрезка AB, точка O — середина отрезка MN.

ЗАДАНИЕ

Указать середину отрезков AB, BC, AC (рис. 46).

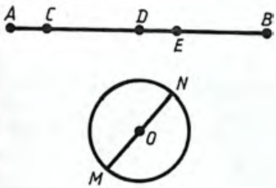


Рис. 45

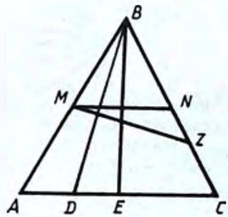


Рис. 46

Из двух углов меньшим считается тот, который при наложении составляет часть другого угла (при наложении нужно совместить вершины углов и по одной стороне каждого угла так, чтобы внутренние области располагались по одну сторону от общей стороны.

Например, на рисунке 47 $\angle BAC < \angle KLM$ (или $\angle KLM > \angle BAC$), так как при наложении угол BAC составляет часть угла KLM.

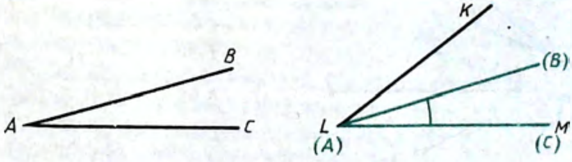


Рис. 47

ПРИМЕР

На рисунке 48 $\angle AOB < \angle AOC$, $\angle EOB > \angle BOD$.

ЗАДАНИЕ

Сравнить $\angle AOC$ и $\angle AOD$, $\angle COK$ и $\angle FOD$, $\angle KOD$ и $\angle FOE$ (рис. 48).

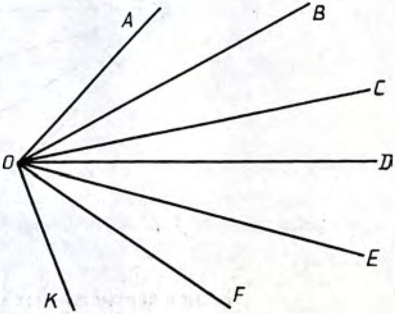


Рис. 48

> Луч, делящий угол пополам, называется *биссектрисой* угла.

ПРИМЕРЫ

1) Луч c — биссектриса угла ab (рис. 49).

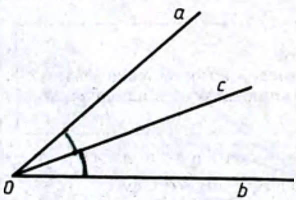


Рис. 49

ЗАДАНИЯ

$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 5 = \angle 6$ (рис. 51).

1) Назвать биссектрисы углов BOF, AOK.

2) Биссектрисой каких углов является луч OE?

2) $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$ (рис. 50). OB — биссектриса угла AOC, OC — биссектриса углов BOD и AOE, OD — биссектриса угла EOC.

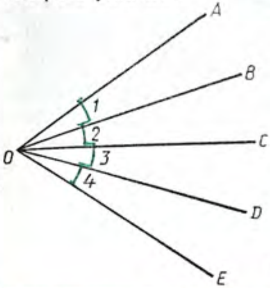


Рис. 50

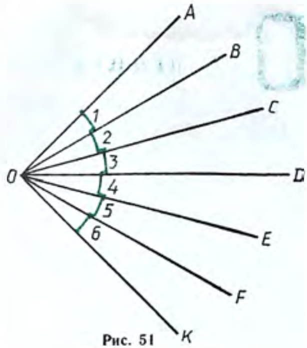
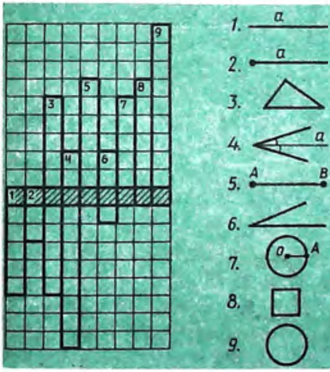


Рис. 51



Если в вертикальных столбцах правильно записать названия геометрических фигур, изображенных на рисунках, то в выделенной строке образуется слово, от которого происходит название изучаемого вами раздела геометрии — планиметрии.

Измерение отрезков.

Длина отрезка — это положительное число, которое показывает, сколько раз единица измерения и ее части укладываются в измеряемом отрезке.

Соотношения между основными единицами длины.

В 1 сантиметре 10 миллиметров: 1 см = 10 мм, 1 мм = 0,1 см.
В 1 метре 100 см: 1 м = 100 см, 1 см = 0,01 м.
В 1 километре 1000 м: 1 км = 1000 м, 1 м = 0,001 км.

ПРИМЕРЫ

1) Найдем длину отрезка AB (рис. 52): $AB = 2$ см 6 мм.

2) Найдем длину отрезка CD (рис. 53): $CD \approx 2{,}7$ см.

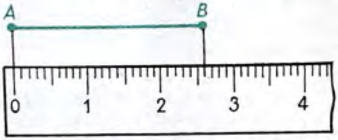


Рис. 52

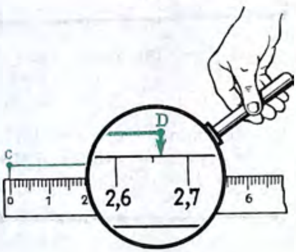


Рис. 53

ЗАДАНИЯ

Найти длину отрезков MN и EF (рис. 54).

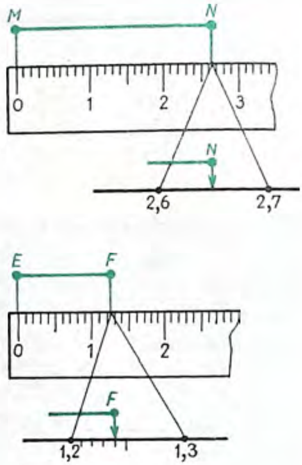


Рис. 54

Правило округления.

Если первая из отбрасываемых цифр больше или равна 5, то последняя остающаяся цифра увеличивается на 1; если первая из отбрасываемых цифр меньше 5, то последняя остающаяся цифра не меняется.

Например, округлим до десятых долей числа:

$$2{,}34 \approx 2{,}3;\ 2{,}371 \approx 2{,}4;\ 2{,}35 \approx 2{,}4;\ 8{,}9499 \approx 8{,}9;\ 8{,}97 \approx 9{,}0.$$

Свойства длин отрезков.

1. Равные отрезки имеют равные длины.
2. Меньший отрезок имеет меньшую длину.
3. Если точка делит отрезок на два отрезка, то длина всего отрезка равна сумме длин этих отрезков.

ПРИМЕРЫ

1) $AB=2{,}4$ см, $BC=0{,}9$ см (рис. 55). Найдем AC.

Рис. 55

$\triangle$ $AC=AB+BC$, $AC=2{,}4+0{,}9=$ $=3{,}3$ (см). $\blacktriangle$

2) $MN=7$ см, $KN=4{,}4$ см (рис. 57). Найдем MK.

Рис. 57

$\triangle$ $MN=MK+KN$, откуда $MK=MN-KN=7$ см $-4{,}4$ см $=2{,}6$ см. $\blacktriangle$

3) На прямой отмечены точки A, B, C, D (рис. 59). Найдем AC, если $CD=$ $=1{,}5$ см, $AB=8$ см, $DB=3{,}5$ см.

Рис. 59

$\triangle$ Отметим на рисунке 61 отрезки с заданной длиной:

$AC=AB+BC=8$ см $+BC$, но $BC=$ $=BD-CD=3{,}5$ см $-1{,}5$ см $=2$ см, $AC=$ $=8$ см $+2$ см $=10$ см. $\blacktriangle$

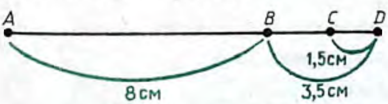


Рис. 61

4) На прямой точка B лежит между точками A и C, $AB=12$ см, $BC=8$ см.

ЗАДАНИЯ

1) Найти CE, если $CD=$ $=0{,}6$ см, $DE=1{,}5$ см (рис. 56).

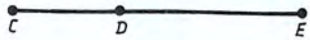


Рис. 56

2) Найти CD, если $AD=$ $=23$ см, $AB=8$ см, $BC=$ $=4$ см (рис. 58).

Рис. 58

3) Найти LN, если $KN=$ $=18{,}5$ см, $KM=15$ см, $LM=$ $=4$ см (рис. 60).

Рис. 60

4) На прямой точка K лежит между точками M и N (рис. 63),

Найдем расстояние между серединами отрезков AB и BC.

△ M — середина AB, N — середина BC (рис. 62). Нужно найти длину MN:

$$AM = MB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 12 \text{ см} = 6 \text{ см},$$

$$BN = NC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 8 \text{ см} = 4 \text{ см},$$

$$MN = MB + BN = 6 \text{ см} + 4 \text{ см} + 10 \text{ см}. \blacktriangle$$

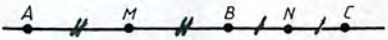


Рис. 62

A — середина отрезка MK, B — середина отрезка KN, $AB = 7$ см.

Найти длину отрезка MN.

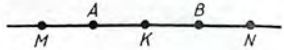


Рис. 63

Измерение углов.

За единицу измерения углов обычно принимают *градус* — угол, равный $\frac{1}{180}$ части развернутого угла.

Положительное число, показывающее, сколько раз градус и его части укладываются в данном угле, называется градусной мерой (величиной) угла.

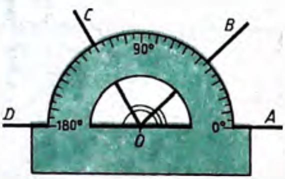


Рис. 64

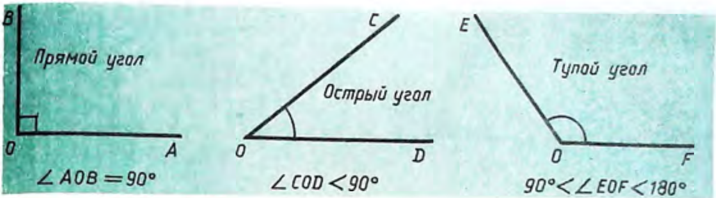
$\frac{1}{60}$ часть градуса называется минутой; в 1 градусе 60 минут (пишут $1° = 60'$).

$\frac{1}{60}$ часть минуты называется секундой; в 1 минуте 60 секунд (пишут $1' = 60''$).

Измерение угла с помощью транспортира (рис. 64): $\angle AOB = 45°$, $\angle AOC = 120°$, $\angle AOD = 180°$ (развернутый угол).

Свойства величин (мер) углов.

1. Равные углы имеют равные градусные меры.
2. Меньший угол имеет меньшую градусную меру.
3. Неразвернутый угол меньше 180°.
4. Если луч делит угол на два угла, то градусная мера всего угла равна сумме градусных мер образовавшихся двух углов.



Два угла называются *смежными*, если у них одна сторона общая, а две другие являются дополнительными лучами.

Сумма смежных углов равна 180° (рис. 65).

Два угла называются *вертикальными*, если стороны одного угла являются дополнительными лучами сторон другого угла.

Вертикальные углы равны (рис. 66).

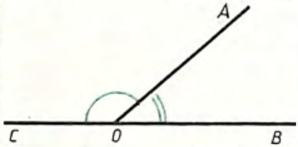


Рис. 65

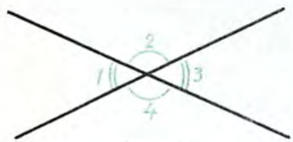


Рис. 66

ПРИМЕРЫ

Луч OD делит угол AOB на два угла. Найдем:

1) $\angle AOB$, если $\angle AOD = 37°$, $\angle DOB = 63°$.

2) $\angle AOB$, если $\angle AOD = 21°48'$, $\angle DOB = 34°53'$.

3) $\angle AOD$, если $\angle AOB = 173°$, $\angle DOB = 83°$.

4) $\angle DOB$, если $\angle AOB = 120°20'$, $\angle AOD = 45°30'$.

В каждом случае указать, какой искомый угол: тупой, прямой, острый, развернутый.

△ Чтобы лучше понять условие и требование задачи, полезно сделать по усло-

ЗАДАНИЯ

Луч OC делит угол AOB на два угла. Найти:

1) $\angle AOB$, если $\angle AOC = 48°$, $\angle COB = 54°$.

2) $\angle AOB$, если $\angle COA = 13°7'$, $\angle COB = 29°58'$.

3) $\angle AOC$, если $\angle AOB = 145°$, $\angle COB = 39°$.

4) $\angle COB$, если $\angle BOA = 58°14'$, $\angle COA = 17°40'$.

вию задачи чертеж от руки (рис. 67).

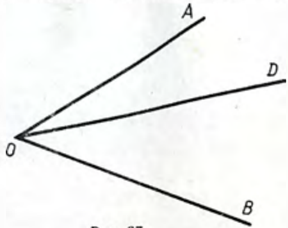


Рис. 67

Из условия следует, что $\angle AOB = \angle AOD + \angle DOB$.

1) $\angle AOB = 37° + 63° = 100°$,
$90° < 100° < 180°$, значит, $\angle AOB$ — тупой.

2) $\angle AOB = 21°48' + 34°53' = 55°101' = 56°41'$, так как $101' = 60' + 41' = 1° + 41'$, $56°41' < 90°$, значит, $\angle AOB$ — острый.

3) $\angle AOD = \angle AOB - \angle DOB = 173° - 83° = 90°$, значит $\angle AOD$ — прямой.

4) $\angle DOB = \angle AOB - \angle AOD = 120°20' - 45°30' = 119°80' - 45°30' = 74°50'$,
$74°50' < 90°$, значит, $\angle DOB$ — острый.

18

Если на угол $1°13'$ посмотреть в лупу с четырехкратным увеличением, какой угол мы увидим?

ПРИМЕР

Луч BD делит угол ABC на две части так, что угол ABD на 10° меньше угла DBC. Найдем угол DBC, если $\angle ABC = 68°$.
△ Пусть $\angle DBC = x°$ (рис. 68), тогда $\angle ABD = x° - 10°$, но

$$\underbrace{\angle ABD}_{x° - 10°} + \underbrace{\angle DBC}_{x°} = \underbrace{\angle ABC}_{68°}.$$

ЗАДАНИЯ

1) Луч MN делит угол KML на две части таким образом, что $\angle KMN = 53°$, а угол NML на 20° больше угла KMN. Найти угол KMN.

2) Луч OC делит угол AOB на две части так, что угол COB

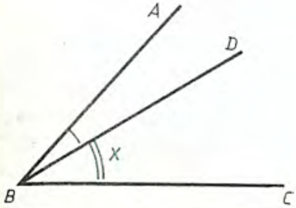


Рис. 68

Получим уравнение

$$x - 10 + x = 68.$$

Решим его: $2x = 68 + 10$, $2x = 78$, $x = 78 : 2$, $x = 39$, $\angle DBC = 39°$. ▲

на 33° меньше угла AOC. Найти угол AOC, если $\angle AOB = 124°$.

Алгебраическое (с помощью уравнений) решение — важный метод решения геометрических задач.

ПРИМЕР

Луч OC делит угол AOB на два угла так, что угол AOC в 2 раза больше угла COB. Найдем угол AOC, если $\angle AOB = 120°$.

△ Пусть $\angle AOC = x°$ (рис. 69), тогда $\angle COB = \frac{x°}{2}$, но

$$\underbrace{\angle AOB}_{120°} = \underbrace{\angle AOC}_{x°} + \underbrace{\angle COB}_{\frac{x°}{2}}.$$

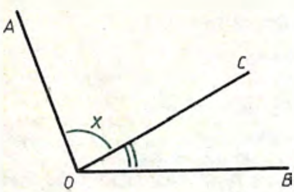


Рис. 69

ЗАДАНИЯ

1) Луч OM делит угол NOK на два угла таким образом, что угол NOM в 3 раза меньше угла MOK. Найти угол MOK, если $\angle NOK = 168°$.

2) Лучи OC и OD разделили угол AOB на три части (рис. 70) так, что $\angle COD = 2\angle AOD$, $\angle COB = 3\angle AOD$. Найти $\angle COD$, если $\angle AOB = 96°$.

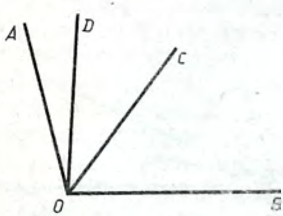


Рис. 70

Решим уравнение $120=x+\frac{x}{2}$, $1\frac{1}{2}x=$ $=120$, $x=120:1\frac{1}{2}=\frac{120\cdot 2}{3}=80$, $\angle AOC=80°$. ▲

Часто при решении задач в общем виде (без числовых данных) для обозначения величин углов используют буквы греческого алфавита: α (читается «альфа»), β (читается «бетта»), γ (читается «гамма»).

ПРИМЕР

Угол AOB лучом OC разбит на два угла (рис. 71). Найдем угол, образованный биссектрисами этих двух углов, считая, что величина угла AOB равна α.

△ После проведения биссектрис полученных углов (OM и ON) равные углы отметим одинаковым количеством дужек, а величины углов обозначим буквами β и γ.

Угол между биссектрисами равен $\beta+\gamma$. Выразим его через угол α. Очевидно, что

$$\beta+\beta+\gamma+\gamma=\alpha,\ 2\beta+2\gamma=\alpha,\ 2(\beta+\gamma)=$$
$$=\alpha,\ \beta+\gamma=\frac{\alpha}{2},$$

т. е. угол между биссектрисами углов, на которые разбился угол α произвольным лучом, выходящим из его вершины, равен половине угла α. ▲

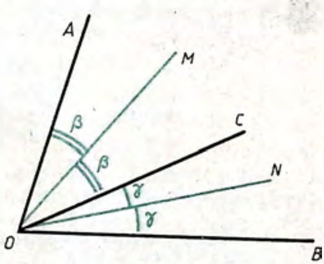


Рис. 71

ЗАДАНИЕ

Произвольный луч, исходящий из вершины развернутого угла, разделил его на два угла. Найти угол между биссектрисами образовавшихся двух углов.

Пользуясь выводом рассмотренного слева примера, можно сразу дать ответ, но лучше попробовать аналогичные рассуждения провести еще раз самостоятельно.

Испеченный пирог четырьмя разрезами по прямым линиям разрезать на 11 частей так, чтобы в каждой части было по одному цукату.

ПРИМЕР

Найдем смежные углы hk и kl, если $\angle hk : \angle kl = 2:3$ (рис. 72). (Меры углов hk и kl пропорциональны числам 2 и 3.)

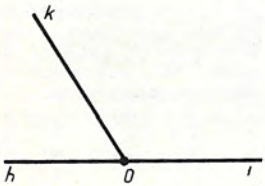


Рис. 72

$\triangle$ Если две величины (любые, необязательно меры углов) находятся в заданном отношении, значит, в каждой из них содержится одна и та же величина (обозначим ее через x) указанное число раз. В нашем случае в угле hk величина x содержится 2 раза, а в угле kl — 3 раза, т. е.

$$\angle hk = 2x, \ \angle kl = 3x.$$

Так как углы hk и kl — смежные, то их сумма равна 180°:

$$2x + 3x = 180.$$

Решая это уравнение, получим
$5x = 180$, $x = 180:5$, $x = 36$.
Значит, $\angle hk = 2x = 2 \cdot 36° = 72°$.

$$\angle kl = 3x = 3 \cdot 36° = 180°. \ \blacktriangle$$

ЗАДАНИЯ

1) Найти смежные углы, если их градусные меры пропорциональны числам 4 и 5.

2) Из вершины развернутого угла выходят два луча, делящие развернутый угол на три угла, величины которых пропорциональны числам 1, 4, 7. Найти эти углы.

Задачи на пропорциональность величин важно уметь решать. Они часто встречаются на практике.

Отношение масс планет Меркурия, Венеры, Земли, Юпитера, Сатурна, Нептуна (шесть из девяти планет Солнечной системы) следующее: 0,04:0,8:1:318:95:17.

Масса Земли $\underbrace{5\,980\,000\,000\,000\,000\,000\,000}_{\text{19 нулей}}$ т.

При желании, используя отношение масс планет, можно определить массу каждой из планет.

ПРИМЕРЫ

1) При пересечении двух прямых образовались четыре угла (рис. 73). Найдем каждый из этих углов, если $\angle 2 = 122°$.

△ $\angle 4 = \angle 2$ (как вертикальные), значит, $\angle 4 = 122°$;

$\angle 1 + \angle 2 = 180°$ (как смежные углы), значит, $\angle 1 = 180° - \angle 2 = 180° - 122° = 58°$;

$\angle 3 = \angle 1$ (как вертикальные), значит, $\angle 3 = 58°$. ▲

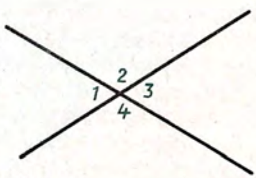


Рис. 73

ЗАДАНИЯ

1) При пересечении двух прямых образовались четыре угла, причем сумма двух из них равна 136°. Найти меры всех образовавшихся углов.

2) Найти каждый из четырех углов (см. рис. 73), если: а) $\angle 4 - \angle 1 = 25°$; б) $\angle 2 = 2\angle 3$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 8

1. Найти BC, если $AD = 29$ см, $AB = 5$ см, $CD = 7$ см (рис. 74).
2. Один из смежных углов равен 25°25′. Найти другой угол.
3. На рисунке 75 $\angle 2 = 48°$. Найти углы 1, 3, 4.

4. Луч OC делит угол AOB на две части таким образом, что угол AOC на 32° больше угла COB. Найти угол COB, если $\angle AOB = 172^\circ$.

Решение (возможный вариант оформления)

1. Дано: $AD = 29$ см, $AB = 5$ см, $CD = 7$ см (рис. 74).

Найти: BC.

Решение.
$AD = AB + BC + CD$, откуда
$BC = AD - AB - CD$,
$BC = 29$ см $- 5$ см $- 7$ см $= 17$ см.
Ответ. $BC = 17$ см.

Рис. 74

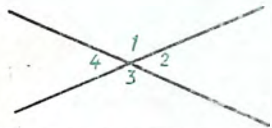


Рис. 75

2. Сумма смежных углов равна 180°, поэтому другой угол равен $180^\circ - 25^\circ 25' = 154^\circ 35'$.

3. Дано: $\angle 1 = 148^\circ$ (рис. 75).

Найти: $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$.

Решение.
$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ (как смежные), значит,
$\angle 2 = 180^\circ - \angle 1 = 180^\circ - 148^\circ = 32^\circ$.
$\angle 3 = \angle 1$ (как вертикальные), значит,
$\angle 3 = 148^\circ$.
$\angle 4 = \angle 2$, $\angle 4 = 32^\circ$.
Ответ. $\angle 2 = 32^\circ$, $\angle 3 = 148^\circ$, $\angle 4 = 32^\circ$.

4. Дано: $\angle AOB = 172^\circ$, $\angle AOC = \angle COB + 32^\circ$.

Найти: $\angle COB$.

Решение.
Сделаем чертеж по условию задачи (рис. 76). Пусть $\angle COB = x^\circ$, тогда $\angle AOC = (x + 32)^\circ$. По условию
$x + (x + 32) = 172$, $x + x + 32 = 172$, $2x = 172 - 32$, $2x = 140$, $x = 70$.
Ответ. $\angle COB = 70^\circ$.

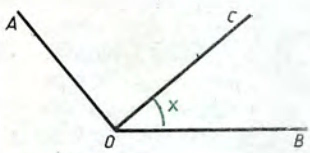


Рис. 76

1. В какую сторону откладываем?

Задача 1. Три точки A, B, C лежат на одной прямой, причем $AB=5$ см, $BC=8$ см. Какова длина отрезка AC?

△ Ответ хочется дать сразу: 13 см ($AB+BC=5$ см $+8$ см $=13$ см).

Отложим на прямой a от произвольной точки A вправо отрезок $AB=$ $=5$ см. От точки B отрезок BC можем отложить в ту же сторону и получить отрезок AC_1 (рис. 77), но можем отложить и влево, т. е. получить отрезок BC_2 (см. рис. 77). В последнем случае длина отрезка AC (т. е. отрезка AC_2) будет равна не сумме, а разности длин отрезков BC и AB:

$$AC=8 \text{ см}-5 \text{ см}=3 \text{ см}.$$

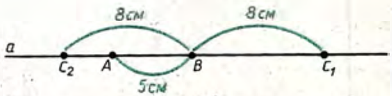


Рис. 77

Таким образом, задача имеет два различных решения:

$$AC=8 \text{ см или } AC=3 \text{ см}. \blacktriangle$$

Задача 2. $\angle AOB=45°$, $\angle BOC=60°$. Найти угол AOC (для каждого возможного случая сделать чертеж).

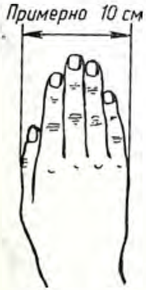
2. Измерительные инструменты всегда при тебе.

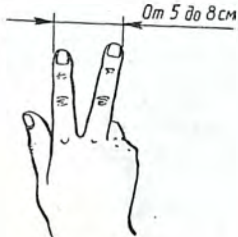
1) *Для измерения больших расстояний* полезно знать длину своего шага. Тогда, подсчитав количество шагов, можно определить пройденный путь.

Длины различных шагов одного и того же человека немного отличаются друг от друга. Однако можно воспользоваться средней длиной шага. Чтобы найти ее, нужно:

знать расстояние между двумя какими-нибудь неблизкими предметами (например, двумя телеграфными столбами) либо с помощью рулетки (тут же не обойтись без измерительного прибора!) отмерить на дороге, например, 20 м и поставить в начале и конце отмеренного отрезка вехи;

пройти обычным своим шагом путь





известной длины L, считая при этом шаги (пусть их получилось n);

разделить L на n.

2) *Для обмера предметов средней длины* полезно знать, что:

ширина ладони вместе с прижатым к ней большим пальцем примерно равна 10 см;

расстояние между концами раздвинутых среднего и указательного пальцев у разных людей колеблется от 5 до 8 см;

расстояние между концами раздвинутых большого и указательного пальцев (в народе называют четвертью) примерно равно 18 см (6 четвертей, отложенных последовательно, дают расстояние, примерно равное метру);

расстояние между концами пальцев вытянутой горизонтально одной руки и плечом другой руки близко к 1 м.

Измерьте на себе эти расстояния и некоторые из них запомните.

Для измерения предметов средней величины удобно обмер произвести сначала любой веревкой (или ниткой), затем, положив веревку на гладкую поверхность, измерить ее, воспользовавшись известными длинами частей своего тела.

3) *Для измерения предметов малой длины* полезно знать размеры каких-нибудь маленьких предметов, которые могут быть у вас всегда с собой, или каких-то частей своего тела.

С этой целью приведем некоторые размеры:

ширина вашего ногтя примерно равна 1 см;

диаметр однокопеечной монеты равен 1,5 см;

диаметр пятикопеечной монеты равен 2,5 см.

Для измерения маленьких длин лучше всего произвести обмер, например, с помощью полоски бумаги, а затем уже полоску измерить имеющимися у вас средствами.

3. Будь внимателен!

1) На отрезке AB отмечены точки M и N (рис. 78). Сколько получилось отрезков? Если вы видите только три отрезка (AM, MN, NB), то вы ошибаетесь. А отрезки AN, AB, MB?

Теперь посчитайте, сколько отрезков изображено на рисунке 79.

2) Прямоугольник $ABCD$ разделен прямыми MN и EF на части (рис. 80). Сколько получилось разных прямоугольников? Не торопитесь с ответом: их намного больше четырех. Перечислите их.

3) Сколько треугольников изображено на рисунке 81?

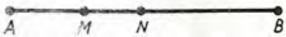


Рис. 78

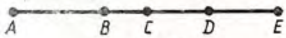


Рис. 79

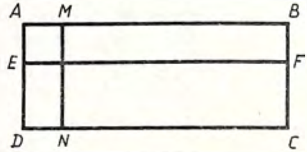


Рис. 80

4. Задача. Две каменные лестницы, обе имеющие высоту 1 м и основание 2 м, покрыты ковровыми дорожками. Однако первая лестница имеет 4 ступеньки, а вторая — 6. Какова длина ковровых дорожек, покрывающих каждую из этих лестниц (рис. 82)?

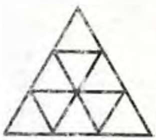


Рис. 81

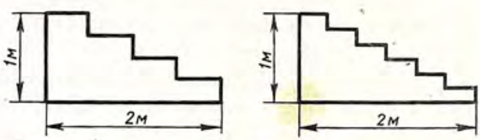
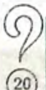


Рис. 82



Длина спички 4,2 см. Из 13 спичек сложить метр.

5. Соединить точки. Очевидно, провести 3 отрезка, проходящие через четыре заданные точки, не отрывая карандаш от бумаги, просто (рис. 83).

Несколько сложнее, также не отрывая карандаш от бумаги, провести 4 отрезка так, чтобы они прошли через заданные 9 точек (рис. 84).

Рис. 83

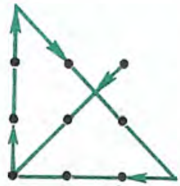


Рис. 84

Рис. 85

Попробуйте аналогично соединить 16 точек (рис. 85) шестью отрезками.

6. Исчезновение отрезка (фокус).

Начертите на прямоугольном листе бумаги линию, соединяющую противоположные углы листа, и десять вертикальных отрезков одинаковой длины на одинаковых расстояниях друг от друга (рис. 86).

Разрежьте лист по линии и передвиньте нижнюю половину вниз влево на величину расстояния между соседними отрезками (рис. 87). Подсчитайте, сколько теперь отрезков. Их стало 9. Куда «делся» один отрезок?

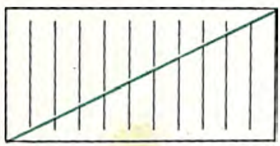


Рис. 86

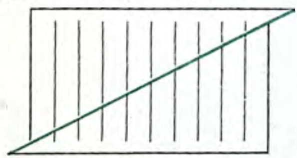


Рис. 87

7. Почти шифровка.

Пожалуй, только посвященный в «секрет» поймет, что в данной окружности (рис. 88) начерчены не произвольные отрезки, а написаны определенные слова. Для прочтения написанного нужно

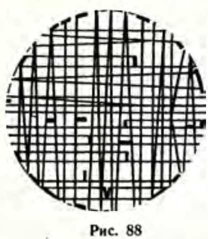


Рис. 88

Рис. 89

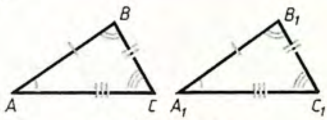
посмотреть на лист бумаги так, как показано на рисунке 89, после этого можно повернуть лист на 90° в плоскости рисунка и прочесть тем же способом другие слова.

Чем объяснить такой способ чтения «длинных» слов?

§ 9. Треугольники

В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы (рис. 90).

В равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны (см. рис. 90)



$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

Рис. 90

Чтобы построить треугольник, равный данному, нужно уметь строить:
отрезок, равный данному;
угол, равный данному.

Конечно, можно это сделать с помощью линейки с делениями и транспортира. Однако в математике требуется умение выполнять построение, используя только циркуль и линейку без делений.

ПРИМЕРЫ

1) На рисунке 91 показан порядок построения отрезка A_1B_1, равного отрез-

Рис. 91

ЗАДАНИЯ

1) Построить с помощью циркуля и линейки без делений отрезок MN, равный стороне AB треугольника ABC (рис. 92)

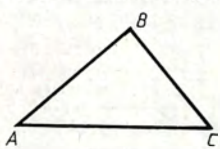


Рис. 92

ку AB (в кружках обозначены номера этапов построения). Разберитесь самостоятельно: элементы каких фигур и с какой целью строятся на каждом этапе. Это поможет осмысленно запомнить порядок построения.

2) На рисунке 93 показан порядок построения угла A_1, равного углу A, с помощью циркуля и линейки (в кружках обозначены номера этапов построения).

2) Построить с помощью циркуля и линейки угол B_1, равный углу B треугольника ABC (рис. 92).

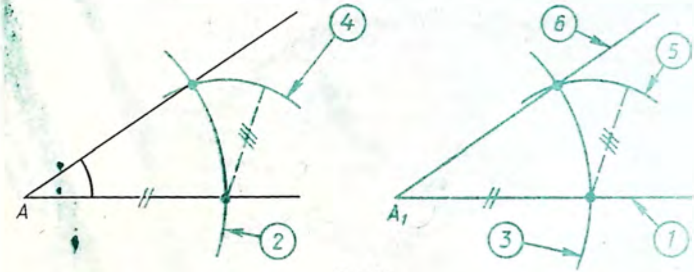
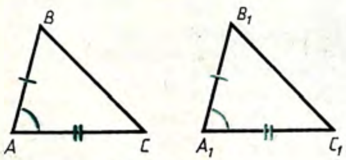


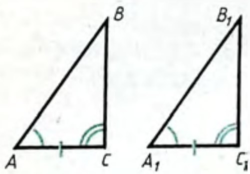
Рис. 93

Первый признак равенства треугольников.
Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 94).



$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

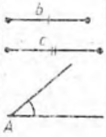
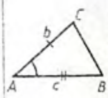
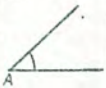
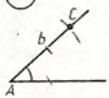
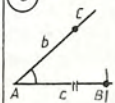
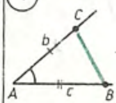
Рис. 94

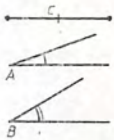
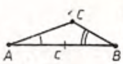
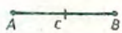
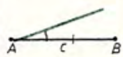
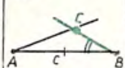


$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

Рис. 95

Второй признак равенства треугольников.
Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 95).

Построение треугольника по двум сторонам и углу между ними					
Дано	Требуется построить	Построение			
		1 	2 	3 	4 

Построение треугольника по стороне и прилежащим к ней углам				
Дано	Требуется построить	Построение		
		1 	2 	3 

Третий признак равенства треугольников.
Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 96).

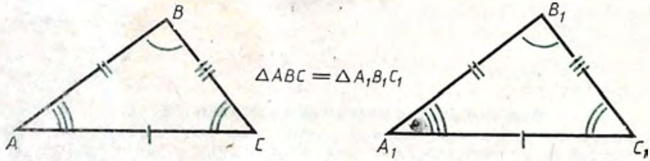
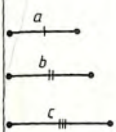
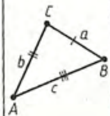
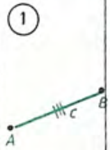
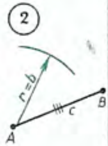
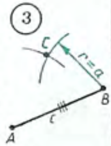
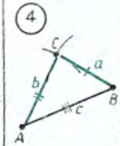


Рис. 96

Построение треугольника по трем сторонам					
Дано	Требуется построить	Построение			
					

Рассмотрим конкретные задачи на *построение треугольников* по известным трем элементам (с применением измерительных инструментов).

ПРИМЕРЫ

1) Построим $\triangle KLM$, если $LK = 3$ см, $LM = 4$ см, $\angle L = 35°$.

$\triangle$ Прежде чем выполнить построение, проведем а н а л и з условия задачи.

Сделаем «от руки» чертеж треугольника KLM, предположив, что мы его уже построили, и отметим те элементы, которые заданы в условии (рис. 97). Видим, что сможем построить $\triangle KLM$, так как в нем известны две стороны и угол между ними.

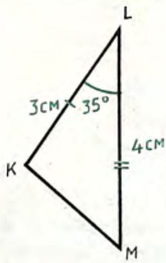


Рис. 97

ЗАДАНИЯ

1) Построить $\triangle ABC$, если $AB = 4{,}5$ см, $BC = 4$ см, $\angle B = 75°$.

2) Построить $\triangle CDE$, у которого $DC = 3{,}3$ см, $DE = 5{,}1$ см, $\angle D = 115°$.

П о с т р о е н и е (рис. 98).

1. $\angle KLM=35°$.
2. $LK=3$ см.
3. $LM=4$ см.
4. KM.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$\triangle KLM$ — искомый, так как $\angle KLM=35°$, $LK=3$ см, $LM=4$ см.

И с с л е д о в а н и е.

Построение угла KLM можно было начать от любого луча плоскости и построить бесчисленное множество треугольников по заданным элементам. Но все они были бы равны по первому признаку равенства треугольников. В таком случае говорят, что задача имеет *единственное решение.* ▲

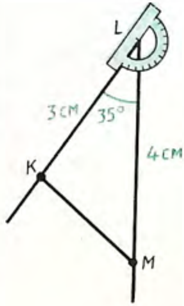


Рис. 98

2) Построим $\triangle ABC$, если $AB=4{,}5$ см, $\angle A=40°$, $\angle B=55°$.

$\triangle$ А н а л и з (рис. 99).

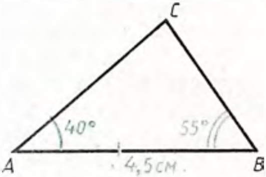


Рис. 99

Построение треугольника ABC возможно по стороне и двум прилежащим к ней углам.

П о с т р о е н и е (рис. 100).

1. $AB=4{,}5$ см.
2. $\angle A=40°$.
3. $\angle B=55°$.
4. Точка C.

Д о к а з а т е л ь с т в о того, что $\triangle ABC$ — искомый, и и с с л е д о в а н и е проведите самостоятельно. ▲

3) Построить $\triangle FKL$, у которого $KL=2{,}5$ см, $\angle K=17°$, $\angle L=52°$.

4) Построить $\triangle ABC$, если $AC=6{,}1$ см, $\angle A=125°$, $\angle C=20°$.

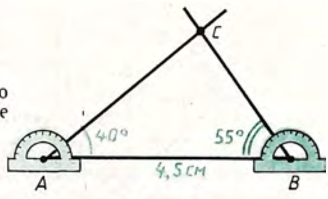


Рис. 100

3) Построим $\triangle DEF$, если $DE=2{,}5$ см, $EF=3$ см, $FD=4$ см.

$\triangle$ Анализ (рис. 101).

Построение будем вести по схеме построения треугольника по трем сторонам.

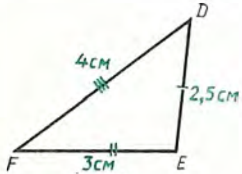


Рис. 101

Построение (рис. 102).

1. $FE=3$ см.
2. Окружность с центром в точке F и радиусом $r=4$ см.
3. Окружность с центром в точке E и радиусом $r=2{,}5$ см.
4. Точка D.
5. FD.
6. ED.

Доказательство и исследование проведите самостоятельно. ▲

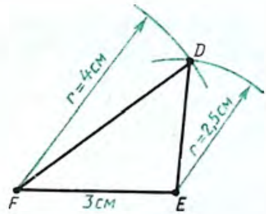


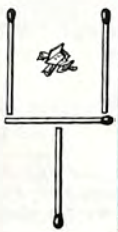
Рис. 102

5) Построить треугольник, стороны которого имеют длины 5 см, 4,5 см, 6 см.

6) Построить $\triangle KLM$, если $KL=1{,}5$ см, $LM=2{,}3$ см, $KM=0{,}02$ м.

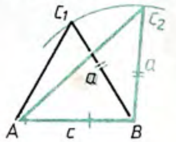
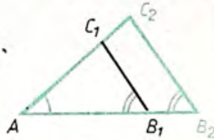
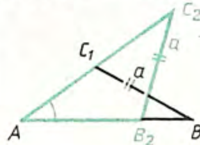
При решении задач на построение после выполнения построения необходимо доказать, что построенная фигура — искомая, провести исследование результата построения (выявить, в каких случаях решение существует; сколько решений имеет задача). Таким образом решение задачи на построение осуществляется в четыре этапа:

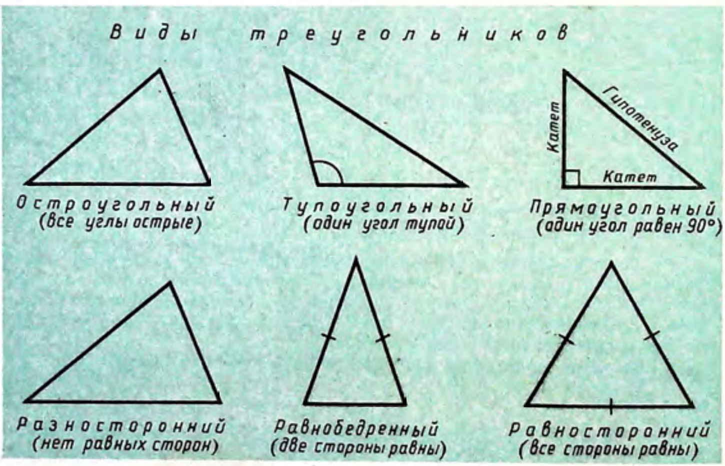
1) *анализ,* 2) *построение,* 3) *доказательство,* 4) *исследование.*



21

Переложите две спички таким образом, чтобы "совок" не изменил форму, а "мусор" оказался вне "совка".

По двум заданным элементам можно построить разные треугольники		
a и c	$\angle A$ и $\angle B$	$\angle A$ и a
$\triangle AC_1B$ и $\triangle AC_2B$ 	$\triangle AC_1B_1$ и $\triangle AC_2B_2$ 	$\triangle AC_1B_1$ и $\triangle AC_2B_2$ 



ПРИМЕРЫ

1) Периметр равностороннего треугольника равен 48 см. Каковы длины его сторон?

ЗАДАНИЯ

1) Найти (устно) периметр равностороннего треугольника, если длина его стороны 21 см.

△ Пусть в равностороннем треугольнике все стороны равны a; периметр — сумма длин сторон треугольника, поэтому $a+a+a=48$, $3a=48$, $a=48:3$, $a=16$ (см).

Ответ. Каждая сторона треугольника имеет длину 16 см. ▲

2) В равнобедренном треугольнике основание в 3 раза меньше боковой стороны. Найдем стороны треугольника, если его периметр равен 35 см.

△ Пусть x см — длина основания треугольника, тогда $3x$ см — длина боковой стороны треугольника (рис. 103). Периметр треугольника — это сумма длин его сторон. Имеем

$$3x+3x+x=35.$$

Решим это уравнение:

$$7x=35, \quad x=5 \text{ (см)},$$

тогда $3x=3\cdot5=15$ (см).

Ответ. Стороны треугольника 15 см, 15 см, 5 см. ▲

2) Найти (устно) сторону равностороннего треугольника, периметр которого равен 114 см.

3) Боковая сторона равнобедренного треугольника на 3 см больше основания. Найти стороны этого треугольника, если его периметр равен 27 см.

4) Основание равнобедренного треугольника в 2 раза короче его боковой стороны. Найти стороны этого треугольника, если периметр его равен 64 дм.

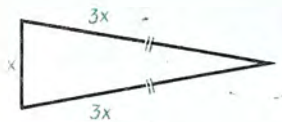
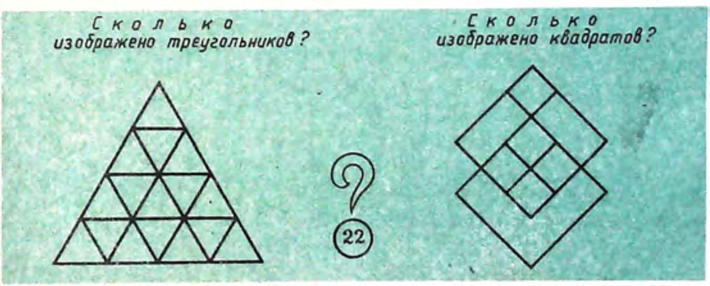


Рис. 103



ПРИМЕРЫ

1) На рисунке 104 равные отрезки отмечены одинаковым количеством штрихов. Докажем, что $\triangle AOB=\triangle COD$.

ЗАДАНИЯ

1) На рисунке 105 равные отрезки отмечены равным количеством штрихов. Доказать, что $\triangle KOL=\triangle MON$.

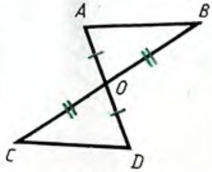


Рис. 104

△ Доказательство.

1. $\angle AOB = \angle COD$ (как вертикальные).

2. $\triangle AOB = \triangle COD$ по первому признаку равенства треугольников (по двум сторонам и углу между ними). ▲

2) На рисунке 106 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$.
Докажем, что $\triangle ABD = \triangle DCB$.

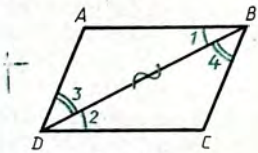


Рис. 106

△ Доказательство.

Сторона DB для треугольников ABD и DCB — общая, $\triangle ABD = \triangle DCB$ по второму признаку равенства треугольников (по стороне и прилежащим к ней углам). ▲

3) На рисунке 108 $AD = BC$, $DB = AC$.
Докажем, что $\angle BDC = \angle ACD$.

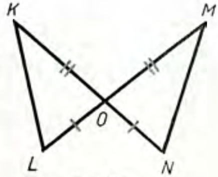


Рис. 105

2) На рисунке 107 $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$.
Доказать, что $\angle 5 = \angle 6$.

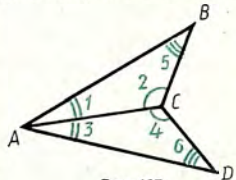


Рис. 107

3) На рисунке 108 $AD = BC$, $DB = AC$. Доказать, что $\angle DAB = \angle ABC$.

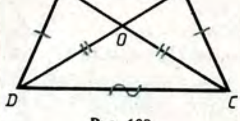


Рис. 108

△ Доказательство.

1. $\triangle ACD = \triangle BCD$ по третьему признаку равенства треугольников (по трем сторонам, сторона DC у них общая).

2. В равных треугольниках ACD и BCD против равных сторон BC и AD лежат равные углы:

$$\angle BDC = \angle ACD. \ \blacktriangle$$

4) В треугольниках ABC и CDE $AB = BC$, $CD = ED$ (рис. 109). Докажем, что $\angle BAC = \angle CED$.

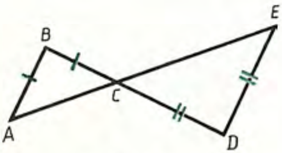


Рис. 109

△ Доказательство.

1. $\angle BAC = \angle BCA$ (как углы при основании равнобедренного треугольника ABC).

2. $\angle BCA = \angle ECD$ (как вертикальные).

3. $\angle ECD = \angle CED$ (как углы при основании равнобедренного треугольника CDE).

4. $\angle BAC = \angle CED$ (как углы, каждый из которых равен вертикальным углам BCA и ECD). $\blacktriangle$

4) Треугольник ABC — равнобедренный ($AB = BC$), $\angle ABD = \angle CBD$ (рис. 110). Доказать, что $AD = DC$.

Рис. 110

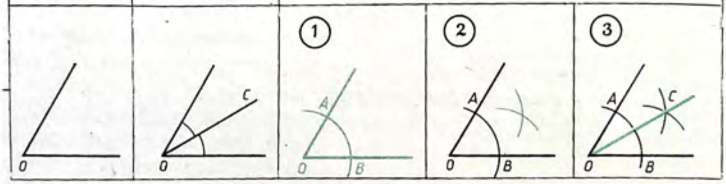
ПРИМЕР

Используя третий признак равенства треугольников, можно обосновать предложенное ниже *построение биссектрисы угла* с помощью циркуля и линейки.

ЗАДАНИЯ

1) Доказать, почему луч OC, полученный на третьем этапе построения (см. схему), действительно является биссектрисой угла AOB.

Построение биссектрисы угла				
Дано	Требуется построить	Построение		



2) Построить биссектрису угла B (рис. 111).

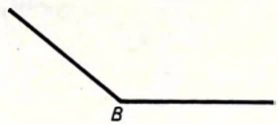


Рис. 111

а) б) в) г) д)

Тангам – головоломка, изобретенная в Древнем Китае. Из семи частей квадрата (рис. а) удается сложить самые разнообразные фигуры. На рисунке б) показано, как сложена фигура бегущего человечка. Попробуйте сделать из бумаги свой тангам и по очереди сложить фигуры, изображенные на рисунках в), г), д).

Теоремы о соотношениях между сторонами и углами треугольников.

1. В треугольнике против большей стороны лежит больший угол (рис. 112).

2. В треугольнике против большего угла лежит большая сторона (рис. 113).

3. Если в треугольнике два угла равны, то такой треугольник — равнобедренный (рис. 114).

4. *Неравенство треугольника:* каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон (рис. 115).

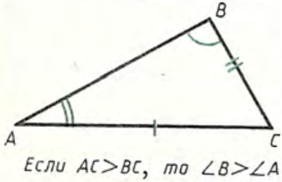


Рис. 112

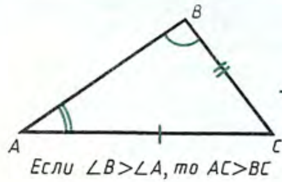


Рис. 113

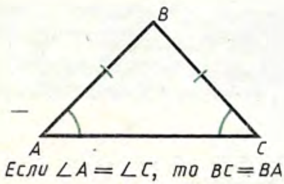


Рис. 114

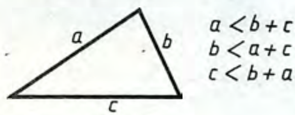


Рис. 115

ПРИМЕРЫ

1) Выясним, существует ли треугольник со сторонами 2 см, 3 см, 6 см.

△ Не существует, так как 6 см $>$ 2 см $+$ 3 см (каждая сторона треугольника должна быть меньше суммы двух других сторон по неравенству треугольника). ▲

ЗАДАНИЯ

1) Даны длины трех отрезков:

а) 3 см, 2 см, 3 см;

б) 2 см, 12 см, 5 см;

в) 4 см, 6 см, 5 см.

В каком из этих случаев можно построить треугольник, приняв данные отрезки за стороны треугольника?

2) Найдем третью сторону равнобедренного треугольника, если две из его сторон равны 6 см и 2 см.

△ Третья сторона треугольника должна быть равна либо 6 см, либо 2 см (так как треугольник — равнобедренный). Если третья сторона равна 2 см, то имеем $6 \text{ см} > 2 \text{ см} + 2 \text{ см}$, поэтому треугольника с такими сторонами не существует. Если неизвестная сторона равна 6 см, то треугольник со сторонами 6 см, 6 см, 2 см существует, так как выполняются соотношения:

$$6<6+2,\ 6<6+2,\ 2<6+6$$

(каждая сторона меньше суммы двух других сторон).

Ответ. 6 см. ▲

2) Длины двух сторон равнобедренного треугольника равны 4 см и 8 см. Найти третью его сторону.

23 Как с помощью спички, не разламывая ее, изобразить на столе треугольник?

Внешний угол треугольника.

Угол, смежный с углом треугольника, называется *внешним углом* этого треугольника (рис. 116).

$\angle 1$ и $\angle 2$ — внешние углы при вершине A,
$\angle 3$ и $\angle 4$ — внешние углы при вершине B,
$\angle 5$ и $\angle 6$ — внешние углы при вершине C (рис. 117).

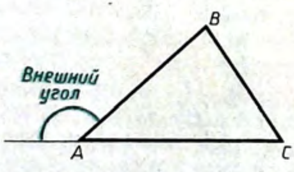


Рис. 116

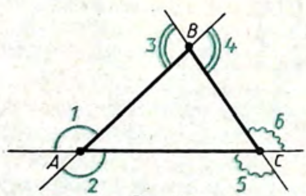


Рис. 117

Внешний угол треугольника больше каждого угла треугольника, не смежного с ним.

Например: $\angle 1 > \angle B$, $\angle 1 > \angle C$ (рис. 118).

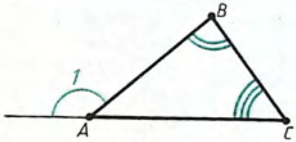


Рис. 118

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 9

1. Построить $\triangle ABC$, если:

а) $AB=4$ см, $BC=3{,}5$ см, $\angle B=65°$;
б) $AB=5$ см, $\angle A=30°$, $\angle B=90°$;
в) $AB=3{,}5$ см, $BC=3$ см, $AC=4{,}5$ см.

2. Известно, что $AB=AB_1$ и $\angle BAC=\angle B_1AC$ (рис. 119). Доказать, что $\triangle ABC=\triangle AB_1C$.

3. Построить биссектрису угла KOM (рис. 120).

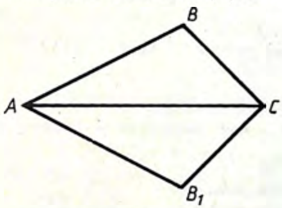


Рис. 119

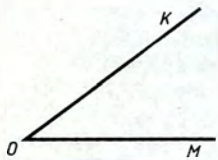


Рис. 120

Решение (возможный вариант оформления)

Замечание. Описание этапов построения, а также доказательства и исследования от учащихся на данном этапе обучения можно не требовать.

1. а) Дано: $AB=4$ см, $BC=3{,}5$ см, $\angle B=65°$.

Построить: $\triangle ABC$.

Построение (рис. 121).

1. $\angle B=65°$.
2. $BA=4$ см.

3. $BC=3{,}5$ см.
4. AC.
$\triangle ABC$ — искомый.

б) Дано: $AB=5$ см, $\angle A=30°$, $\angle B=90°$.

Построить: $\triangle ABC$.

Построение (рис. 122).
1. $AB=5$ см.
2. $\angle A=30°$.
3. $\angle B=90°$.
$\triangle ABC$ — искомый.

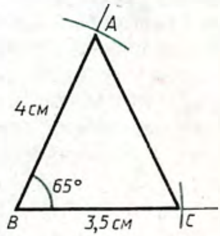


Рис. 121

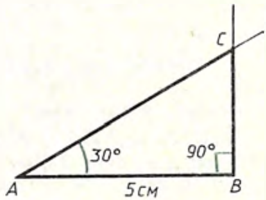


Рис. 122

в) Дано: $AB=3{,}5$ см, $BC=3$ см, $AC=4{,}5$ см.

Построить: $\triangle ABC$.

Построение (рис. 123).
1. $AB=3{,}5$ см.
2. Окр. (B; 3 см).
3. Окр. (A; 4,5 см).
4. C — точка пересечения окружностей.
5. AC.
6. BC.
$\triangle ABC$ — искомый.

2. Дано: $AB=AB_1$, $\angle BAC=\angle B_1AC$.

Доказать: $\triangle ABC=\triangle AB_1C$.

Доказательство (см. рис. 119).
В $\triangle ABC$ и $\triangle AB_1C$ $AB=AB_1$ по условию, AC — общая, $\angle BAC=\angle B_1AC$ по условию, следовательно, эти треугольники равны по первому признаку.

3. Дано: угол KOM.

Построить: биссектрису угла KOM.

Построение (рис. 124).
1. Окр. (O; OA).
2. Окр. (B; OA).
3. Окр. (A; OA).
4. $C=$окр. (B; OA)$\times$окр. (A; OA).
5. Луч OC — искомая биссектриса.

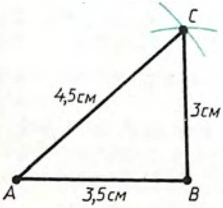


Рис. 123

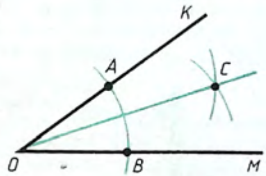


Рис. 124

ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ СТРАНИЦЫ

1. Задача. Устно докажите равенство треугольников на рисунке 125 (равные элементы отмечены одинаковыми значками).

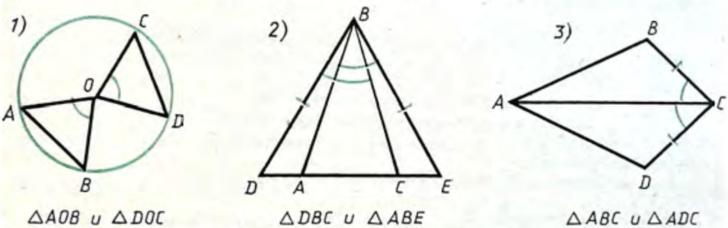


Рис. 125

2. Задача. Нужно построить окружность радиусом R так, чтобы она проходила через точку A, а ее центр лежал бы на прямой h (рис. 126). △ Построим сначала окружность с центром в точке A заданного радиуса R (рис. 127). Эта окружность пересечет прямую h в точках B и C. (Случай,

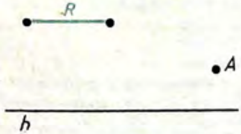


Рис. 126

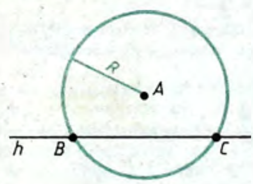


Рис. 127

когда окружность не пересечет прямую, рассмотрите отдельно.) Но нам нужно построить окружность, которая проходила бы через точку A, а центр ее лежал бы на прямой h.

Дальнейшие рассуждения и построение проведите самостоятельно. ▲

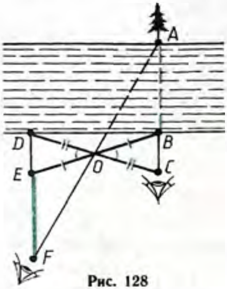


Рис. 128

3. Расстояние до недоступного объекта. Знание признаков равенства треугольников может оказаться полезным на практике. Например, с их помощью, произведя определенные построения и измерения, можно определить расстояние до недоступного объекта.

На рисунке 128 показаны построения, с помощью которых можно определить ширину реки AB.

Изучите чертеж, найдите равные углы и отрезки. Длина какого доступного измерению отрезка равна ширине реки?

4. Задачи на построение с применением алгебры.

Задача 1. Построить треугольник со сторонами a, b, c, если даны три отрезка, длины которых равны a, $2b+c$, $2a+c$.

△ 1) На прямой или луче отложим последовательно два отрезка длиной a — получим отрезок длиной $2a$.

2) Уменьшим длину третьего данного отрезка $2a+c$ на $2a$ — останется отрезок длиной c.

3) Уменьшим длину второго отрезка $2b+c$ на c — получим отрезок длиной $2b$.

4) Разделим полученный отрезок $2b$ пополам. (Позже мы покажем способ деления отрезка пополам с помощью циркуля и линейки без делений, а пока будем считать, что пополам отрезок можно разделить, например, с помощью линейки с делениями или перегибанием листа бумаги до совмещения концов отрезка.)

Таким образом, отрезок a нам был дан, отрезок b мы нашли на 4-м шаге решения задачи, а отрезок c нашли на 2-м шаге, т. е. имеем все три стороны треугольника. Способ построения треугольника по трем сторонам нам известен. ▲

Задача 2. Построить треугольник со сторонами a, b, c, если даны три отрезка, длины которых равны $a+b$, $b+c$, $a+c$.

5. Головоломка со спичками.

1) Из спичек выложите фигуру, состоящую из 9 равных треугольников, как это показано на рисунке 129. Уберите 5 спичек так, чтобы остались 5 треугольников.

На рисунке 130 показано одно из решений этой головоломки. Теперь самостоятельно, вернувшись к рисунку 129, уберите 6 спичек так, чтобы не осталось ни одного треугольника.

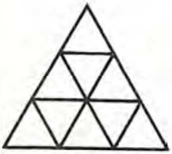


Рис. 129

Рис. 130

Рис. 131

2) На рисунке 131 показана фигура, выложенная из спичек и состоящая из 6 равносторонних треугольников. Переложите 4 спички так, чтобы получились 3 равносторонних треугольника.

6. Четвертый признак равенства треугольников?

Мы знаем три признака равенства треугольников. Но мы не ставили вопроса о том, что, может быть, существует еще хотя бы один признак, устанавливающий равенство треугольников. Например, *по двум сторонам и углу, не лежащему между ними.*

Давайте рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, у которых $AB=A_1B_1$, $BC=$ $=B_1C_1$, $\angle A=\angle A_1$ (рис. 132).

Рис. 132

Попробуем доказать их равенство способом «прикладывания» (рис. 133): вершина B совместилась с вершиной B_1, вершина C — с вершиной C_1, а вершины A и A_1 оказались по разные стороны от прямой BC.

Возможны три случая расположения $\triangle ABC$ и $\triangle A_1BC$:

1) Луч AA_1 проходит внутри угла BAC (рис. 133, *а*).
2) Луч AA_1 проходит через стороны AC и CA_1 (рис. 133, *б*).
3) Луч AA_1 проходит вне угла BAC_1 (рис. 133, *в*).

Рассуждения проведем для случая 1 (рис. 133, *а*), для случаев 2 и 3 рассуждения будут аналогичны.

$\triangle$ Итак, на рисунке 133, *а* $\triangle ABA_1$ — равнобедренный ($AB=A_1B$ по условию), значит, равны углы при основании: $\angle BAA_1=\angle BA_1A$, $\angle CAA_1=$ $=\angle A-\angle BAA_1$, $\angle CA_1A=\angle A_1-\angle BA_1A$. Но так как $\angle A=\angle A_1$ и $\angle BAA_1=\angle BA_1A$, то $\angle CAA_1=\angle CA_1A$.

Это значит, что $\triangle ACA_1$ — равнобедренный, т. е. $AC=A_1C$.

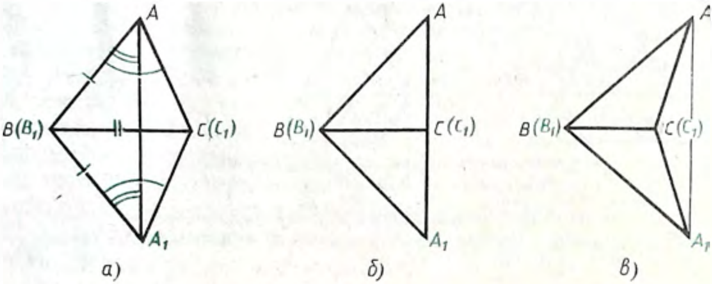


Рис. 133

Имеем в треугольниках ABC и A_1BC по три соответственно равные стороны, а такие треугольники равны (по третьему признаку равенства треугольников). ▲

Что же получается? Существует еще один признак равенства треугольников — по двум сторонам и углу, не лежащему между этими сторонами?

Нет, такого признака нет, хотя в некоторых случаях два треугольника будут равны и по только что названным элементам. Но это будет не всегда. Попробуйте выяснить, с какими оговорками существует названный нами четвертый признак равенства треугольников (по двум сторонам и углу, не лежащему между ними).

В качестве подсказки предлагаем рассмотреть на рисунке 134 два треугольника: $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$ $(BC = BD)$.

7. Задача. По периметру земельного участка, имеющего форму треугольника с указанными на рисунке 135 размерами, нужно посадить деревья так, чтобы каждые соседние два были друг от друга на расстоянии не менее 5 м. Сколько можно посадить деревьев на этом участке?

Не ошибитесь: задача с подвохом!

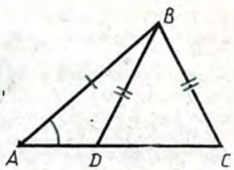


Рис. 134

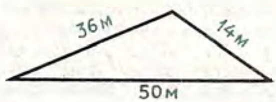


Рис. 135

§ 10. Перпендикулярные прямые

Две пересекающиеся прямые называются *взаимно перпендикулярными* (перпендикулярными), если они образуют четыре прямых угла. На рисунке 136 прямая AB перпендикулярна прямой CD (обозначают $AB \perp CD$).

Перпендикуляр, проведенный из точки к прямой, меньше любой наклонной, проведенной из той же точки к этой прямой (рис. 137).

Длина перпендикуляра, проведенного из точки к прямой, называется *расстоянием от* этой *точки до прямой* (рис. 138).

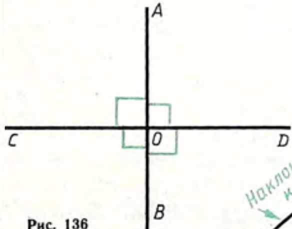


Рис. 136

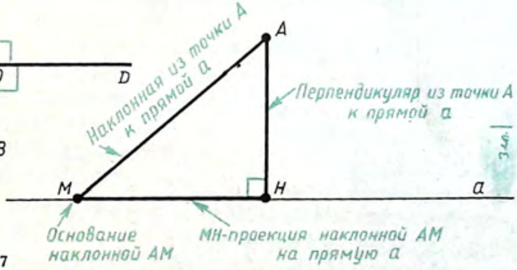


Рис. 137

Рис. 138

ПРИМЕРЫ

1) Точки A и B лежат по одну сторону от прямой a (рис. 139). Перпендикуляры AC и BD равны. Найдем угол ADC, если $\angle BCD = 38°$.

ЗАДАНИЯ

1) Точки M и N лежат по одну сторону от прямой m, $MK \perp m$, $NP \perp m$, $\angle MPK = \angle NKP$ (рис. 140).

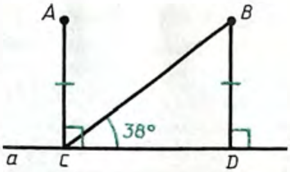


Рис. 139

△ $\triangle ACD = \triangle BDC$ по первому признаку равенства треугольников, $AC = BD$ по условию, CD — общая сторона, $\angle ACD = \angle BDC = 90°$. В равных треугольниках против равных сторон AC и BD лежат равные углы:

$$\angle ADC = \angle BCD = 38°. \blacktriangle$$

2) Из точки A к прямой a проведены перпендикуляр AH и наклонные AM и AN (рис. 141). Докажем, что если $AM = AN$, то $HM = HN$.

△ Доказательство.

$\triangle MAN$ — равнобедренный (по условию $AM = AN$), значит, $\angle AMH = \angle ANH$.

Докажем, что $\triangle AMH = \triangle AHN$. Для этого приложим треугольники друг к другу равными сторонами AM и AN (рис. 142), причем $AH_1 = AH_2 = AH$. $\triangle H_2AH_1$ — равнобедренный, значит, $\angle H_1H_2A = \angle H_2H_1A$. Тогда $\angle MH_2H_1 = \angle MH_1H_2$, так как каждый из них равен разности прямого угла и равных углов H_1H_2A и H_2H_1A. Следовательно,

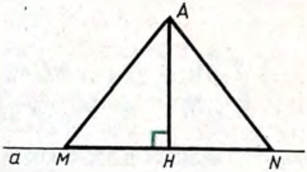


Рис. 141

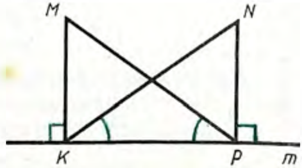


Рис. 140

Доказать, что $MK = NP$.

2) Из точки A к прямой a проведены перпендикуляр AH и наклонные AM и AN (рис. 141). Доказать, что если $HM = HN$, то $AM = AN$. Сделать общий вывод.

Примечание. Доказанное вами утверждение будет обратным утверждению: равным наклонным, проведенным из одной точки к прямой, соответствуют равные проекции.

Обратное утверждение от прямого отличается тем, что условие прямого утверждения становится требованием обратного и требование прямого становится утверждением обратного.

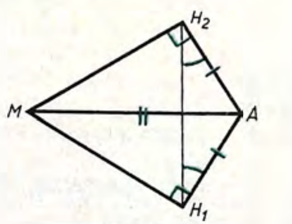


Рис. 142

$\triangle H_1MH_2$ — равнобедренный, т. е. $H_1M = H_2M$, или, возвращаясь к рисунку 141, $HM = HN$. ▲

Вывод. Равным наклонным, проведенным из одной точки к прямой, соответствуют равные проекции.

Два дома одинаково удалены от берега реки. Где нужно сделать причал для лодок, чтобы он был одинаково удален от обоих домов?

ПРИМЕР

Докажем, что если через две точки, лежащие на прямой, проведены перпендикулярные прямые, то они не пересекаются.

△ Доказательство проведем *методом от противного*. Вот его суть.

1. Допустим, что верно утверждение, противоположное тому, которое нужно доказать. В нашем случае допустим, что перпендикуляры, проведенные через две точки A и B прямой, пересеклись в точке C (рис. 143).

2. Исходя из этого предположения путем рассуждений придем к противоречию с ранее доказанными теоремами или верным утверждением. Это позволит нам утверждать, что противоположное предположение неверно и тем самым доказано прямое предположение.

В нашей задаче из предположения, что перпендикуляры пересеклись в точке C, получим, что у $\triangle ABC$ два угла A и B — прямые, что невозможно. Это доказывает утверждение о том, что перпендикуляры, проведенные через две точки одной прямой, не пересекаются. ▲

ЗАДАНИЕ

Методом от противного доказать, что из точки к прямой можно провести только один перпендикуляр.

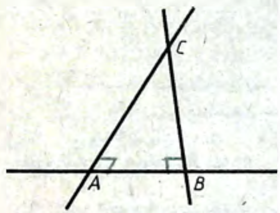


Рис. 143

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий его вершину с точкой противоположной стороны.

На рисунке 144 изображены биссектрисы треугольника ABC.

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

На рисунке 145 изображены медианы треугольника ABC.

Высотой треугольника называется отрезок перпендикуляра, соединяющий вершину треугольника и точку на противоположной стороне.

На рисунке 146 изображены высоты треугольника ABC.

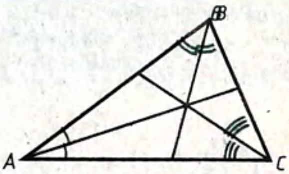


Рис. 144

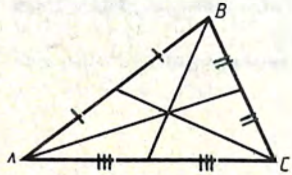


Рис. 145

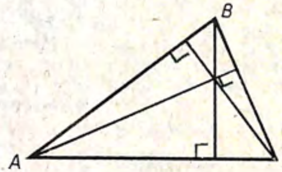


Рис. 146

В равнобедренном треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведенные к основанию, совпадают (рис. 147).

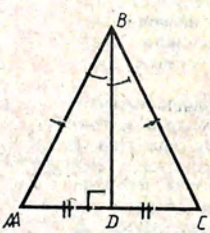


Рис. 147

ПРИМЕРЫ

1) В равнобедренном треугольнике ABC проведена к основанию BC медиана AM. Докажем, что периметры треугольников ABM и ACM равны.

$\triangle$ Доказательство.

1. $CA=AB$ по условию, так как $\triangle ABC$ — равнобедренный (рис. 148).
2. $CM=MB$, так как AM — медиана.
3. AM в треугольниках ABM и ACM — общая сторона.
4. Периметр треугольника обозначим буквой P с указанием треугольника, о периметре которого идет речь:

$$\begin{array}{l} P_{\triangle ABM}=AB+MB+AM \\ \phantom{P_{\triangle ABM}=}\ \ \| \quad\ \ \| \quad\ \ \| \\ P_{\triangle ACM}=CA+CM+AM, \end{array}$$

откуда следует, что $P_{\triangle ABM}=P_{\triangle ACM}$. ▲

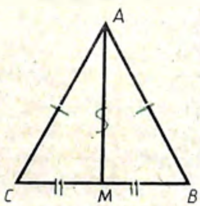


Рис. 148

2) В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса BD, $AC=42$ см, $\angle ABD=21°$. Найдем AD, $\angle ABC$, $\angle BDC$.

$\triangle$ В равнобедренном треугольнике ABC биссектриса BD является одновременно высотой и медианой (рис. 149), поэтому

$$AD=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\cdot 12=6 \text{ (см)},$$

$\angle ABC=2\angle ABD=2\cdot 21°=42°$,

$\angle BDC=90°$. ▲

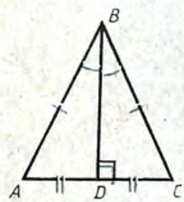


Рис. 149

ЗАДАНИЯ

1) Найти медиану равнобедренного треугольника, проведенную к его основанию, если периметр этого треугольника равен 40 см, а периметр каждого из треугольников, на которые разбила медиана исходный треугольник, равен 28 см.

2) В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена медиана BM, $AM=6$ см, $\angle ABM=25°$, $\angle BAC=65°$.
Найти AC, $\angle B$, $\angle C$, $\angle BMC$.

Серединным перпендикуляром отрезка называется прямая, проходящая через середину этого отрезка и перпендикулярная к нему. На рисунке 150 h — серединный перпендикуляр отрезка.

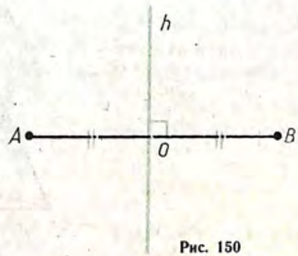


Рис. 150

1. Каждая точка серединного перпендикуляра отрезка равноудалена от его концов (рис. 151).

2. Каждая точка, равноудаленная от концов отрезка, лежит на его серединном перпендикуляре (см. рис. 151) (обратное утверждение).

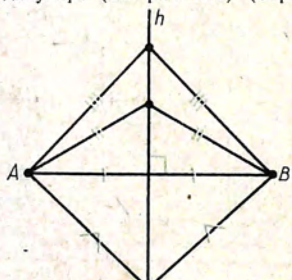


Рис. 151

ПРИМЕР

Серединный перпендикуляр стороны AB равнобедренного треугольника ABC с основанием AC, равным 20 см, пере-

ЗАДАНИЕ

Серединный перпендикуляр стороны KM треугольника KLM пересекает сторону LM в точсекает сторону BC в точке D. Найдем периметр треугольника ABC, если $AD=18$ см, а периметр треугольника ABD равен 66 см.

$\triangle$ Построим по условию задачи чертеж и отметим известные элементы (рис. 152).

1. $\triangle AOD = \triangle BOD$ по первому признаку равенства треугольников ($AO=OB$ по условию, OD общая сторона, $\angle AOD = \angle DOB = 90°$). Отсюда получаем, что $BD=AD=18$ см.

2. Так как $P_{\triangle ADB}=66$ см, $AD=18$ см, $DB=18$ см, то
$AB=66$ см $-$ (18 см $+$ 18 см) $=30$ см.

3. В $\triangle ABC$: $BC=AB=30$ см.

4. $P_{\triangle ABC}=AB+BC+CA=30$ см $+$ $+30$ см $+20$ см $=80$ см. ▲

ке A. Найти LM, если $KA=8$ см, $LA=3$ см.

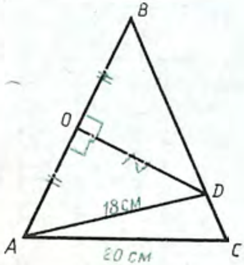
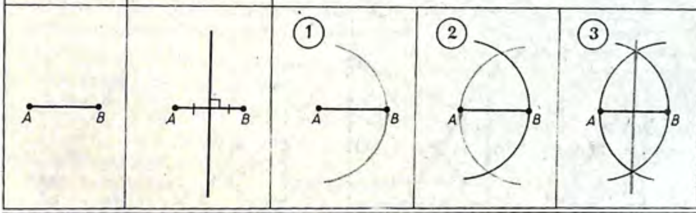
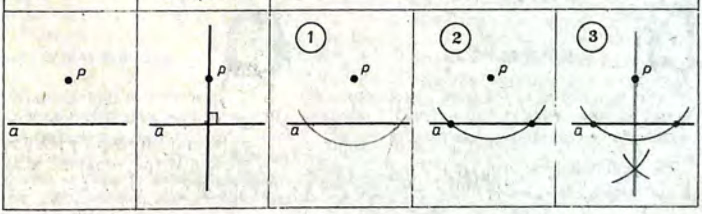


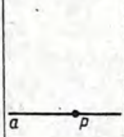
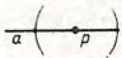
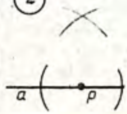
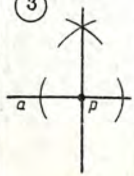
Рис. 152

Построение серединного перпендикуляра отрезка и нахождение середины отрезка				
Дано	Требуется построить	Построение		
		1	2	3



Построение перпендикуляра к прямой из точки, не лежащей на этой прямой				
Дано	Требуется построить	Построение		
		1	2	3



Построение перпендикуляра к прямой из точки, лежащей на этой прямой				
Дано	Требуется построить	Построение		
		1 	2 	3 

Два признака равенства прямоугольных треугольников

1. Если *гипотенуза и острый угол* одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 153).

2. Если *гипотенуза и катет* одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 154).

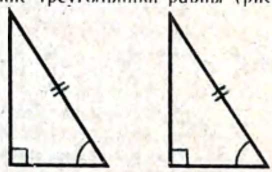


Рис. 153

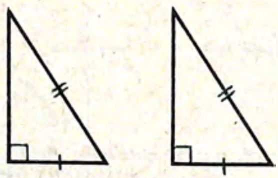


Рис. 154

ПРИМЕРЫ

1) Докажем свойство биссектрисы угла: *любая точка биссектрисы неразвернутого угла равноудалена от его сторон.*

△ Пусть BD — биссектриса угла ABC, M — произвольная точка на биссектрисе,

ЗАДАНИЯ

1) Попробуйте доказать обратное утверждение: *любая точка, находящаяся внутри неразвернутого угла и равноудаленная от его сторон, лежит на биссектрисе этого угла.*

MK и ML — перпендикуляры, проведенные из точки M к лучам BA и BC (рис. 155). Таким образом, нам нужно доказать, что $MK=ML$.

$\triangle BKM=\triangle BLM$ как прямоугольные по гипотенузе и острому углу (BM — общая гипотенуза, $\angle KBM=\angle LBM$, так как BM — биссектриса угла ABC). Следовательно, $MK=ML$ как стороны, лежащие против равных углов в равных треугольниках. ▲

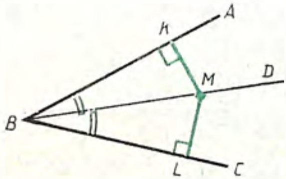


Рис. 155

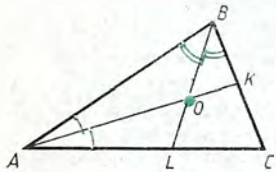


Рис. 156

2) Построим точку, равноудаленную от всех сторон треугольника.

△ Очевидно, что все точки биссектрисы AK угла A треугольника ABC равноудалены от сторон AB и BC (по свойству биссектрисы).

Все точки, лежащие на биссектрисе BL угла B, равноудалены от сторон BA и BC (рис. 156). Значит, точка O (точка пересечения биссектрис AK и BL), лежащая как на биссектрисе AK, так и на биссектрисе BL, равноудалена от сторон AB, AC, BC, т. е. от всех трех сторон треугольника.

Таким образом, *точка пересечения всех биссектрис углов треугольника равноудалена от трех сторон треугольника.* ▲

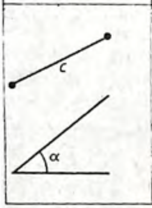
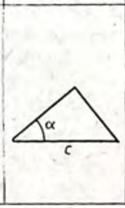
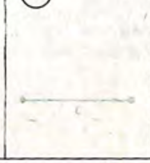
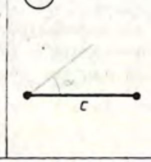
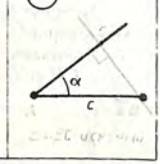
Докажите самостоятельно, что биссектриса третьего угла C треугольника ABC также пройдет через точку O, т. е. докажите, что биссектрисы всех углов треугольника пересекаются в одной точке.

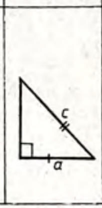
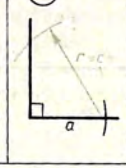
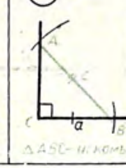
2) Построить точку, равноудаленную от всех вершин треугольника.

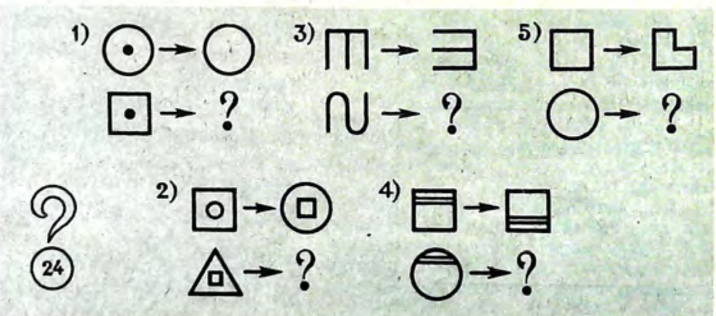
Указание. Воспользоваться свойством серединного перпендикуляра отрезка.

После построения сделать вывод относительно местоположения точки, равноудаленной от всех вершин треугольника.

Эта задача может быть сформулирована и на языке практики. Например: «Где нужно копать колодец, чтобы он был равноудален от трех домов, расположенных не на одной прямой?»

Построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и острому углу				
Дано	Требуется построить	Построение		
		1 	2 	3 

Построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету					
Дано	Требуется построить	Построение			
		1 	2 	3 	4 



КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 10

1. Даны прямая a и точка M, не лежащая на ней. С помощью циркуля и линейки построить прямую MN, перпендикулярную к прямой a.

2. В треугольнике ABC $\angle A = 100°$, $\angle B = 50°$. Серединный перпендикуляр стороны AB пересекает сторону BC в точке K. Найти угол KAC.

3. Доказать, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, если $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $BC = B_1C_1$ и высота CH и C_1H_1 равны.

Решение (возможный вариант оформления)

1. Дано: a, M.

Построить: $MN \perp a$.

Построение (рис. 157).

1) Окр. $(M; MA)$.
2) Окр. $(A; MA)$.
3) Окр. $(B; MA)$.
4) $N =$ окр. $(A; MA) \times$ окр. $(B; MA)$.
5) MN — искомая прямая.

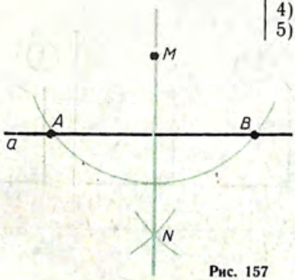


Рис. 157

2. Дано: $\triangle ABC$, $\angle A = 100°$, $\angle B = 50°$, MK — серединный перпендикуляр стороны BA (рис. 158).

Найти: $\angle KAC$.

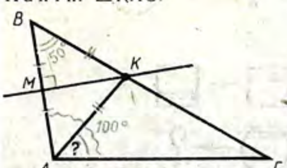


Рис. 158

Решение.

1) $KB = KA$, так как точка K лежит на серединном перпендикуляре отрезка AB, значит, $\triangle BKA$ — равнобедренный.

2) $\angle KBA = \angle KAB$ как углы при основании равнобедренного треугольника BKA.

3) $\angle KAC = \underbrace{\angle BAC}_{100°} - \underbrace{\angle KAB}_{\angle KBA = 50°} = 100° - 50° = 50°$.

Ответ. $\angle KAC = 50°$.

3. Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $BC = B_1C_1$, $CH \perp AB$, $C_1H_1 \perp A_1B_1$, $CH = C_1H_1$ (рис. 159).

Доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

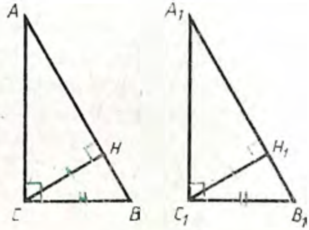


Рис. 159

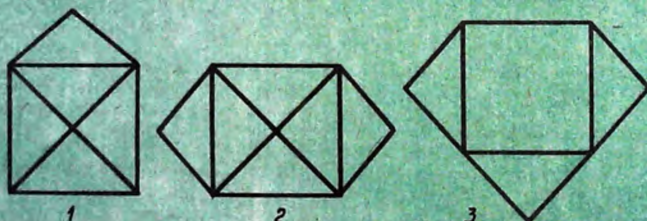
Доказательство.

1) $\triangle CHB = \triangle C_1H_1B_1$ как прямоугольные ($\angle CHB = \angle C_1H_1B_1 = 90°$) по гипотенузе ($CB = C_1B_1$) и катету ($CH = C_1H_1$).

2) $\angle HBC = \angle H_1B_1C_1$ как углы, лежащие против равных сторон ($CH = C_1H_1$) в равных треугольниках ($\triangle CHB = \triangle C_1H_1B_1$).

3) $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ как прямоугольные ($\angle C = \angle C_1 = 90°$) по катету ($CB = C_1B$) и острому углу ($\angle HBC = \angle H_1B_1C_1$), что и требовалось доказать.

Попробуйте начертить каждую из предложенных фигур, не отрывая карандаш от бумаги и не проводя по одной линии дважды. Если выполнить задание не удается, то подсказку можно найти в § 21 этой книги.



ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ СТРАНИЦЫ

1. Задачи на построение.

Задача 1. Построить треугольник по двум сторонам и медиане к третьей стороне.

△ Пусть даны три отрезка a, b, c (рис. 160), являющиеся соответственно двумя сторонами и медианой треугольника, который нужно построить.

Анализ. Сделаем от руки чертеж какого-нибудь треугольника ABC

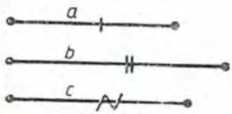


Рис. 160

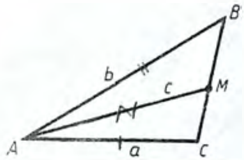


Рис. 161

и отметим на нем отрезки a, b, c, по которым нам нужно было бы его построить (рис. 161). Неважно, что пока они отличаются от заданных отрезков по длине.

Рассуждаем так: в треугольниках ABC, ABM, AMC известно только по две стороны, значит, никакой из них только по этим элементам построить нельзя. Однако в наших рассуждениях мы пока не использовали еще одно условие задачи: отрезок AM — *медиана* треугольника. Подумаем, как можно воспользоваться этим.

В условии задачи фактически нам даны три отрезка. По ним или отрезкам, которые можно получить из этих отрезков (деля их на части или увеличивая их длины в несколько раз), можно построить *треугольник по трем сторонам*. Делать это нужно с той целью, чтобы потом стало возможным построить искомый треугольник. Ничего не поделаешь: готового рецепта для решения многих задач нет — нужно его искать.

Попробуем продолжить медиану AM за пределы треугольника на длину, равную длине AM, т. е. построим отрезок $AD=2AM$ (рис. 162). Соединим точки D и C и рассмотрим треугольники ABM и DMC: $AM=MD$ по построению; $BM=MC$, так как AM — медиана, следовательно, M — середина отрезка BC; $\angle BMA=\angle CMD$ как вертикальные. Таким образом, $\triangle ABM=$ $=\triangle DMC$ по первому признаку равенства треугольников, откуда $AB=DC$.

Таким образом, в $\triangle ADC$ известны длины трех сторон: AC (по условию), $CD=AB$ (AB дана по условию), $AD=2AM$ (AM дана по условию). $\triangle ADC$, а следовательно, и $\triangle ABC$ теперь можем построить.

После проведенного анализа условия задачи и рассмотрения способов построения намечаем пути построения треугольника по заданным элементам и выполняем это построение.

Построение (рис. 163).

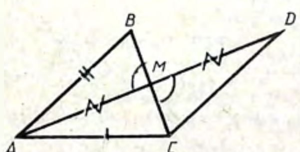


Рис. 162

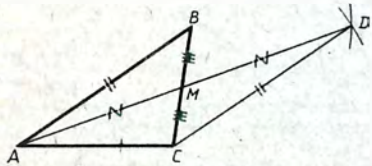


Рис. 163

1. $AC=a$.
2. Окр. $(C;\ AB)$.
3. Окр. $(A;\ 2AM)$; отмечаем точку D пересечения окружностей.
4. AD.
5. M — середина AD.
6. Прямая CM.
7. Отрезок MB; $MB=CM$.
8. Треугольник ABC.

Доказательство и исследование проведите самостоятельно.

Задача 2. Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и биссектрисе треугольника, проведенной из вершины этого угла.

2. Расстояние до реки.

Задача 1. Представьте такую ситуацию: вы находитесь в доме (точка A на рисунке 164). Вам нужно дойти до реки, зачерпнуть ведро воды и сходить полить саженцы (точка B на рисунке 164); при этом вы, конечно, хотите, чтобы расстояние, которое преодолеете $(AO+OB)$, было наименьшим. Где должна быть расположена такая точка (O) на берегу реки?

$\triangle$ Анализ. Рассуждаем так. Допустим, что дом и саженцы расположены по разные стороны реки (а река узкая — вы ее можете перейти вброд; поэтому на рисунке 165 река изображена прямой a). Тогда, очевидно, вашим маршрутом будет отрезок AB (кратчайшее расстояние между двумя точками — длина отрезка, их соединяющего).

Теперь вернемся к данной задаче и переведем ее условие на математический язык: точки A и B расположены по одну сторону от прямой a; найти точку O, лежащую на прямой a, такую, что $AO+OB$ будет наименьшим.

Построение. Через точку A проведем прямую $AM\perp a$ (рис. 166). На прямой AM отложим от точки M отрезок MA_1 такой, что $MA_1=AM$. Соединим точки A_1 и B отрезком A_1B. Отрезок A_1B пересечет прямую a в искомой точке O.

Для доказательства того, что найденная таким образом точка O — искомая (и зная, что между точками A_1 и B кратчайшее расстояние — длина отрезка A_1B), соединим точки A и O. $\triangle MAO=\triangle MA_1O$ по первому признаку равенства треугольников ($AM=MA_1$, MO — общая сторона,

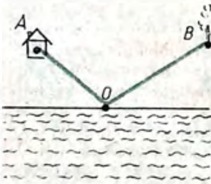


Рис. 164

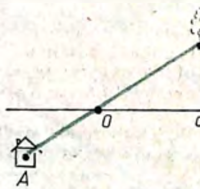


Рис. 165

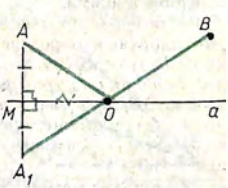


Рис. 166

$\angle AMO = \angle A_1MO = 90^\circ$), значит, $AO = A_1O$. Таким образом, $AO + OB = A_1O + OB = A_1B$, т. е. точка O — искомая.

В исследовании попробуйте самостоятельно методом от противного обосновать тот факт, что точка O — единственная. ▲

Задача 2. На одном и том же берегу реки (на разных расстояниях от нее) расположены два села A и B. Где нужно построить мост через эту реку, чтобы он находился на одинаковом расстоянии от обоих сел?

3. Упражнения с листом бумаги.

Применив смекалку, можно определенными перегибаниями вырезанных из бумаги треугольников выполнить то, что на чертеже обычно делается с помощью циркуля и линейки (бумагу для этого можно брать обыкновенную, но лучше цветную двустороннюю). Например, на рисунке 167 показано, как перегибаниями можно получить биссектрису угла B треугольника ABC.

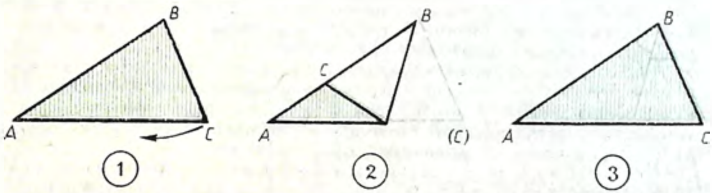


Рис. 167

Попробуйте самостоятельно (вырезав предварительно из бумаги несколько произвольных треугольников) перегибаниями получить: 1) серединный перпендикуляр стороны треугольника; 2) медиану треугольника; 3) высоту треугольника; 4) точку пересечения медиан, биссектрис, высот.

Из листа бумаги произвольной формы линиями перегибов получите равнобедренный треугольник.

4. Осевая симметрия и ее применение при построениях с препятствиями и ограничениями.

Если через произвольную точку A плоскости проведем прямую, перпендикулярную к определенной прямой l, затем на этом перпендикуляре AO (рис. 168) отложим отрезок OA_1 такой, что $OA_1 = OA$, то получим *точку A_1, которая будет называться симметричной точке A относительно прямой l* (l называют *осью симметрии*).

Чтобы построить фигуру Φ_1, симметричную Φ относительно прямой l, строят точки, симметричные каждой точке фигуры Φ относительно оси l (рис. 169).

Осевую симметрию называют еще *зеркальным отражением* относительно прямой. Заметим, что точкой, симметричной точке, лежащей на оси симметрии, является сама эта точка.

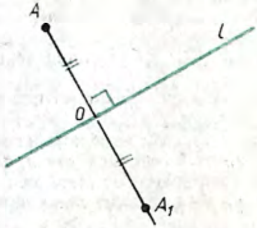


Рис. 168

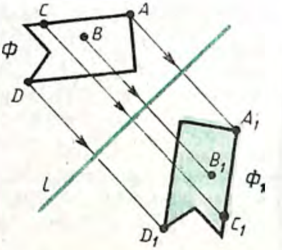


Рис. 169

Свойства симметричных точек.

1. При осевой симметрии расстояние между точками фигуры сохраняется (рис. 170).
2. При осевой симметрии точки, лежащие на прямой, переходят в точки, лежащие на прямой (рис. 170).
3. При осевой симметрии угол переходит в равный ему угол (рис. 171).

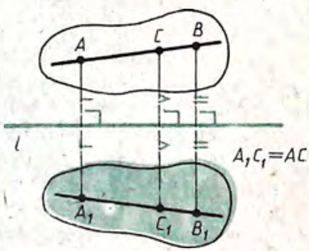


Рис. 170

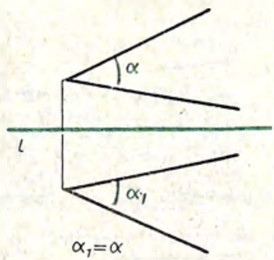


Рис. 171

Существуют геометрические фигуры, а также фигуры и тела в жизни и практике, которые называют симметричными фигурами и телами.

Осью симметрии фигуры называется прямая, разбивающая данную фигуру на две фигуры, симметричные относительно этой прямой.

Фигура, имеющая ось симметрии, называется *симметричной фигурой.*

Назовем оси симметрии некоторых знакомых нам фигур:

осью симметрии отрезка является его серединный перпендикуляр;

осью симметрии угла является его биссектриса;

осью симметрии равнобедренного треугольника является медиана, проведенная к основанию (а также биссектриса, высота, проведенные к основанию);

осями симметрии окружности являются прямые, проходящие через ее центр (их бесконечное множество).

На практике симметричными фигурами являются, например, листья деревьев, фасады многих зданий и т. д.

На данном этапе знакомства с осевой симметрией и ее использованием при решении задач нам нужно будет уметь строить в основном точки, отрезки, лучи и прямые, симметричные данным относительно заданной оси.

1) Как построить точку, симметричную данной относительно прямой, описано в начале этого пункта.

2) Для построения отрезка A_1B_1, симметричного отрезку AB относительно прямой l, нужно построить точки A_1 и B_1, симметричные концам отрезка AB: они и будут концами искомого отрезка (рис. 172, *а, б*).

3) Для построения луча k_1, симметричного лучу k относительно оси l, нужно построить точку A_1, симметричную началу луча A относительно оси l, и точку B_1, симметричную любой другой точке B, лежащей на луче k. Луч A_1B_1 будет искомым лучом k_1. В качестве точки B можно взять точку пересечения луча (если она имеется) с осью l — эта точка отразится сама на себя (рис. 172, *в*).

4) Для построения прямой a_1, симметричной прямой a относительно оси l, нужно построить точки K_1 и L_1, симметричные любым двум точкам K и L прямой a относительно l, и через них провести искомую прямую a_1 (рис. 172, *г*).

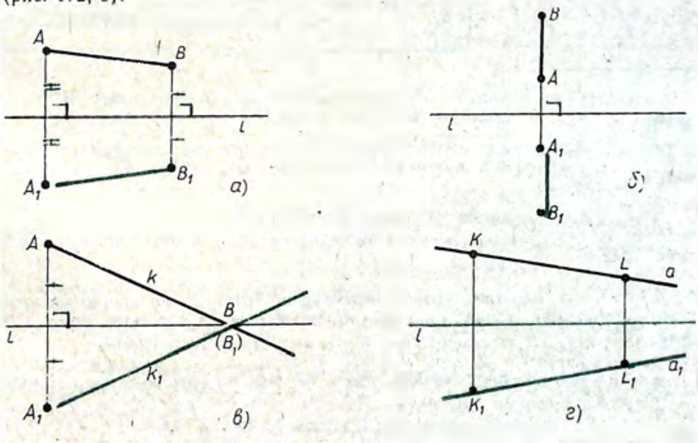


Рис. 172

Задачи на построение.

Задача 1. Часть листа бумаги, на которой была расположена вершина C треугольника ABC, случайно оторвана и потеряна. Построить основание высоты, которая могла бы быть проведена из вершины C, если бы лист бумаги был цел.

$\triangle$ На чертеже уместились части сторон AC и BC треугольника ABC (рис. 173). Построим $\triangle AC_1B$, симметричный $\triangle ABC$ относительно прямой AB. Основание K высоты треугольника AC_1B, проведенной из вершины C_1, будет также основанием высоты треугольника ABC, проведенной из отсутствующей вершины C.

Обосновать справедливость построения можно с помощью свойств симметричных точек. $\blacktriangle$

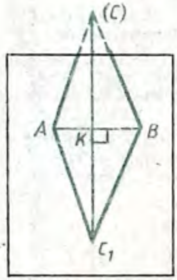


Рис. 173

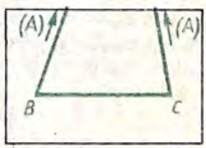


Рис. 174

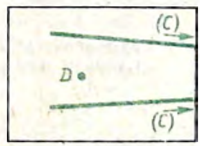


Рис. 175

Следующие задачи решите самостоятельно, предполагая, что на имеющейся части листа бумаги хватит места на любое построение.

Задача 2. Вершина A треугольника ABC не уместилась на листе бумаги. Построить основание биссектрисы угла A треугольника ABC (рис. 174).

Задача 3. Вершина угла C недоступна. Точка D, попавшая на чертеж,— внутренняя точка угла C. Найти способ построения луча CD (рис. 175).

Задача 4. В треугольнике, одна из вершин которого недоступна, провести медианы.

§ 11. Параллельные прямые

Две прямые на плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются (рис. 176).

Отрезки и лучи называются параллельными, если они лежат на параллельных прямых.

Прямая c называется *секущей* прямых a и b, если она пересекает их в двух разных точках (рис. 177).

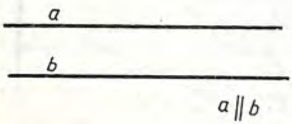


Рис. 176

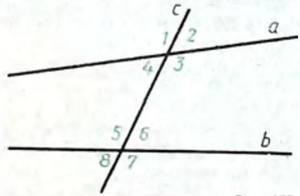
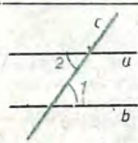
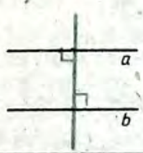
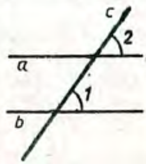
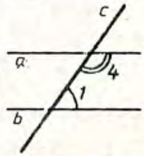


Рис. 177

Углы, образованные пересечением прямых *a и b прямой c* (рис. 177):
накрест лежащие углы — 3 и 5, 4 и 6;
односторонние углы — 4 и 5, 3 и 6;
соответственные углы — 1 и 5, 4 и 8, 2 и 6, 3 и 7.

Признаки параллельности и свойства параллельных прямых (прямые и обратные теоремы)

№ п/п	Признак (прямая теорема)	Рисунок	Свойство (обратная теорема)
1	Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны. Например, если $\angle 1 = \angle 2$, то $a \parallel b$ С л е д с т в и е. Если две прямые перпендикулярны к одной и той же прямой, то они параллельны. Например, если $a \perp c$ и $b \perp c$, то $a \parallel b$	 	Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны. Например, если $a \parallel b$, то $\angle 1 = \angle 2$ С л е д с т в и е. Если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой. Например, если $a \parallel b$ и $c \perp a$, то $c \perp b$

№ п/п	Признак (прямая теорема)	Рисунок	Свойство (обратная теорема)
2	Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны. Например, если $\angle 1=\angle 2$, то $a \parallel b$		Если две параллельные прямые пересечены секущей, то соответственные углы равны. Например, если $a \parallel b$, то $\angle 1=\angle 2$
3	Если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны. Например, если $\angle 1+\angle 4=180^\circ$, то $a \parallel b$		Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма односторонних углов равна 180°. Например, если $a \parallel b$, то $\angle 1+\angle 4=180^\circ$

ПРИМЕРЫ

Докажем *первый признак параллельности прямых,* т. е. докажем, что если $\angle 1=\angle 2$, то $a \parallel b$ (рис. 178).

△ Доказательство проведем *методом от противного.*

Допустим, что прямые a и b не параллельны. Тогда они пересекутся в некоторой точке M (рис. 178). Образовался треугольник AMB, один из его углов — угол 1, угол 2 — внешний угол этого треугольника. По теореме о внешнем угле треугольника $\angle 2>\angle 1$. Но это противоречит условию $\angle 2=\angle 1$. Значит, наше предположение о том, что прямые a и b не параллельны, неверно. Следовательно, прямые a и b параллельны. ▲

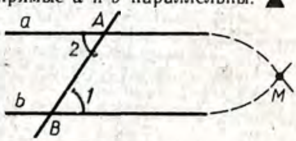


Рис. 178

ЗАДАНИЯ

1) Пользуясь первым признаком параллельности, доказать следствие из него, т. е. доказать, что если $a \perp c$ и $b \perp c$, то $a \parallel b$.

2) Доказать второй признак параллельности прямых, пользуясь свойством равенства вертикальных углов и первым признаком.

3) Доказать третий признак параллельности прямых, пользуясь первым признаком и тем, что сумма смежных углов равна 180°.

ПРИМЕРЫ

1) Даны $AB=BC$ $\angle BAC=\angle CAD$ (рис. 179). Докажем, что $BC \parallel AD$.

△ Треугольник ABC — равнобедренный, значит, $\angle BAC=\angle BCA$. Тогда $\angle BCA = \angle CAD$ (так как порознь они равны углу BAC). Но углы BCA и CAD — накрест лежащие равные углы. Следовательно, по первому признаку параллельности прямые BC и AD параллельны. ▲

ЗАДАНИЯ

1) На рисунке 180 $AB=BC$, $CD=DE$. Доказать, что

$AB \parallel DE$.

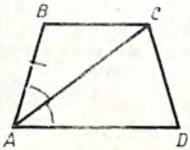


Рис. 179

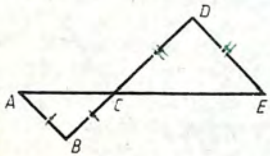


Рис. 180

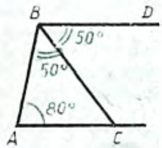


Рис. 181

2) В треугольнике ABC $\angle A=80°$, $\angle B=50°$. Через вершину B проведена прямая BD так, что луч BC — биссектриса угла ABD. Докажем, что $AC \parallel BD$.

△ Выполним чертеж по условию задачи (рис. 181):

$$\angle ABD=50°+50°=100°,$$
$$\angle BAC+\angle ABD=80°+100°=180°.$$

Но $\angle BAC$ и $\angle ABD$ — односторонние углы при пересечении прямых AC и BD секущей AB, значит (по третьему признаку), прямые AC и BD параллельны. ▲

2) В треугольнике ABC $\angle A=40°$, а внешний угол BCE равен 80°. Доказать, что биссектриса угла BCE параллельна прямой AB.

ПРИМЕРЫ

1) Найдем все углы, образовавшиеся при пересечении двух параллельных прямых третьей, если один из углов на 30° больше другого.

△ При пересечении двух параллельных

ЗАДАНИЯ

1) Найти углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых a и b секущей c, если один из углов равен 45°.

прямых третьей образуются либо равные углы (накрест лежащие или соответственные), либо углы, сумма которых равна 180° (односторонние). В условии задачи, очевидно, речь идет об односторонних углах.

Пусть $x°$ — величина одного из односторонних углов, тогда по условию $x° + 30°$ — величина другого угла. Их сумма равна 180°:

$$x + x + 30 = 180,\ 2x = 180 - 30,$$
$$2x = 150,\ x = 75,$$
$$x + 30 = 105.$$

Ответ. Образовавшиеся углы равны 75° и 105°. ▲

2) Докажем, что если биссектриса внешнего угла треугольника параллельна его стороне, то такой треугольник — равнобедренный.

△ Пусть AK — биссектриса внешнего угла BAM треугольника ABC ($\angle 1 = \angle 2$) и $AK \parallel BC$ (рис. 182). Прямую AB можно рассматривать как секущую двух параллельных прямых AK и BC. Тогда $\angle 2 = \angle 3$ как накрест лежащие. Прямую CM можно также рассматривать как секущую этих же параллельных прямых AK и BC. Тогда $\angle 1 = \angle 4$ как односторонние. Следовательно, $\angle 3 = \angle 4$, так как каждый из них равен одинаковым по величине углам 2 и 1, а потому $\triangle ABC$ — равнобедренный (углы при основании равны). ▲

2) Докажите, что прямая, параллельная основанию равнобедренного треугольника, отсекает от него также равнобедренный треугольник.

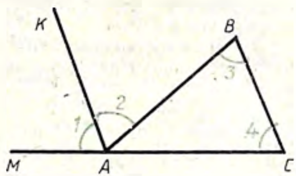
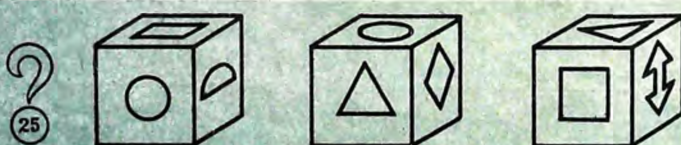


Рис. 182



На гранях куба каждая фигура нарисована только один раз. На предложенных рисунках показан куб в трех разных позициях. Определите, какие фигуры изображены на противоположных гранях куба.

Углы с соответственно параллельными сторонами либо равны, либо их сумма равна 180° (рис. 183).

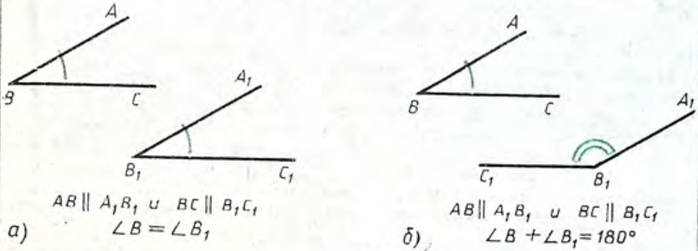


Рис. 183

ПРИМЕР

На рисунке 184 $a \parallel b$, $c \parallel d$, $\angle 1 = 40°$. Найдем углы 2, 3, 4.

△ Все углы на рисунке 184 — это углы с соответственно параллельными сторонами:

$\angle 2 = \angle 1 = 40°$,
$\angle 3 = 180° - \angle 1 = 180° - 40° = 140°$,
$\angle 4 = \angle 3 = 140°$. ▲

ЗАДАНИЕ

На рисунке 185 $a \parallel b$, $c \parallel d$, $\angle 2 = 70°$.

Найти углы 1, 3, 4.

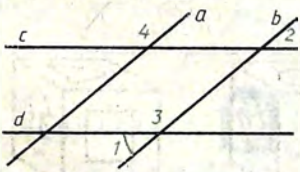


Рис. 184

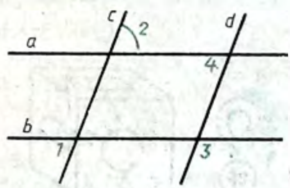


Рис. 185

Все точки каждой из двух параллельных прямых удалены от другой прямой на одинаковое расстояние.

Расстоянием между двумя параллельными прямыми называется расстояние от произвольной точки одной прямой до другой прямой.

ПРИМЕР

Построим прямые, параллельные прямой a и удаленные от нее на 2 см.

$\triangle$ Имеем прямую a (рис. 186). Возьмем на прямой a произвольную точку A и проведем через нее прямую n, перпендикулярную прямой a. Затем на прямой n от точки A отложим отрезки $AD = AD_1 = 2$ см. Через точки D и D_1 проведем прямые p и p_1, перпендикулярные прямой n. Эти прямые и будут искомыми.

Доказательство и исследование построения проведите самостоятельно. ▲

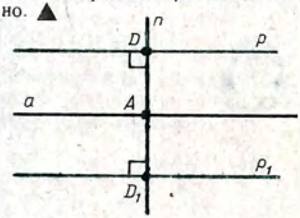


Рис. 186

ЗАДАНИЕ

Построить хотя бы одну точку, удаленную от прямой a на 2 см, а от прямой b — на 1,5 см (рис. 187).

Указание. Построить сначала прямую, удаленную от прямой a на 2 см, а затем — прямую, удаленную от прямой b на 1,5 см. Провести исследование полученного решения.

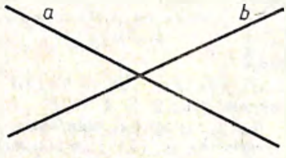


Рис. 187

Сумма углов треугольника равна 180°.

ПРИМЕРЫ

1) Найдем угол A треугольника ABC, если $\angle B = 45°$, $\angle C = 100°$.

$\triangle$ $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, откуда $\angle A = 180° - (\angle B + \angle C)$, $\angle A = 180° - (45° + 100°) = 180° - 145° = 35°$.

Ответ. $\angle A = 35°$. ▲

ЗАДАНИЯ

1) Найти углы α, β, γ по рисунку 188.

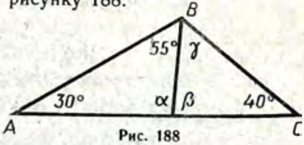


Рис. 188

2) Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Найдем:

а) $\angle B$, если $\angle A=40°$;

б) $\angle A$ если $\angle B=70°$.

△ а) $\angle A=\angle C=40°$ (рис. 189), значит,

$$\angle B=180°-(\angle A+\angle C)= \\ =180°-(40°+40°)= \\ =180°-80°=100°;$$

б) $\angle A+\angle C=180°-\angle B= \\ =180°-70°=110°.$

Но $\angle A=\angle C$, значит,

$$\angle A=\frac{1}{2}\cdot110°=55°.$$ ▲

3) В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса AK. Найдем угол AKB, если $\angle C=70°$.

△ Выполним чертеж по условию задачи (рис. 190).

Так как $\triangle ABC$ — равнобедренный, то $\angle A=\angle C=70°$, AK — биссектриса угла A, значит, $\angle BAK=\frac{1}{2}\cdot70°=35°$. В $\triangle ABC$

$$\angle B=180°-(\angle A+\angle C)= \\ =180°-(70°+70°)=180°-140°=40°.$$

В $\triangle ABK$

$$\angle AKB=180°-(\angle B+\angle BAK)= \\ =180°-(40°+35°)= \\ =180°-75°=105°.$$

Ответ. $\angle AKB=105°$. ▲

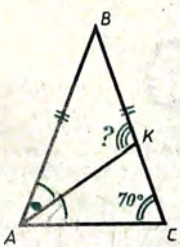


Рис. 190

2) Доказать, что *каждый угол равностороннего треугольника равен* $60°$.

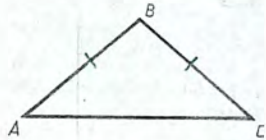


Рис. 189

3) Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен 140°. Найти углы треугольника. Сколько решений имеет задача?

4) В равнобедренном треугольнике KLM с основанием KM проведены биссектриса KB и высота KH (рис. 191). Найти углы треугольника KBH, если $\angle L=20°$.

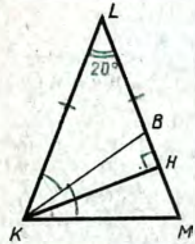


Рис. 191

Свойства прямоугольных треугольников.

1. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90° (рис. 192).

2. Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы (рис. 193).

3. Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30° (рис. 193).

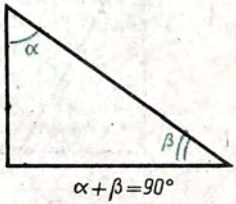


Рис. 192

Рис. 193

ПРИМЕРЫ

1) В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C=90°$, $\angle A=30°$. Найдем гипотенузу AB, если катет $BC=2$ см.

△ Против угла в 30° в прямоугольном треугольнике лежит катет, равный половине гипотенузы (рис. 194): $BC=\frac{1}{2}AB$, откуда $AB=2BC$, т. е. $AB=2\cdot 2$ см $=$ $=4$ см. ▲

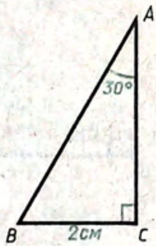


Рис. 194

ЗАДАНИЯ

1) В прямоугольном треугольнике KLM $\angle K=90°$, $\angle L=30°$. Найти KM, если $LM=13$ см.

2) В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C=90°$, $\angle B=60°$ и $BC+AB=15$ см. Найдем гипотенузу треугольника.

$\triangle$ В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 195) $\angle A+\angle B=90°$, откуда $\angle A=90°-\angle B=90°-60°=30°$.

Против угла A лежит катет, равный половине гипотенузы. Пусть $BC=x$, тогда $AB=2x$.

Из условия задачи $BC+AB=15$ см, или $x+2x=15$. Решим это уравнение.

$$x+2x=15,\ 3x=15,\ x=5\ \text{(см)}$$
$$AB=2x=2\cdot5=10\ \text{(см)}. ▲$$

2) В прямоугольном треугольнике KLM $\angle K=90°$, $\angle L=30°$, а удвоенная сумма длин меньшего катета и гипотенузы равна 36 см. Найти меньший катет треугольника KLM.

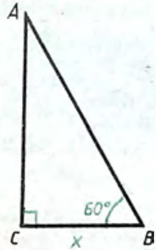


Рис. 195

3) Медиана BD, проведенная к основанию равнобедренного треугольника ABC, разделила его на части, каждая из которых равна половине боковой стороны. Докажем, что $\triangle ABC$ — равносторонний.

$\triangle$ По условию задачи $AD=DC=\frac{1}{2}AB$ (рис. 196). Но в равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является также и высотой треугольника, значит, $\angle ADB=90°$.

В прямоугольном треугольнике ADB $\angle ADB=90°$ и $AD=\frac{1}{2}AB$, откуда следует, что $\angle ABD=30°$. Тогда

$$\angle BAD=90°-30°=60°.$$

Но в равнобедренном треугольнике ABC $\angle C=\angle A$, т. е. $\angle C=60°$. Тогда

$$\angle B=180°-(\angle A+\angle C)=$$
$$=180°-(60°+60°)=180°-120°=60°.$$

В треугольнике ABC все углы равны, значит, равны все стороны. Следовательно, он — равносторонний. ▲

3) Высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, равна 13 см, а боковая сторона этого треугольника равна 26 см. Найти углы треугольника.

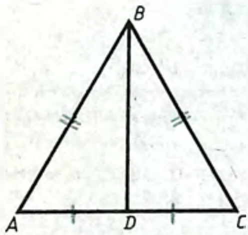


Рис. 196

4) Обоснуем построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и острому углу.

4) Построить прямоугольный треугольник, если его гипотенуза равна 3,5 см, а один из острых углов равен 15°.

△ Зная, что сумма углов треугольника равна 180° или что сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°, легко найти второй острый угол. Зная гипотенузу и два острых угла, т. е. два угла, прилежащих к гипотенузе, можно построить треугольник по стороне и прилежащим к ней углам. ▲

26 **Из вершины угла в 75° треугольника проведена прямая, делящая этот треугольник на два равнобедренных треугольника. Найдите углы данного треугольника.**

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 11

1. В равнобедренном треугольнике угол при основании в 2 раза больше угла, противолежащего основанию. Найти углы этого треугольника.

2. Построить прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 3 см, а один из углов равен 20°.

3. Отрезок AK — биссектриса треугольника ABC. Из точки K проведена прямая, пересекающая сторону AB в точке L так, что $AL = LK$. Доказать, что $KL \parallel AC$.

Решение (возможный вариант оформления)

1. Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC$, $\angle A = 2\angle B$ (рис. 197).

Найти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

Рис. 197

Решение.

Пусть $\angle B = x°$, тогда $\angle A = \angle C = 2x°$. Сумма углов треугольника равна 180°: $x + 2x + 2x = 180$, $5x = 180$, $x = 36$, $\angle B = 36°$, $\angle A = \angle C = 2 \cdot 36° = 72°$.

Ответ. 72°, 36°, 72°.

2. Дано: $\angle C=90°$, $AB=3$ см, $\angle A=20°$.

Построить: $\triangle ABC$*.

Анализ (рис. 198).

$\angle B=90°-20°=70°$. Известны: $AB=3$ см, $\angle A=20°$, $\angle B=70°$. $\triangle ABC$ можно построить по стороне AB и прилежащим к ней углам A и B.

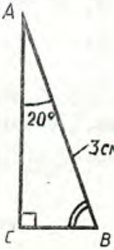


Рис. 198

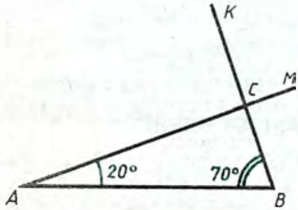


Рис. 199

Построение (рис. 199).

1) $AB=3$ см.
2) $\angle MAB=20°$.
3) $\angle KBA=70°$.
4) C — точка пересечения лучей BK и AM, $\triangle ACB$ — искомый.

Доказательство.

$\triangle ACB$ — прямоугольный ($\angle A+\angle B=90°$), $AB=3$ см, $\angle A=20°$, т. е. $\triangle ACB$ — искомый.

Исследование.

Задача имеет единственное решение.

3. Дано: $\triangle ABC$, AK — биссектриса треугольника, $AL=LK$ (рис. 200).

Доказать: $KL \parallel AC$.

Доказательство.

1) $\triangle ALK$ — равнобедренный, так как $AL=LK$ по условию, значит, $\angle LAK=\angle LKA$.

2) $\angle LAK=\angle KAC$, так как AK — биссектриса угла LAC, $\angle LAK=\angle LKA$ по доказанному в п. 1, значит, $\angle LKA=\angle KAC$ (так как они оба равны углу LAK).

3) $\angle LKA$ и $\angle KAC$ — накрест лежащие при пересечении прямых LK и AC секущей AK, но если накрест лежащие углы равны, то прямые LK и AC параллельны, что и требовалось доказать.

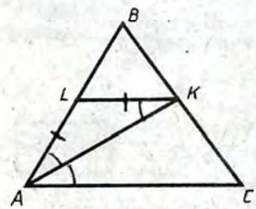


Рис. 200

* Можно считать удовлетворительно выполненным задание, если ученик верно выполнит построение, не приводя при этом никаких обоснований.

27

Как в листе бумаги, вырванном из школьной тетради, прорезать дыру, в которую пролезает взрослый человек?

ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ СТРАНИЦЫ

1. Вывод формулы суммы углов треугольника с помощью перегибаний листа.

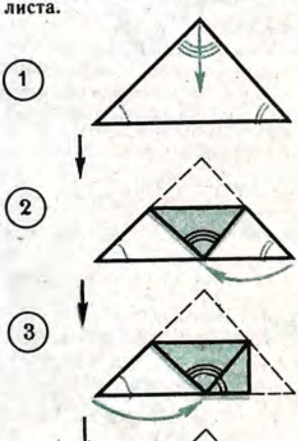


Рис. 201

Вырежьте из бумаги (желательно с разных сторон окрашенной в разные цвета) произвольный треугольник и, выполняя перегибания его, как показано на рисунке 201, убедитесь, что сумма углов треугольника равна развернутому углу, т. е. 180°.

2. Построение с помощью циркуля и линейки некоторых углов.

Строить прямой угол с помощью циркуля и линейки мы умеем (см. построение перпендикуляра к прямой).

Делить угол пополам с помощью циркуля и линейки мы тоже умеем (см. построение биссектрисы угла). Значит, угол, равный половине прямого, т. е. угол в 45°, мы построим. Построим и угол, равный половине угла в 45° — угол величиной 22°30′; сможем построить и угол 11°15′ (половина от 22°30′) и т. д. Умея строить угол, равный данному (см. начало § 9), очевидно, нетрудно построить, например, угол в 67°30′ (для этого нужно построить угол в 45° и к нему «прибавить» угол в 22°30′).

Мы можем построить прямоугольный треугольник по катету и гипотенузе. Если катет будет в 2 раза меньше гипотенузы, то острый угол, лежащий против такого катета, будет равен 30° (второй острый угол в треугольнике равен 60°). Таким образом, углы в 30° и 60° мы также можем строить с помощью циркуля и линейки. С помощью построения биссектрисы угла сможем построить угол, равный половине, четверти, одной восьмой и т. д. от угла 30°.

ЗАДАНИЕ

Постройте угол, равный 75°, 105°, 135°, 120°, 150°, 165°, 37°30′, 82°30′, 3°45′. Объясните построение.

3. Геометрическое место точек (будем писать сокращенно г.м.т.) — это множество всех точек, обладающих определенным свойством. Например:

биссектриса угла — это г.м.т., каждая из которых одинаково удалена от сторон этого угла;

две прямые, параллельные данной и симметричные относительно этой прямой — это г.м.т., равноудаленных от данной прямой;

окружность — это г.м.т. плоскости, равноудаленных от одной точки (от центра окружности);

сфера — это г.м.т. пространства, равноудаленных от одной точки — центра сферы;

серединный перпендикуляр к отрезку — г.м.т., равноудаленных от концов этого отрезка; серединный перпендикуляр к отрезку (за исключением точки пересечения перпендикуляра с отрезком) можно считать также геометрическим местом точек, являющихся вершинами всех равнобедренных треугольников, основанием которых служит заданный отрезок.

Интерес представляют *задачи на пересечение геометрических мест точек*. Приведем примеры таких задач:

З а д а ч а 1. Найти точку, равноудаленную от трех заданных точек, не лежащих на одной прямой.

△ Пусть даны точки A, B и C, не лежащие на одной прямой (рис. 202).

Геометрическим местом точек, равноудаленных от точек A и B, является серединный перпендикуляр к отрезку AB (на рисунке 202 это прямая l).

Геометрическим местом точек, равноудаленных от точек B и C, является серединный перпендикуляр к отрезку BC (на рисунке 202 это прямая n). Точка $O = l \times n$ лежит как на прямой l, так и на прямой n, т. е. равноудалена от точек A и B и от точек B и C, значит, от всех трех точек. Таким образом, точка O — искомая.

То, что точка O — единственная, следует из того, что две различные прямые на плоскости либо параллельны, либо пересекаются (в одной точке). Так как l и n не параллельны (докажите этот факт методом от противного), значит, у них одна общая точка (точка O). ▲

Отметим попутно, что точка O, найденная вышеописанным способом, является центром окружности, проходящей через три не лежащие на одной прямой точки A, B и C. Радиус этой окружности $R = OA = OB = OC$.

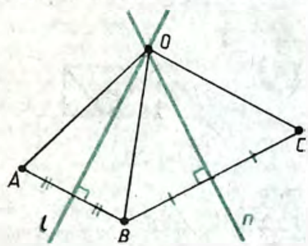


Рис. 202

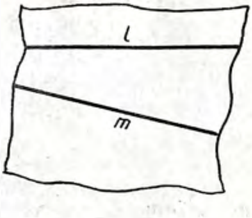


Рис. 203

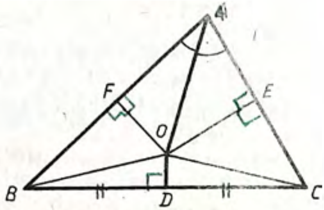


Рис. 204

Задача 2. Найти точку, удаленную от точки A на расстояние a, а от точки B — на расстояние b. Сколько существует таких точек? (Рассмотрите все возможные случаи.)

Задача 3. Найти точку, удаленную от прямой l на расстояние a, а от прямой m — на расстояние b. Сколько существует таких точек?

Задача 4. Внутри угла задана точка M. Найти точку, равноудаленную от сторон угла и удаленную от точки M на заданное расстояние a. Всегда ли можно найти такую точку? (Рассмотрите возможные случаи.)

Задача 5. На «Занимательных страницах» предыдущего параграфа с помощью осевой симметрии мы учились строить части высоты и биссектрисы, проведенных из вершины треугольника, если эта вершина не уместилась на листе бумаги. При этом мы допускали, что треугольник, симметричный данному относительно прямой, содержащей его основание, умещается на отведенном листе бумаги. А если не умещается? Как построить часть биссектрисы угла lm, не выходя за пределы отведенного листа бумаги (рис. 203)?

4. Математический софизм «Все треугольники равнобедренные». Напомним, что *софизмами* называют рассуждения, кажущиеся правильными и приводящие к неверному заключению. Задача заключается в том, чтобы проверяя чертеж и шаг за шагом все рассуждения, найти в них ошибку.

△ Пусть ABC — произвольный (начертим неравнобедренный — рис. 204). Проведем биссектрису угла A и серединный перпендикуляр DO отрезка BC до пересечения с биссектрисой угла A в точке O. Из точки O опустим перпендикуляры OF и OE на стороны AB и AC.

1) $\triangle AOF = \triangle AOE$ как прямоугольные по гипотенузе (AO — общая гипотенуза) и острому углу ($\angle FAO = \angle EAO$), следовательно, $AF = AE$.

2) $\triangle BOF = \triangle COE$ как прямоугольные по гипотенузе ($BO = CO$, так как точка O, лежащая на серединном перпендикуляре OD к отрезку BC, равноудалена от его концов) и катету ($OF = OE$ как стороны против равных углов FAO и AOE в равных треугольниках AOF и AOE), значит, $FB = EC$, а так как $AF = AE$ и $FB = EC$, то $AF + FB = AE + EC$, т. е. $AB = AC$. Значит, треугольник ABC — равнобедренный. ▲

Найдите ошибку, которая привела нас к выводу о том, что все треугольники (мы рассматривали произвольный $\triangle ABC$) — равнобедренные.

ГЛАВА III. МАТЕМАТИКА В ЖИЗНИ

§ 12. Учет расходов семьи на питание

Почти все мальчики и девочки помогают родителям делать покупки в магазине или на рынке. У некоторых ребят покупка хлеба, молока, спичек, мыла и т. д.— их постоянная обязанность. Не за горами время, когда мальчики и девочки сами станут взрослыми и им придется делать все покупки в магазине так, как сейчас делают это их родители.

За купленные товары платят заработанными деньгами. Чтобы денег хватало на необходимые приобретения (и какую-то часть из них можно было бы откладывать на покупку крупных вещей, на отдых и т. д.), нужно уметь разумно их тратить. Для этого необходимо знать, во-первых, сколько денег за месяц (или за неделю) тратит семья на питание. Это — постоянная часть расхода каждой семьи (есть еще обязательные ежемесячные расходы: плата за квартиру, электроэнергию, газ, воду и т. д.— обычно их называют платой за коммунальные услуги). Очевидно, в сумме все эти расходы не должны превышать дохода семьи.

Поучимся сами, а заодно поможем родителям вести учет покупок в продуктовом магазине (или на рынке). Для этого можно использовать обыкновенную ученическую тетрадь (лучше в клетку). Двойной лист следует разграфить так, как это показано в таблице 1. Если какие-то покупки семья никогда не делает, не включайте их в таблицу (например, если овощи вы выращиваете в своем огороде).

В таблице 1 для примера заполнена графа покупок в понедельник. В самой нижней строке «Итого» вы суммируете (можно с помощью микрокалькулятора) всю стоимость покупок в столбцах по дням недели. Затем полученные семь сумм в конце недели складываете и получаете расход денег на питание за неделю. В следующие недели вы можете потратить денег больше или меньше. Но уже, умножив полученную сумму на 4 (в месяце 4 полных недели), вы можете приблизительно представить расход на питание семьи за месяц. А для большей точности (не поленитесь!) проследите за покупками в течение всего месяца.

Из заполненной таблицы можно извлечь много полезной информации. Например:

узнать, сколько крупы, сахара тратится семьей за месяц, и закупить их сразу на месяц (чтобы не ходить в магазин лишний раз);

если покажется, что расход на питание очень большой, можно подумать, какие продукты из дорогостоящих следует частично заменить другими;

Таблица 1

№ п/п	Дата или день недели / Покупка	Понедельник			Вторник	Среда	Четверг	Пятница	Суббота	Воскресенье	Стоимость покупки за неделю
		Количество	Цена, р.	Стоимость покупки, р.							
1	Хлебные изделия			a							
2	Молочные продукты	1 л 1 пакет		b c							
3	Овощи, фрукты, зелень	3 кг 2 кг	d e	$3d$ $2e$							
4	Мясные и рыбные продукты, яйца	1,5 кг	f	$1{,}5f$							
5	Крупы, мука	1 кг 1 кг		k l							
6	Сахар, сладости	1 пачка		m							
7	Напитки (чай, кофе), специи, соль	1 пачка		n							
	Итого										

подсчитать, сколько тратится в месяц денег на хлеб, молоко или любой другой продукт в отдельности.

Разность между зарплатой и тратами на питание и коммунальные услуги — это те деньги, которые родители могут потратить на книги, походы в кино, одежду, обувь, игрушки, спортивное снаряжение, поездку на отдых и т. д. Решение о том, кому из членов семьи в первую очередь и что именно необходимо купить, лучше всего принимать на семейном совете.

§ 13. Таблица игр чемпионата по футболу

Почти каждый мальчик и некоторые девочки «болеют» за ту или иную футбольную команду. Тот, кто регулярно следит за матчами, наверное, знает, как составляется таблица игр и как с ее помощью определяется победитель. Для тех, кто хочет с этим познакомиться подробнее, а заодно поучиться систематизировать поступающую информацию и делать определенные выводы по ней, предлагаем вместе с нами проделать следующее.

Составим *таблицу* игр по футболу и внесем в нее некоторые результаты игр. (Их мы придумаем, а вы можете воспользоваться настоящими результатами встреч на чемпионате страны какого-то года и заполнить таблицу самостоятельно.)

В левом столбце под номерами записаны футбольные команды. В самой верхней строке записаны только номера этих же команд. Каждая команда играет с каждой.

На пересечении строки и столбца, соответствующих двум командам, ставят счет завершившегося матча. Например, сыграли команды «Спартак» и «Днепр»: «Спартак» выиграл у «Днепра» со счетом 2:0 (табл. 2), т. е. «Спартак» забил в ворота «Днепра» 2 мяча, а «Днепр» «Спартаку» — ни одного мяча. В строке «Спартак», где она пересекается со столбцом 2 (соответствующим «Днепру»), мы и пишем счет 2:0. Одновременно в строке «Днепр» на пересечении со столбцом 1 (соответствующим «Спартаку») ставим счет 0:2, т. е. в строках счет записывается таким образом, что в первом месте стоит число забитых мячей, а после двоеточия стоит число пропущенных мячей.

После того как все матчи сыграны и таблица заполнена, начинаются выявление победителя и расстановка команд по местам.

В математике и в жизни часто пользуются словом «критерий». *Критерий* — это признак, на основании которого проводится оценка, выносится суждение и т. д.

Главным критерием выявления победителя является *количество набранных командой очков.* Количество набранных очков записывается в строке каждой команды, а подсчитывается оно таким образом: за каждую победу — 2 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш — 0 очков. Так, например, в таблице 2 команда «Спартак» набрала 30 очков.

Если все команды набрали разное количество очков, то места на чемпионате определяются просто: чем больше очков, тем выше место.

Таблица 2

№ п/п	Команда	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Очки	Мячи	Место
1	«Спартак»	0	2:0	3:1	3:0	2:0	2:2	1:0	3:0	4:1	3:1	4:0	3:1	2:0	3:0	3:0	3:1	30	44:7	I
2	«Днепр»	0:2	0	3:2	2:2	2:1	1:2	2:0	3:2	2:1	3:1	2:0	2:0	3:1	4:2	3:2	3:0	25	35:18	III
3	«Жальгирис»	1:3	2:3	0														25	34:15	II
4	«Торпедо» (М.)	0:3	2:2		0															
5	Динамо» (М.)	0:2	1:2			0														
6	«Динамо» (К.)	2:2	2:1				0													
7	«Шахтер»	0:1	0:2					0												
8	«Арарат»	0:3	2:3						0											
9	«Нефтчи»	1:4	1:2							0										
10	«Динамо» (Минск)	1:3	1:3								0									
11	«Металлист»	0:4	0:2									0								
12	«Кайрат»	1:3	0:2										0							
13	«Динамо» (Тб.)	0:2	1:3											0						
14	«Зенит»	0:3	2:4												0					
15	«Черноморец»	0:3	2:3													0				
16	«Локомотив»	1:3	0:3														0		15:41	

Если же в таблице имеются команды с равным количеством набранных очков, то в силу вступает следующий критерий — *разность забитых и пропущенных мячей.* С этой целью в строке каждой команды записываются суммы забитых и пропущенных мячей. Так, в нашей таблице команды «Днепр» и «Жальгирис» набрали по 25 очков, но у «Днепра» разность между забитыми и пропущенными мячами $35-18=17$, а у «Жальгириса» $34-15=19$. Предпочтение при занятии более высокого места отдается той команде, у которой такая разность больше ($19>17$). Поэтому в нашей таблице между первыми тремя командами места распределились следующим образом: I — «Спартак», II — «Жальгирис», III — «Днепр».

Обычно этих двух критериев хватает для выявления претендентов на каждое место чемпионата. Но может оказаться так, что есть в таблице две команды, у которых одинаковы количество очков, а также разность между забитыми и пропущенными мячами. Тогда в силу вступают такие критерии: из двух таких команд на более высокое место поднимается та, которая имеет *больше побед* или *большее количество забитых мячей.* Ну а уж если и здесь оказалось полное соответствие в числе мячей, тогда победитель в *личном первенстве* между такими двумя командами поднимается на более высокое место.

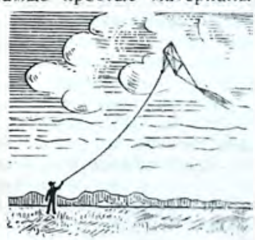
Интересны способы проверки правильности заполнения турнирной таблицы. Тем, кто пользуется микрокалькулятором, это будет сделать совсем просто, но можно провести подсчеты при проверке и обычными способами: в уме или на бумаге.

1-я проверка. Если просуммировать выигрыши по всем командам, то их число должно быть равно сумме всех проигрышей.

2-я проверка. Сумма всех разностей забитых и пропущенных мячей должна быть равна нулю (не удивляйтесь: ведь если количество мячей команды за чемпионат, например, 15:41, то разность забитых и пропущенных мячей есть число отрицательное: $15-41=-26$).

§ 14. Воздушный змей

Многие ребята с удовольствием за городом запустили бы в небо воздушного змея. А чтобы его сделать, нужны самые простые материалы и знания азов геометрии.



Расскажу, как делал змея еще в 20-х г. мой отец, будучи мальчишкой. Хорошей бумаги не было. Газета была лучшим материалом, на которую приклеивались клейстером (из муки) рейки из сухого камыша, тростника, дранки (однослойной фанеры) — можно было брать и тонкие деревянные рейки, но из тростника рейки легче.

Попробуйте сделать змея сами, используя наши советы и совершенствуя предложенную конструкцию и технологию изготовления.

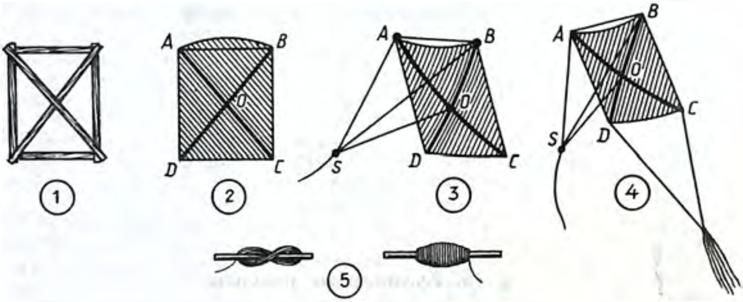


Рис. 205

Итак, перечислим основные необходимые материалы.

1. *Бумага* — газетная, писчая, из школьной тетради, калька, тонкий пергамент.
2. *Рейки* деревянные (потоньше), сухие камышины, расщепленные вдоль ствола на 6—8 частей.
3. *Клей* для дерева, бумаги.
4. *Нитка* толстая (желательно суровая).
5. *Мочало*, старые тряпки (для хвоста змея).

Изготовление.

1. Из бумаги вырежьте прямоугольник, стороны которого находятся примерно в отношении 1:1,6 (такое отношение длин в математике и архитектуре называется *золотым сечением*), т. е. если меньшая сторона прямоугольника равна 30 см, то большая должна быть равна примерно 30 см$\times$1,6=48 см.

2. Нарежьте рейки так, чтобы ими можно было обклеить змея по периметру и две рейки пустить по диагоналям. Длина реек должна быть чуть больше (на 0,5—1 см), чем соответствующий размер листа бумаги (лишний материал после изготовления модели можно будет убрать).

3. Положите лист бумаги на стол или на пол (подстелив предварительно под него ненужную бумагу, газету), приготовьте рейки и клей.

4. Поочередно смазывая одну плоскость реек клеем, накладывайте их на заготовленный бумажный лист край в край (лучше, чтобы рейка чуть выступала за лист, чем наоборот).

Порядок наложения реек: сначала — поперечные (меньшие по длине), затем — продольные и последними — диагональные (рис. 205, *1*). В углах будет три слоя реек. Очевидно, у самых углов прямоугольника большие и диагональные рейки не будут касаться бумаги, т. е. склеены с бумагой они там не будут.

5. Иглой с суровой ниткой проколите бумажную часть змея в углах и центре и свяжите аккуратно бумагу и крестовины реек конструкции.

6. Суровую нитку, закрепив ее за крестовины в углах A и B, натяните так, чтобы рейка AB немного выгнулась. В этом положении и зафиксируйте

нить (рис. 205, *2*). Такая выпуклость нужна, чтобы в воздухе змей был устойчив, не крутился вокруг своей оси.

7. Положите змея на ровную поверхность выпуклой частью вверх. Привяжите к углам A и B и середине диагоналей O нити равной длины ($SA=SB=SO$) и скрепите их в точке S (рис. 205, *3*). Длина каждого из этих отрезков чуть больше половины диагонали AO прямоугольника $ABCD$. Длины нитей SA, SB и SO влияют на высоту подъема змея.

8. Хвост привязывается к точкам D и C (рис. 205, *4*).

9. Нить, за которую вы будете вести змея, наматывается на палочку или карандаш. Лучше всего наматывать нить «восьмеркой» (рис. 205, *5*).

§ 15. Кулинарные рецепты

1. Для того чтобы пользоваться кулинарными рецептами и производить перерасчет продуктов по ним, порой требуется знать, что такое отношение, пропорциональность.

Рассмотрим конкретный рецепт.

Овощная икра. Репчатый лук, соленые огурцы и морковь берутся в весовом отношении 3:4:4. Вымытые, очищенные и порезанные овощи перемешиваются с небольцим количеством томатной пасты и 15 мин тушатся на огне. Подают к столу в холодном виде.

В зависимости от того, на какое количество людей или на какой срок хранения вы будете готовить овощную икру, нужно брать разное количество продуктов. Например, для одной семьи можно использовать по 1 кг огурцов и моркови. Сколько же лука нужно взять? Огурцы и морковь входят в блюдо в объеме 4 весовых частей. Значит, одна единица массы составит: 1 кг:4 = 1000 г:4 = 250 г. А лук по рецепту составляет 3 весовые части, т. е. 250 г$\times$3 = 750 г.

Итак, для приготовления овощной икры можно взять 750 г репчатого лука, 1 кг соленых огурцов и 1 кг моркови (эти массы находятся в отношении 3:4:4).

Произведите подсчет продуктов на приготовление икры, если за основу вы хотите взять 1,5 кг лука.

2. В рецептах кулинарных книг чаще всего указывают не весовое отношение, а конкретное количество продуктов. Но нам бывает нужно сделать перерасчет количества продуктов, если мы хотим получить меньший или больший объем готового блюда. Рассмотрим конкретный пример.

Омлет. На 2 яйца берут 20 г молока, 20 г сливочного масла. Выпущенные в миску яйца посолить, влить молоко (если его нет, можно влить такое же количество воды) и взбить вилкой. Яичную массу вылить на горячую сковороду с маслом и жарить на сильном огне, вначале помешивая ее для равномерного прогревания. Как только омлет начнет густеть, завернуть его края с двух сторон к середине ножом, придав омлету форму продолговатого пирожка.

Если вы будете готовить омлет, например, из 5 яиц, то количество всех продуктов увеличивается в 5:2 = 2,5 раза. Если, например, готовится омлет из 1 яйца, то, естественно, количество всех продуктов уменьшается в 2 раза.

Ребятам, которые полюбят готовить пищу, нужно знать, какова масса того или иного количества продукта, умещающегося в одном стакане или в одной столовой ложке. Объясняется это тем, что взвешивать каждый продукт не всегда бывает возможно, а на кухне под рукой всегда есть стакан и ложка — мерные емкости.

Таблица массы и меры некоторых продуктов

№ п/п	Название продукта	Масса в граммах			
		Стакан ($250\ см^3$)	Столовая ложка	Чайная ложка	1 шт.
1	Мука пшеничная	160	25	10	—
2	Сахарный песок	200	25	10	—
3	Масло	245	20	5	—
4	Молоко	250	20	—	—
5	Томат-паста	—	30	10	—
6	Соль	320	30	10	—
7	Крупа гречневая	210	25	—	—
8	Рис	230	20	—	—
9	Морковь средняя	—	—	—	75
10	Картофель средний	—	—	—	100
11	Огурец средний	—	—	—	100

Таким образом, в рецепте приготовления омлета можно было записать: на 2 яйца — 1 столовая ложка молока, 1 столовая ложка масла.

3. Чаще всего сложность в приготовлении того или иного блюда (в рецепте которого указано, сколько и какого продукта нужно взять) заключается в строгом соблюдении последовательности выполнения тех или иных операций.

Порядок (последовательность) выполнения операций (действий) для решения какой-нибудь задачи называется *алгоритмом* решения задачи. Задача может быть и не математической, а практической. Например, описанный в нашей книге порядок изготовления воздушного змея можно назвать алгоритмом его изготовления.

Сейчас вы прочтете рецепт приготовления торта «Наполеон». Попробуйте по пунктам (по шагам) расписать алгоритм своих действий для изготовления такого торта. Первый раз готовить такой торт лучше вместе с кем-нибудь из взрослых.

Торт «Наполеон». 1) Тесто: 500 г муки, 300 г маргарина или масла, 1 яйцо, 4/5 стакана воды, 1/2 чайной ложки соли, 1 чайная ложка уксуса.

В муку положить охлажденное масло, порезанное на кусочки, и рубить его ножом, перемешивая с мукой до получения крупновидной массы. Собрать в пирамиду, сделать лунку, в которую влить соленую воду, яйцо и уксус. Из всего этого замесить тесто, сделать шар и поставить в холодильник минут на 40. После этого шар разделить на 8—9 частей, каждую часть раскатать в круг как можно тоньше, положить на противень, смазанный маслом, проткнуть тесто во многих местах вилкой и поставить в раскаленную плиту на 3—5 мин (выпекать коржи до золотистого цвета).

2) Крем: 300 г масла, 3/4 стакана молока, 1,5 стакана сахарного песку, 2 яйца, ванилин.

Сахар растереть с яйцами, добавить молоко и варить до закипания на слабом огне, помешивая. Охладить. Масло растереть добела и в него добавить охлажденную смесь. Размешать, добавив ванилин.

3) Между испеченными коржами равномерно распределить крем. Придать торту желаемую форму, срезав ножом лишнюю часть коржей (ею можно посыпать торт сверху). Накрыть торт полотенцем и оставить его на 12 ч при комнатной температуре.

§ 16. Подсчет вариантов

1. Различные группы.

Допустим, продаются три сорта мороженого в стаканчиках: молочное (м.), сливочное (с.) и фруктовое (ф.). Вы хотите попробовать разные сорта мороженого, а денег хватает только на покупку любых двух видов. Сколькими способами вы можете сделать задуманную покупку?

Давайте все возможные варианты покупки перечислим с помощью условных коробок, в которые мы будем укладывать по два разных мороженых (рис. 206). Оказывается, совершить покупку вы могли тремя различными способами. То, что других вариантов покупки нет, более нагляд-

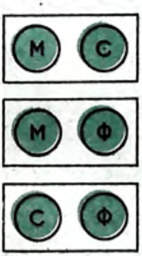


Рис. 206

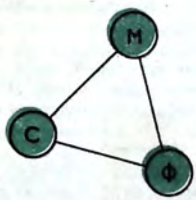


Рис. 207

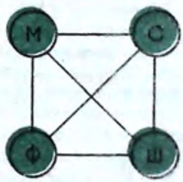


Рис. 208

но видно на схеме (рис. 207). Здесь линиями, связывающими кружки, обозначены варианты объединения сортов мороженого в пары. Таких линий между тремя кружками три, значит, и способов объединения трех сортов в группы по два сорта три.

Усложним задачу. Продаются четыре различные сорта мороженого: молочное (м.), сливочное (с.), фруктовое (ф.) и шоколадное (ш.). Вы опять можете купить только два мороженых разных сортов. Сколькими различными способами вы могли бы это сделать?

Можно «укладывать» все возможные пары в коробки, вмещающие два мороженых, а затем подсчитать количество коробок. Но нагляднее и быстрее определить возможные пары с помощью схемы, аналогичной схеме на рисунке 208. Этим способом пользуйтесь и в дальнейшем при решении аналогичных задач.

Изобразим каждый сорт мороженого кружком с первой буквой названия сорта (рис. 208). Теперь соединим линиями *каждый кружок с каждым.* Количество связующих линий (а их 6) и определяет количество возможных пар.

Задачи такого типа часто приходится решать в жизни. Например: сколькими способами можно выбрать двух партнеров для игры из четырех ребят? Шестью различными способами.

Задача. Подсчитайте, сколькими способами можно выбрать двух партнеров для игры партии в настольный теннис, если собралось 5 ребят и, конечно, каждый хочет играть в первой партии.

2. Установить порядок.

Сколько различных двузначных чисел можно записать с помощью двух цифр 1 и 2, используя каждую цифру по одному разу? Очевидно, только два: 12 и 21.

Сколько различных трехзначных чисел можно записать с помощью трех цифр 1, 2, 3, используя каждую цифру в записи один раз? Пожалуй, сразу не ответишь на этот вопрос. Нужно взять бумагу и ручку и попробовать записать все эти числа: 123, 132, 231,321, 213, 312. Не упустили ли мы какое-нибудь число? Для того чтобы в этом не сомневаться, нужно придумать способ записи всех возможных комбинаций из заданных трех цифр. Это можно сделать, например, с помощью схемы, изображенной на рисунке 209.

Как мы строили эту схему? Нарисовали один под другим три кружка с цифрами 1, 2, 3. Эти цифры могут стоять на первом месте в числе. Затем от каждой цифры (кружка) провели по две линии вправо, так как на втором месте может стоять каждая из двух оставшихся цифр. От второй цифры (кружка) провели одну линию, так как на третьем месте может стоять уже единственная, оставшаяся из неиспользованных цифр. Справа от схемы мы выписали все возможные трехзначные числа, составленные указанным способом. Их оказалось шесть.

Задача. Сколькими различными способами можно установить порядок в дежурстве по классу (дежурят по одному человеку) между четырьмя учениками класса: Антоном (А.), Борисом (Б.), Верой (В.) и Галей (Г.)?

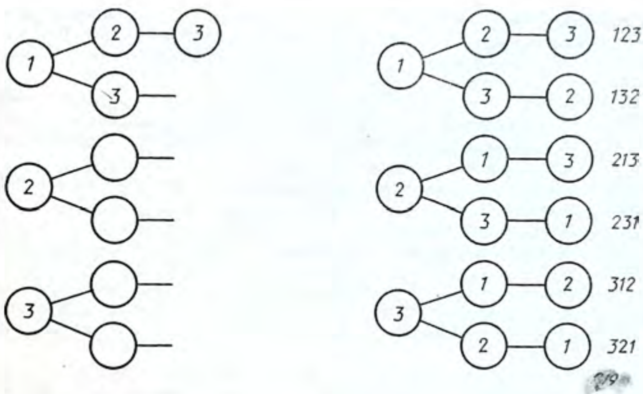


Рис. 209

§ 17. Поступки делового человека
(принятие разумного решения)

1. Больше времени на любимое дело.

Мы все хотим оставить побольше времени на любимое занятие: спорт, чтение, выпиливание лобзиком, шитье и т. д. (у каждого есть свое любимое дело). Но в жизни всегда приходится выполнять ряд обязанностей, которые не всегда приносят радость, но делать которые необходимо. Нужно ежедневно убирать помещение, в котором живешь, мыть посуду, ходить в магазин, ухаживать за животными и т. д. Эти дела тоже нужно делать хорошо хотя бы потому, что дело, сделанное плохо, «заставит» вас трудиться еще больше или причинит какой-нибудь вред (например, вовремя не накормленное животное может заболеть — и нужно будет потратить время, чтобы его вылечить; в неубранном пыльном помещении легко размножаются возбудители различных болезней — и заболеть можете вы или ваши близкие).

А лучше всего, если вы просто, из уважения к себе как к добросовестному человеку, все дела, за которые беретесь, будете делать хорошо и качественно. Это должно стать вашим принципом.

Вернемся к любимым делам и к вопросу о том, где взять побольше времени на занятие ими.

Рассмотрим п р и м е р. Вы пришли из школы, и нужно сделать следующие дела (с каждым делом рядом запишем время, которое требуется на его добросовестное выполнение):

1. Пообедать — 20 мин.
2. Помыть посуду — 20 мин.

3. Выучить уроки —2 ч.
4. Покормить животных, убрать у них —30 мин.
5. Подмести, вымыть или пропылесосить пол —30 мин.
6. Сходить в магазин за хлебом —30 мин.
7. Почистить и сварить картошку —1 ч.
8. Узнать из газет или по радио новости дня —30 мин.
9. Сходить в прачечную —30 мин.

Если сложить отрезки времени, которые требуются на выполнение каждого дела в отдельности, то получится больше 5 ч. Не так уж много тогда до конца дня останется времени на занятие тем, чем вам хочется.

Но можно время на выполнение обязательных дел сократить, если делать их в разумной последовательности и совмещать некоторые дела. В предложенном списке прекрасно совмещаются такие дела, как обед и прослушивание новостей по радио, поход в булочную и поход в прачечную, варка картошки и уборка квартиры (вы же не будете, после того как почистите картошку, полчаса смотреть, как она варится). Вот вам и «сэкономленные» 2 ч!

Могу подсказать из собственного опыта, что выучивание стихотворений и формул из домашнего задания можно начинать, например, когда моешь посуду, убираешься, при этом ты можешь изредка поглядывать в книгу. Если есть в доме магнитофон, то можно записать на пленку стихи и формулы и прослушивать их в то время, когда делаешь механическую работу.

ЗАДАНИЕ.

Попробуйте распределить предложенные ниже дела в разумном порядке их выполнения и указать дела, которые можно без ущерба для их качества делать одновременно.

1. Пообедать —20 мин.
2. Вымыть посуду —20 мин.
3. Сделать уроки —2 ч.
4. Постирать с помощью стиральной машины —1,5 ч.
5. Купить в магазине молоко —40 мин.
6. Починить стул —30 мин.
7. Пришить воротничок к форме —10 мин.
8. Забрать младшего брата из сада —40 мин.
9. Рассказать брату о делах в школе —30 мин.

2. Выбор маршрута.

Нередко мы можем до одного и того же места добраться разными маршрутами, различными видами транспорта или пешком.

Делая выбор, какой дорогой нам ехать или идти, мы руководствуемся порой разными соображениями. Если у нас мало или вовсе нет денег, то небольшое расстояние мы преодолеваем пешком. Когда нужно куда-то срочно попасть в пределах города и у нас есть деньги, мы часто поль-

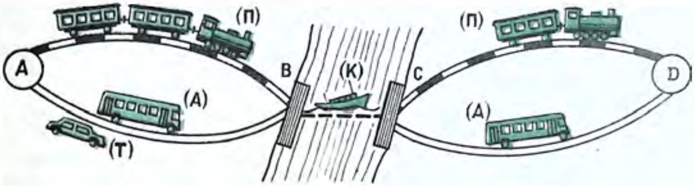


Рис. 210

зуемся такси. Если нужно попасть в отдаленную точку страны, то обычно приходится лететь самолетом (или долго ехать поездом).

Нередко приходится выбирать маршрут и средства передвижения с учетом того, что на пути следования обязательно придется пересаживаться с одного вида транспорта на другой. Например, если на пути следования оказывается водная преграда, то ее преодолеть можно только с помощью судна. Рассмотрим конкретный пример.

Из города A в город D (рис. 210) можно попасть так: 1) из города A до пристани B доехать по железной дороге поездом или по автостраде автобусом или такси; 2) от пристани B до пристани C доплыть катером; 3) от пристани C до города D доехать поездом или автобусом. Чем же обычно руководствуются, когда выбирают маршрут следования и средства передвижения (транспорт)?

Обычно руководствуются двумя критериями: 1) *временем в пути* (t); 2) *стоимостью проезда* (S).

Вернемся к нашему примеру. Изобразим возможные маршруты схематически и укажем на каждом участке пути время движения и условную стоимость проезда (рис. 211). Сравним время и стоимость поездки по каждому из возможных маршрутов:

П — К — П $t=6+1+5=12$ (ч), $S=7+1+6=14$ (р.)
П — К — А $t=6+1+6=13$ (ч), $S=7+1+4{,}5=12{,}5$ (р.)
А — К — П $t=8+1+5=14$ (ч), $S=6+1+6=13$ (р.)
А — К — А $t=8+1+6=15$ (ч), $S=6+1+4{,}5=11{,}5$ (р.)
Т — К — П $t=4+1+5=10$ (ч), $S=80+1+6=87$ (р.)
Т — К — А $t=4+1+6=11$ (ч), $S=80+1+4{,}5=85{,}5$ (р.)

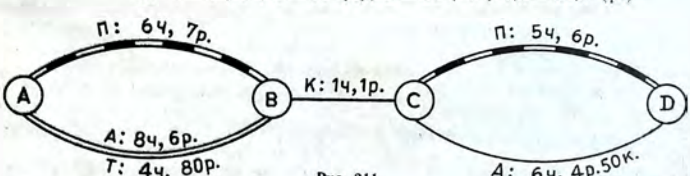


Рис. 211

Теперь нужно принять решение, каким маршрутом ехать. Если мы хотим добраться как можно скорее (сэкономить время), то, очевидно, нужно выбрать маршрут Т — К — П, преодолеваемый за 10 ч и заплатить за проезд 87 р. Если же мы хотим сэкономить деньги, то нужно выбрать маршрут А — К — А и заплатить за проезд 11 р. 50 к., затратив на дорогу при этом 15 ч (самый большой из возможных промежутков времени).

Обычно же в жизни выбирают маршрут разумный одновременно по времени и по затраченным средствам, не самый продолжительный по времени и недорогой *(оптимальный)*. Это маршрут П — К — П или П — К — А.

3. Обед в кафе.

Когда вы обедали в столовой, буфете или кафе, наверное, приходилось из нескольких первых, вторых и третьих блюд выбирать по одному, руководствуясь либо вкусовыми качествами продукта, либо его стоимостью.

Попробуйте из предложенного меню составить обед, который был бы не дорогим по стоимости и соответствовал бы вашему вкусу. Давайте договоримся, что обед должен стоить не дороже 150 р. и состоять из трех блюд.

Меню

Первые блюда:	*Вторые блюда:*	*Третьи блюда:*
Борщ — 40 р.	Рыба жареная — 60 р.	Компот — 15 р.
Молочный суп — 30 р.	Люля-кебаб — 110 р.	Чай — 6 р.
Окрошка — 80 р.		Мороженое — 50 р.

Наверное, вы и сами поняли, что в жизни задачи обычно имеют не одно решение. И нужно накопить определенный опыт, чтобы лучше ориентироваться в жизненных ситуациях и поменьше принимать ошибочных решений. А умениям правильно рассуждать, анализировать, подсчитывать в большой мере способствуют занятия математикой.

§ 18. Две головоломки

С помощью сделанной своими руками головоломки можно заставить потрудиться головой и руками как школьника, так и взрослого человека.

Головоломка 1. В прямоугольнике, вырезанном из картона или фанеры, проделайте отверстия, как показано на рисунке 212. Возьмите веревку, сложите ее вдвое и пропустите петлю сначала в верхнее отверстие, потом — в среднее. Затем через петлю пропустите другой конец веревки, а его пропустите в нижнее отверстие. К этому концу привяжите какой-нибудь предмет, который наверняка нельзя просунуть ни в одно из отверстий. Например, пуговицу.

А теперь попробуйте освободить прямоугольник от веревки, не отвязывая пуговицу.

△ Протащите, не перекрутив, петлю в нижнее отверстие с лицевой стороны. Если теперь пропустить пуговицу в петлю, то веревку можно вытянуть из прямоугольника. ▲

Головоломка 2. Для этой головоломки прямоугольник нужно вырезать из мягкого материала, например из кожи или гибкого пластика. В прямоугольной пластине делаются два продольных разреза и одно круглое отверстие (рис. 213).

Попробуйте освободить пластину от веревки с двумя пуговицами, подвешенными так, как это показано на рисунке 213 (конечно, не отвязывая пуговиц).

△ Согните поперек прямоугольную пластину и протащите ее среднюю полоску петлей в отверстие. Через получившуюся петлю из средней части пластины можно вынуть веревку с пуговицами. ▲

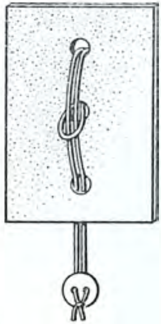


Рис. 212

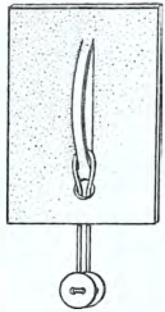


Рис. 213

§ 19. Азбука Морзе

Азбука Морзе — это телеграфный *код,* в котором каждая буква алфавита, цифра или знак представлены определенной комбинацией коротких (точка) и длинных (тире) сигналов электрического тока (табл. 3). При посылке сигналов между двумя соседними буквами слова делается небольшая пауза, между двумя словами пауза побольше.

Посылать сообщения с помощью таблицы 3 несложно: находишь нужную букву слова и передаешь ее код. Гораздо сложнее с помощью этой таблицы принимать сообщения (пока найдешь посланную тебе одну букву, успеют прийти несколько следующих). Остается два пути: либо выучить азбуку Морзе на память «в обе стороны» (т. е. по букве указывать ее код и, наоборот, по коду определять букву), либо составить удобную для приема сигналов схему.

Для составления схемы приема сигналов воспользуемся тем фактом, что каждый сигнал, из которых состоит буква или цифра, имеет всего два значения: точка (.) или тире (—).

Допустим, первым пришел сигнал точка. Если дальше следует пауза, т. е. буква передана, то одна точка означает букву Е (см. табл. 3). Если следует второй знак для передачи одной буквы, то это может быть либо точка, либо тире. При первом сигнале точка и втором тоже точка имеем букву И; если же вторым было тире, то передана буква А. Наши рассуждения легко было бы проследить по схеме изображенной на рисунке 214.

Таблица 3

1		2		3		4	
Буква	Знак кода Морзе	Буква	Знак кода Морзе	Буква	Знак кода Морзе	Цифра	Знак кода Морзе
А	· —	М	— —	Ц	— · — ·	1	· — — — —
Б	— · · ·	Н	— ·	Ч	— — — ·	2	· · — — —
В	· — —	О	— — —	Ш	— — — —	3	· · · — —
Г	— — ·	П	· — — ·	Щ	— — · —	4	· · · · —
Д	— · ·	Р	· — ·	Ы	— · — —	5	· · · · ·
Е	·	С	· · ·	Ю	· · — —	6	— · · · ·
Ж	· · · —	Т	—	Я	· — · —	7	— — · · ·
З	— — · ·	У	· · —	Й	· — — —	8	— — — · ·
И	· ·	Ф	· · — ·	Ь, Ъ	— · · —	9	— — — — ·
К	— · —	Х	· · · ·	Э	· · — · ·	0	— — — — —
Л	· — · ·						

Далее, если за вторым сигналом следует для передачи буквы третий сигнал, то схема на рисунке 214 может быть продолжена с целью определения трехзнаковой буквы (рис. 215) и т. д. для четырехзнаковых и пятизнаковых букв и цифр.

Теперь возьмите большой лист бумаги и начертите схему приема любой буквы алфавита или цифры (не забудьте про буквы, первым сигналом которых было тире). Удобно, если всегда переход к точке будет направлен «налево-вниз», а к тире — «направо-вниз».

Для контроля проверьте по своей схеме, так ли у вас расположен, например, маршрут к цифре 7 (рис. 216).

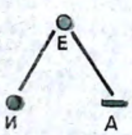


Рис. 214

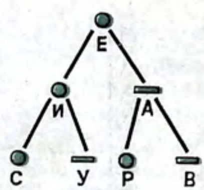


Рис. 215

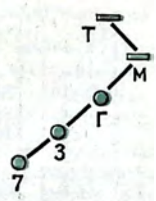


Рис. 216

§ 20. Вырезание из бумаги

В нашей книге с помощью перегибаний листа бумаги мы обосновывали некоторые геометрические свойства фигур. Вырезали по клеткам игрушечного кота.

Теперь попробуйте из цветной бумаги вырезать украшение на новогоднюю елку, закладку в книгу, салфетку на стол.

За основу возьмите квадратные листы. Так как перед вырезанием их придется определенным образом складывать, договоримся, что на рисунках края листа будут изображены сплошными линиями, а места сгиба — штриховыми. Сплошными линиями будут также показаны места, по которым нужно аккуратно сделать разрезы ножницами (рис. 217).

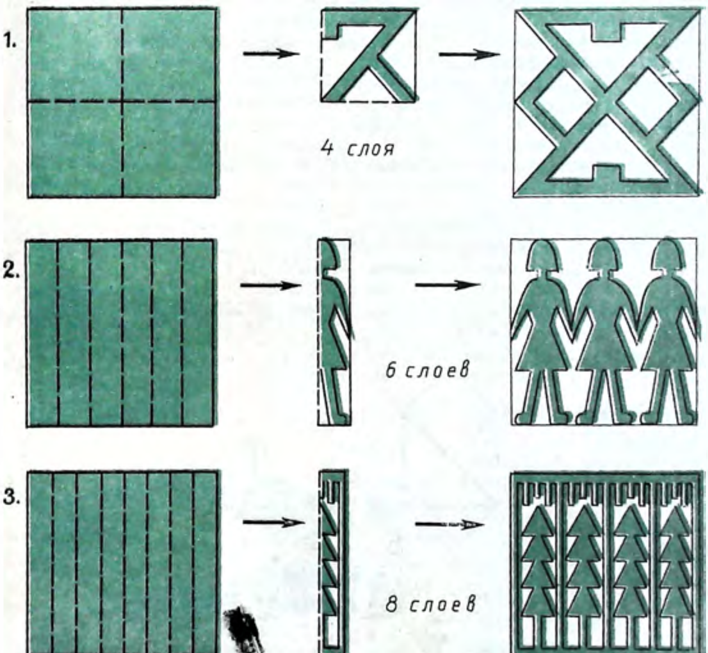


Рис. 217

§ 21. Не отрывая карандаш от бумаги

В нашей книге вы встречались уже с задачей, в которой требовалось, не прерывая линию (не отрывая карандаш от бумаги) и не проводя по одной линии дважды, начертить «открытый конверт» (рис. 218, *1*). Наверное, вы делали много попыток, чтобы найти точку, с которой нужно начать выполнять рисунок, и направление вычерчивания.

Оказывается, для решения задач, подобных этой, существуют признаки, по которым заранее несложно установить, можно ли данную фигуру начертить одним росчерком или нет. Если можно, то с какой точки следует начинать вычерчивание? Мы эти признаки просто перечислим, а обоснование их вы можете найти в книгах по топологии (*топология* — раздел математики, изучающий такие свойства фигур, которые не меняются при любых деформациях, производимых без разрывов и склеиваний; с точки зрения топологии, например, круг, эллипс, квадрат, треугольник обладают одинаковыми свойствами и являются по сути одной и той же фигурой).

Договоримся называть точки, в которых сходится четное число линий, четными, а точки, в которых сходится нечетное число линий,— нечетными. Так, на рисунке 218, *1* точка *O* четная, а точка *D* нечетная.

Теперь перечислим признаки вычерчивания фигур одним росчерком:

1. Если нечетных точек в фигуре нет, то ее можно начертить одним росчерком, начиная вычерчивать с любого места (такова, например, на рисунке 218 фигура *2*).

2. Если в фигуре две нечетные точки*, то ее можно начертить одним росчерком, начав вычерчивание в одной из нечетных точек и закончив в другой (таковы, например, на рисунке 218 фигуры *1* и *3*).

3. Если в фигуре более двух нечетных точек, то ее нельзя вычертить одним росчерком (такова, например, на рисунке 218 фигура 4, имеющая 4 нечетные точки).

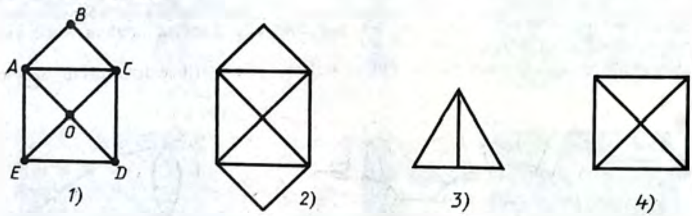


Рис. 218

* Всегда, если фигура имеет одну нечетную точку, то она имеет и вторую нечетную точку.

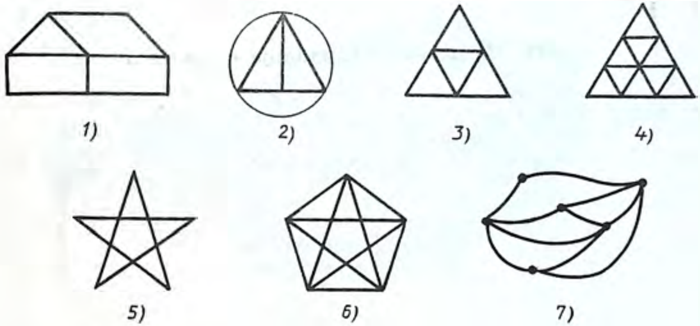


Рис. 219

Попробуйте самостоятельно определить, какие из фигур, изображенных на рисунке 219, можно начертить, не отрывая карандаш от бумаги (и не проводя по одной линии дважды). Нарисуйте те из фигур, которые можно начертить одним росчерком.

Приобретенные только что вами знания имеют порой любопытное применение.

Великий математик Л. Эйлер в 1736 г. занимался решением такой своеобразной задачи: «В Кенигсберге река, омывающая два острова, делится на два рукава (рис. 220), через которые перекинуто семь мостов. Можно ли обойти все эти мосты, не побывав ни на одном из них более раза?»

Видим, что часть мостов выходит в область A, часть — в B, часть — в C, и часть — в D. Для наглядности можно заменить точками те области, в которых встречаются пути обхода. Тогда рисунок 220 будет схематически выглядеть так, как это показано на рисунке 221 (мосты превратились в линии, соединяющие точки-области).

На рисунке 221 мы видим фигуру, у которой 4 нечетные точки. По сфор-

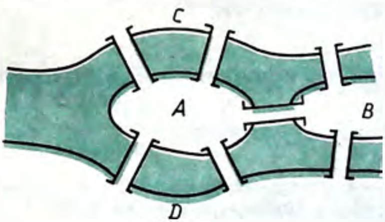


Рис. 220

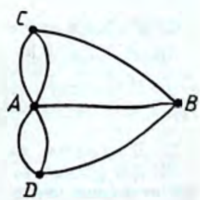


Рис. 221

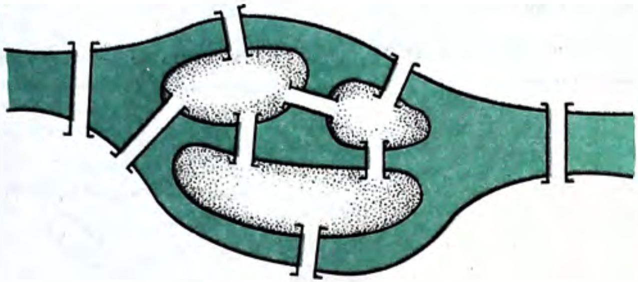


Рис. 222

мулированному нами третьему признаку такую фигуру нельзя начертить одним росчерком, т. е. нельзя, переходя к условию исходной задачи, пройти по всем мостам Кенигсберга, побывав на каждом из них только по разу.

Для самостоятельного решения предлагаем вам решить аналогичную по условию и требованию задачу с девятью мостами (рис. 222).

§ 22. Быстрый счет без калькулятора

Некоторые приемы быстрого устного счета вам знакомы, некоторые будут новы для вас.

1. Умножение и деление на 4.

Чтобы число умножить на 4, его дважды удваивают. Например:

$$213\cdot4=(213\cdot2)\cdot2=426\cdot2=852.$$

Чтобы число разделить на 4, его дважды делят на 2. Например:

$$124:4=(124:2)=62:2=31.$$

2. Умножение на 5.

Чтобы умножить число на 5, нужно умножить его на $\frac{10}{2}$, т. е. умножить на 10 и разделить на 2. Например:

$$138\cdot5=(138\cdot10):2=1380:2=690.$$

3. Деление на 5.

Чтобы разделить число на 5, нужно умножить его на 0,2, т. е. в удвоенном исходном числе отделить запятой последнюю цифру. Например:

$$345:5=345\cdot0{,}2=69;$$
$$71:5=71\cdot0{,}2=14{,}2.$$

4. Умножение на 25.

Чтобы умножить число на 25, нужно его умножить на $\frac{100}{4}$, т. е. умножить на 100 и разделить на 4. Например:

$$348 \cdot 25 = 34800 : 4 = 8700.$$

5. Умножение на 1,5.

Чтобы умножить число на 1,5, нужно к исходному числу прибавить его половину. Например:

$$24 \cdot 1{,}5 = 24 + 12 = 36;$$
$$129 \cdot 1{,}5 = 129 + 64{,}5 = 193{,}5.$$

6. Умножение на 9.

Чтобы умножить число на 9, к нему приписывают ноль и отнимают исходное число. Например:

$$241 \cdot 9 = 2410 - 241 = 2169.$$

7. Умножение на 11.

Чтобы умножить число на 11, к нему приписывают ноль и прибавляют исходное число. Например:

$$241 \cdot 11 = 2410 + 241 = 2651.$$

8. Возведение в квадрат числа, оканчивающегося цифрой 5.

Чтобы возвести в квадрат число, оканчивающееся цифрой 5 (например, 65), умножают число его десятков (6) на число десятков, увеличенное на 1 (на $6+1=7$), и к полученному числу приписывают 25 ($6 \cdot 7 = 42$. Ответ. 4225). Например:

$$95^2 = \underbrace{90}_{9 \cdot 10}25; \qquad 125^2 = \underbrace{156}_{12 \cdot 13}25.$$

Обоснование алгоритма возведения таких чисел в квадрат можно дать с помощью алгебры.

△ Число, оканчивающееся цифрой 5, записывается в виде $10n+5$, где n — число десятков. Тогда

$$(10n+5)^2 = (10n)^2 + 2 \cdot 10n \cdot 5 + 5^2 =$$
$$= 100n^2 + 100n + 25 = 100\underbrace{n}_{\text{число десятков}}\underbrace{(n+1)}_{\text{число десятков}+1} + 25. \ ▲$$

9. Возведение в квадрат числа по формуле $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

Этот прием удобен больше всего для чисел, оканчивающихся цифрами 1, 9, 6, 4. Из примеров будет понятно почему:

$31^2 = (30+1)^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 1 + 1^2 = 900 + 60 + 1 = 961;$

$29^2 = (30-1)^2 = 30^2 - 2 \cdot 30 \cdot 1 + 1^2 = 900 - 60 + 1 = 841;$

$96^2 = (95+1)^2 = 95^2 + 2 \cdot 95 \cdot 1 + 1^2 = 9025 + 190 + 1 = 9216.$

см. возведение в квадрат числа, оканчивающегося цифрой 5

10. Умножение по формуле $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

Этой формулой мы уже пользовались в § 4 данной книги. Напомним на числовых примерах возможности ее использования.

Примеры: 1) $98 \cdot 102 = (100-2)(100+2) = 100^2 - 2^2 = 10\,000 - 4 = 9996.$

2) $43 \cdot 37 = (40+3)(40-3) = 40^2 - 3^2 = 1600 - 9 = 1591.$

3) $94 \cdot 96 = (95-1)(95+1) = 95^2 - 1^2 = 9025 - 1 = 9024.$

11. Умножение двузначных чисел, близких к 100.

Если нужно перемножить два числа, близких к 100 (например, 92 и 97), то:

1) найдите число, которое в сумме с данным числом дает 100, и запишите его под соответственным числом:

$$\begin{array}{c} 92 \\ + \\ 8 \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{c} 97 \\ + \\ 3 \end{array};$$

2) вычтите из одного множителя число, которое недостает до 100 во втором множителе $(92-3=89)$;

3) к результату припишите произведение чисел, дополняющих данные числа до 100 $(89\underbrace{24}_{8 \cdot 3 = 24})$. Если произведение представляет собой трехзначное число, то приписываются две последние цифры произведения, а третья цифра прибавляется к разности.

Примеры:

1) $\begin{array}{cc} 86 \cdot & 98; \\ + & + \\ 14 & 2 \end{array}$ $\quad 86-2=84; \quad 14 \cdot 2 = 28.$ Ответ. 8428.

$+1$

2) $\begin{array}{cc} 88 \cdot & 91; \\ + & + \\ 12 & 9 \end{array}$ $\quad 88-9=79; \quad 12 \cdot 9 = 108.$ Ответ. 8008 (к 79 приписали две последние цифры числа 108, а 1 добавили к разряду сотен).

Обоснование использованного алгоритма умножения дадим с помощью алгебры.

$\triangle$ Пусть нужно перемножить числа x и y, близкие к 100. Запишем эти числа так:
$x=100-a$, где a — недостаток числа x до 100;
$y=100-b$, где b — недостаток числа y до 100.

Тогда $x\cdot y=(100-a)\ (100-b)=(100-a)\ 100-(100-a)\,b=$

$$=(100-a)\,100-100b+ab=(\underbrace{100-a}_{x}-b)\cdot 100+ab=\underbrace{(x-b)}_{\substack{\text{разность одно-}\\ \text{го множителя и}\\ \text{числа, дополня-}\\ \text{ющего второй}\\ \text{множитель до}\\ \text{100}}}100+\underbrace{ab}_{\substack{\text{произведение}\\ \text{чисел, дополня-}\\ \text{ющих множите-}\\ \text{ли до 100}}}.\ \blacktriangle$$

Упражняясь в вычислениях, вы можете сами составить другие алгоритмы ускоренного и упрощенного счета. Попробуйте, например, получить:
- алгоритм возведения в квадрат двузначных чисел, близких к 100;
- алгоритм возведения в квадрат чисел, близких к 50;
- алгоритм возведения в квадрат трехзначных чисел, близких к 1000;
- алгоритм сложения чисел, близких к круглым.

§ 23. Узнай свои способности

Прочитав этот параграф, вы будете знать некоторые характеристики своих природных и выработанных за годы жизни способностей. Полезно знать свои сильные и слабые стороны. Так, например, человек, знающий, что у него плохая память, не расстается с записной книжкой (правда, это не лучший выход — лучше развивать память). Не секрет, что некоторые из ребят, особенно те, у кого хорошая память, часто не готовят дома устные уроки. Человек, у которого плохое зрение, носит очки. В общем, всякий разумный человек использует свои сильные стороны и учитывает слабые. Почему же это не сделать и вам? Полезно научиться шире использовать ваши сильные качества и преодолевать слабые, используя систематические тренировки.

Итак, начнем с изучения самих себя. Для этого отвечайте (письменно) на поставленные ниже вопросы, выполняйте задания теста (испытательного упражнения). В результате будет заполнена своеобразная анкета о себе. Проверьте с помощью этих же тестов способности своих родителей и друзей, сравните их со своими. Но самое интересное будет, если вы результаты сегодняшнего тестирования сохраните до следующего года, а через год проверите свои способности по этим же или аналогичным тестам еще раз — тогда можно будет выявить тенденции в изменении ваших способностей в процессе взросления.

Приведенные ниже тесты вам предлагает мой учитель — Юрий Михайлович Колягин, доктор педагогических наук, профессор, академик АПН РФ.

Прежде чем приступить к ответам на вопросы тестов, попросите, пожалуйста, кого-то из взрослых на отдельных листах бумаги заготовить следующие карточки.

1. На **первой** карточке нарисовать девять фигур, расположенных в такой последовательности:

прямоугольник	круг	кольцо
знак «плюс»	знак «равно»	ромб
квадрат	треугольник	параллелограмм

2. На **второй** карточке нарисовать 180 окружностей (одинакового радиуса, расположенных одна под другой) радиусом 4—5 мм таким образом:

1	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
2	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
3	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
4	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
5	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
6	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
7	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
8	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
9	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
10	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
11	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
12	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O

3. На **третьей** карточке также нужно нарисовать 180 окружностей, но у одних из них радиусы будут «большими» —4—5 мм, а у других — «маленькими» —2—3 мм. Последовательность их расположения должна быть такой:

1	O	O	o	O	o	o	O	o	O	o	o	O	o	o	O
2	o	O	O	o	O	o	O	O	o	o	O	O	o	o	O
3	o	O	o	O	o	O	o	o	o	O	O	o	O	O	o
4	o	o	O	o	O	O	o	o	O	o	O	O	o	O	o
5	o	o	O	O	o	O	o	O	O	o	O	o	O	o	O
6	o	O	o	O	o	O	o	o	O	o	O	o	O	o	O
7	O	o	O	o	O	o	O	o	O	o	O	o	O	o	O
8	o	O	O	o	O	O	o	o	O	O	o	o	o	o	O

9 O o o O O o o O O o o O O o o

10 o o O O o o O O o o O O o o O

11 O O O o o o O o O o O o O o O

12 o o O o O O o o o O o O o O o

4. На четвертой карточке должны быть в ряд расположены три геометрические фигуры, в каждой из которых записана определенная цифра: цифра «пять» в квадрате, семерка в треугольнике, тройка в ромбе.

Теперь перейдем к описанию каждого из тестов.

Тест 1.

Какова ваша память (хорошая она или плохая)? Какой вид памяти развит у вас сильнее? Одни лучше запоминают, когда слышат, другие — когда видят, третьи обладают моторной памятью (лучше запоминают, когда пишут или читают вслух).

а) Ниже будет приведен набор определенным образом расположенных чисел. Начинайте с первой колонки. Не двигая губами, прочитайте верхнее число так, чтобы на чтение одной цифры уходило не более одной секунды. Затем отвернитесь и запишите число. Так перепробуйте одно число за другим. Самое длинное, правильно записанное число определит возможности вашей *зрительной памяти.*

5239	5672	0462
89765	98671	12785
224896	675413	651801
1267412	7841095	1082409
98615437	12435961	08761432
146768543	985241672	865218533
5690824514	1844640902	1246507118
24167549067	06748177620	37470627502
034427994410	036777312064	760845267114

б) Для проверки *моторной* памяти попробуйте вторую колонку цифр и при чтении цифр беззвучно шевелите губами (отворачивайтесь и записывайте число).

в) Для проверки *слуховой памяти* используйте третью колонку. Попросите, чтобы вам постепенно прочли эту колонку (цифру за цифрой). Прослушав строчку цифр, записывайте ее.

Расшифровка теста: правильная запись только 4 цифр (верхняя строка) — слабая память, 7—8 цифр — нормальная, 12 цифр — очень хорошая.

Тест 2.

Определите коэффициент вашей памяти.

Рассмотрите в течение 30 с фигуры, изображенные на карточке 1, и постарайтесь их запомнить. Затем попытайтесь воспроизвести их на бумаге. По результатам этого опыта можно определить своего рода «коэффициент памяти». Он выразится дробью, в знаменателе которой будет число всех фигур, т. е. число 9, а в числителе — число правильно нарисованных фигур.

Тест 3.

Как вы справляетесь с большим потоком информации? Проверьте это с помощью следующего теста. На карточке 2 дана матрица (из 180 кружков). Нужно в каждом кружке в центре поставить точку. Ставить точки нужно в такой последовательности: начинать с первого круга первой строки, затем в первом круге третьей строки, потом во втором круге первой строки и во втором круге третьей строки, пока не заполнятся эти строки. Затем точка ставится в последнем круге второй строки, потом в последнем круге четвертой строки, потом в предпоследнем круге второй, затем в предпоследнем круге четвертой строки и так далее до заполнения второй и четвертой строк.

Итак, правило, по которому ставятся точки: в четных строках точки ставятся справа налево (2 и 4; 6 и 8; 10 и 12 и т. д.), а в нечетных строках — слева направо (1 и 3; 5 и 7; 9 и 11 и т. д.). Заметьте время T_1 заполнения этой матрицы.

Теперь перейдем к заполнению второй матрицы, изображенной на карточке 3. Здесь находятся 180 кружков двух размеров: большие и маленькие. Если встретился большой круг, то точку нужно ставить в его середине, а если маленький, то над ним. Порядок заполнения матрицы тот же, что и в первом случае. Заметьте время T_2, которое вы затратите на эту работу.

Подсчитайте общее число ошибок r, которые вы сделали, и подставьте полученные значения в следующую формулу:

$$C=\frac{n-r}{k(T_2-T_1)},$$

где C — «пропускная» способность человека,
n — общее число реакций (в данном случае равно 180),
r — общее число ошибок,
T_1, T_2 — время заполнения таблиц,
k — коэффициент, зависящий от размера матриц (равный 8 для данного теста).

Расшифровка теста: если C больше 15 — хороший результат, 10—14 — нормальный, менее 10 — неважный.

Приведем пример выполнения расчета по формуле.

Пусть $T_1=3{,}5$ мин, $T_2=5$ мин, $r=5$ (столько раз поставлены точки не в том месте, где нужно):

$$C=\frac{180-5}{8(5-3{,}5)}=14{,}6.$$

Тест 4.

Каков объем вашего внимания?

Всего одну секунду, но внимательно, посмотрите на числа, изображенные на карточке 4. Запомните числа и сложите их, когда закроете рисунок. В каких фигурах записаны эти числа?

Тест 5.

Проверьте себя на наблюдательность и умение анализировать.

Задание 1. Сначала в течение 10 с рассматривайте первую таблицу:

1	2	3	4	5
Г	⊃	+	⊢	∸

Затем, закрыв ее, заполните соответствующими знаками пустые клетки второй таблицы:

2	1	4	3	5	2	1	3	4	2	1

Расшифровка теста: если задание выполнено без ошибок — оценка «5», с одной ошибкой — оценка «4» и т. д.

Задание 2. Даны числа, которые требуется сложить. Заметьте время, за которое вы, не проводя письменных вычислений, укажите верную сумму из записанных справа результатов.

Слагаемые:	Сумма:
393	А. 7908
4658	Б. 8608
3790	В. 8908
67	Г. 8898
	Д. Ни одного из этих чисел

Расшифровка теста: если на определение верного ответа вы затратили меньше 10 с, то вы умеете анализировать ситуацию, творчески подходить к выполнению заданий, логически мыслить.

§ 24. Советы психолога родителям

В книге психолога А. Л. Венгера «Схема индивидуального обследования детей младшего школьного возраста» (М., 1989) можно найти много ценных советов родителям, педагогам и тем ребятам, которые любят заниматься с малышами, стремятся помочь им выпутаться из неуспехов в школе, ссор во дворе, обид дома и т. д.

Ниже приведем некоторые общие рекомендации по «лечению» отдельных трудных состояний детей.

I. *Хроническая неуспешность.* Главное — это обеспечить реальный успех ребенка в какой-либо деятельности. Его нужно не просто хвалить (поменьше ругать), а хвалить именно тогда, когда он что-либо делает, ни в коем случае не сравнивать его весьма посредственные результаты с эталоном (требованиями школьной программы, образцами взрослых, достижениями его сверстников). Нужно сравнивать ребенка только с ним самим и хвалить его лишь за одно — за улучшение его собственных результатов.

II. *Замедленный темп деятельности.* Нельзя осуждать ребенка за медлительность, над которой он невластен. Следует понимать, что при его темповых характеристиках нужно регулировать объем работы. Можно и должно сокращать размер домашнего задания, стремясь к тому, чтобы выполненная часть задания была сделана хорошо, а не к тому, чтобы сделано было все, но скверно.

III. *Расстройства внимания.* Основная рекомендация в этом случае — формирование контроля и самоконтроля. Вот схема одного из простейших приемов формирования контрольных операций у невнимательного ребенка.

Сначала взрослый пишет тексты с большим количеством грубых ошибок. Ясно, что нельзя делать ошибки на орфографические правила, еще неизвестные ребенку. Можно использовать математический материал: арифметические примеры, уравнения, треть которых решена неверно. Ребенок должен выполнить роль учителя: исправить ошибки и, если захочет, оценить работу.

После того как ребенок научится находить по крайней мере половину ошибок, ему предлагается выполнить функции взрослого. Теперь он сам пишет текст с нарочитыми ошибками и на несколько дней откладывает эти задания, а потом проверяет собственную работу.

На третьем этапе самоконтроль, организованный в игровой форме, переходит в деловой самоконтроль домашних заданий (до сих пор домашние работы обязательно проверялись родителями).

IV. *Низкий уровень организации деятельности.* Полезно учить планированию собственных действий. Планирование должно стать обязательным, но коротким этапом, предваряющим каждое действие. «В двух словах скажи, как будешь решать эту задачу» — подобными заданиями взрослый может побуждать ребенка к планированию действий. Однако взрослый должен следить за тем, чтобы планы были реализованы, чтобы действие не подменялось планированием.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ СО ЗНАКОМ «?»

1. Рис. 223. **2.** $4+1=5$; $-4-1=-5$; $4-1=3$; $-4+1=-3$ (правила действий с числами с одинаковыми и разными знаками). **3.** В этот день родилась, например, тройня. **4.** На час. **5.** Три (см. рис. 224) или два (см. рис. 225). **6.** 10. **7.** Распилить каждое звено одного куска и оставшиеся четыре куска последовательно соединить с помощью трех распиленных звеньев. **8.** Например: $3=(4+4+4):4$, $4=4+(4-4)\cdot 4$, $5=(4\cdot 4+4):4$, $6=(4+4):4+4$, $7=4-4:4+4$, $8=4\cdot 4-4-4$, $9=4:4+4+4$. **9.** 24 000 км. **10.** Нулем, так как в произведении есть сомножители 2 и 5 ($2\cdot 5=10$). **11.** Из второго стакана перелить воду в пятый стакан. **12.** Два. **13.** На рисунке 5. **14.** См. рис. 226. **15.** 16 кг. **16.** См. рис. 227. **17.** $376\cdot 45$, $239\cdot 54$. **18.** Тот же. **19.** См. рис. 228. **20.** См. рис. 229. **21.** См. рис. 230. **22.** 27 треугольников, 10 квадратов. **23.** См. рис. 231. **24.** См. рис. 232. **25.** См. рис. 233. **26.** 35°, 70°, 75°. **27.** Сложить лист пополам и сделать надрезы ножницами так, как это показано на рисунке 234.

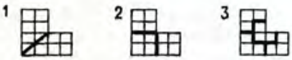


Рис. 223

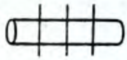


Рис. 224

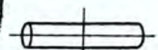


Рис. 225

Рис. 226

Рис. 227

Рис. 228

Рис. 229

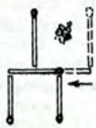


Рис. 230

Рис. 231

Рис. 232

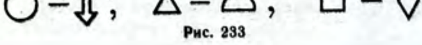


Рис. 233

Рис. 234

ЛИТЕРАТУРА

1. Алгебра: Учебник для 7 класса средней школы / Под ред. С. А. Теляковского.— М., 1989.
2. Алгебра: Учебник для 7 класса средней школы / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др.— М., 1991.
3. Геометрия: Учебник для 7—9 классов средней школы / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др.— М., 1990.
4. Погорелов А. В. Геометрия: Учебник для 7—11 классов средней школы.— М., 1990.
5. Балк М. Б., Балк Г. Д. Математика после уроков.— М., 1971.
6. Барр С. Россыпи головоломок.— М., 1978.
7. Березина Л. Ю. Графы и их применение.— М., 1979.
8. Воробьев Н. Н. Признаки делимости.— М., 1988.
9. Гарднер М. Крестики-нолики.— М., 1988.
10. Гарднер М. Математические чудеса и тайны.— М., 1986.
11. Дьюдени Г. Э. Пятьсот двадцать головоломок.— М., 1975.
12. Игнатьев Е. И. В царстве смекалки.— М., 1979.
13. Кордемский Б. А., Ахадов А. А. Удивительный мир чисел.— М., 1986.
14. Кордемский Б. А. Увлечь школьников математикой.— М., 1981.
15. Лэнгдон Н., Стейп Ч. С математикой в путь.— М., 1987.
16. Мазаник А. А. Реши сам.— Минск, 1980.
17. Нагибин Ф. Ф., Канин Е. С. Математическая шкатулка.— М., 1988.
18. Олехник С. Н. и др. Старинные занимательные задачи.— М., 1988.
19. Перельман Я. И. Живая математика.— М., 1978.
20. Перельман Я. И. Занимательная алгебра.— М., 1975.
21. Перельман Я. И. Занимательные задачи и опыты.— М., 1972.
22. Фридман Л. М., Турецкий Е. Н. Как научиться решать задачи?— М., 1984.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Ткачева Мария Владимировна

ДОМАШНЯЯ МАТЕМАТИКА

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. М. Котова*
Младшие редакторы *Л. И. Заседателева, Е. В. Казакова*
Художники *В. А. Кабанов, Е. П. Титков*
Художественный редактор *Ю. В. Пахомов*
Технический редактор *Г. В. Субочева*
Корректор *Н. С. Соболева*

ИБ № 13392

Сдано в набор 22.09.92. Подписано к печати 07.09.93. Формат $70\times90^{1}/_{16}$. Бум. офсетная № 2. Гарнит. литературная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 14,04+форз. 0,29. Усл. кр.-отт. 29,61. Уч.-изд. л. 9,99 + форз. 0,48. Тираж 103 000 экз. Заказ 3570.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Министерства печати и информации Российской Федерации. 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

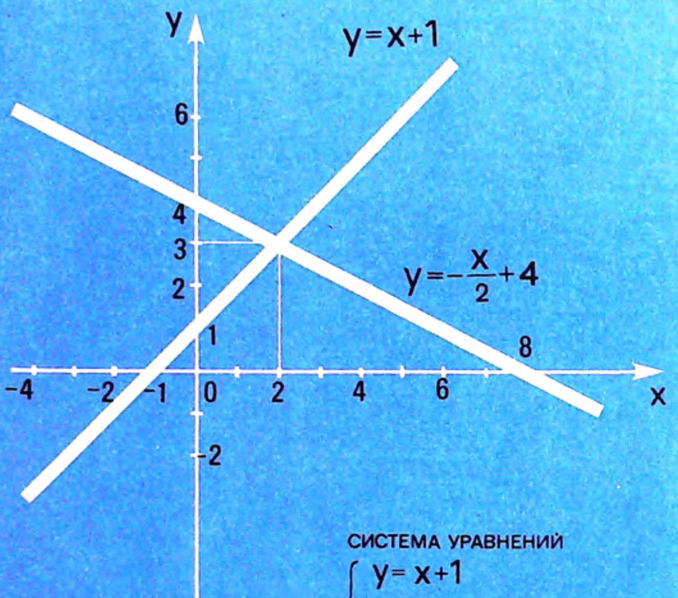
Смоленский полиграфический комбинат Министерства печати и информации Российской Федерации. 214020, Смоленск, ул. Смольянинова, 1.

Издательство «Просвещение» кроме той книги, которая у вас в руках, планирует выпуск еще двух книг с таким же названием, предназначенных для совместных занятий родителей с детьми VIII и IX классов по алгебре и планиметрии. Интересные, с увлекательными и порой забавными примерами из жизни, они помогут заинтересовать ребят математикой, устранить пробелы в знаниях, полюбить этот предмет.

В следующих двух книгах сохраняется структура первых двух глав и разделы «Занимательные страницы» и «Шаг вперед». Третья глава в следующих книгах поменяет название; в «Домашней математике — 8» она будет называться «Диалоги» и содержать четыре параграфа: «Диалоги о статистике», «Доктор Ватсон знакомится с комбинаторикой», «Поговорим о компьютере», «Диалоги с психологами», которые позволят сориентировать ребят, выяснив их склонности и способности к различным наукам и видам деятельности.

В «Домашней математике — 9» — эта глава будет называться «Математика вокруг нас». Она поможет понять значение математики в самых разнообразных областях знаний, науки, искусства, реальной жизни. В этой книге учащиеся найдут материал для подготовки к выпускным экзаменам за неполную среднюю школу, а занимающиеся в языковых или гуманитарных школах — встретят интересные задания на английском языке.

ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ:



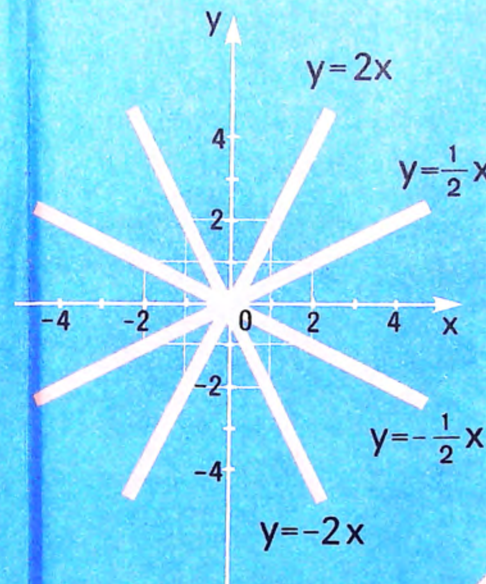
СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

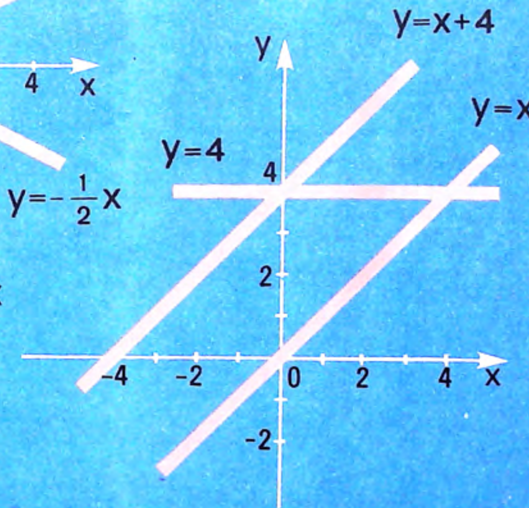
$$\begin{cases} y=x+1 \\ y=-\frac{x}{2}+4 \end{cases}$$

ИМЕЕТ РЕШЕНИЕ

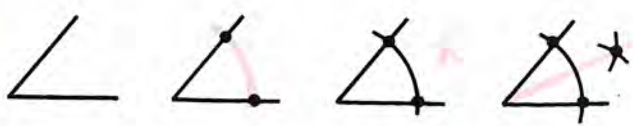
$x=2,\ y=3$

ПРИМЕРЫ ГРАФИКОВ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ





ПОСТРОЕНИЕ БИССЕКТРИСЫ УГЛА:



ПОСТРОЕНИЕ СЕРЕДИННОГО ПЕРПЕНДИКУЛЯРА ОТРЕЗКА (НАХОЖДЕНИЕ СЕРЕДИНЫ ОТРЕЗКА):