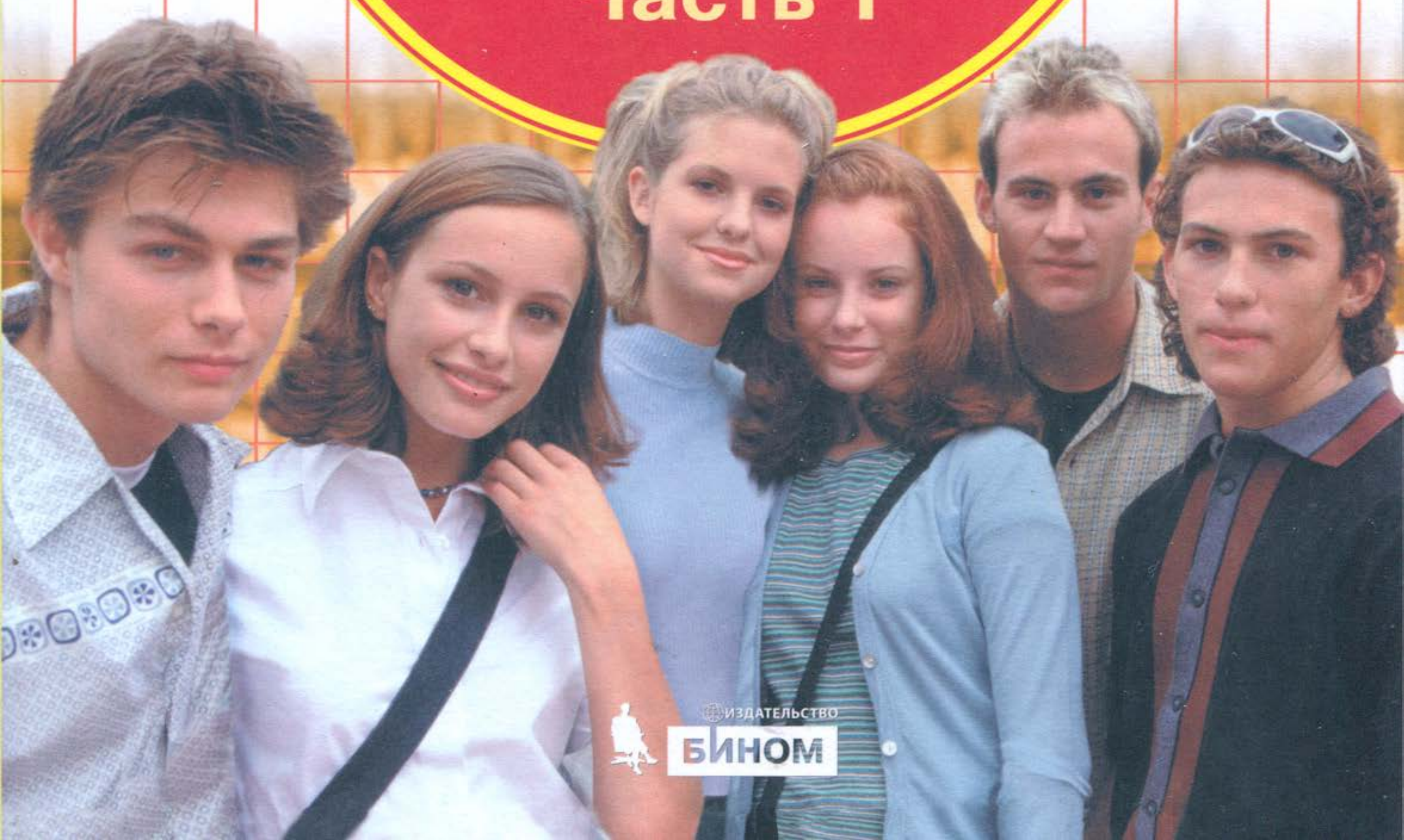
ФГОС
ООО

Л. Г. Петерсон, Н. Х. Агаханов, А. Ю. Петрович,
О. К. Подлипский, М. В. Рогатова, Б. В. Трушин

Алгебра
9 класс

Часть 1



Издательство
БИНОМ

ФГОС ООО

Л. Г. Петерсон, Н. Х. Агаханов, А. Ю. Петрович,
О. К. Подлипский, М. В. Рогатова, Б. В. Трушин

Алгебра

9 класс

Учебник

(в 2 частях)

Часть 1

2-е издание, стереотипное

Допущено
к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования

Москва
«Просвещение»
2021

УДК 373:51
ББК 22.1я721
П 29

Образовательная система Л. Г. Петерсон

«УЧУСЬ УЧИТЬСЯ»

Непрерывный курс математики
для дошкольников, учащихся начальной и основной
школы 1–9 (от 3 до 15 лет)

П 29 **Петерсон, Л. Г.** Алгебра. 9 класс : учебник (в 2 частях). Ч. 1 / Л. Г. Петерсон, Н. Х. Агаханов, А. Ю. Петрович, О. К. Подлипский, М. В. Рогатова, Б. В. Трушин. — 2-е изд., стереотип. — М. : Просвещение, 2021. — 176 с. : ил. — ISBN 978-5-09-081137-8.

Учебник ориентирован на развитие мышления и творческих способностей учащихся, формирование у них системы прочных математических знаний, общеучебных умений, развитие личностных качеств, познавательного интереса и ценностного отношения к образованию.

Является частью непрерывного УМК по математике «Учусь учиться» для дошкольников, учащихся начальной и основной школы (от 3 до 15 лет). Соответствует федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования.

Реализует дидактическую систему деятельностного метода обучения Л. Г. Петерсон. Отмечен Премией Президента РФ в области образования.

Может использоваться во всех типах школ.

Курсовую и методическую поддержку по реализации УМК «Учусь учиться» осуществляет НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики». Подробную информацию можно получить на сайте www.sch2000.ru.

УДК 373:51
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-09-081137-8 (Ч. 1)
ISBN 978-5-09-081138-5

Чтобы учебником было удобно пользоваться, в нем введены следующие обозначения:

К – задачи по новой теме для работы в классе,

Д – задачи для домашней работы,

П – повторение ранее пройденного,

С – задачи на смекалку,

– задания базового уровня,

– более сложные задания по новым темам и темам повторения,

* – задания, требующие умения находить нестандартные способы решения,

■ – завершение доказательства теоремы,

* * * – материал для тех, кому интересно.

Глава 1
Развитие математической теории

§ 1. Элементы комбинаторики и теории вероятностей

1.1.1. Перестановки с повторениями

*Кто повторяет старое и узнаёт новое,
тот может быть предводителем.*

Конфуций (551–479 г. до н.э.),
китайский философ

В 8 классе мы познакомились с разделом математики, который изучает общие законы комбинирования различных объектов, – *комбинаторикой*. Мы вывели одну из формул комбинаторики, которая позволяет найти количество перестановок элементов некоторого множества без их непосредственного перебора. Вспомним, как можно использовать эту формулу, на следующем примере.

Найдём количество всех различных вариантов орнамента, который получается путём перестановки трёх элементов: чёрного и красного квадратов и звёздочки.

□ * □

Мы могли нарисовать все возможные комбинации элементов, последовательно изменяя их порядок:

□□*   □*□   *□□   *□□   □□*   □*□

Быстрее этот результат мы получим, применяя способы, известные нам из 8 класса: правило произведения $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ либо формулу количества перестановок $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

А что если наш орнамент может быть использован только в чёрно-белом варианте? Тогда среди элементов орнамента будет два одинаковых квадрата:

□ * □

В этом случае различных вариантов орнамента будет только три – остальные дублируют ранее выписанные варианты. Вычеркнем их.

□□*   □*□   *□□   ~~*□□~~   ~~□□*~~   ~~□*□~~

Таким образом, при повторениях элементов формула $P_3 = 3!$ не работает, так как она включает все перестановки, в том числе и дубли. Значит, рассчитывать число подобных перестановок нужно как-то иначе. В данном пункте мы найдём общий способ подсчёта количества перестановок элементов множества, учитывающий возможность их *повторений*.

Для этого сравним решения двух аналогичных задач на «старый» и «новый» случаи, чтобы определить, как должен измениться уже известный нам способ для нахождения количества *перестановок с повторениями*.

Задача 1.

Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры в числе не повторяются?

Решение.

Для ответа на вопрос задачи мы должны узнать, сколькими способами можно переставить элементы множества из шести элементов. Используя формулу количества перестановок $P_n = n!$, известную нам из 7 класса, получим:

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Ответ: 720 шестизначных чисел.

Задача 2.

Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, если цифры 1, 2, 3 встречаются в числе один раз, а цифра 4 – три раза?

Решение.

В отличие от предыдущей задачи, в наборе цифр 1, 2, 3, 4, 4, 4, с помощью которых мы записываем шестизначные числа, есть повторения – цифры 4, при перестановке которых число меняться не будет. Значит, количество полученных чисел будет меньше, чем в задаче 1. Чтобы его найти, попробуем свести решение нашей новой задачи к уже известному случаю.

Предположим, все цифры 4 разные, например, одна из них красная, другая серая, третья чёрная. Тогда числа, например,

123 444, 123 444, 123 444, 123 444, 123 444, 123 444, –

разные, и количество всех «разноцветных» чисел, как и в предыдущем случае, будет равно 720.

Но в задаче числа – одного цвета, поэтому в действительности все перечисленные выше случаи являются одним и тем же числом 123 444. Следовательно, каждому шестизначному числу, составленному из цифр 1, 2, 3, 4, 4, 4, соответствует столько «разноцветных» чисел, сколько существует различных перестановок из трёх элементов, а именно $3! = 6$. Поэтому нужных нам чисел в 6 раз меньше, чем общее количество «разноцветных» чисел. Значит, таких чисел $720 : 6 = 120$.

Ответ: 120 чисел.

Решая вторую задачу, мы узнали, что ***количество перестановок 6-элементного множества с 3 повторяющимися элементами*** равно $\frac{6!}{3!}$. Обобщая способ, использованный нами для подсчёта вариантов в этой задаче, получаем следующее правило.

Количество перестановок n элементов, среди которых k одинаковых, равно

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k-1) \cdot k} = \frac{n!}{k!}.$$

Применим полученное правило к задаче с одноцветным орнаментом. В нём 3 элемента, два из которых повторяются. Поэтому число различных вариантов орнамента равно $\frac{3!}{2!} = \frac{6}{2} = 3$. Это же число мы получили и при непосредственном пересчёте.

* * *

Теперь выведем формулу решения задач на перестановки с повторениями, принятую в комбинаторике. Для этого сформулируем задачу в общем виде.

Общая постановка задачи.

Сколькими способами можно упорядочить элементы множества из n элементов, в котором:

- элементы a_1 встречаются k_1 раз (то есть в этом множестве k_1 элементов, равных a_1);
- элементы a_2 встречаются k_2 раз;

...

- элементы a_m встречаются k_m раз?

При этом $k_1 + k_2 + ... + k_m = n$, и $1 \leqslant k_1 \leqslant n$, $1 \leqslant k_2 \leqslant n$, ... , $1 \leqslant k_m \leqslant n$.

Таким образом, некоторые из чисел k_1, k_2, ..., k_m могут равняться 1, то есть элементы могут не повторяться.

Докажем, что *число перестановок с повторениями* равно $\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_m!}$ (если какие-то элементы не повторяются, то соответствующие множители $k!$ в знаменателе равны 1).

Доказательство.

«Раскрасим» все одинаковые элементы в разные цвета так, чтобы все элементы множества можно было считать различными. Тогда перестановок множества «разноцветных» элементов будет всего $n!$

Так как k_1 «разноцветных» элементов, равных a_1, можно представить $k_1!$ способами, k_2 «разноцветных» элементов, равных a_2, $k_2!$ способами и т.д., всего таких «разноцветных» перестановок будет $k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_m!$

Для получения ответа нужно общее количество «разноцветных» перестановок, то есть $n!$, разделить на $k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_m!$, что и требовалось доказать. ■

Подчеркнём ещё раз, что полученная формула верна и для перестановок без повторений. В этом случае $k_1 = k_2 = ... = k_m = 1$ и формула сводится к известному с 8 класса виду: $P_n = n!$ Поэтому её можно считать универсальной для поиска количества перестановок.

Итак, для подсчёта количества перестановок n элементов некоторого конечного множества будем применять следующую общую формулу.

Общая формула количества перестановок из n элементов

$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_m!}$, где k_1, k_2, ..., k_m – количества повторяющихся элементов.

Рассмотрим примеры применения этой формулы.

Пример 1.

Сколько шестизначных паролей можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, где цифры 1, 2 встречаются ровно один раз, а цифры 3, 4 – ровно два раза?

Решение.

По условию шестизначный пароль составляется из набора цифр 1, 2, 3, 3, 4, 4, где имеется два элемента 3 и 4, которые повторяются по 2 раза.

По общей формуле количества перестановок таких паролей будет

$$\frac{6!}{2! \cdot 2!} = \frac{720}{4} = 180$$

(два множителя, равных 1!, соответствующих цифрам 1 и 2, мы не записываем, так как они не влияют на произведение в знаменателе).

Ответ: 180 паролей.

Пример 2.

Сколько различных слов можно написать, переставляя буквы в слове «МАТЕМАТИКА» (словом считать даже бессмысленный набор букв)?

Решение.

В слове «МАТЕМАТИКА» всего 10 букв, буква А встречается 3 раза, буква М – 2 раза, буква Т – 2 раза, буквы Е, И, К – по одному разу.

По общей формуле количества перестановок получим ответ: $\frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 151\ 200$.

Ответ: 151 200 «слов».

К **1** Для оформления титульного листа своего доклада Саша нарисовала тройную рамку чёрного цвета. Этот вариант показался ей слишком мрачным, и она сделала внутреннюю рамку синей, а внешнюю – фиолетовой. Чтобы выбрать оптимальный вариант оформления, она меняла местами цвета трёх рамок всеми возможными способами и распечатала все полученные варианты (при этом в каждом варианте она оспользовала все три цвета). Сравнив их, она сделала свой выбор. Сколько различных вариантов титульного листа с разноцветными рамками она напечатала?

2 1) Чем отличаются следующие задачи?

а) Какие различные четырёхзначные коды можно получить, переставляя карточки с цифрами 2, 4, 6, 8? Сколько их?

б) Какие различные четырёхзначные коды можно получить, переставляя местами карточки с цифрами 2, 2, 2, 8 (цифра 2 написана на трёх карточках)? Сколько их?

2) Решите первую задачу известным вам способом. Для нового случая сделайте карточки и проведите перебор. В какой задаче получено меньшее количество вариантов? Почему? В результате каких перестановок полученный числовой код не менялся?

3) Можно ли свести решение новой задачи к уже известному случаю? Что изменится в ходе её решения? Можно ли применить способ, использованный при решении этой задачи, для решения всех аналогичных задач? Сравните свои выводы о количестве перестановок с повторениями с правилом на с. 6.

3 Сколько различных «слов» можно написать, переставляя буквы в слове «УРАВНЕНИЕ» (словом считать даже бессмысленный набор букв)?

4 Сколько различных «слов» можно написать, переставляя буквы в слове «ПАРАБОЛА»?

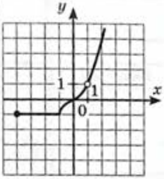
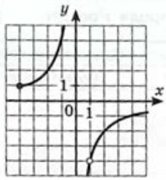
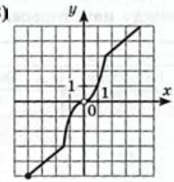
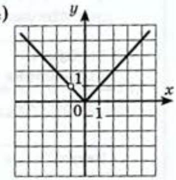
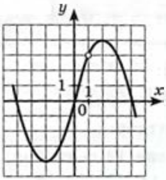
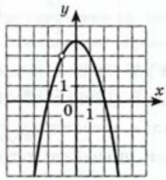
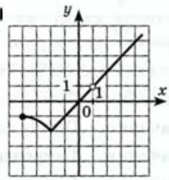
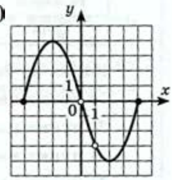
5 Сколько различных «слов» можно составить из пяти букв А и не более чем из трёх букв Б?

П **6** Докажите неравенство $\frac{p}{d} + \frac{d}{p} + \frac{q}{t} + \frac{t}{p} + \frac{a}{s} + \frac{s}{v} + \frac{v}{k} + \frac{k}{a} \geqslant 8$, где числа a, d, k, p, q, s, v, t – положительны.

7 Найдите наименьшее значение выражения $x + \frac{16}{x}$ при $x > 0$.

8 Найдите наименьшее значение выражения $x + \frac{(x+4)(x+5)}{x}$ при $x > 0$.

9 Этот современный японский прозаик известен тем, что увлекается марафонским бегом и триатлоном, очень любит джаз. ...Он считает, чтобы чего-то достичь, важно научиться ставить перед собой цель. А вы как считаете? Установив соответствие между графиками функций и областью определения функции, узнайте его имя.

1)

2)

3)

4)

5)

6)

7)

8)


У	$[-4; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$	**И**	$[-4; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 4]$	**К**	$(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$
А	$(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$	**М**	$[-4; 1) \cup (1; +\infty)$	**Р**	$[-4; 0) \cup (0; +\infty)$

10 Решите графически уравнение:

а) $-4x - 4 = x^2$; в) $-x^2 - 4x = 3x + 10$; д) $\dfrac{0,5}{x} = -5x$;

б) $x^2 - 1 = x + 1$; г) $x^3 = x$; е) $4x + 12 = -\dfrac{8}{x}$.

11 Постройте график функции:

а) $y = \begin{cases} (x-1)^2 + 1, \text{ если } x \geqslant 1; \\ x^3, \text{ если } -1 < x < 1; \\ -x - 2, \text{ если } x \leqslant -1; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} -x^2 + 4, \text{ если } x > 2; \\ |x|, \text{ если } x \leqslant 2; \end{cases}$ в) $y = \begin{cases} \dfrac{4}{x}, \text{ если } |x| \geqslant 2; \\ x, \text{ если } |x| < 2. \end{cases}$

Какие из построенных вами графиков имеют разрывы?

12 Боря точно помнит, что в формуле серной кислоты подряд идут буквы H, S, O и что есть два нижних индекса 2 и 4. Но вот у каких букв стоят эти индексы, он не помнит. У него есть возможность использовать программу, которая по введённой формуле отражает название кислоты. Нарисуйте схему, с помощью которой он переберёт все возможные варианты формулы. Сколько вариантов ему придётся ввести в программу, чтобы определить нужную формулу в «худшем» случае? Можно ли ответить на этот вопрос без схемы?

13 Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ x + 2y + z = 8 \\ x + y + 2z = 9 \end{cases}$.

14 Постройте график функции $y = \dfrac{x-2}{(\sqrt{x^2 - 2x})^2}$ и найдите все значения k, при которых прямая $y = kx$ имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку.

15 Бабушка, живущая в Белгороде, отправила 1 сентября четыре посылки своим внукам, живущим в разных городах России. В таблице дано контрольное время в сутках, установленное для пересылки посылок наземным транспортом (без учёта дня приёма) между некоторыми города России.

Пункт отправления	Пункт назначения				
	Владимир	Омск	Петрозаводск	Белгород	Сочи
Владимир		9	12	7	10
Омск	9		11	8	8
Петрозаводск	12	11		11	12
Белгород	8	8	13		9
Сочи	10	9	14	9	

Какая из данных посылок не была доставлена вовремя:

1) пункт назначения – Сочи, посылка доставлена 10 сентября;

2) пункт назначения – Омск, посылка доставлена 9 сентября;

3) пункт назначения – Петрозаводск, посылка доставлена 14 сентября;

4) пункт назначения – Владимир, посылка доставлена 11 сентября?

Д **16** Сколько различных «слов» можно написать, переставляя буквы в словах «СЕМЬЯ», «КОМАНДА» («словом» считать даже бессмысленный набор букв, противоречащий правилам грамматики)?

17 Найдите наименьшее значение выражения $x + \frac{4}{x}$ при $x > 0$.

18 Решите графически уравнение:

а) $x^3 = -6x + 7$; б) $(x + 2)^2 = -1{,}25x + 4$; в) $\frac{3}{x} = x + 2$.

19 Постройте график функции и «прочитайте» его по известному плану:

$$y = \begin{cases} \frac{2}{x}, \text{ если } x \geqslant 2; \\ \frac{1}{2}x, \text{ если } 0 \leqslant x < 2; \\ -(x+2)^2 + 4, \text{ если } x < 0 \end{cases}$$

Как называется эта функция?

С **20*** Сколько существует различных возможностей рассадить 5 юношей и 5 девушек за круглый стол с 10 креслами так, чтобы юноши и девушки чередовались?

1.1.2. Размещения

Поиск истины значительно ценнее, чем обладание ею.

Готхольд Лессинг (1729–1781),
немецкий поэт, критик, философ.

В предыдущем пункте мы составляли комбинации из элементов множества, переставляя местами все его элементы. Однако на практике может потребоваться выполнить эту задачу не со всеми элементами множества, а лишь с некоторым их количеством. В данном пункте мы познакомимся с формулой, которая используется в этих случаях.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1.

Сколько четырёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры в записи числа не повторяются?

Решение.

Ясно, что комбинировать мы будем не все цифры, а только четыре из шести. Первую из четырёх цифр числа можно выбрать 6 способами; если первая цифра фиксирована, то вторую можно выбрать 5 способами; если первые две цифры фикси-рованы, то третью можно выбрать 4 способами; и наконец, если первые три цифры фиксированы, то четвёртую можно выбрать 3 способами.

Следовательно, искомое количество будет равно $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.

Ответ: 360 чисел.

Итак, для ответа на вопрос задачи 1 мы искали, сколькими способами можно разместить четыре из шести элементов множества в определённом порядке. Для этого нам потребовалось составить произведение чисел от 6 до 3.

Обобщив способ подсчёта вариантов в задаче, получаем следующее правило.

Чтобы найти количество вариантов **выбора в определённом порядке k элементов из n ($k \leqslant n$)**, нужно найти произведение k множителей. Первый множитель равен n, а каждый последующий получается уменьшением предыдущего на единицу:

$$\underbrace{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}_{k \text{ множителей}}$$

Заметим, что при $k = n$ эта задача сводится к задаче определения количества перестановок множества из k элементов, а произведение приобретает известный нам вид: $n(n-1) \cdot \ldots \cdot 1$.

Выведем теперь общую формулу для решения задач на выбор k элементов, взятых *в определённом порядке* из n-элементного множества. Такие наборы элементов в комбинаторике называются ***размещениями***.

Определение 1. Упорядоченный набор k элементов из n-элементного множества, где $1 \leqslant k \leqslant n$, называется ***размещением из n по k***.

Количество размещений из n по k обозначается A_n^k (от первой буквы французского слова «arrangement» – расположение, размещение).

Сформулируем и решим задачу поиска A_n^k в общем виде.

Общая постановка задачи.

Имеется множество из n различных элементов. Сколькими способами можно выбрать из этого множества упорядоченный набор из k различных элементов, где $1 \leqslant k \leqslant n$? Другими словами, сколько существует размещений из n по k?

Докажем, что количество размещений A_n^k равно $n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$.

Доказательство.

Первый элемент произведения можно выбрать n способами. При фиксированном первом элементе второй можно выбрать $(n-1)$ способом и т.д. Наконец, если первые $(k-1)$ элементов фиксированы, то последний k элемент можно выбрать $(n-(k-1)) = (n-k+1)$ способами. Таким образом, общее число размещений из n элементов по k равно $n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$, что и требовалось доказать. ■

Итак, для подсчёта количества размещений по k элементов из n элементов неко-торого конечного множества можно применять следующую формулу.

Формула количества размещений из n элементов по k

$$A_n^k = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Рассмотрим несколько примеров применения этой формулы.

Пример 1.

В восьмом классе изучается 13 различных предметов. Сколькими способами можно составить расписание на учебный день, если в этот день должно быть 7 уроков по различным предметам?

Решение.

Для ответа на вопрос задачи нужно разместить всеми возможными способами в определённом порядке по 7 предметов из 13.

Значит, искомое число способов равно числу размещений по 7 элементов из 13:

$$A_{13}^7 = 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 8\,648\,640.$$

Ответ: 8 648 640 способами.

Пример 2.

В классе 28 учеников. Сколькими способами можно назначить учащихся на 3 должности: староста, ответственный за участие в спортивных соревнованиях (физорг) и ответственный за организацию развлекательных мероприятий (культорг)?

Решение.

Мы составляем комбинации по 3 фамилии из 28. На первом месте будем писать фамилию старосты, на втором – физорга, а на третьем – культорга. Так как назначение Иванова старостой, а Петрова физоргом, и наоборот, Иванова физоргом, а Петрова старостой – это разные назначения, порядок выбора фамилий существенен. Значит, нам нужно разместить всеми возможными способами в определённом порядке три фамилии из 28. По формуле количества размещений из 28 элементов по 3 искомое число способов равно $A_{28}^3 = 28 \cdot 27 \cdot 26 = 19\,656$.

Ответ: 19 656 способами.

* * *

Произведение $n(n-1)\cdot ... \cdot(n-k+1)$ можно записать с помощью понятия факториала. Для этого умножим и разделим произведение $n(n-1)\cdot ... \cdot(n-k+1)$ на множители, дополняющие это произведение до $n!$, получим:

$$A_n^k = \frac{n\cdot(n-1)\cdot ... \cdot(n-k+1)\,(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot ... \cdot 1}{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot ... \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Поскольку при $k = n$ в знаменателе формулы $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ появляется выражение $0!$, которое пока не определено, нам необходимо придать выражению значение, при котором не возникнет противоречий с имеющимися у нас результатами.

Мы знаем, что при $k = n$ число размещений равно числу перестановок, значит:

$$A_n^n = P_n \quad\Leftrightarrow\quad \frac{n!}{(n-k)!} = n! \quad\Leftrightarrow\quad \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} \quad\Leftrightarrow\quad 0! = 1$$

Следовательно, чтобы установленная нами формула $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ работала при $k = n$, необходимо считать $0! = 1$. Это же значение $0!$ можно вывести и из других соотношений. Так, равенство $(n+1)! = (n+1)\cdot n!$, верное при всех натуральных $n = 1, 2, ...$, при $n = 0$ приобретает вид $1! = 1\cdot 0!$, откуда $0! = 1$.

Поэтому здесь и далее мы будем считать, что $0!$ равен единице.

Определение 2. $0! = 1$.

Заметим, что при $n = 0$ (пустое множество) равенство $P_n = n!$ имеет вид $P_0 = 0! = 1$. Значит, чтобы формулы, содержащие факториалы, оставались верными при $n = 0$, нам надо договориться считать, что число перестановок пустого множества равно 1. При этом также $A_n^0 = \frac{n!}{n!} = 1$.

Итак, если принять, что $0! = 1$, то для подсчёта количества размещений по k элементов, взятых из n элементов некоторого конечного множества, можно применять также следующую формулу:

$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Эту формулу легче запомнить, но её практическое использование требует умения переходить от знака факториала к произведению удобных множителей. Так, в рас-смотренных выше примерах 1 и 2 можно выполнить следующие преобразования:

$$A_{13}^7 = \frac{13!}{6!} = \frac{\cancel{6!}^{\,1}\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13}{\cancel{6!}_{\,1}} = 8\ 648\ 640.$$

$$A_{28}^3 = \frac{28!}{25!} = \frac{\cancel{25!}^{\,1}\cdot 26\cdot 27\cdot 28}{\cancel{25!}_{\,1}} = 19\ 656.$$

К **21** 1) Чем отличаются эти задачи?

а) Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если цифры в записи числа не повторяются?

б) Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если цифры в записи числа не повторяются?

2) Решите первую задачу двумя известными вам способами. Какой из них подойдёт для решения второй задачи? Что изменится в ходе её решения? Подойдёт ли способ, использованный при решении этой задачи, для решения всех подобных задач?

3) Как найти количество вариантов выбора в определённом порядке k элементов из n элементов ($k \leqslant n$)? Сравните свой ответ с правилом на с. 12.

22 Сколько четырёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, 9? Сколько трёхзначных чисел можно составить из этих же цифр, сколько двузначных? Цифры в записи числа не повторяются.

23 Сколько четырёхзначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 4, 6, 8? Сколько трёхзначных чисел можно составить из этих же цифр, сколько двузначных? Цифры в записи числа не повторяются.

24 В какой из задач необходимо найти количество перестановок элементов множества $\{A, B, C, D\}$:

а) Сколькими способами можно обозначить четыре точки координатной прямой, используя буквы A, B, C, D?

б) Сколькими способами можно обозначить три точки координатной прямой, используя буквы A, B, C, D?

в) Сколькими способами можно обозначить две точки координатной прямой, используя буквы A, B, C, D?

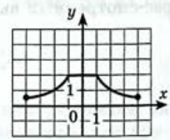
Как называются комбинации, которые следует пересчитать в двух последних задачах? Познакомьтесь с их названием и выводом общего способа решения подобных комбинаторных задач на с. 12.

25 На странице фотоальбома 3 свободных места для фотографий. Сколькими способами можно вложить в свободные ячейки 6 фотографий, 8 фотографий?

26 На странице фотоальбома 6 свободных мест для фотографий. Сколькими способами можно вложить в свободные ячейки 2 фотографии, 4 фотографии?

27 Регистрационный знак российского автомобиля состоит из трёх букв, которые обозначают серию знака, трёх цифр регистрационного номера и цифрового кода региона. Для обозначения серии используются всего 12 букв кириллицы, которые имеют аналоги в латинском алфавите, — А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У и Х. Посчитайте, сколько регистрационных знаков может быть выдано в каждом субъекте России.

28 Сколько различных орнаментов может составить программа для дизайна, выстраивая в ряд 10 элементов, среди которых: а) пять одинаковых элементов; б) восемь одинаковых элементов? Все остальные элементы орнамента различны.



29 Задайте формулой функцию, график которой изображён на данном рисунке. Докажите, что она является чётной функцией.

30 Какие из следующих функций являются чётными, а какие нечётными?

а) $y = 0{,}5x^4 - x^2$; в) $y = x^3 - 2x$;

б) $y = -\dfrac{3}{x} + x$; г) $y = x^2 + |x| - 2$.

31 а) Для функции $f(x) = x^2$ найдите $f\left(\dfrac{1}{4}\right)$; $f(-a)$; $f(a + 5)$.

б) Для функции $f(x) = -x^3$ найдите $f(-2)$; $f(-a)$; $0{,}2 \cdot f(a^2)$.

в) Для функции $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ найдите $f(0)$; $f(0{,}1a)$; $\dfrac{1}{f(a^3)}$.

г) Для функции $f(x) = \sqrt{x}$ найдите $f(-4)$; $f(0)$; $f(100)$; $f((a-1)^2)$.

32 Какой угол (в градусах) образуют минутная и часовая стрелки, когда часы показывают ровно 11 часов?

33 Оценив значения выражений, выпишите их в порядке убывания и прочитайте высказывание великого русского писателя Л. Н. Толстого. Как вы понимаете эти слова?

$(0{,}1\sqrt{2})^2$	ВАЖНО	$\sqrt{3}(\sqrt{108} - \sqrt{75})$	ОШИБОЧНО
$-\sqrt{3{,}61} + \sqrt{2{,}89}$	КОЛИЧЕСТВО	$\sqrt{1\frac{155}{169} : \frac{9}{13}}$	ЧТО
$(\sqrt{5}-1)^2 - 6 + 3\sqrt{5}$	ДУМАТЬ	$\sqrt{(7+\sqrt{2})^2 - (1+\sqrt{6})^2}$	ЗНАНИЯ
$\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$	ЕСТЬ	$\sqrt{0{,}1 \cdot 0{,}001^3}$	НЕ
$5\sqrt{2} - 4\sqrt{32} + 2\sqrt{50}$	А	$\sqrt{45} - \sqrt{80}$	КАЧЕСТВО
$\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$	МНОГОЗНАНИЕ	$0{,}01\sqrt{3{,}6 \cdot 2{,}5}$	ДОСТОИНСТВО

34 Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y = \dfrac{5}{x}; \\ y = -5x - 10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = (x+2)^2 - 2; \\ y = 4x + 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = \sqrt{x}; \\ y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y = \sqrt{-x}; \\ y = -\dfrac{1}{6}x + 1\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

D **35** Сколькими способами можно обозначить четыре точки координатной прямой, используя буквы *A, B, C, D, E, F*?

36 Сколькими способами могут быть распределены первый, второй и третий призы между 15 участниками конкурса?

37 Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y = -\dfrac{2}{x}; \\ y = -x + 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = -(x-1)^2 + 4; \\ y = -2x + 7. \end{cases}$

38 Расположите числа в порядке возрастания: $3\sqrt{2}$; $\sqrt{16}$; $\sqrt{1\frac{11}{25}}$; $2\sqrt{3}$; $\sqrt{2\frac{7}{9}}$.

C **39*** Прогульщик Вася в каждый понедельник сентября некоторого года пропускал по одному уроку, в каждый вторник – по два урока, ..., в каждую пятницу – по пять уроков. Могло ли оказаться так, что за весь сентябрь он пропустил ровно 64 урока? (Все субботы и воскресенья сентября были выходными, а остальные дни – учебными. В сентябре 30 дней.)

1.1.3. Сочетания

Главная сила математики состоит в том, что вместе с решением одной конкретной задачи она создаёт общие приёмы и способы, применимые во многих ситуациях, которые даже не всегда можно предвидеть.

М. И. Башмаков (1937),
русский математик, учёный-педагог

В предыдущих пунктах мы составляли комбинации из некоторого количества элементов множества, размещая их в *определённом порядке*. Однако на практике выбор элементов из множества нередко осуществляется без учёта порядка. В данном пункте мы познакомимся с формулой, которая используется в этих случаях.

Переформулируем пример 2 из предыдущего пункта таким образом, чтобы порядок выбора был не существенен.

Задача.

В классе 28 учеников. Сколькими способами можно выбрать трёх учащихся для участия в школьном КВН?

Решение.

В данной задаче, в отличие от примера 2 предыдущего пункта, порядок фамилий в списке неважен, так как роли между учащимися не распределены. Поэтому выбор, например, Иванова, Петрова, Сидорова и выбор Сидорова, Петрова, Иванова – это один и тот же выбор. Таким образом, все списки, отличающиеся только порядком фамилий – Иванов–Петров–Сидоров; Иванов–Сидоров–Петров; Петров–Иванов–Сидоров и т.п. – для нашей задачи являются по сути одним и тем же списком.

Как следует из решения примера 2, если учитывать порядок фамилий, то всех возможных списков было бы $28 \cdot 27 \cdot 26 = 19\,656$. Но среди них имеются лишние списки, дублирующие друг друга. Причём дублирующих списков столько, сколько существует перестановок из трёх фамилий, то есть $3! = 6$. Значит, количество нужных нам вариантов в 6 раз меньше найденного и равно $\frac{19\,656}{6} = 3276$.

Ответ: 3276 способами.

Решая задачу, мы узнали, сколькими способами можно выбрать 3 элемента из 28 элементов множества, не учитывая порядка выбора.

Выведем теперь общую формулу для решения задач на выбор k элементов из n-элементного множества, когда порядок элементов не существенен. Такие наборы элементов называются *сочетаниями*.

Определение 1. Набор k элементов, взятых из n-элементного множества без учёта их порядка, где $1 \leqslant k \leqslant n$, называется ***сочетанием из n по k***.

Количество сочетаний из n по k обозначается C_n^k (от первой буквы французского слова «combinaison» – сочетание).

Сформулируем и решим задачу поиска C_n^k в общем виде.

Общая постановка задачи.

Имеется множество из n различных элементов. Сколькими способами можно выбрать из этого множества набор из k различных элементов, где $1 \leqslant k \leqslant n$, если порядок выбора значения не имеет? Другими словами, сколько существует сочетаний из n по k?

Докажем, что количество сочетаний C_n^k равно $\frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$.

Доказательство.

Количество упорядоченных наборов по k элементов из n различных элементов равно $A^k{}_n = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$. Так как в сочетаниях порядок не имеет значения, каждый набор из k элементов при перестановке элементов фактически дублируется P_k раз. Значит, наборов, не учитывающих порядок элементов, будет в P_k раз меньше:

$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$, что и требовалось доказать. ■

Итак, для подсчёта количества сочетаний по k элементов из n элементов неко-то-рого конечного множества можно применять следующую формулу.

Формула количества сочетаний по k элементов из n

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Рассмотрим несколько примеров применения этой формулы.

Пример 1.

Для проведения экзамена создается комиссия из трёх преподавателей. Сколько различных комиссий можно составить из семи преподавателей?

Решение.

Так как порядок назначения преподавателей в комиссию роли не играет, искомое число равно $C_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$.

Ответ: 35 комиссий.

Пример 2.

В шахматном турнире 15 участников, и турнир проводится в один круг (каждые два участника играют между собой один раз). Сколько партий будет сыграно?

Решение.

Искомое количество партий ровно числу способов, которыми можно выбрать двух человек из 15 (порядок роли не играет). Поэтому искомое число способов равно $C_{15}^2 = \frac{15 \cdot 14}{2} = 105$.

Ответ: 105 партий.

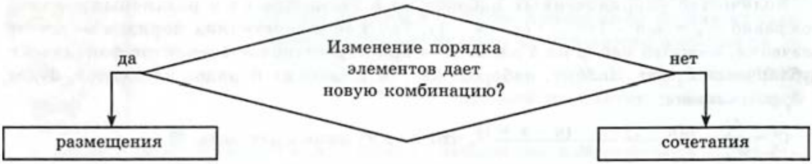
Заметим, что формулу количества сочетаний можно записать также с помощью знака факториала. Действительно,

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Следовательно, для подсчета числа сочетаний по k элементов из n элементов некоторого конечного множества можно применять ещё одну формулу:

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}}$$

Полученные нами комбинаторные формулы позволяют существенно упростить решение задач, в которых требуется посчитать количество вариантов. Однако правильность решения во многом зависит от того, верно ли выбрана формула. Следующая схема помогает разобраться, о каких комбинациях идёт речь в задаче: о размещениях или сочетаниях.



* * *

Если считать, что $C_n^0 = 1$, то равенство $C_n^k = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ сохраняется при всех $0 \leqslant k \leqslant n$ (запись $n(n-1) \dots (n-k+1)$ при $k = 0$ смысла не имеет, так как в ней нет ни одного множителя).

Ясно, что если заменить k на $n - k$, то выражение $\dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ не изменится. Поэтому

$$C_n^k = C_n^{n-k},\ 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Так, $C_n^0 = C_n^n = 1$; $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$; $C_n^2 = C_n^{n-2} = \dfrac{n \cdot (n-1)}{2}$; $C_n^3 = C_n^{n-3} = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6}$; ...

Числа C_n^k принято называть биномиальными коэффициентами. Эти числа обладают рядом замечательных свойств, которые связывают комбинаторику с другими разделами математики.

Докажем одно интересное свойство биномиальных коэффициентов.

Свойство.

$C_n^{k+1} + C_n^k = C_{n+1}^{k+1}$ $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$.

Доказательство 1.

Данное тождество можно доказать алгебраическим способом.

Запишем сумму дробей, равных C_n^{k+1} и C_n^k, упростим полученное выражение и применим правило сложения дробей с разными знаменателями:

$$C_n^{k+1} + C_n^k = \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!} + \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k-1)!} \cdot \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{n-k}\right) =$$
$$= \frac{n!}{k! \cdot (n-k-1)!} \cdot \frac{n+1}{(k+1) \cdot (n-k)} = \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = C_{n+1}^{k+1},$$ что и требовалось доказать. ■

Это же тождество можно доказать другим способом, используя комбинаторный смысл биноминальных коэффициентов.

Доказательство 2.

Предположим, что в классе учится $n + 1$ человек, и нам нужно направить на соревнования команду из $k + 1$ учащихся. Сколькими способами это можно сделать?

Согласно формуле количества сочетаний, это число равно C_{n+1}^{k+1}. Но это же число способов можно найти и по-другому.

Выберем одного человека из класса, пусть это будет Вася Иванов. Возможны два варианта: Вася Иванов либо попал в команду, либо нет.

Если Вася будет в команде, то в ней останется k мест, на которые претендуют n школьников. Значит, оставшуюся часть команды можно выбрать C_n^k способами.

Количество команд, в которые Вася не попадает, равно C_n^{k+1}, так как в них на $k + 1$ мест претендуют n школьников (без Васи).

Таким образом, общее число команд равно $C_n^{k+1} + C_n^k$. Следовательно, $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$, что и требовалось доказать. ■

Доказанное нами свойство использовалось в так называемом треугольнике Паскаля, с помощью которого мы определяли в 7 классе коэффициенты двучлена n-й степени.

Для биномиальных коэффициентов выполняются и другие интересные свойства. Например, то, что наибольшее возможное значение C_{2n}^k при $0 \leqslant k \leqslant 2n$ равно C_{2n}^n (то есть наибольшим является средний из биномиальных коэффициентов). Или свойство суммы биномиальных коэффициентов:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n.$$

К **40** Важен ли порядок указания элементов множества при выборе:

а) двух координат точки на плоскости;
б) шести человек из класса для уборки помещения;
в) трёх новых серий сериала для просмотра;
г) пяти новых серий сериала для скачивания;
д) двух человек из отдела на должность начальника и его заместителя?

41 Сравните списки, чем они отличаются? Какого варианта не хватает? Дополните списки нужным вариантом.

1. Соколова. 2. Сорокина. 3. Синицына.	1. Соколова. 2. Синицына 3. Сорокина.	1. Сорокина 2. Соколова. 3. Синицына.	1. Сорокина. 2. Синицына 3. Соколова	1. Синицына 2. Соколова. 3. Сорокина.

Являются ли данные списки различными, если это варианты:
а) порядка выступлений участниц вокального конкурса?
б) перечня фамилий участниц, прошедших в финал конкурса?

42 1) Чем отличаются эти задачи?

а) В классе учится 10 мальчиков. Для участия в конкурсе учителю следует отобрать троих из них. Сколько существует вариантов таких списков, если учитель указывает, в каком порядке ребята должны выступать в конкурсе?

б) В классе учится 10 мальчиков. Для участия в конкурсе учителю следует отобрать троих из них. Сколько существует вариантов таких списков, если ребята будут выступать в конкурсе одновременно?

2) Решите первую задачу известным вам способом.

3) Можно ли использовать этот способ для решения второй задачи? Что изменится в ходе её решения? Подойдёт ли способ, использованный при решении этой задачи, для решения всех подобных задач?

4) Как найти количество вариантов выбора k элементов из n элементов ($k \leqslant n$), если порядок их выбора не имеет значения?

5) Как называются комбинации, которые следует пересчитать во второй задаче? Познакомьтесь с их названием и выводом общего способа решения подобных задач.

43 В 8а классе учатся 15 мальчиков.

а) Сколькими способами можно выбрать из них 11 ребят для участия в футбольном турнире?

б) Сколькими способами можно выбрать из них 11 ребят – одного вратаря и 10 полевых игроков – для участия в футбольном турнире?

44 На плоскости отмечено n точек. Сколько имеется отрезков с концами в этих точках?

45 На плоскости отмечено 10 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

46 Электронные часы показывают время от 00:00:00 до 23:59:59.

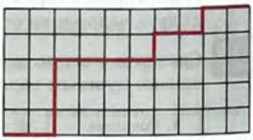
а) Сколько времени в течение суток на табло часов горят ровно три цифры 7?

б) Сколько времени в течение суток на табло часов горят ровно четыре цифры 3?

в) Сколько времени в течение суток на табло часов горит число, которое читается одинаково слева направо и справа налево?

47 Сколькими способами можно разбить 12 человек на две волейбольные команды по 6 человек в каждой?

48 Дан клетчатый прямоугольник 10×5. Сколько существует различных кратчайших на этой сетке путей, ведущих из левого нижнего угла в правый верхний угол?



49 На некоторой прямой произвольно отмечено 10 точек, а на параллельной ей прямой – 12 точек. Сколько существует четырёхугольников с вершинами в этих точках?

50 Каких натуральных чисел от 1 до 1 000 000 больше: делящихся на 11, но не делящихся на 13, или делящихся на 13, но не делящихся на 11?

51 «Проказница Мартышка, Осёл, Козёл и косолапый Мишка затеяли сыграть квартет».

Сколькими способами они могут усесться на одной лавке?

Сколькими способами из них можно организовать трио?

Сколькими способами выбранное из них трио можно рассадить на одной лавке?

П **52** Сколькими способами могут быть заняты первое, второе и третье места на соревнованиях, в которых: а) 3 участника; б) 6 участников?

53 Сравните числа:

а) 7 и $\sqrt{42}$; б) $5\sqrt{3}$ и $4\sqrt{5}$;

в) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ и $\sqrt{6}+\sqrt{2}$; г) $\sqrt{19}$ и $\sqrt{7}+\sqrt{2}$.

54 Упростите выражение:

а) $(\sqrt{13}-2\sqrt{3})(\sqrt{13}+2\sqrt{3})$;

б) $\sqrt{(1-\sqrt{5})^2}$;

в) $\sqrt{10-2\sqrt{21}}$;

г) $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$;

д) $\sqrt{(1-\sqrt{10})^2}-\sqrt{(\sqrt{10}-2)^2}$;

е) $(3-\sqrt{11})^2+6\sqrt{20-6\sqrt{11}}$;

ж) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{6}}-\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}$;

з) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\right)\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}+\dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\right)$.

55 Решив уравнение, выясните, какая буква ему соответствует. Выстроив буквы в той же последовательности, что и уравнения, вы получите имя одного из немногих композиторов с Туманного Альбиона, получившего мировое признание. На протяжении всей своей жизни этот британский композитор (XX в.) неустанно работал над собой и считал: *«Учиться – это всё равно что плыть против течения, как только прекращаешь грести, течением тебя относит назад»*.

1) $x^2 - 10x - 24 = 0$;

2) $5x^2 + 8x + 6 = 0$;

3) $x - \dfrac{6x}{x+5} = \dfrac{30}{x+5}$;

4) $\dfrac{3x+1}{x+2} - \dfrac{x-1}{x-2} = 1$;

5) $2x^2 - 5x + 3 = 0$;

6) $(3x-1)(4x+12) = (2x+3)(x-4)$;

7) $(x^2+3x)^2 - 2(x^2+3x) - 8 = 0$;

8) $\dfrac{x^2}{x-4} = \dfrac{4x}{x-4}$;

9) $\dfrac{6}{x-4} - \dfrac{x}{x+2} = \dfrac{6}{x-4} \cdot \dfrac{x}{x+2}$;

10) $\dfrac{3x+4}{5} - \dfrac{x^2-4x-6}{10} = -1$;

11) $3x^4 - 10x^2 + 3 = 0$;

12) $0{,}04x^2 = 0$;

13) $x^2 + 3|x| - 4 = 0$;

14) $5 - 5x^2 = 0$;

15) $\dfrac{2x+1}{2x-1} - \dfrac{3(2x-1)}{7(2x+1)} = \dfrac{8x}{4x^2-1}$;

16) $x^2 - 12x + 36 = 0$.

$-4; -2; -1; 1$	М	$\varnothing$	Е	$-2; 12$	Б		
$\sqrt{3}; -\sqrt{3}; \dfrac{\sqrt{3}}{3}; -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	Р	± 1	Т	$3 \pm \sqrt{5}$	Д		
0	И	6	Н	1; 1,5	Ж	−3,7; 0	А

56 В таблице указаны данные отчёта одного из магазинов о количестве проданных порций мороженого в летние и осенние месяцы за последний год.

Июнь	704	Сентябрь	312
Июль	855	Октябрь	204
Август	601	Ноябрь	126

1) Вычислите среднее количество порций мороженого, проданного: а) за один летний месяц; б) за один осенний месяц. Дайте возможное объяснение тому, что найденные показатели существенно отличаются друг от друга.

2) Найдите медиану данных за летние месяцы. В каком месяце были зафиксированы средние за лето показатели продаж? Найдите медиану данных за осенние месяцы. В каком месяце были зафиксированы средние за осень показатели продаж? Найдите медиану данных за все эти месяцы.

3) Вычислите размах указанных в таблице значений. Как вы думаете, почему этот показатель такой большой?

Будет ли так велик размах продаж:

а) за летние месяцы;

б) за осенние месяцы?

Проверьте своё предположение, вычислив эти показатели.

Д

57 На школьном конкурсе проектов по истории математики были отобраны 7 лучших работ. Сколькими способами можно выбрать из них два проекта для участия в районом конкурсе?

58 Учащимся дали список из 10 книг, рекомендованных для прочтения на летних каникулах. Олег решил, что более шести книг прочитать не сможет. Сколькими способами он может их выбрать из списка?

59 На некоторой прямой произвольно отмечено 10 точек, а на параллельной ей прямой – 12 точек. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

60 В шахматном кружке занимаются 10 человек. Сколькими способами их тренер может: а) переставить местами их фамилии в списке; б) выбрать из них для предстоящего турнира команду из 4 человек; в) выбрать из них для предстоя-ще-го турнира команду из четырёх человек, указывая, кто из членов команды будет играть на первой, второй, третьей и четвёртой досках?

61 Упростите выражение:

а) $(\sqrt{11} - 2\sqrt{7})(\sqrt{11} + 2\sqrt{7})$;

б) $\sqrt{(4 - \sqrt{19})^2}$;

в) $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} + \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)^2$;

г) $(2 - \sqrt{7})^2 + 4\sqrt{11 - 4\sqrt{7}}$.

62 Решите уравнение:

а) $(x - 3)^2 - 2(x - 3) - 15 = 0$;

б) $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 1 = 0$;

в) $x^2 + 6|x| - 72 = 0$;

г) $\frac{x}{x + 3} - \frac{4}{x - 3} = \frac{18}{x^2 - 9}$.

С

63* Сколькими способами можно разделить класс из 24 человек на четыре команды по шесть человек для игры в волейбол?

64* Сколько существует шестизначных чисел, у которых каждая последующая цифра меньше предыдущей?

65* Ко дню Российского флага продавец собирается украсить витрину 12 горизонтальными полосками ткани трёх цветов. При этом он выполняет два условия:

1) одноцветные полосы не должны висеть рядом;

2) каждая синяя полоса должна висеть между белой и красной.

Сколькими способами он может это сделать?

1.1.4. Применение комбинаторики при решении вероятностных задач. Геометрическая вероятность

... математика — единая наука. Всё новые и новые связи возникают между её разделами, иногда самым непредвиденным образом. Одни разделы служат инструментами для других разделов.

А. Н. Колмогоров (1903–1987),
русский математик, один из основоположников
современной теории вероятностей

Мы знаем, что многие науки связаны с математикой – они используют её вычислительный аппарат, математические модели, алгоритмы. Точно так же и различные разделы математики проникают друг в друга: в одном её разделе используются закономерности, выявленные в другом. Например, для решения геометрических задач используются арифметические расчёты и алгебраические формулы, в свою очередь, геометрические модели помогают решать арифметические и алгебраические задачи и т.д.

Такая ситуация складывается и в теории вероятностей – мы видели, что для оценки вероятности событий, не являющихся равновозможными, нам иногда требуются знания из статистики. В этом пункте мы выясним, знания из каких ещё областей математики применяются при решении вероятностных задач.

Рассмотрим задачу.

Задача 1.

Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 наугад составляется шестизначное число (каждая цифра используется один раз). Чему равна вероятность того, что полученное число будет делиться на 25?

Решение.

Все такие числа равновозможны. Вероятность того, что полученное число будет делиться на 25, равна отношению количества чисел, составленных из цифр от 1 до 6 и кратных 25, к количеству всех чисел, которые можно составить из этих цифр.

По условию, каждая цифра используется в записи числа один раз, поэтому общее количество чисел, составленных из цифр от 1 до 6, равно количеству перестановок из шести элементов: $P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$.

Чтобы натуральное число делилось на 25, его последние цифры должны быть либо 00, либо 25, либо 50, либо 75. В нашем случае это могут быть только цифры 25. Следовательно, две последние цифры зафиксированы, а из оставшихся четырёх цифр 1, 3, 4 и 6 можно составить $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ вариантов чисел.

Значит, искомая вероятность равна $p = \dfrac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \dfrac{1}{30}$.

Ответ: $\dfrac{1}{30}$.

Итак, при расчёте вероятности случайного события нам потребовались методы **комбинаторики**. Рассмотрим ещё несколько примеров применения комбинаторики в теории вероятностей.

Пример 1.

Какова вероятность того, что две подруги Маша и Даша родились в один месяц?

Решение.

Каждая из девочек могла родиться в любом из 12 месяцев (здесь мы делаем до-пущение о равновероятности рождения человека в разные месяцы года). Поэтому событие: «Маша родилась в ...» может иметь 12 исходов. Точно также событие «Даша родилась в ...» имеет 12 исходов.

Чтобы найти общее число исходов события «Маша родилась в ..., а Даша родилась в ...», нам необходимо посчитать количество пар, каждый элемент которой может быть выбран 12 способами. На основании правила произведения, известного из комбинаторики, эту пару можно выбрать $12 \cdot 12 = 144$ способами.

Итак, общее число возможных исходов равно 144. Из них благоприятными исходами являются: «обе родились в январе», ..., «обе родились в декабре», то есть пары с одинаковыми элементами – всего 12 исходов.

Следовательно, по формуле вероятности получаем: $p = \frac{12}{144} = \frac{1}{12}$.

Ответ: $\frac{1}{12}$.

Пример 2.

У маленького Пети есть три кубика с буквой А, по два кубика с буквами М и Т, по одному кубику с буквами Е, И, К. Петя выложил кубики в ряд. Какова вероятность того, что он выложил слово «МАТЕМАТИКА», если Петя ещё не умеет читать?

Решение.

Все «слова» из кубиков равновозможны. Общее количество исходов равно количеству «слов» из 10 букв, где одна буква (буква А) повторяется 3 раза, а две буквы (М и Т) – по 2 раза. По общей формуле количества перестановок оно равно

$P_n = \frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 151\,200$.

Из них лишь один исход благоприятен, так как лишь одно расположение букв составит слово «МАТЕМАТИКА». Значит, искомая вероятность равна $p = \frac{1}{151\,200}$. Как мы видим, она очень мала.

Ответ: $\frac{1}{151\,200}$.

Пример 3.

В школьной физической лаборатории 15 мультиметров, два из которых – бракованные. Учитель наугад взял для урока 12 мультиметров. Какова вероятность того, что они все исправные?

Решение.

Общее число исходов равно количеству способов, которыми можно выбрать 12 мультиметров из 15. Оно равно $C_{15}^{12} = \frac{15!}{12! \cdot (15-12)!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455$ (порядок приборов в выборе учителя не является существенным).

Число благоприятных исходов равно числу способов выбора 12 мультиметров из 13 исправных. Это число есть $C_{13}^{12} = \frac{13!}{12! \cdot (13-12)!} = 13$.

Значит, искомая вероятность равна $p = \frac{13}{455} = \frac{1}{35}$.

Ответ: $\frac{1}{35}$.

При определении вероятности случайного события используется не только комбинаторика, но и другие разделы математики, например геометрия.

Рассмотрим ещё одну задачу.

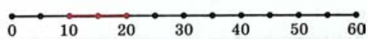
Задача 2.

Коля проснулся ночью и взглянул на часы. Какова вероятность того, что в этот момент минутная стрелка показывала на промежуток между 10 и 20 минутами?

Решение.

До сих пор мы рассматривали задачи, в которых исходы испытаний образуют конечное множество. Здесь же для каждого часа бесконечное число благоприятных исходов $t \in [10; 20]$ выбирается из также бесконечного общего числа исходов $t \in [0; 60]$. Вычислим вероятность этого события, используя геометрическую интерпретацию.

Будем считать, что время пробуждения Пети «равномерно распределено» по одному часу. Изобразим геометрическую модель этой ситуации:



Поэтому искомая вероятность равна отношению длины «благоприятного» временного интервала к длине всего рассматриваемого временного интервала: $p = \dfrac{20 - 10}{60} = \dfrac{1}{6}$.

Ответ: $\dfrac{1}{6}$.

* * *

Замечание. Вернёмся к геометрической интерпретации, которую мы использовали при решении задачи 2. Пусть мы отметили дугу окружности. Вероятность выбрать точку на окружности так, что она попадёт на отмеченную дугу, является отношением длины этой дуги к длине всей окружности. А что будет, если мы отметим не дугу, а всего одну точку A? Какова вероятность выбрать на окружности точку так, чтобы она совпала с отмеченной (A)? Эта вероятность не больше, чем вероятность попадания выбираемой точки на любую дугу, содержащую отмеченную (A). Однако длину такой дуги можно сделать сколь угодно малой. Значит, вероятность того, что выбранная на окружности точка совпадает с отмеченной, равна 0. Однако такое событие не является невозможным.

Значит, из равенства 0 вероятности события не следует невозможность этого события. Аналогично, из равенства вероятности события 1 не следует достоверность этого события.

Таким образом, в случаях, когда число равновозможных исходов бесконечно, вероятности событий можно рассчитать с помощью геометрической интерпретации. Саму вероятность при этом часто называют ***геометрической вероятностью***.

Рассмотрим ещё несколько примеров применения геометрических рассуждений в теории вероятностей.

Пример 4.

Аня тратит на прогулку ровно 1,5 часа и выходит из дома в произвольное время между 16 и 17 часами. Какова вероятность того, что она вернётся домой между 18 и 19 часами?

Решение.

Данное условие будет выполняться, если Аня выходит из дома между 16 ч 30 мин и 17 ч. Поэтому искомая вероятность равна отношению длины благоприятного временного интервала к длине всего временного интервала, то есть $p = \dfrac{30}{60} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$.

Ответ: 0,5.

Пример 5.

На отрезке AB длины 10 выбраны точки C и D так, что $AC = 2$, $CD = 3$. Какова вероятность того, что:

1) произвольно выбранная точка отрезка AB лежит на отрезке CD;

2)* произвольно выбранный отрезок EF длины 1, целиком лежащий внутри AB, пересекается с отрезком CD;

3)* произвольно выбранный отрезок EF длины 1, целиком лежащий внутри AB, целиком лежит также внутри CD?

Решение.

1) Искомая вероятность равна отношению длины благоприятного отрезка CD к длине всего отрезка AB:

$p = 3 : 10 = 0{,}3.$

* * *

2) Благоприятным событием является принадлежность левого конца E единичного отрезка EF отрезку KD, где точка K находится левее точки C на единицу.

Длина отрезка KD равна $3 + 1 = 4$, поэтому $p = \frac{4}{10} = 0{,}4$.

3) Благоприятным событием является принадлежность левого конца E единичного отрезка EF отрезку CL, где точка L находится левее точки D на 1.

Длина отрезка CL равна $3 - 1 = 2$, поэтому $p = \frac{2}{10} = 0{,}2$.

Ответ: 0,3; 0,4; 0,2.

Пример 6.

Один из домов, стоящих на окраине деревни, выходит окнами на футбольное поле. Какова вероятность того, что футбольный мяч, попавший в дом, разобьёт стекло в одном из окон (рис. 1)?

Решение.

Будем считать, что мяч попадает в любое место стены дома с одинаковой вероятностью.

Искомая вероятность равна отношению площади «благоприятствующей искомому событию» (то есть площади окон), ко всей площади стены:

$p = \frac{1 + 1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{6}.$

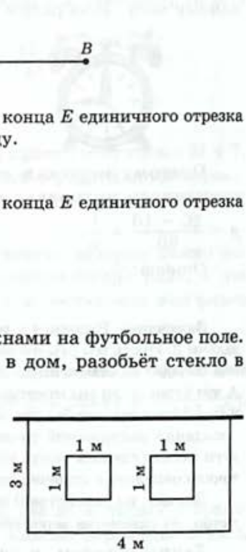


Рис. 1

Ответ: вероятность попадания в окно равна $\frac{1}{6}$.

В последнем примере мы пренебрегли размерами мяча, поскольку иначе он мог бы попасть и в окно, и в стену одновременно. Также мы не рассматривали толщину рамы окна. Вообще в задачах на геометрическую вероятность обычно считается, что размеры предмета очень малы по сравнению с размером места, куда он должен попасть.

Подведём итоги:

Если общее число исходов и число исходов, благоприятствующих событию:

- **велико** – используются ***комбинаторные*** рассуждения и формулы;
- **бесконечно** – используются ***геометрические*** рассуждения и формулы.

К **66** Решите задачи:

1) В ряд выложили красный, синий и зелёный шары. Сколько различных вариан-тов возможно получить? Сколько среди них вариантов, в которых красный и синий шары окажутся рядом?

2) В ряд выложили красный, синий и зелёный шары. Чему равна вероятность того, что красный и синий шары окажутся рядом?

Как связаны эти задачи между собой?

67 Решите задачу: «В мешок положили четыре карточки с буквами «О», «Р», «М», «Е». Из мешка их вытаскивают по одной карточке и записывают вытащенные буквы подряд. Чему равна вероятность того, что в итоге записи получится слово «МОРЕ»?»

Знания из какого раздела математики помогли вам найти общее число исходов этого испытания? Сделайте вывод.

68 Решите задачу: «На 90 карточках написаны все числа от 10 до 99 – по одному на каждой карточке. Вася берёт наугад одну карточку. Чему равна вероятность того, что число на карточке будет состоять из разных цифр?» Знания из какого раздела математики помогли вам быстрее найти число благоприятных исходов этого испытания? Сделайте вывод.

69 Из цифр 5, 7, 9 случайным образом составили трёхзначное число, используя все цифры. Чему равна вероятность того, что полученное число:

а) делится на 5; б) начинается на 7.

70 Какова вероятность угадать все 6 чисел в лотерее «6 из 49»?

71 Одновременно бросили 3 кубика. Найдите вероятность того, что:

1) на всех кубиках выпадут одинаковые очки;
2) ровно на двух кубиках выпадут одинаковые очки;
3) на всех кубиках выпадут разные очки.

72 У маленького Пети есть два кубика с буквой И, по одному кубику с буквами Ф, З, К, А. Петя выложил кубики в ряд. Какова вероятность того, что он выложил слово «ФИЗИКА»?

73 В урне 10 шаров: 7 белых и 3 чёрных. Вынули два шара. Какова вероятность, что оба шара белые?

74 В школьной лаборатории 10 микроскопов, два из которых сломались. Ученик, не зная, что среди них есть сломанные, выбрал для урока 6 микроскопов. Какова вероятность того, что они все исправные?

75 1) На отрезке AB длиной 20 см выбраны точки C и D так, что $AC = 5$ см, а $CD = 4$ см. Найдите вероятность того, что произвольно выбранная точка отрезка лежит: а) на отрезке CD; б) на отрезке AC; в) не на отрезке AD.

2) Катя проснулась ночью и взглянула на часы. Какова вероятность того, что в этот момент минутная стрелка показывала на промежуток между 20 и 40 минутами?

Знания из какого раздела математики помогли вам вычислить вероятность в этих задачах? Сделайте вывод.

76 Стрелок, не целясь, стреляет в мишень, площадь которой составляет 300 см², и попадает в неё. В центре этой мишени расположен маленький квадрат со стороной 10 см. Найдите вероятность того, что стрелок попал именно в этот квадрат.

П **77** Какие из приведённых событий являются достоверными, невозможными, случайными:

1) при одновременном бросании семи костей на всех выпало разное количество очков;

2) при одновременном бросании семи костей хотя бы на двух из них выпало одинаковое количество очков;

3) при одновременном бросании семи костей на всех выпало одинаковое количество очков;

4) при одновременном бросании семи костей ровно на трёх из них выпало одинаковое количество очков;

5) прямая, проходящая через центр квадрата, разделила его на две равные фигуры;

6) прямая, проходящая через центры двух клеток в клетчатой тетради, образует с границами тетради углы в 45°.

78 Определите, какие из приведённых событий A и B являются совместными, а какие – несовместными.

1) Перемножили два натуральных числа: A = «сумма цифр каждого из сомножителей равна 22», B = «сумма цифр произведения этих чисел равна 36»;

2) Перемножили два натуральных числа: A = «сумма цифр каждого из сомножителей равна 18», B = «сумма цифр произведения этих чисел равна 18»;

3) Перемножили два натуральных числа: A = «сумма цифр каждого из сомножителей равна 8», B = «сумма цифр произведения этих чисел равна 1»;

4) Перемножили два натуральных числа: A = «сумма цифр каждого из сомножителей равна 24», B = «сумма цифр произведения этих чисел равна 39».

79 Решите квадратное уравнение устно:

а) $x^2 + 11x - 26 = 0$; б) $x^2 + 32x + 87 = 0$; в) $x^2 - x + 6 = 0$.

80 Уравнение $x^2 - 9x + 15 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Составьте уравнение, корнями которого являются числа $3x_1 + 1$ и $3x_2 + 1$.

81 Для корней x_1 и x_2 уравнения $3x^2 - 6x - 2 = 0$ найдите значения выражения:

а) ${x_1}^2 + {x_2}^2$; б) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} - 2$.

82 Один из корней квадратного уравнения $x^2 - 2x + c = 0$ равен $1 + \sqrt{5}$. Найдите другой корень и значение параметра c.

83 Разложите на множители квадратный трёхчлен:

а) $x^2 + 13x + 12$; б) $-1{,}2x^2 + 5x + 5$; в) $x^2 - 3$; г) $2x^2 + 3x + 4$.

84 Решите задачу:

а) Площадь прямоугольника равна 168 см², а его периметр равен 62 см. Найдите стороны прямоугольника.

б) Длины катетов прямоугольного треугольника отличаются на 3 см, а длина гипотенузы больше длины меньшего катета на 6 см. Найдите стороны треугольника.

85 При каких значениях параметра k уравнение $x^2 + 6x + k = 0$ не имеет корней?

86 При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 + (a + 2)x + a + 2 = 0$ имеет ровно один корень?

87 При каких значениях параметра m следующее уравнение имеет более двух корней: $(m^2 - 7m + 10)x^2 + (m^2 - 4)x + (3m^2 - 2m - 8) = 0$?

88 Хорошо известные вам термины «абсцисса» (лат. слово abscissa – «отрезанная») и «ордината» (лат. слово ordinatum – «по порядку») впервые были употреблены в 1675 г. и в 1694 г. немецким учёным. Расположив наибольшие значения квадратных трёхчленов на заданных числовых отрезках в порядке возрастания, узнайте имя этого учёного:

$-0{,}25x^2 + x - 4$ на $[1; 3]$	Е	$-x^2 + 10x + 3$ на $[0; 4]$	Ц
$0{,}3x^2 + 18x + 2$ на $[-10; -1]$	Л	$3x^2 - 6x - 4$ на $[-2; 0]$	И
$-5x^2 - x + 1$ на $[-0{,}2; -0{,}1]$	Н	$-4x^2 + 20x - 25$ на $[0; 10]$	Б
$x^2 - 9x - 1$ на $[0; 4{,}5]$	Й		

Д **89** На 90 карточках написаны все числа от 10 до 99 – по одному на каждой карточке. Вася берёт наугад одну карточку. Какова вероятность того, что число на карточке будет состоять из нечётных цифр?

90 В урне 10 шаров: 7 белых и 3 чёрных. Вынули два шара. Какова вероятность, что оба шара чёрные?

91 На отрезке AB выбрана точка C так, что $AC = 5$ см, а $CB = 4$ см. Найдите вероятность того, что произвольно выбранная точка отрезка AB лежит на отрезке AC.

92 Каждое утро папа бегает по 1,5 часа и выходит из дома в произвольное время между 5 и 6 часами. Какова вероятность того, что, возвратившись с пробежки, он застанет дома своего сына, который просыпается в 7 утра и уходит в школу в 8 часов?

93 Какие из приведённых событий являются достоверными, невозможными, случайными:

1) первый дождь следующей весной начнётся в четверг;
2) 27 мая в Москве будет +40° С;
3) 27 мая в Москве будет меньше +40° С?

94 Какие из приведённых событий A и B являются совместными, а какие – несовместными?

1) В лыжных гонках: A = «победитель пробежал дистанцию за 23 минуты», B = «пришедший вторым – за 21 минуту»;
2) В лыжных гонках: A = «победитель пробежал дистанцию за 23 минуты», B = «пришедший вторым – за 24 минуты»;
3) В учебнике на пятой странице: A = «нарисованы 3 четырёхугольника», B = «нарисованы только треугольники»;

4) В учебнике на пятой странице: A = «нарисованы 3 четырёхугольника», B = «нарисованы только прямоугольники».

95 Решите устно квадратное уравнение:

а) $x^2 + 18x + 32 = 0$; б) $x^2 - 6x - 91 = 0$; в) $x^2 + x + 5 = 0$.

96 Для корней x_1 и x_2 уравнения $x^2 - 3x - 10 = 0$ найдите значения выражения $x_1^2 + x_2^2$.

97 Разложите на множители квадратный трёхчлен, если это возможно:

а) $x^2 + 7x - 18$; б) $-9x^2 + 3x + 2$; в) $x^2 - 5$; г) $-x^2 + 2x - 5$.

98 Площадь прямоугольника равна 360 м², а его периметр равен 76 м. Найдите стороны прямоугольника.

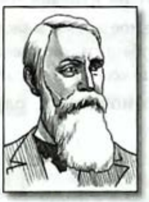
99 При каких значениях параметра t уравнение $x^2 - 8x - t = 0$ не имеет корней?

100 При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 + (a - 1)x + a - 1 = 0$ имеет ровно один корень?

C **101*** Два друга-математика договорились встретиться в условленном месте с 12:00 до 13:00. Каждый из них собирается прийти в случайный момент времени из этого промежутка и прождать 10 минут. Какова вероятность того, что они встретятся?

102* На гранях каждого из 27 кубиков произвольным образом написаны все числа от 1 до 6. Из этих 27 кубиков Вася сложил куб, причем так, что у любых двух кубиков на соприкасающихся гранях записаны числа, отличающиеся ровно на 1. После этого Вася подсчитал суммы чисел, записанных на каждой из граней (этого куба). Мог ли он получить шесть одинаковых сумм?

1.1.5*. Случайные величины и их распределения



Сближение теории с практикой даёт самые благотворные результаты, и не одна только практика от этого выигрывает; сами науки развиваются под влиянием её, она открывает им новые предметы для исследования или новые стороны в предметах давно известных.

П. Л. Чебышев (1821–1894),
русский математик и механик

Результатом случайного опыта может быть не только случайное событие, но и некоторая числовая характеристика этого опыта, которую мы будем называть случайной величиной. Например, при случайном выборе человека можно рассматривать случайную величину – его рост в сантиметрах, округлённый до ближайшего целого. При этом разным элементарным событиям может соответствовать одна и та же случайная величина.

Если случайно выбрать точку на числовой прямой, то её координата будет случайной величиной. Эта случайная величина может принимать любое действительное значение.

Изучать такие случайные величины сложно, зачастую для этого требуется знать высшую математику, поэтому в основном мы будем рассматривать случайные величины, принимающие значения из какого-то конечного множества.

Определение 1. Случайная величина, множество значений которой конечно или счётно, называется *дискретной случайной величиной*.

При изучении случайной величины полезно понимать вероятность, с которой она принимает то или иное значение. Например, при нескольких бросаниях монеты количество выпавших «орлов» — случайная величина. Если монетка брошена один раз, то эта случайная величина может принимать всего два значения – 0 или 1, – каждое с вероятностью $\frac{1}{2}$. Если же было сделано три броска, то эта случайная величина может принимать одно из четырёх значений – 0, 1, 2 и 3. Давайте вычислим вероятность каждого из этих исходов. Для этого выпишем все элементарные события и вычислим значение случайной величины для каждого из них:

Результат первого броска	Результат второго броска	Результат третьего броска	Количество выпавших «орлов»
орёл	орёл	орёл	3
орёл	орёл	решка	2
орёл	решка	орёл	2
орёл	решка	решка	1
решка	орёл	орёл	2
решка	орёл	решка	1
решка	решка	орёл	1
решка	решка	решка	0

Поэтому вероятности каждого из значений нашей случайной величины такие:

Значение случайной величины	0	1	2	3
Вероятность	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

В этом случае пишут, что $p(0) = \frac{1}{8}$, $p(1) = \frac{3}{8}$, $p(2) = \frac{3}{8}$ и $p(3) = \frac{1}{8}$.

Определение 2. Зависимость вероятности случайной величины от её значения называется *распределением вероятности*.

Распределение вероятности удобно изображать в виде гистограммы. Например, для только что рассмотренного примера она будет выглядеть так:

Если просуммировать вероятности для каждого значения дискретной случайной величины, то получится 1. Действительно, все эти события несовместны и в объединении дают полное пространство элементарных исходов.

Пример 1. При броске игральной кости количество выпавших очков — случайная величина. Очевидно, что вероятность каждого значения равна $\frac{1}{6}$, и распределение вероятности выглядит так:

Определение 3. *Равномерное дискретное распределение* — это распределение дискретной случайной величины, имеющей конечное количество значений, которые случаются с одинаковой вероятностью.

Определение 4. *Распределение Бернулли* — это распределение случайной величины, принимающей два значения – 0 с вероятностью q и 1 с вероятностью p $(p + q = 1)$.

Рассмотрим последовательность независимых событий, каждое из которых имеет два возможных исхода (один из них назовём «успехом», другой – «неудачей»). При этом в каждом из этих событий «успех» наступает с вероятностью p $(0 \leqslant p \leqslant 1)$, «неудача» – с вероятностью $q = 1 - p$. Такая последовательность событий называется *испытаниями Бернулли*.

Рассмотрим несколько примеров.

а) Подбрасывание монеты, когда успехом считают выпадение орла, неудачей – решки. Испытания независимы, при этом $p = q = \frac{1}{2}$.

б) Подбрасывание кубика, одна из граней которого окрашена в красный цвет, остальные в синий, когда успехом считают выпадение сверху красной грани, неудачей – синей. Ясно, что эти испытания, как и в примере а), независимы, но здесь $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$.

в) Стрельба по мишени. Считается, что вероятность попадания при одном выстреле равна p, вероятность промаха $q = 1 - p$. Обычно у хороших стрелков вероятность p близка к 1, у плохих она мала.

Остановимся на примере в) подробней. Рассмотрим событие, которое состоит в том, что из n выстрелов стрелок ровно m раз попал в цель, а $n - m$ раз он промахнулся. Иными словами, в n испытаниях достигнуто ровно m успехов. Вероятность такого события обозначим $p_n(m)$. Результаты выстрелов условимся считать независимыми.

Пусть $n = 3$, $m = 1$. Тогда попадание могло произойти при первом выстреле, при втором или при третьем. Допустим, попадание произошло при первом выстреле, а промах при втором и третьем. Эти события независимы, поэтому вероятность того, что осуществятся все три, равна произведению вероятности попадания при первом выстреле и вероятностей промахов при втором и третьем выстрелах: $p \cdot q \cdot q = pq^2$. В случае попадания при втором или третьем выстреле и промахов в остальных вероятность каждого из этих произведений событий также равна pq^2. Событие, которое состоит в том, что один (какой-то) из выстрелов удачен, а два других нет, является суммой трёх несовместных событий, состоящих в том, что удачен конкретный выстрел (первый, второй или третий), а два других – нет. Поэтому вероятность такого события равна $p_3(1) = 3pq^2$. Коэффициент 3 – это число способов, которыми можно выбрать один элемент (попадание) из трёх (количество выстрелов), то есть C_3^1. Таким образом, $p_3(1) = C_3^1 p^1 q^{3-1}$.

В общем случае, если в n выстрелах m попаданий и $n - m$ промахов, то вероятность того, что попадания произойдут при конкретных m выстрелах, равна $p^m q^{n-m}$. Способов, которыми можно выбрать m удачных выстрелов из всех n, всего C_n^m. Поэтому $p_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$. Такое распределение вероятностей называется *биноминальным*.

Замечание 1. Мы знаем, что если просуммировать вероятности для каждого значения дискретной случайной величины, то получится 1. Поэтому верно равенство

$$1 = p_n(0) + p_n(1) + p_n(2) + \ldots + p_n(n) = C_n^0 p^0 q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \ldots + C_n^n p^n q^0.$$

Учтём, что $p + q = 1$, тогда $(p + q)^n = C_n^0 p^0 q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \ldots + C_n^n p^n q^0$.

Пример 2. Найти вероятность того, что при 10 бросаниях монеты «орёл» выпадет ровно 4 раза. Ответ округлить до 3 знаков после запятой.

Решение.

Это испытания Бернулли, $p = q = \frac{1}{2}$.

$$p_{10}(4) = C_{10}^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{2^{10}} C_{10}^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{2^{10} \cdot 4!} = \frac{105}{512} \approx 0{,}205.$$

Ответ: 0,205.

Биномиальное распределение для 10 подбрасываний монетки выглядит так:

Пример 3. Стрелок пять раз стреляет по мишени, вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что мишень будет поражена не менее двух раз. Ответ округлить до 3 знаков после запятой.

Решение.

Нужно просуммировать вероятности 2, 3, 4 или 5 попаданий: $p_5(2) + p_5(3) + p_5(4) + p_5(5)$. Однако проще найти искомую вероятность, заметив, что она равна $1 - p_5(0) - p_5(1)$. Имеем:

$p_5(0) = C_5^0 \cdot 0{,}8^0 \cdot 0{,}2^5 = 0{,}2^5 = 0{,}00032;$

$p_5(1) = C_5^1 \cdot 0{,}8^1 \cdot 0{,}2^4 = 5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2^4 = 0{,}0064.$

Искомая вероятность равна $1 - 0{,}00032 - 0{,}0064 = 0{,}99328 \approx 0{,}993$.

Ответ: 0,993.

Биномиальное распределение для 5 выстрелов, если вероятность попадания равна 0,8, выглядит так:

Пример 4. Несколько раз бросают кубик, одна из граней которого красная, остальные – синие. Найти вероятность того, что первый раз красная грань выпадет при четвёртом бросании. Ответ округлить до 3 знаков после запятой.

Решение.

Можно считать, что кубик брошен ровно 4 раза. Тогда это испытания Бернулли с $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$, $n = 4$, и нас интересует случай, когда в первых трёх бросках выпадает синяя грань, а в четвёртом – красная. Следовательно, искомая вероятность равна

$$q \cdot q \cdot q \cdot p = q^3 p = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} \approx 0{,}096.$$

Ответ: 0,096.

Пример 5. Рассмотрим следующий случайный опыт. Будем подбрасывать монетку до тех пор, пока не выпадет «орёл». В качестве случайной величины будем рассматривать номер попытки, при которой он выпал. Если «орёл» выпал сразу, то случайная величина равна 1, если в первый раз выпала «решка», а во второй раз – «орёл», то случайная величина равна 2, и т.д.

Пользуясь формулой произведения вероятностей в серии независимых событий, несложно подсчитать, что $p(1) = \frac{1}{2}$, $p(2) = \frac{1}{4}$, $p(3) = \frac{1}{8}$, ..., $p(n) = \frac{1}{2^n}$, ... Таким образом, мы получили пример дискретной случайной величины, множество значений которой счётно. Её распределение вероятности выглядит так:

Такое распределение вероятности случайной величины называется *геометрическим*.

Определение 5. *Геометрическое распределение* — это распределение случайной величины количества испытаний Бернулли до первого «успеха».

Пусть проводится серия одинаковых независимых испытаний, в которых вероятность «успеха» равна p, а вероятность «неудачи» $q = 1 - p$. Тогда распределение вероятности количества испытаний до первого «успеха» будет таким:

Значение случайной величины	1	2	3	4	5	6	7	...
Вероятность	p	qp	q^2p	q^3p	q^4p	q^5p	q^6p	...

Замечание 2. Скоро мы узнаем, что такое распределение вероятности является частным случаем геометрической прогрессии, что и дало название этому распределению.

К **103** Найдите вероятность того, что при трёх бросаниях монеты:

а) «орёл» не выпадет ни разу;
б) «орёл» выпадет ровно один раза;
в) «орёл» выпадет ровно два раза;
г) «орёл» выпадет все три раза.

Сложите полученные вероятности. Попробуйте объяснить результат.

104 В случайном эксперименте дважды бросают игральную кость. Количество бросков, в которых выпала грань с одним очком, является случайной величиной. Найдите её распределение вероятности. Представьте результат в виде таблицы и гистограммы (столбчатой диаграммы).

105 Вася может добраться до школы пешком, а может на автобусе. Автобус ходит довольно редко и по случайному расписанию. Но Вася знает, что если в любой момент времени подождать 10 минут, то вероятность того, что автобус придёт, равна 0,4. Каждое утро Вася ждёт автобус 10 минут и если он не приходит, идёт пешком. Найдите распределение вероятности случайной величины — количества раз, которое Вася поедет в школу на автобусе в течение одной пятидневной учебной недели. Как при решении этой задачи вам помогут испытания Бернулли и биномиальное распределение?

106 В колоде 36 карт. Из колоды случайным образом достают по одной карте до тех пор, пока не достанут карту пиковой масти. Найдите вероятность того, что карту пиковой масти достанут уже на третьей попытке, если:

а) после каждой попытки карту возвращают в колоду и колоду перемешивают;
б*) после каждой попытки карту обратно не возвращают.

П **107** Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x + 2y = 7; \\ 9x - 35 = 8y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x + 2y}{2} - 3y = -2; \\ \dfrac{x - 3y}{2} + 3 = \dfrac{2x + y}{5}. \end{cases}$

108 Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 4x - 15 > 8x + 1; \\ 9x - 6 \geqslant 3x - 54; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x + 5}{4} > 2x; \\ 1 - 2x < x - \dfrac{2x - 4}{5}. \end{cases}$

109 Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств с двумя неизвестными:

а) $\begin{cases} x + y > 1; \\ x - y > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y - 1 \leqslant 0; \\ x - 2y + 2 \geqslant 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x - 3y + 12 > 0; \\ x + 3y - 3 \geqslant 0. \end{cases}$

Д **110** В случайном эксперименте четыре раза подбрасывают монету. Найдите распределение вероятности случайной величины, равной количеству выпадений «орла». Представьте результат в виде таблицы и гистограммы.

111 Лучник четыре раза стреляет по мишени, вероятность попадания стрелы при каждом выстреле равна 0,6. Найти вероятность того, что мишень будет поражена более двух раз.

112 Две противоположные грани белого кубика покрасили в чёрный цвет. В случайном эксперименте кубик кидают до тех пор, пока не выпадет чёрная сторона. Найдите вероятность того, что чёрная сторона выпадет только при третьем броске.

113 Решите систему:

а) $\begin{cases} \dfrac{2x - y}{2} = 0{,}5; \\ 6x + 4y = 17; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 8 \leqslant 7x + 10; \\ 2x - 3(x - 5) > 10 - 3x. \end{cases}$

114 Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств с двумя неизвестными:

а) $\begin{cases} x - y \leqslant 2; \\ x + y \leqslant -2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x - y + 1 < 0; \\ x + 4y - 4 \geqslant 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5x - 2y - 6 > 0; \\ x - 2y - 2 < 0. \end{cases}$

С **115*** Можно ли расставить все натуральные числа от 1 до 100 по кругу так, чтобы сумма любых трёх подряд идущих чисел была простым числом?

116* Пусть a, b, c – различные натуральные числа с суммой 800. Найдите максимально возможное значение суммы корней уравнения $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) = 0$.

1.1.6*. Операции со случайными величинами. Математическое ожидание и дисперсия. Закон больших чисел

О вы, счастливые науки!
Прилежны простирайте руки...
Везде исследуйте всечасно,
Что есть велико и прекрасно,
Чего ещё не видел свет...

М. В. Ломоносов (1711–1765)
русский учёный-естествоиспытатель

Независимые случайные величины

Определение 1. Две случайные величины называются **независимыми**, если знание значения одной из них не даёт никакой дополнительной информации о значении другой.

Иными словами, дискретные случайные величины X и Y являются независимыми, если для любых значений x и y события $\{X = x\}$ и $\{Y = y\}$ независимы. Поэтому

$$p(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = p(\{X = x\}) \cdot p(\{Y = y\}).$$

Полученное свойство можно использовать в качестве эквивалентного определения независимости двух случайных величин.

Сложение, умножение случайных величин

Эксперимент заключается в бросании двух игральных костей. Пусть X – случайная величина, равная количеству очков, выпавших на первой кости, Y – на второй кости. Эти величины независимы. Рассмотрим новую случайную величину $Z = X + Y$ (её значение – сумма очков, выпавших на двух костях). Найдём распределение её вероятности. Наименьшее значение Z равно 2, а наибольшее – 12.

$$p(\{Z = 2\}) = p(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}) = p(\{X = 1\}) \cdot p(\{Y = 1\}) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36};$$

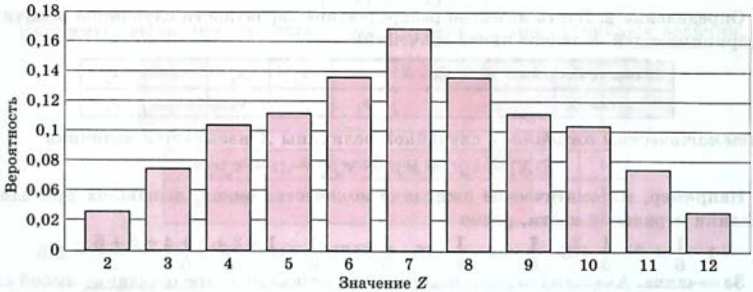
$$p(\{Z = 3\}) = p(\{X = 1\} \cap \{Y = 2\}) + p(\{X = 2\} \cap \{Y = 1\}) =$$

$$= p(\{X = 1\}) \cdot p(\{Y = 2\}) + p(\{X = 2\}) \cdot p(\{Y = 1\}) = 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{18}.$$

...

В итоге получим такое распределение вероятности случайной величины Z:

Значение случайной величины Z	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вероятность	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

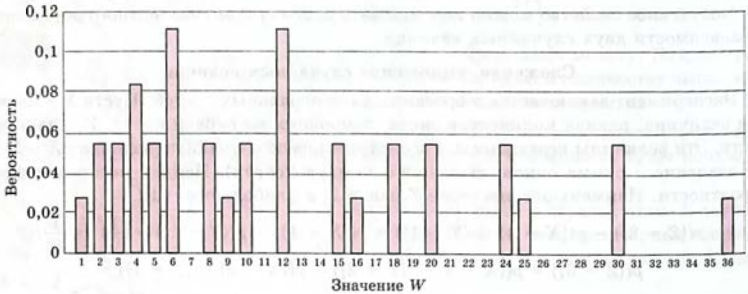


Мы видим, что наиболее вероятно при бросании двух костей получить сумму 7.

Для тех же самых случайных величин X и Y рассмотрим новую случайную величину $W = XY$. Попробуем найти и её распределение. Для того чтобы понять, какие значения она может принимать, заполним «таблицу умножения»:

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Так как случайные величины X и Y независимы, вероятность попасть в каждую ячейку таблицы 6×6 равна $\frac{1}{36}$, поэтому распределение вероятности случайной величины W выглядит так:



Математическое ожидание и его свойства

Как мы знаем, чтобы задать распределение случайной величины, используется таблица, содержащая информацию о всех возможных значениях случайной величины и вероятности появления каждого из них. Однако на практике бывает довольно сложно изучать всю таблицу (особенно если она очень большая), и достаточно знать какие-то числовые характеристики случайной величины. Основной характеристикой случайной величины является её математическое ожидание.

Определение 2. Пусть известно распределение вероятности случайной величины X (принимающей конечное число значений):

Значение случайной величины X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
Вероятность	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Математическим ожиданием случайной величины X называется величина

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \ldots + x_np_n.$$

Например, математическое ожидание количества очков, выпавших при одном бросании игральной кости, равно

$$1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3{,}5.$$

Замечание. Аналогично доказывается, что математическое ожидание любой случайной величины с равномерным распределением равно среднему арифметическому всех возможных значений этой величины.

У математического ожидания есть три важных свойства.

Пусть X и Y – две случайные величины, а k – фиксированное число, тогда

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y),$$
$$E(kX) = kE(X).$$

При этом, если X и Y – независимые случайные величины, то

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Поэтому, например, в рассмотренной выше задаче про бросание двух игральных костей необязательно вычислять математическое ожидание суммы по определению. Достаточно сказать, что

$$E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 3{,}5 + 3{,}5 = 7.$$

Дисперсия случайной величины и её свойства. Стандартное отклонение

Математическое ожидание хорошо характеризует случайную величину, но у него есть один недостаток. Рассмотрим распределения трёх случайных величин.

Значение случайной величины X	9	10	11
Вероятность	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Значение случайной величины Y	6	8	10	12	14
Вероятность	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

Значение случайной величины Z	−80	−60	−40	−20	0	20	40	60	80	100
Вероятность	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1

У каждой из этих случайных величин математическое ожидание равно 10. Но при этом у случайной величины X значения лежат более «кучно» вокруг математического ожидания, а у случайной величины Z очень большой «разброс» значений.

Для измерения «рассеивания» случайной величины используется понятие дисперсии.

Определение. *Дисперсией $D(X)$ случайной величины X* называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от её математического ожидания:

$$D(X) = E((X - E(X))^2).$$

Например, вычислим дисперсию рассмотренных выше случайных величин.

Значение случайной величины $X - E(X)$	−1	0	1
Вероятность	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Значение случайной величины $(X - E(X))^2$	0	1
Вероятность	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$$D(X) = E((X - E(X))^2) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Значение случайной величины $Y - E(Y)$	−4	−2	0	2	4
Вероятность	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

Значение случайной величины $(Y - E(Y))^2$	0	4	16
Вероятность	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

$$D(Y) = E((Y - E(Y))^2) = 0 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{2}{5} + 16 \cdot \frac{2}{5} = \frac{8 + 32}{5} = \frac{40}{5} = 8.$$

Значение случайной величины $Z - E(Z)$	−90	−70	−50	−30	−10	10	30	50	70	80
Вероятность	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1

Значение случайной величины $(Z - E(Z))^2$	100	900	2500	4900	8100
Вероятность	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$D(Z) = E((Z - E(Z))^2) =$$
$$= 100 \cdot \frac{1}{5} + 900 \cdot \frac{1}{5} + 2500 \cdot \frac{1}{5} + 4900 \cdot \frac{1}{5} + 8100 \cdot \frac{1}{5} = \frac{16500}{5} = 3300.$$

Мы видим, что чем больше разброс значений, тем больше дисперсия.

Однако у дисперсии есть один недостаток. Так как она меряет квадрат отклонения от математического ожидания, она имеет размерность, отличную от размерности исходной случайной величины. Например, если случайная величина измеряется в метрах, то её дисперсия – в квадратных метрах. Поэтому для оценки «разброса» значений случайной величины вместо дисперсии используется *стандартное отклонение* – квадратный корень из дисперсии:

$$\delta(X) = \sqrt{D(X)}.$$

В рассмотренных выше примерах получаем:

$$\delta(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0{,}8,$$
$$\delta(Y) = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{8} \approx 2{,}8,$$
$$\delta(Z) = \sqrt{D(Z)} = \sqrt{3300} \approx 57.$$

Для вычисления дисперсии часто бывает удобно использовать другую формулу:

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Она получается следующим образом:

$$D(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2) =$$
$$= E(X^2) - E(2XE(X)) + E(E(X)^2) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2.$$

Здесь мы воспользовались свойствами математического ожидания и тем, что $E(X)$ и $E(X)^2$ – фиксированные числа.

У дисперсии есть три важных свойства. Сформулируем их.

Теорема. Пусть X и Y – независимые случайные величины, а a и k – фиксированные числа, тогда

$$D(X + a) = D(X),$$
$$D(kX) = k^2D(X),$$
$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

Доказательство.

$$D(X + a) = E((X + a - E(X + a))^2) = E((X + a - (E(X) + a))^2) =$$
$$= E((X - E(X))^2) = D(X),$$
$$D(kX) = E((kX - E(kX))^2) = E((kX - kE(X))^2) = E(k^2(X - E(X))^2) = k^2D(X),$$
$$D(X + Y) = E((X + Y)^2) - E(X + Y)^2 =$$
$$= E(X^2 + 2XY + Y^2) - E(X + Y)^2 =$$
$$= E(X^2) + E(2XY) + E(Y^2) - (E(X) + E(Y))^2 =$$
$$= E(X^2) + 2E(X)E(Y) + E(Y^2) - (E(X)^2 + 2E(X)E(Y) + E(Y)^2) =$$
$$= E(X^2) + E(Y^2) - E(X)^2 - E(Y)^2 = D(X) + D(Y).$$

Математическое ожидание и дисперсия числа успехов в серии испытаний Бернулли

Рассмотрим одно испытание Бернулли, у которого вероятность «успеха» равна p. Тогда математическое ожидание числа успехов в одном испытании равно $0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$. Рассмотрим теперь серию из n одинаковых испытаний Бернулли, число успехов в каждом из них – это n независимых случайных величин $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$, поэтому математическое ожидание числа успехов в серии из n испытаний Бернулли равно

$$E(X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + ... + E(X_n) = np.$$

Замечание. Отметим, что математическое ожидание числа успехов в серии из n испытаний Бернулли можно было посчитать по определению, используя полученное ранее распределение:

$$0 \cdot C_n^0 p^0 q^n + 1 \cdot C_n^1 p^1 q^{n-1} + 2 \cdot C_n^2 p^2 q^{n-2} + ... + n \cdot C_n^n p^n q^0.$$

Однако получается довольно сложное выражение, которое непонятно как преобразовывать. Вычислив это математическое ожидание другим способом, мы фактически доказали следующую формулу:

$$0 \cdot C_n^0 p^0 q^n + 1 \cdot C_n^1 p^1 q^{n-1} + 2 \cdot C_n^2 p^2 q^{n-2} + ... + n \cdot C_n^n p^n q^0 = np.$$

Найдём теперь дисперсию числа успехов в серии из n испытаний Бернулли. Дисперсия числа успехов в одном испытании равна

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq,$$

так как распределение вероятностей у X и X^2 одинаковое. Поэтому

$$D(X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + D(X_3) + ... + D(X_n) = npq.$$

Измерение вероятностей и точность измерения

В предыдущих параграфах мы предполагали, что вероятности интересующих нас событий нам известны. Но даже для реальных монет и игральных костей нельзя с уверенностью сказать, что стороны монеты и грани игральных костей выпадают равновероятно. Монета неидеальна хотя бы потому, что на разных её сторонах разные рельефы, что (пусть и незначительно) может влиять на вероятность выпадения той или другой стороны. А если попытаться сделать идеальную монету с абсолютно одинаковыми сторонами, то как отличить «орла» от «решки»?

К сожалению, нет прибора, который умеет измерять вероятность того или иного события, поэтому никакую реальную вероятность нельзя определить абсолютно точно. К счастью, в практических задачах абсолютная точность обычно не нужна. Основным способом «измерения вероятности» является многократное проведение одного и того же случайного эксперимента.

Пусть мы хотим измерить вероятность некоторого события A. В результате случайного эксперимента событие A может произойти с некоторой вероятностью p или не произойти – с вероятностью $q = 1 - p$. При этом величина p нам неизвестна, и мы хотим её «измерить». Фактически мы имеем испытание Бернулли. Проведём серию из n таких экспериментов. Тогда количество «успехов», как мы знаем, будет случайной величиной K, математическое ожидание и дисперсия которой равны

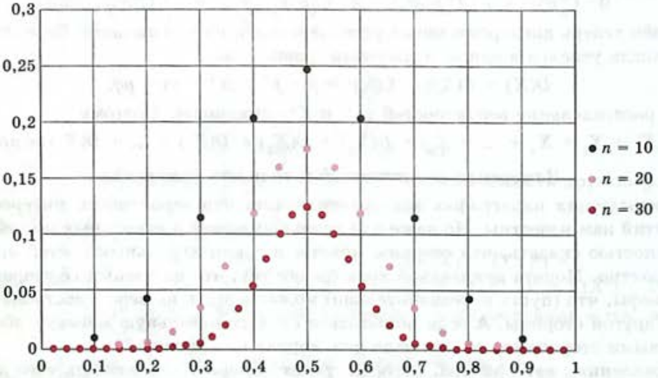
$$E(K) = np, \quad D(K) = npq.$$

Рассмотрим случайную величину $\frac{K}{n}$. Её математическое ожидание и дисперсия соответственно равны

$$E\left(\frac{K}{n}\right) = \frac{1}{n}E(K) = p, \quad D\left(\frac{K}{n}\right) = \frac{1}{n^2}D(K) = \frac{pq}{n}.$$

Поэтому, если «успех» наступил k раз из n, то величина $\frac{k}{n}$ (которая, как мы знаем, называется частотой события A) при больших n «близка» к реальной вероятности p. А так как дисперсия этой величины убывает с увеличением количества экспериментов, частота будет тем ближе к вероятности, чем больше экспериментов мы проведём. *Если дисперсия мала, то вероятность сильного отклонения случайной величины от своего математического ожидания тоже мала.*

Важно понимать, что мы не гарантируем, например для идеальной монеты, что при большом числе бросков «орёл» всегда будет выпадать примерно в половине случаев. Мы хорошо знаем, что количество K выпадений «орла» описывается биномиальным распределением. И даже есть ненулевая вероятность того, что «орёл» вообще ни разу не выпадет, но при этом вероятность того, что частота выпадения «орла» сильно отличается от 0,5, будет достаточно малой. Поясним сказанное выше, рассмотрев на одном графике три распределения величины $\frac{K}{n}$ для выпадения «орла» при $n = 10$, $n = 20$, $n = 40$ бросаниях монеты:



С увеличением n «колокольчик» сужается и вероятность получить значения, сильно отличающиеся от 0,5, падает.

Замечание. Этот эффект широко используется при социологических и медицинских исследованиях, а также в прогнозированиях вероятности наступления страховых случаев и некоторых чрезвычайных ситуаций. В теории вероятностей доказывается, что при $n = 2000$ вероятность отклонения частоты события от математического ожидания меньше, чем на 0,03, велика. Эта вероятность превышает 0,99. Практически для всех исследований достаточно такой точности.

Поэтому, например, для большинства опросов используют выборку из 2000 человек, так как если удаётся сделать её действительно случайной, результаты опроса хорошо отражают ситуацию в целом.

Закон больших чисел

Пусть дано n независимых случайных величин $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ с одинаковым распределением, и их общее математическое ожидание равно m, а дисперсия – d. Рассмотрим новую случайную величину $\frac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n}{n}$. Для неё

$$E(X) = E\left(\frac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}(E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + \ldots + E(X_n)) = m;$$

$$D(X) = D\left(\frac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}(D(X_1) + D(X_2) + D(X_3) + \ldots + D(X_n)) = \frac{d}{n}.$$

Это означает, что при больших n значения случайной величины

$$\frac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n}{n}$$

мало отклоняются от m.

То есть среднее значение большого числа случайных величин с одинаковым распределением близко к математическому ожиданию одной из случайных величин. Теоремы, оценивающие эту «близость» в зависимости от количества случайных величин, называются *законом больших чисел*.

Так, например, при проведении физических опытов, в которых требуется измерение некоторой величины, точность результата увеличивается, если провести достаточно большое количество измерений и вычислить их среднее арифметическое.

К **117** Для некоторой случайной величины известно распределение её вероятности:

Значение случайной величины	1	2	3	4
Вероятность	0,1	0,2	0,3	0,4

Найдите математическое ожидание, дисперсию и стандартное отклонение этой случайной величины.

118 В классе учится 25 школьников. На каждом уроке математики учитель выбирает случайным образом пятерых школьников, которые будут решать задачи у доски. В следующей четверти будет 30 уроков математики. Для каждого школьника количество уроков за четверть, которые он проведёт у доски, является случайной величиной. Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение этой случайной величины. Как вам поможет знание о математическом ожидании и дисперсии в испытаниях Бернулли?

П **119** Запишите периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной:

а) $-1,(27)$; б) $5,0(39)$; в) $3,579(31)$.

120 Решите уравнение с модулем:

а) $|2y - 3| = -5$; в) $|b + 5| = -|b - 12|$; д) $|7 + z| - |3 - z| = -4$;

б) $-|7 - 4z| = 0$; г) $|3c - 8| = |8 - 3c|$; е) $|7k - 9 - 10k| = |6 - 2k + 3 - k|$.

121 Решите неравенство, содержащее модули:

а) $|2y - 7| \geqslant 3$; б) $-|6p - 93| < |64 + 8p|$; в) $|12b + 2 - 9b| \leqslant |4 - 3b - 10|$.

122 Решите систему с модулем:

а) $\begin{cases} x - |y| = 2; \\ 2x - 3y = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - |y| \geqslant 2; \\ 2x - y > -1. \end{cases}$

Д **123** В случайном эксперименте пять раз подбрасывают монету. Найдите математическое ожидание, дисперсию и стандартное отклонение случайной величины, равной количеству выпадений «орла».

а) Выполните задание, найдя распределение вероятности этой случайной величины.

б) Решите задачу, воспользовавшись формулами для математического ожидания и дисперсии числа успехов в серии испытаний Бернулли.

124 Проведите дома случайный эксперимент. Подбросьте монету 100 раз и посчитайте количество выпадений «орла». Для ускорения эксперимента можно одновременно бросать несколько монет (например, достаточно сделать 10 бросков с 10 монетами). Вычислите частоту выпадения «орла». Посмотрите, насколько эта частота отличается от вероятности выпадения «орла». Запомните результат своего эксперимента и на следующем уроке подсчитайте частоту выпадения «орла» для всего класса. Так, например, если в вашем классе 25 учеников, то вместе вы сделали 2500 бросков. Сравните теперь полученную частоту с вероятностью, а также с первоначальными частотами, полученными дома вами и вашими одноклассниками. Какие выводы вы можете сделать?

125 Запишите периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной:

а) 0,(4); б) −4,(541); в) −6,24(6).

126 Решите уравнение с модулем:

а) $|x + 4| = 9$; б) $-|5 - 3a| = -11$; в) $|x - 6| + |x - 2| = 12$.

127 Решите неравенство, содержащее модули:

а) $|x + 5| < 9$; б) $|3 - 4z| \leqslant -17$; в) $|4a - 12| > |5a + 20|$.

С **128*** Найдите наименьшее натуральное a такое, что произведение $a(a + 4)(a + 8)(a + 12)(a + 16)$ делится на 10^6.

129* Когда к квадратному трёхчлену $f(x)$ прибавили x^2, его наименьшее значение увеличилось на 1, а когда из него вычли x^2, его наименьшее значение уменьшилось на 3. Как изменится наименьшее значение $f(x)$, если к нему прибавить $2x^2$?

Экспресс-тест № 1

Примерное время выполнения – 45 минут

Часть А

№ 1

№1. Число 15! делится на:

А) 17; Б) 99; В) 51; Г) 46.

№ 2

№2. В параллели восьмых классов 15 мальчиков успешно занимаются по физике. Сколькими способами можно выбрать из них 8 ребят для участия в олимпиаде по физике?

А) 40 320 способов; В) 6435 способов;

Б) 12 870 способов; Г) 32 432 400 способов.

№ 3

№3. В восьмом классе учатся 14 мальчиков и 12 девочек. По жребию они выбирают дежурного. Какова вероятность того, что это будет мальчик?

А) $\frac{7}{13}$; Б) $\frac{1}{14}$; В) $\frac{1}{2}$; Г) $\frac{6}{13}$.

№ 4

№4. Наблюдения технического контроля показывают, что вероятность изготовления бракованной лампочки составляет около 0,015. Сколько бракованных лампочек можно ожидать в партии из 2000 лампочек?

А) 15; Б) 30; В) 45; Г) 133.

Часть В

№ 5		

№5. В цветочном магазине продавец расставляет в ряд вазы с цветами: гвоздиками, хризантемами, ромашками, фиалками. Хризантем и ромашек было очень много. Продавец распределил хризантемы поровну в три вазы, а ромашки – в две. Сколько существует различных вариантов расстановки ваз с цветами, если:

1) цветы в каждой из ваз отличаются от другой по цвету;

2) ромашки в каждой из ваз отличаются от другой по цвету, а хризантемы – нет;

3) хризантемы в каждой из ваз отличаются от другой по цвету, а ромашки – нет.

Установите соответствие между номерами указанных ситуаций и количеством полученных для них различных вариантов расстановки ваз:

А) 840 вариантов; Б) 2520 вариантов; В) 5040 вариантов.

№ 6

№6. Сколько различных трёхзначных чисел можно составить из цифр 0, 6, 7, 8, 9 (цифры в записи числа не повторяются)?

А) 60; Б) 24; В) 54; Г) 48.

№ 7

№7. На координатной прямой отмечены точки $O(0)$, $S(3)$, $T(8)$, $F(20)$. Точка X бросается наугад на отрезок OF. Какова вероятность того, что точка X попадёт на отрезок ST?

А) 0,25; Б) 0,5; В) 0,75; Г) $\frac{11}{20}$.

Часть С

(ход решения и ответ записывается на отдельном листе)

№ 8. В новой упаковке должно быть 30 футболок одного размера. Но оказалось, что среди них есть три футболки другого размера. Продавец наугад взяла 25 футболок, чтобы пополнить витрину. Какова вероятность того, что они все одного размера?

Ответы и решения к тесту*:

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5			№ 6	№ 7
				1	2	3		
Б	В	А	Б	В	А	Б	Г	А

№ 8

$$p = C_{27}^{25} : C_{30}^{25} = \frac{26 \cdot 27}{1 \cdot 2} : \frac{26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{406}.$$

Ответ: $\frac{1}{406}$.

Шкала успешности:

9 – 10 баллов – *отлично*

7 – 8 баллов – *хорошо*

5 – 6 баллов – *удовлетворительно*

* Инструкцию по работате с экспресс-тестами можно прочитать на с. 164.

§ 2*. Метод математической индукции

1.2.1*. Принцип математической индукции

...наши самые большие надежды мы можем возлагать на наблюдения; они непрерывно будут вести нас к новым свойствам, которые позже мы будем стараться доказать... Мы должны пользоваться таким открытием, как возможностью более точно исследовать эти открытые свойства и доказать их или опровергнуть; в обоих случаях мы можем научиться кое-чему полезному.

Леонард Эйлер (1707–1783),
швейцарский, немецкий и российский математик и механик

Изучая математику, мы знакомимся с различными свойствами и правилами, справедливыми для бесконечного множества элементов (чисел, геометрических фигур и т.д.). Следует понимать, что многие математические утверждения не возникали в науке сразу в своём конечном виде. Некоторые из них прошли долгий путь: от наблюдения и выявления закономерностей к выдвижению гипотез и их доказательству. На заре математики многие факты были открыты именно так – переходом от рассмотрения нескольких (иногда и нескольких сотен) частных примеров к общему выводу. Напомним, что такой способ рассуждения называют индукцией: от лат. «наведение», то есть получение общего вывода, «наведенного» (подсказанного) отдельными примерами.

Наверняка именно так было открыто и свойство суммы первых нечётных чисел натурального ряда. Попробуем открыть это свойство и мы. Обозначим сумму n первых нечётных чисел и рассмотрим несколько таких сумм. При $n = 1$ имеем $S_1 = 1$; при $n = 2$ сумма $S_2 = 1 + 3 = 4$; при $n = 3$ она равна $S_3 = 1 + 3 + 5 = 9$. Продолжая рассматривать такие суммы: $S_4 =16$; $S_5 = 25$; $S_6 = 36$, заметим, что при $n = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ сумма первых n нечётных чисел равна квадрату их количества. Выдвинем гипотезу, что и для любого нечётного числа n верно $S_n = n^2$.

Ясно, что перебрать все оставшиеся элементы невозможно, ведь мы говорим о бесконечном множестве, а известные нам способы доказательства общих утверждений, например введение обозначений, здесь не годятся.

В этом пункте мы узнаем способ, который поможет доказать эту гипотезу и многие другие подобные ей утверждения без перебора всех элементов бесконечного множества. Его идею «подсмотрим» в жизни.

Для организации, например, игры в испорченный телефон (игра заключается в передаче друг другу по цепочке слова, загаданного ведущим), мы не подходим по очереди к каждому из игроков со словами: «Передай слово второму игроку», «Передай слово третьему игроку», ... и т.д. Мы знакомим всех игроков с правилом: «Передай следующему игроку слово, которое услышишь». После чего, сказав нужное слово первому человеку, мы «запускаем» игру. Итак, организовав взаимодействие только между соседями, мы можем связать друг с другом всех игроков и даже бесконечный их ряд.

Теперь применим эту идею для доказательства простейшего общего утверждения об элементах бесконечного множества.

Задача 1.

Докажите, что n-е по порядку нечётное число равно $2n - 1$ (при любом натуральном n).

Доказательство.

Обозначим n-е по порядку нечётное число a_n, тогда нам нужно доказать истинность общего утверждения $\forall\ a_n,\ n \in N\colon a_n = 2n - 1$.

Мы можем убедиться, что для первого нечётного числа это утверждение истинно, с помощью непосредственной подстановки. Действительно, $a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$, единица – это и есть первое нечётное число. Понятно, что осуществить такую же проверку для бесконечного числа остальных нечётных чисел у нас не получится.

Но мы можем легко доказать следование:

$$a_n = 2n - 1 \Rightarrow a_{n+1} = 2(n + 1) - 1.$$

Мы знаем, что каждое нечётное число отличается от предыдущего нечётного числа на 2, поэтому $a_{n+1} = a_n + 2$. Полагая, что утверждение $a_n = 2n - 1$ истинно, можно доказать, что $a_{n+1} = a_n + 2 = 2n - 1 + 2 = 2(n+1) - 1$.

Доказав это следование для двух любых соседних нечетных чисел, мы фактически доказали и бесконечную цепочку:
$a_1 = 2 \cdot 1 - 1$ истинно $\Rightarrow a_2 = 2 \cdot 2 - 1$ истинно; $a_2 = 2 \cdot 2 - 1$ истинно $\Rightarrow a_3 = 2 \cdot 3 - 1$ истинно; ... $a_{1000000} = 2 \cdot 1\,000\,000 - 1$ истинно $\Rightarrow a_{1000001} = 2 \cdot 1\,000\,001 - 1$ истинно,..., $a_n = 2n - 1$ истинно $\Rightarrow a_{n+1} = 2(n + 1) - 1$ истинно, ... и т.д. Ведь истинность первого утверждения мы уже проверили.

Итак, отталкиваясь от истинности утверждения для первого нечётного числа и пользуясь доказанным следованием для пары соседних нечётных чисел, мы можем «пробежаться» по всему бесконечному ряду нечётных чисел.

Выделение этой идеи как важного способа доказательства свойств бесконечных множеств приписывают Б. Паскалю и Я. Бернулли, хотя отдельные случаи его применения встречались ещё в античные времена. Теперь он носит название ***принципа математической индукции.*** В общем виде его можно сформулировать так.

Пусть некоторое высказывание A_n, в формулировку которого входит натуральное число n, истинно при $n = 1$, и из истинности A_n при произвольном натуральном n следует истинность A_{n+1}. Тогда высказывание A_n истинно при любом натуральном n.

Иными словами, истинность A_n при любом натуральном n следует из бесконечной цепочки следствий: A_1 истинно $\Rightarrow A_2$ истинно; A_2 истинно $\Rightarrow A_3$ истинно; A_3 истинно $\Rightarrow A_4$ истинно; ... , A_n истинно $\Rightarrow A_{n+1}$ истинно, ... и т.д.

Теперь мы готовы к тому, чтобы вернуться к свойству суммы n первых нечётных чисел. Докажем его, применяя принцип математической индукции.

1. Как мы видели, $S_1 = 1 = 1^2$. Значит, для $n = 1$ утверждение верно.
2. Предположим, что $S_n = n^2$ истинно при произвольном натуральном n.
3. Опираясь на это предположение, докажем, что $S_{n+1} = (n + 1)^2$.

Мы уже знаем, что n-е нечётное число равно $2n - 1$, значит, $(n + 1)$-е нечётное число равно $2(n + 1) - 1 = 2n + 2 - 1 = 2n + 1$.

Тогда $S_{n+1} = S_n + (2n + 1)$. По предположению индукции $S_n = n^2$, поэтому $S_{n+1} = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$. Исходя из принципа математической индукции, можно утверждать, что $S_n = n^2$ истинно при любом натуральном n. ■

Итак, на основании принципа математической индукции мы можем сформулировать следующий метод доказательства.

Чтобы доказать, что утверждение верно при любом $n \in N$, **методом математической индукции**[1], нужно:

1. Проверить, что это утверждение выполняется для $n = 1$ (этот шаг доказательства называют *база индукции*).
2. Предположить, что это утверждение выполняется для произвольного n – *предположение индукции.*
3. Опираясь на предположение индукции, доказать, что это утверждение выполняется для $n + 1$ – *шаг индукции.*

Метод математической индукции может применяться при доказательстве равенств.

Пример 1.

Доказать, что $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ при всех $n \in N$.

Доказательство (методом математической индукции).

1. При $n = 1$ имеем: $1^2 = 1 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$ – утверждение верно.

2. Пусть равенство выполняется для произвольного n:

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Рассмотрим сумму $n + 1$ первых слагаемых, $S_{n+1} = S_n + (n + 1)^2$. Нам нужно проверить равенство $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$, то есть $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

По предположению индукции $S_{n+1} = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$. Вынесем за скобки $\dfrac{n+1}{6}$ и разложим на множители квадратный трёхчлен, полученный в скобках:

$$S_{n+1} = \frac{n+1}{6}(n(2n+1) + 6(n+1)) = \frac{n+1}{6}(2n^2 + 7n + 6) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \blacksquare$$

Рассмотренное нами в этом примере равенство было выведено ещё Архимедом в III веке до н.э. Он использовал его для решения некоторых задач из геометрии и механики.

Пример 2.

Доказать, что $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$ при всех $n \in N$.

Доказательство (методом математической индукции).

1. При $n = 1$ имеем: $1 \cdot 1! = 1 = 2! - 1$ – утверждение верно.

2. Пусть равенство выполняется при произвольном n. Напомним, что здесь и далее искомую сумму n слагаемых, рассматриваемых в утверждении, мы обозначаем S_n, поэтому, $S_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ...+ n \cdot n! = (n + 1)! - 1$.

3. Нам нужно проверить равенство $S_{n+1} = ((n + 1) + 1)!$. Для суммы со следующим натуральным числом $n+1$ будет верно равенство

$$S_{n+1} = S_n + (n + 1) \cdot (n + 1)!.$$

Тогда по предположению индукции

$$S_{n+1} = (n + 1)! - 1 + (n + 1)(n + 1)! = (n + 1)! + (n + 1)(n + 1)! - 1.$$

[1] Отметим, что существуют и более сложные виды индукции. Например, когда утверждение A_n следует из всех предыдущих утверждений $A_1 - A_{n-1}$. С ещё одним примером индукции вы познакомитесь в примере 7 следующего пункта.

Вынесем за скобки множитель $(n+1)!$ и воспользуемся определением факториала:

$$S_{n+1} = (n+1)!(n+2) - 1 = (n+2)! - 1. \blacksquare$$

Как мы видим, основного труда требует доказательство шага индукции: здесь мы используем различные преобразования и рассуждения, база же и предположение индукции не требуют от нас особых усилий.

Пример 3.

Доказать, что $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$ при всех $n \in N$.

Доказательство (методом математической индукции).

1. При $n = 1$ имеем: $\frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2\cdot 1 + 1}$ – утверждение верно.

2. Пусть при произвольном n выполняется равенство

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

3. Нам нужно проверить равенство $S_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}$. Для $n+1$ выполняется равенство $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$.

Тогда по предположению индукции

$$S_{n+1} = \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} =$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}. \blacksquare$$

Конечно, большинство подобных равенств можно доказать и без применения математической индукции, но для этого нужно применять нестандартные рассуждения. Например, для нахождения значения суммы из последнего примера нужно было заметить, что при любом натуральном k имеет место равенство

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right). \qquad (1)$$

Тогда при любом натуральном n

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2n}{2n+1} = \frac{n}{2n+1}.$$

Однако догадаться до равенства (1) не так-то просто, а доказательство методом математической индукции требует от нас стандартных рассуждений.

Рассмотрим примеры применения метода математической индукции для доказательства различных неравенств.

Пример 4.

Доказать, что при $\alpha > -1$ и при всех натуральных n выполняется неравенство Бернулли $(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$.

Доказательство (методом математической индукции).

1. При $n = 1$ имеем $1 + \alpha \geqslant 1 + \alpha$, получили верное нестрогое неравенство.

2. Пусть при произвольном натуральном n выполняется неравенство $(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$.

3. Докажем, что неравенство выполняется для следующего натурального числа $n+1$. Оценим $(1+\alpha)^{n+1}$. По свойству степеней $(1+\alpha)^{n+1} = (1+\alpha)^n(1+\alpha)$, и

так как по условию $1 + \alpha > 0$ и по предположению индукции $(1 + \alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$, то $(1+\alpha)^{n+1} \geqslant (1+n\alpha)(1+\alpha) \Leftrightarrow (1+\alpha)^{n+1} \geqslant 1 + n\alpha + \alpha + n\alpha^2 \Rightarrow (1+\alpha)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)\alpha$. ■

Отметим, что многие высказывания A_n выполняются не при всех натуральных n, а только начиная с некоторого их значения. Так, неравенство $1000n^2 + 3n < n^3 - 4$ не является верным, когда $n < 10$, но будет верным, например, при всех $n \geqslant 2000$.

Расширим принцип математической индукции следующим образом.

Пусть некоторое высказывание A_n, в формулировку которого входит целое число $n \geqslant n_0$, где n_0 – фиксированное целое число, истинно при $n = n_0$, и из истинности A_n при произвольном целом $n \geqslant n_0$ следует истинность A_{n+1}. Тогда высказывание A_n истинно при любом целом $n \geqslant n_0$.

Пример 5.

Доказать, что при всех натуральных $n \geqslant 2$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{7}{12}.$$

Доказательство (методом математической индукции).

В отличие от предыдущих примеров база индукции будет строиться для $n = 2$.

1. При $n = 2$ имеем: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ – неравенство $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geqslant \frac{7}{12}$ справедливо как нестрогое.

2. Пусть при произвольном натуральном $n \geqslant 2$ выполняется неравенство

$$S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{7}{12}.$$

3. Докажем, что $S_{n+1} \geqslant \frac{7}{12}$.

$$S_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = S_n + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}.$$

Но $\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{2}{2n+2} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$, значит, $S_{n+1} > S_n$. При этом $S_n \geqslant \frac{7}{12}$ (по предположению индукции). Значит, $S_{n+1} \geqslant \frac{7}{12}$ (в действительности мы также доказали, что равенство при этом будет выполняться только при $n = 2$). ■

* * *

Пример 6.

При каких натуральных n выполняется неравенство $2^n > n^3$?

Решение.

Для начала рассмотрим несколько частных примеров при первых значениях n. Имеем: $2^1 > 1^3$, $2^2 < 2^3$, $2^3 < 3^3$, $2^4 < 4^3$, $2^5 < 5^3$. Казалось бы, неравенство $2^n > n^3$ верно только для $n = 1$, а при $n \geqslant 2$ должно выполняться противоположное неравенство $2^n < n^3$.

Рассмотрим несколько отношений левой части неравенства к правой при $n = \{2, 3, \dots 10\}$: $\frac{2^2}{2^3} = 0{,}5$; $\frac{2^3}{3^3} \approx 0{,}296$; $\frac{2^4}{4^3} = 0{,}25$; $\frac{2^5}{5^3} = 0{,}256$; $\frac{2^6}{6^3} \approx 0{,}296$; $\frac{2^7}{7^3} \approx 0{,}373$; $\frac{2^8}{8^3} = 0{,}5$; $\frac{2^9}{9^3} \approx 0{,}702$; $\frac{2^{10}}{10^3} = 1{,}024 > 1$. Замечаем, что, начиная с $n = 5$, отношение $\frac{2^n}{n^3}$ начинает увеличиваться и при $n = 10$ это отношение становится больше 1; судя по всему, при следующих значениях n оно становится ещё больше.

Сформулируем гипотезу: $2^n > n^3$ при всех натуральных $n \geqslant 10$. Докажем её методом математической индукции.

1. При $n = 10$ неравенство выполнено ($1024 > 1000$).
2. Пусть при произвольном $n \geqslant 10$ выполняется неравенство $2^n > n^3$.

3. Докажем неравенство для следующего натурального числа $n + 1$: $2^{n+1} > (n + 1)^3$.

3.1. Из предположения индукции: $2^n > n^3 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^n > 2n^3 \Leftrightarrow 2^{n+1} > 2n^3$.

3.2. Заметим, что при всех натуральных $n \geqslant 10$ верно неравенство $2n^3 > (n + 1)^3$.

Докажем, что это так. Во-первых, так как $(n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$, неравенство $2n^3 > (n + 1)^3$ равносильно неравенству $n^3 > 3n^2 + 3n + 1$. Во-вторых, при $n \geqslant 10$ $n^3 = n \cdot n^2 \geqslant 10n^2 > 7n^2 = 3n^2 + 3n^2 + n^2 > 3n^2 + 3n + 1$, то есть выполнено неравенство $n^3 > 3n^2 + 3n + 1$, а вместе с ним и равносильное ему неравенство $2n^3 > (n + 1)^3$.

3.3. Итак, $2^{n+1} > 2n^3$ и $2n^3 > (n + 1)^3$, значит, $2^{n+1} > (n + 1)^3$.

Ответ: при $n = 1$ и при $n \geqslant 10$.

К **130** Каждому значению аргумента x поставлено в соответствие значение $y = x^2 - 2$. Какое значение функции будет соответствовать аргументу 0; 3; n; $n + 1$?

131 Введите обозначения и запишите на математическом языке:

а) любое чётное число;

б) любое нечётное число;

в) два любых последовательных натуральных числа;

г) три любых последовательных натуральных числа;

д) два любых последовательных чётных числа.

132 Докажите следующее утверждение: «Сумма трёх последовательных натуральных чисел кратна 3».

133 1) Для доказательства истинности общего утверждения A – «Произведение числа n и двух следующих за ним чисел кратно 6» – выполните следующие шаги:

а) проверьте истинность данного утверждения для $n = 1$;

б) запишите на математическом языке, что утверждение истинно для числа n;

в) при условии, что утверждение истинно для числа n, докажите, что оно истинно и для $n + 1$.

2) Проанализируйте шаги, выполненные в пунктах 1а – 1в. Объясните, как, пользуясь истинностью $A(1)$ и доказанным следованием $A(n) \Rightarrow A(n + 1)$, можно провести бесконечную цепочку рассуждений:

$A(1)$ истинно $\Rightarrow A(2)$ истинно;

$A(2)$ истинно $\Rightarrow A(3)$ истинно; ...

$A(100)$ истинно $\Rightarrow A(101)$; ...

$A(n)$ истинно $\Rightarrow A(n + 1)$ истинно, ...

3) Можно ли использовать данный метод доказательства для других общих утверждений, описывающих свойства бесконечных множеств? Сформулируйте шаги, которые были предприняты для доказательства в общем виде. Сравните свой вариант с алгоритмом в учебнике на с. 48.

134 Докажите тождество $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n + 1)}{2}$.

135 Докажите тождество $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n + 1)(n + 2) = \frac{1}{4}n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$.

136 Докажите, что для всех натуральных n выполняется неравенство $2^n > n$.

137 Докажите, что для всех натуральных n выполняется неравенство $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \geqslant \dfrac{4^n}{n + 1}$.

П **138** Сколькими способами семь членов комиссии могут выбрать председателя и заместителя?

139 Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 2, 3, 4, 5, 6, 7?

140 Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 0, 5, 6, 7, если каждая цифра в записи числа встречается один раз? (Число не может начинаться с нуля.)

141 Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{\sqrt{29}+2}\cdot\sqrt{\sqrt{29}-2}}$; б) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{11}-3}\cdot\sqrt{\sqrt{11}+3}}{\sqrt{32}}$.

142 Сократите дробь:

а) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$; б) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+2\sqrt{xy}+y}$; в) $\dfrac{x-2\sqrt{xy}+y}{x-y}$.

143 Решите неравенство методом интервалов:

а) $(x+1)(x-5)>0$;

б) $x(1-x)(x+4)\geqslant 0$;

в) $x^2-64<0$;

г) $x^6(x-3)(x+2)<0$;

д) $x^2-x-12<0$;

е) $-5x^2+2x+3\geqslant 0$;

ж) $\dfrac{x}{x^2-1}+\dfrac{1}{x+1}\leqslant\dfrac{1}{x-1}$;

з) $\dfrac{(x-6)(x^2-4)}{12x^2-4x-1}>0$.

144 При каких значениях x выражение $\dfrac{5}{\sqrt{-6x^2-5x+1}}$ имеет смысл?

145 Решите систему неравенств $\begin{cases}\dfrac{4}{x^2-9}-\dfrac{4}{x+3}\leqslant 0;\\ x^2-3x-10<0.\end{cases}$

146 Пристани A и B расположены на реке, скорость течения которой на этом участке равна 4 км/ч. Лодка проходит от A до B и обратно без остановок со средней скоростью 6 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

147 Для натуральных n докажите тождество $1^3+2^3+\dots n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

148 При каких натуральных n выполняется неравенство $2^n>2n+1$?

149 Докажите, что для всех натуральных n выполняется неравенство

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

150 Сколько различных трёхзначных чисел можно составить из цифр 0, 8, 6, 4, 9 (цифры в записи числа не повторяются)?

151 Сколько девятизначных паролей можно составить из букв A, B, C, D, W, где буквы A, C встречаются ровно один раз, буквы B и D – по два раза, а буква W – три раза?

152 На полке в магазине лежало 20 шоколадных яиц с игрушкой-сюрпризом внутри, среди которых 4 были с машинками. Мама купила в подарок детям 15 таких яиц. Какова вероятность того, что она приобрела подарки без машинок?

153 Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{\sqrt{45}+6}\cdot\sqrt{\sqrt{45}-6}}$; б) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{13}-2}\cdot\sqrt{\sqrt{13}+2}}{\sqrt{44}}$.

154 Решите неравенство методом интервалов:

а) $(x+7)(x+9)<0$; в) $x^2-100>0$; д) $\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{1}{x+4}>0$;

б) $\dfrac{(x-7)(x+3)}{x(x-1)}\leqslant 0$; г) $x^2-9x+18<0$; е) $\dfrac{(x-7)^2(x+1)}{(1-x)^3}\geqslant 0$.

155 При каких значениях x выражение $\sqrt{-7x^2-4x+3}$ имеет смысл?

156 Пристани A и B расположены на реке, скорость течения которой на этом участке равна 3 км/ч. Лодка проходит от A до B и обратно без остановок со средней скоростью 8 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

С **157*** Найдите значение выражения

$1!\cdot 3-2!\cdot 4+3!\cdot 5-4!\cdot 6+\ldots-2000!\cdot 2002+2001!$.

158* Известно, что при некотором x число $x+\dfrac{1}{x}$ – целое. Докажите, что $x^n+\dfrac{1}{x^n}$ – также целое при любом целом n.

1.2.2*. Применение метода математической индукции в разных задачах

Без помощи... индукции... процесс конструирования был бы бессилен создать науку.

Анри Пуанкаре (1854–1912),
французский математик, физик, философ и теоретик науки

В предыдущем пункте мы познакомились с замечательным принципом, который позволяет заменить невозможную на практике проверку бесконечного числа элементов множества стандартным пошаговым алгоритмом действий – методом математической индукции. Мы применяли этот метод при доказательстве равенств и неравенств. Однако этим круг применения метода математической индукции, конечно, не ограничивается. В этом пункте мы поучимся применять его при решении самых разнообразных задач.

Применим метод математической индукции к решению задач о множествах.

Пример 1.

Доказать, что число всех подмножеств множества из n элементов равно 2^n.

Доказательство (методом математической индукции).

1. Проверим утверждение для $n=1$. Если в множестве один элемент, то оно содержит ровно 2 подмножества – само себя и пустое множество: $2=2^1$.

2. Предположим, что число подмножеств множества из n элементов равно 2^n.

3. Рассмотрим множество из $n + 1$ элементов. Если число подмножеств множества из n элементов равно 2^n, то число подмножеств множества из $n + 1$ элементов вдвое больше. Действительно, наряду с уже рассмотренными 2^n подмножествами множества из n элементов в этом множестве выделить ещё столько же, отличающихся от них новым $(n + 1)$-м элементом. Значит, число подмножеств множества из $n + 1$ элементов равно $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. ■

Применим метод математической индукции к решению задач на делимость.

Пример 2.

Доказать, что при любом $n \in N$ число $n^5 - n$ делится нацело на 5.

Доказательство (методом математической индукции).

1. При $n = 1$ число $1^5 - 1 = 0$ делится на 5.

2. Пусть при произвольном натуральном n число $n^5 - n$ делится нацело на 5.

3. Докажем, что $(n + 1)^5 - (n + 1)$ делится на 5.

Раскроем скобки в выражении $(n + 1)^5$:

$(n + 1)^5 - (n + 1) = n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - n - 1 = n^5 - n + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n$.

Разность $n^5 - n$ делится на 5 по предположению индукции, остальные слагаемые делятся на 5 по свойству делимости произведения. Поэтому число $(n + 1)^5 - (n + 1)$ делится нацело на 5. ■

Пример 3.

Доказать, что при любом $n \in N_0$ число $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится нацело на 133.

Доказательство (методом математической индукции).

1. При $n = 0$ число $11^2 + 12 = 133$ делится нацело на 133.

2. Пусть при произвольном $n \in N_0$ число $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133.

3. Докажем, что $11^{(n+1)+2} + 12^{2(n+1)+1}$ делится на 133. Преобразуем это выражение:

$11^{(n+1)+2} + 12^{2(n+1)+1} = 11^{n+3} + 12^{2n+3} = 11 \cdot 11^{n+2} + 12^2 \cdot 12^{2n+1} =$
$= 11 \cdot 11^{n+2} + 11 \cdot 12^{2n+1} - 11 \cdot 12^{2n+1} + 144 \cdot 12^{2n+1} =$
$= 11 \cdot (11^{n+2} + 12^{2n+1}) + 133 \cdot 12^{2n+1}$.

Число $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133 по предположению индукции, значит, первое слагаемое делится на 133, при этом последнее слагаемое также делится на 133. Поэтому число $11^{n+3} + 12^{2n+3}$ делится на 133. ■

Пример 4.

Доказать, что при любом натуральном $n \geqslant 2$ число 2^{2^n} имеет последнюю цифру 6.

Доказательство (методом математической индукции).

1. При $n = 2$ число $2^{2^2} = 2^4 = 16$ оканчивается цифрой 6.

2. Пусть при произвольном натуральном $n \geqslant 2$ число 2^{2^n} оканчивается цифрой 6, то есть $2^{2^n} = 10k + 6$, $k \in N$.

3. Докажем, что 2^{2^n} оканчивается цифрой 6.

$2^{2^{n+1}} = 2^{2^n \cdot 2} = (2^{2^n})^2 = (10k + 6)^2 = 100k^2 + 120k + 36 = 10(10k^2 + 12k + 3) + 6 = 10m + 6$, где $m \in N$; поэтому число $2^{2^{n+1}}$ также оканчивается цифрой 6. ■

Пример 5.

Доказать, что любое натуральное число $n \geqslant 8$ можно представить в виде $n = 3p + 5q$, где p, q – целые неотрицательные числа.

Доказательство (методом математической индукции).

1. При $n = 8$ утверждение верно ($8 = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1$).

2. Пусть произвольное натуральное число $n \geqslant 8$ представимо в виде $n = 3p + 5q$, где $p, q = \{0, 1, 2, ...\}$ – целые неотрицательные числа.

3. Докажем, что следующее за ним число $n + 1$ можно представить указанным способом.

По предположению индукции $n + 1 = 3p + 5q + 1$. Представим это число следующим образом: $n + 1 = 3p + 5q + 1 = 3p + 5q + 6 - 5 = 3(p + 2) + 5(q - 1)$.

Если $q \geqslant 1$, то $n + 1 = 3p_1 + 5q_1$, где $p_1 = p + 2$, $q_1 = q - 1$ – целые неотрицательные числа. Если же $q = 0$, то $n = 3p$ и $n + 1 = 3p + 1$, причём $p \geqslant 3$, так как $n = 3p$ и $n \geqslant 8$. Тогда $n + 1 = 3p + 1 = 3p - 9 + 10 = 3(p - 3) + 5 \cdot 2$, то есть опять-таки $n + 1 = 3p_1 + 5q_1$, где $p_1 = p - 3$, $q_1 = 2$ являются целыми неотрицательными числами.

Итак, в любом случае $n + 1 = 3p_1 + 5q_1$, где $p_1, q_1 = \{0, 1, 2, ...\}$. ■

Отметим, что в нашей стране во времена СССР были в обращении различные мелкие монеты, в частности монеты достоинством в 3 коп. и 5 коп. Только что рассмотренный нами пример в литературе того времени формулировался так: доказать, что любую сумму денег, не меньшую восьми копеек, можно разменять монетами в 3 и 5 копеек.

Применим метод математической индукции к решению геометрических задач.

Пример 6.

На плоскости проведены n прямых ($n = 1, 2, 3, ...$), находящихся в общем положении, то есть никакие две из них непараллельны и никакие три не проходят через одну точку. Доказать, что эти прямые разбивают плоскость на $1 + \frac{n(n+1)}{2}$ частей (так как из чисел n и $n + 1$ одно обязательно чётное, то записанная дробь является целым числом).

Доказательство (методом математической индукции).

1. При $n = 1$ имеем $1 + \frac{1 \cdot 2}{2} = 2$ (одна прямая разбивает плоскость на 2 части, что соответствует действительности).

2. Пусть n прямых при произвольном натуральном n разбивают плоскость на $1 + \frac{n(n+1)}{2}$ частей. Для простоты дальнейших рассуждений обозначим это число частей A_n.

3. Рассмотрим $n + 1$ прямых на плоскости в общем положении и выделим из них произвольные n прямых. Они находятся в общем положении и по предположению индукции разбивают плоскость на A_n частей. Тогда $(n + 1)$-я прямая, которая изображена штриховой линией на рисунке 1, пересечёт каждую из этих n прямых равно в одной точке. При этом сама прямая разделится на $n + 1$ частей (на 2 луча и на $n - 1$ отрезков).

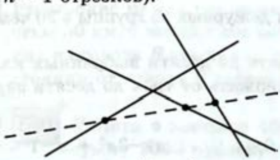


Рис. 1

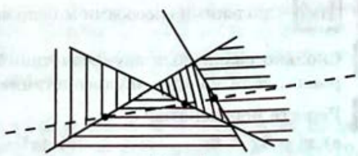


Рис. 2

В итоге из имевшихся A_n частей плоскости ровно $n + 1$ частей разделится на две (они помечены штриховкой на рисунке 2), а остальные не будут затронуты. Поэтому после проведения $(n + 1)$-й прямой количество частей плоскости увеличится на $n + 1$, и $A_{n+1} = A_n + n + 1$.

Тогда по предположению индукции:

$A_{n+1} = 1 + \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = 1 + (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = 1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, то есть нужное равенство выполняется для следующего значения $n + 1$. ■

Как мы видим, метод математической индукции является ключом к решению огромного количества задач. Он ещё не раз пригодится нам в дальнейшем – особенно при открытии новых свойств.

Пример 7.

Докажите, что любой квадрат можно разрезать на любое число квадратов, большее пяти.

Доказательство (методом математической индукции).

1. На рисунке 3 показано, как разрезать квадрат на 6, 7 и 8 квадратов.

2. Пусть мы умеем разрезать квадрат на $n = k$ квадратов.

3. Тогда, разрезав один из квадратов на 4 квадрата, мы получим, что исходный квадрат будет разрезан на $n = k + 3$ квадратов, т. е. мы показали, что любой квадрат можно разрезать на любое число квадратов, большее пяти.

Заметим, что в этом примере нам пришлось проверять базу индукции сразу для трёх утверждений, так как переход индукции осуществляется от утверждения A_n к утверждению A_{n+3}.

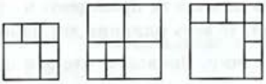


Рис. 3

К **159** Докажите, что при любом натуральном n число $n^2 + n$ чётно.

160 Докажите, что при любом натуральном n число $3^{2n+2} + 8n - 9$ делится нацело на 16.

161 Приведите пример натурального числа, которое равно сумме: а) трёх своих различных делителей; б) ста своих различных делителей. В задаче не требуется, чтобы число равнялось сумме всех своих делителей.

162 На столе стоят 16 стаканов с водой. Разрешается взять любые два стакана и уравнять в них количество воды, перелив часть воды из одного стакана в другой. Докажите, что с помощью таких операций можно добиться того, чтобы во всех стаканах было поровну воды.

163 Докажите, что при каждом натуральном n, начиная с 3, существует выпуклый n-угольник, имеющий ровно три острых угла.

П **164** Сколькими способами можно выбрать трёх дежурных из группы в 20 человек?

165 Сколько различных звукосочетаний можно взять на десяти выбранных клавиш рояля, если каждое звукосочетание может содержать от трёх до десяти звуков?

166 Решите неравенство:

а) $x^2 - 8x \leqslant 0$; в) $4x^2 + 12x + 9 > 0$; д) $-3x^2 + x - 1 \leqslant 0$;

б) $5x^2 + x - 4 \geqslant 0$; г) $-x^2 + 10x - 25 \geqslant 0$; е) $x^2 + 2x + 4 < 0$.

167 Решите двойное неравенство $-2 < \frac{x-1}{x+2} \leqslant 0$.

168 Решите системы неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 + 4x \leqslant 21; \\ x^2 + 5x > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |x-4| < 7; \\ x^2 + x \geqslant 30; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 - 4x \geqslant 5; \\ |x^2 - 7x + 10| < 10. \end{cases}$

169 Докажите неравенство: $(d-7)^2 > (d-8)(d-6)$.

170 Расстояние между городами A и B равно 490 км. Из города A в город B со скоростью 55 км/ч выехал первый автомобиль, а через час после этого навстречу ему из города B выехал со скоростью 90 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от города A автомобили встретятся?

D **171** Докажите, что при любом натуральном n число $n^3 - n$ делится нацело на 6.

172 Плоскость поделена на области несколькими прямыми. Докажите, что эти области можно раскрасить в два цвета так, чтобы любые две соседние области были раскрашены в различные цвета. Соседними считаются области, имеющие общий участок границы.

173 а) Из квадрата клетчатой бумаги размером 4×4 вырезали одну клетку. Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на «уголки» из трёх клеток.

б) Из квадрата клетчатой бумаги размером 512×512 вырезали одну клетку. Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на «уголки» из трёх клеток.

174 Сколькими способами можно выбрать четырёх дежурных из группы в 30 человек?

175 Решите неравенство:

а) $x^2 - 18x + 72 \leqslant 0$; в) $-x^2 + 26x - 169 \geqslant 0$;

б) $2x^2 + x + 4 < 0$; г) $6x^2 - 5x + 4 > 0$.

176 Решите двойное неравенство $0 \leqslant \frac{x+4}{x-2} \leqslant 4$.

177 Решите системы неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 14x < 51; \\ x^2 - 21x + 54 \leqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |x| > 8; \\ x^2 + 4x \leqslant 45. \end{cases}$

178 Докажите неравенство: $(p-13)^2 > (p-10)(p-16)$.

179 Расстояние между городами A и B равно 750 км. Из города A в город B со скоростью 50 км/ч выехал первый автомобиль, а через три часа после этого навстречу ему из города B выехал со скоростью 70 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от города B автомобили встретятся?

C **180*** У Пети в копилке 1000 монет достоинством в 1, 2 и 5 рублей на общую сумму 2000 рублей, причём монет каждого достоинства не менее 10. Докажите, что количество однорублёвых монет — составное число.

Задачи для самоконтроля к главе 1

181 а) Сколько четырехзначных кодов можно составить из цифр 7, 8, 9 и буквы Ф, если цифры и буква не повторяются?

б) Сколько семизначных кодов можно составить из цифр 7, 8, 9 и буквы Ф, если цифры 7 и 9 встречаются в коде 1 раз, цифра 8 повторяется два раза, буква Ф – три раза?

182 Сколько различных «слов» можно написать, переставляя буквы в слове: а) «ФУНКЦИЯ»; б) «ПРОПОРЦИЯ»; в) «ДИСКРИМИНАНТ» («словом» считать даже бессмысленный набор букв)?

183 Для организации конкурса «Алло, мы ищем таланты!» на ученический совет школы от каждого класса приглашена инициативная группа из 4 человек по направлениям: музыка, поэзия, песня, танец. В 9 «Б» классе учится 25 человек. Сколькими способами можно сформировать группу-делегацию на совет школы?

184 В 9 «А» классе 10 учащихся успешно занимаются физикой. Сколькими способами можно выбрать из них троих для участия в олимпиаде по физике?

185 Для проведения военно-спортивного праздника, посвящённого Дню Победы, от каждого класса выдвигается 7 участников. Сколькими способами можно составить такую группу от класса, в котором учится 26 человек?

186 Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 4, 6, 8 (цифры в записи числа не повторяются)?

187 Для праздничной лотереи выпустили 2400 билетов, из которых 560 выигрышных. Какова вероятность того, что купленный билет окажется выигрышным?

188 В партии из 20 000 телефонов 100 оказались бракованными. Какова вероятность приобрести исправный телефон из этой партии?

189 Ученика попросили назвать трёхзначное число. Какова вероятность того, что он назовёт число, оканчивающееся на 0?

190 Мама испекла 15 пирожков, на два из них мясной начинки не хватило, и мама положила в них варенье. Папа наугад взял 6 пирожков. Какова вероятность того, что все взятые им пирожки с мясом?

191 В круге радиусом 6 см размещён прямоугольник 3 на 4 см. Какова вероятность того, что точка, случайным образом поставленная в круг, окажется внутри прямоугольника? Ответ округлите до сотых.

192 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x + 3y = 7; \\ 3x + 5y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + 5y = (x-2)^2 - 20; \\ 4x + y = -8; \end{cases}$ в) $\begin{cases} |x-2| - 2y = 8; \\ 6x - y = 3. \end{cases}$

193 Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} (x-3)^2 < (x+6)^2; \\ 5x + 12 \geqslant 4x - 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (3-x)(\sqrt{5} - x) > 0; \\ 0{,}5x < 5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + 16 < (x-6)^2; \\ (3-\sqrt{10})x \geqslant \dfrac{5}{3+\sqrt{10}}. \end{cases}$

194 Решите неравенство $3 < 4 - \frac{3}{4}x \leqslant 5$.

195 Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств
$$\begin{cases} 2x - 3y - 6 < 0; \\ -2x + y + 6 \geqslant 0. \end{cases}$$

196 Расположите числа $2\sqrt{10}$; 6,5; $\sqrt{41}$ в порядке убывания.

197 Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sqrt{1{,}8} \cdot \sqrt{6{,}3}}{\sqrt{0{,}14}}$; г) $(\sqrt{5} - 4)(4 + \sqrt{5})$;

б) $-\sqrt{32}(\sqrt{2} - \sqrt{8})$; д) $\sqrt{69 - 16\sqrt{5}} - (\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)$;

в) $(\sqrt{7} - \sqrt{11})^2$; е) $\dfrac{\sqrt{2} - 2}{\sqrt{18} - 2\sqrt{2}}$.

198 Вынесите множитель из-под знака корня $\sqrt{2x^2 - 36x + 162}$, если $x < 9$.

199 Решите уравнение:

а) $(x - 5)^2 = 100$; в) $x^2 - 12x + 36 = 0$; д) $x^2 + 30x = 99$;

б) $7x^2 - 3x = 0$; г) $x^2 - x + 2 = 0$; е) $x^2 + 2\sqrt{51} \cdot x + 26 = 0$.

200 Решите уравнение:

а) $4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$; б) $|x^2 - 17| = 8$.

201 Если возможно, разложите квадратный трёхчлен на множители:

а) $2x^2 - 9x - 5$; б) $5x^2 + 2x + 1$.

202 Пусть x_1, x_2 – корни уравнения $x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0$. Найдите значение выражения $\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2}$.

203 При каких значениях параметра m уравнение $(m - 2)x^2 + (4m - 2)x + 3m = 0$ имеет ровно одно решение?

204 Квадратичная функция задана формулой $y = x^2 - 4x - 5$. Напишите уравнение прямой, относительно которой симметричен график этой функции.

205 Решите неравенство:

а) $49x^2 - 16 \geqslant 0$; г) $x^2 - 2x + 10 < 0$; ж) $(x + 5)(x - 6) \leqslant 0$;

б) $5x^2 + 8x \leqslant 0$; д) $-9x^2 + 30x - 25 \geqslant 0$; з) $x(8 - x)(9 + x) \geqslant 0$;

в) $x^2 - 19x + 18 > 0$; е) $-8x^2 - 4x - 1 < 0$; и) $x^2(x - 7)^3(1 - x) < 0$.

206 Решите неравенство:

а) $\dfrac{(x + 4)(x - 8)}{x(x - 1)} > 0$; б) $\dfrac{(x - 7)^2(2 - x)}{(x + 1)^5} \geqslant 0$; в) $\dfrac{4}{x^2 - 4x} > \dfrac{x}{x - 4}$.

207 Найдите значения x, при которых выражение имеет смысл:

а) $\sqrt{4 - x - 3x^2}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{3 + 5x + 2x^2}}$; в) $\sqrt{\dfrac{-3x^2 + 7x - 4}{x^2 + 5x + 4}}$.

208 Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 3x^2 - 14x + 8 < 0; \\ 5x + 2 > 2x + 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{16x^2 - 9}{x + 2} \geqslant 0; \\ 4x^2 + 7x + 3 \geqslant 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{7x^2}{14 + 2x} \leqslant 0; \\ 10x + x^2 \leqslant 0. \end{cases}$

209 Постройте график функции:

а) $y = -(x - 2)^2 + 4$; б) $y = x^2 - 2x - 3$.

210 Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2 - 4x - 2, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 4; \\ -\dfrac{3}{x}, \text{ если } -3 \leqslant x < -1. \end{cases}$

211 Решите уравнение:

а) $\dfrac{x+4}{x-3} = \dfrac{4}{x} + \dfrac{7}{x-3}$; в) $5\left(x - \dfrac{6}{x}\right)^2 + 3 \cdot \left(x - \dfrac{6}{x}\right) - 2 = 0$;

б) $\dfrac{x+1}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} = -\dfrac{4}{x^2-4}$; г) $x^2 + 3x = \dfrac{8}{x^2 + 3x - 2}$.

212 Упростите выражение

$\left(\dfrac{a}{a^2 - 16} - \dfrac{a+1}{a^2 + 2a - 8}\right) : \dfrac{a}{a^2 - 6a + 8}$.

213 Докажите тождество

$\left(\dfrac{2b}{2b + c} - \dfrac{4b^2}{4b^2 + 4bc + c^2}\right) : \left(\dfrac{2b}{4b^2 - c^2} + \dfrac{1}{c - 2b}\right) \cdot \dfrac{c + 2b}{2bc - 4b^2} = 1$.

214 Из города в посёлок, находящийся на расстоянии 27 км от города, отправился пешеход со скоростью 5 км/ч. Через 36 минут после этого навстречу ему из посёлка в город вышел другой пешеход со скоростью 3 км/ч. Найдите расстояние от посёлка до места их встречи.

215 Расстояние между двумя пристанями равно 70 км. В 7 часов утра теплоход отчалил от пристани вниз по течению реки. После четырёхчасовой стоянки у второй пристани теплоход отправился в обратный рейс и прибыл к первой пристани в 23 ч в тот же день. Найдите собственную скорость теплохода, если скорость течения реки 2 км/ч.

216 Автомобиль был задержан в пути на 0,2 ч, а затем на расстоянии в 60 км наверстал это время, увеличив скорость на 15 км/ч. Найдите начальную скорость автомобиля.

217 Докажите неравенство:

а) $a^3 + b^3 \geqslant a^2b + ab^2$, если $a + b \geqslant 0$;

б) $\dfrac{25x}{2y} + \dfrac{2y}{x} \geqslant 10$, если x и y имеют одинаковые знаки.

218 Найдите значение выражения $\dfrac{t^2 + tp - p^2}{t^2 - tp + p^2}$ при $\dfrac{t}{p} = 4$.

219 Докажите тождество:

а) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$;

б) $\dfrac{1^2}{1 \cdot 3} + \dfrac{2^2}{3 \cdot 5} + \ldots + \dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

220 Докажите, что при любом натуральном n:

а) число $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ делится нацело на 9;

б) число $4^n + 15n - 1$ делится нацело на 9.

221 Кусок бумаги разрешается рвать на 4 или 6 кусков. Докажите, что по этим правилам его можно разорвать на любое число кусков, начиная с 9.

Глава 2

Развитие понятия функции

§ 1. Свойства функции

2.1.1. Множества точек на плоскости. Графики уравнений и неравенств

О мир, пойми! Певцом – во сне – открыты
Закон звезды и формула цветка.

М. И. Цветаева (1892–1941),
русская поэтесса

В восьмом классе мы познакомились с *линейными* уравнениями и неравенствами с двумя переменными и их системами. Все решения этих уравнений и неравенств, как мы знаем, можно изобразить точками на координатной плоскости. В этом пункте мы расширим свои знания о геометрической интерпретации уравнений и неравенств, познакомившись с примерами графиков нелинейных уравнений и неравенств с двумя переменными.

Как мы знаем, линейное уравнение с двумя переменными имеет бесконечное множество решений, которое задаёт прямую на координатной плоскости. Например, уравнение $y = x$ задаёт прямую линию, объединяющую биссектрисы I и III координатных углов (рис.1).

В общем случае уравнение с двумя переменными имеет бесконечное множество пар решений $(x; y)$, которые как точки координатной плоскости, заполняют некоторую линию на плоскости. Например, уравнение $y = x^2$ задаёт параболу (рис. 2). Из курса геометрии нам известно, что уравнение $x^2 + y^2 = 1$ задаёт окружность радиуса 1 с центром в начале координат (рис. 3) и т.д.

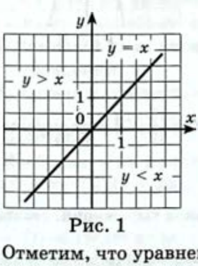


Рис. 1

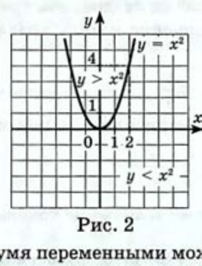


Рис. 2

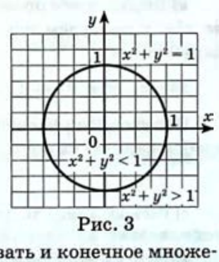


Рис. 3

Отметим, что уравнение с двумя переменными может задавать и конечное множество точек на плоскости. Например, уравнение $x^2 + y^2 = 0$ задаёт единственную точку – начало координат. Множество решений уравнения $x^2 + y^2 = -1$ пусто.

Пример 1.

Изобразить на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $(x-2)^2+(y+1)^2=9$.

Из курса геометрии нам известно, что уравнение вида $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ задаёт окружность с центром в точке $(a; b)$ и радиусом $|R|$. Значит, уравнению $(x-2)^2+(y+1)^2=3^2$ соответствуют те и только те точки плоскости, которые принадлежат окружности с центром в точке $(2; -1)$ и радиусом 3 (рис.4).

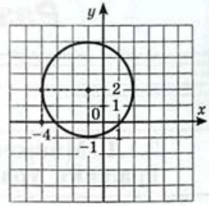


Рис. 4

Уравнение с двумя переменными в самом общем виде можно записать так: $P(x, y)=0$. Можем ввести понятие графика для таких уравнений.

Определение 1. Множество точек плоскости, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют уравнению $P(x, y)=0$, называется ***графиком уравнения*** $P(x, y)=0$.

Пример 2.

Изобразить графики уравнений:

а) $|y|=|x|$; б) $|y|=x^2$; в) $x^2+y^2=x$; г)* $x+|x|=y+|y|$.

Решение.

а) Так как модули чисел равны тогда и только тогда, когда эти числа равны или противоположны, исходное уравнение равносильно совокупности:

$$|y|=|x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x; \\ y=-x. \end{array}\right.$$

Искомое множество является объединением двух прямых $y=x$ и $y=-x$ (рис. 5).

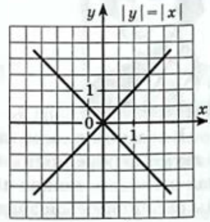


Рис. 5

По-другому данное уравнение можно решить так: равенство модулей чисел эквивалентно равенству их квадратов, поэтому $y^2=x^2$, откуда $(y-x)(y+x)=0$.

б) Так как $x^2 \geqslant 0$, раскрывая модуль по определению, получим

$$|y|=x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x^2; \\ y=-x^2. \end{array}\right.$$

Искомое множество является объединением двух парабол $y=x^2$ и $y=-x^2$ (рис. 6).

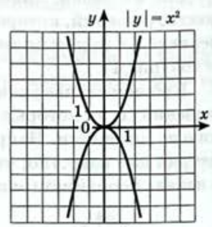


Рис. 6

в) Выделением полного квадрата в квадратном трёхчлене x^2-x приведём исходное уравнение к виду уравнения окружности:

$$x^2-x+y^2=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}.$$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ и радиусом $\frac{1}{2}$, изображённую на рисунке 7.

* * *

г) Раскроем модуль, рассмотрев все возможные комбинации знаков выражений, стоящих под модулем.

1. Если $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, то уравнение $x+|x|=y+|y|$ примет вид $2x=2y \Leftrightarrow x=y$. Графиком данного уравнения является часть прямой $y=x$. Для рассматриваемого нами случая $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$ выберем часть этой прямой, заключённую в I четверти. Построим биссектрису I координатного угла.

2. Аналогично, если $x < 0$, $y \geqslant 0$, то уравнение примет вид $y = 0$, т.е. во II четверти получим отрицательный луч оси x.

3. Если $x < 0$, $y < 0$, то уравнение примет вид $0 = 0$, т.е. все точки III четверти удовлетворяют уравнению.

4. Наконец, если $x \geqslant 0$, $y < 0$, то уравнение $x + |x| = y + |y|$ примет вид $2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Строим в IV четверти соответствующий отрицательный луч оси y.

Искомым графиком является третий координатный угол, включая отрицательные части осей, и биссектриса I координатного угла (рис. 8).

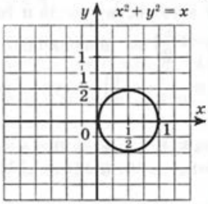


Рис. 7

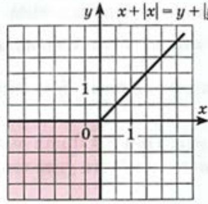


Рис. 8

Как мы знаем, линейное неравенство с двумя переменными имеет бесконечное множество решений, которое задает полуплоскость. Например, неравенство $y > x$ задаёт полуплоскость, лежащую выше прямой $y = x$, а неравенство $y \leqslant x$ – полуплоскость, лежащую ниже прямой $y = x$, включая и саму прямую.

В общем случае одно неравенство с двумя переменными имеет бесконечное множество пар решений (x, y), которые, как правило, задают некоторую фигуру на плоскости (с границей или без границы). Например, неравенство $x^2 + y^2 < 1$ задаёт внутренность круга радиуса 1 с центром в начале координат, неравенство $x^2 + y^2 \leqslant 1$ – множество точек этого круга вместе с границей и т.д. Неравенство с двумя переменными может задавать и конечные множества точек на плоскости. Например, множество решений неравенства $x^2 + y^2 \leqslant 0$ состоит из единственной точки – начала координат. Множество решений неравенства $x^2 + y^2 < 0$ пусто.

Мы можем уточнить алгоритм, известный нам из 8 класса.

Алгоритм графического решения неравенства с двумя переменными

1. Преобразовать неравенство так, чтобы при замене его знака на знак равенства получалось уравнение (уравнения), задающее известное множество точек плоскости (параболу, окружность и пр.).
2. Заменить знак неравенства знаком равенства и построить график полученного уравнения.
3. Выделить искомую часть плоскости в соответствии со знаком данного неравенства.

Пример 3.

Изобразить на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству: а) $(x + y)(x - y + 1) > 0$; б) $x^2 + y^2 \leqslant x - y$; в) $y \geqslant x + |x|$.

Решение.

а) Произведение $(x + y)(x - y + 1)$ положительно, если оба множителя отрицательны или оба положительны. Значит, решение задачи сводится к изображению множества решений двух систем двух линейных неравенств с двумя переменными, которые мы научились решать в 8 классе.

Искомое множество точек – пара вертикальных углов, образованных прямыми $x + y = 0$ и $y = x + 1$, за исключением самих прямых.

Для выбора одной из двух образовавшихся пар вертикальных углов нужно взять пробную точку, не лежащую ни на одной из этих двух прямых, например точку $(1; 0)$. Так как $(1 + 0)(1 - 0 + 1) > 0$, искомая пара углов та, которая содержит точку $(1; 0)$. Прямые $x + y = 0$ и $y = x + 1$ не принадлежат искомому множеству (рис. 9).

б) Преобразуем неравенство к виду $x^2 - x + y^2 + y \leqslant 0$, то есть $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}$. Точка с координатами $(x; y)$ принадлежит искомому множеству тогда и только тогда, когда расстояние от нее до точки с координатами $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ не превосходит $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Данное неравенство задает круг радиуса $\sqrt{\frac{1}{2}}$ с центром в точке $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ вместе с точками границы (рис.10).

в) Раскроем модуль. При $x \geqslant 0$ получим $y \geqslant 2x$; при $x < 0$ получим $y \geqslant 0$. Искомое множество – внутренность тупого угла вместе с точками границы (рис. 11).

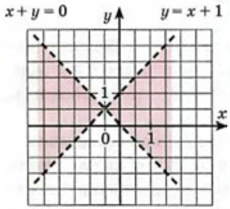


Рис. 9

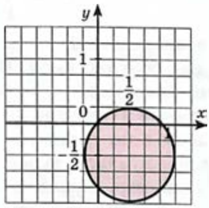


Рис. 10

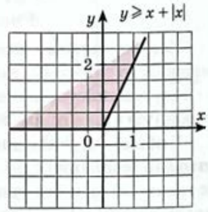


Рис. 11

Множества решений различных систем уравнений и неравенств и их графические изображения рассматривались в курсе 8 класса. Графическое решение таких систем в общем случае находится аналогично, то есть путём нахождения пересечения множеств решений, полученных для каждого из соотношений системы.

* * *

Пример 4*.

Построить график уравнения $\frac{x^2 - y^2}{\sqrt{1 - y^2}} = 0$.

Решение.

Данное уравнение равносильно системе, состоящей из одного уравнения и одного неравенства:

$$\begin{cases} y^2 = x^2; \\ y^2 < 1. \end{cases}$$

Квадраты чисел равны в том и только в том случае, если эти числа равны или противоположны:

$$y^2 = x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x; \\ y = -x. \end{array}\right.$$

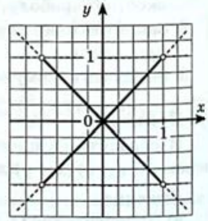


Рис. 12

Искомому множеству принадлежат только те точки из пары прямых $y = \pm x$, ординаты которых удовлетворяют условию $|y| < 1$ (рис. 12). Четыре концевых точки этого «креста» не принадлежат искомому множеству.

К **222** Постройте график функции:

а) $y = -x + 4$; б) $y = x - 5$.

Как они называются?

223 Изобразите множество точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению:

а) $x + y = 4$; б) $x - y - 5 = 0$; в) $2x + 0y = 3$; г) $0x + 3y = -6$.

224 Изобразите множество точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = 4x - 1 + |x|$.

225 Изобразите множество точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 1$. Для этого воспользуйтесь знаниями из курса геометрии о том, что уравнение вида $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ задаёт на плоскости окружность с центром в точке $(a; b)$ и радиусом $|R|$.

226 а) Обобщите имеющиеся у вас знания о построении графиков уравнений, опираясь на предыдущие задания.

б) Постройте график уравнения $x^2 + y = 0$.

в) Каким образом вы можете расширить известное вам понятие графика линейного уравнения с двумя переменными? Сопоставьте свой вариант с определением на с. 63.

227 Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению:

а) $x^2 + y^2 = 16$; б) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$;

в) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 0$; г) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = -16$.

228 Изобразите график уравнения:

а) $|y| = x$; б) $y^4 = x^2$; в) $x^2 + y^2 = 2x - 2y$.

229 Изобразите график уравнения $x - |x| = y - |y|$.

230 Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенства:

а) $4x - 2y + 6 > 0$; б) $-2x + y - 2 \geqslant 0$; в) $2x + 3 > 0$.

231 Предположите, где на координатной плоскости будет располагаться множество решений неравенства $x^2 + y^2 < 1$. Проверьте свое предположение по учебнику. Каким образом вы можете расширить известный вам алгоритм графического решения линейного неравенства с двумя переменными?

232 Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

а) $(x + y)(x - y) < 0$; б) $(x + y + 1)(x - y - 2) \geqslant 0$.

233 Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

а) $x^2 + y^2 > 1$; б) $x^2 + y^2 > 2x - 2y$; в*) $(|x| - 3)^2 + (|y| - 4)^2 \leqslant 4$.

234 Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $x + y < |x|$.

235 Являются ли данные множества эквивалентными друг другу:

а) $A = \{0,2; 3,6; 8,75; 1,125\}$ и $B = \left\{\frac{1}{5}; 3\frac{3}{5}; 8\frac{3}{4}; 1\frac{1}{8}\right\}$;

б) $A = \{1; 2; 3; 4; 5; ...\}$ и $B = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; ...\right\}$;

в) множество целых чисел и множество целых чисел, кратных девяти?

236 Проиллюстрируйте штриховкой на числовой прямой:

а) $(3; 8] \setminus (-1; 5)$; б) $\overline{A}$, если $A = (-6; 6]$.

237 Найдите область определения алгебраической дроби:

а) $\frac{3}{7x^2 - 2x}$; б) $\frac{n^2 - 25}{n^2 - 6n + 8}$.

238 Найдите область определения алгебраической дроби:

а) $\frac{a}{|a| - 4}$; б) $\frac{m - 5}{4 - |3m - 5|}$.

239 Определите наименьшее и наибольшее значение функции:

а) $y = x^2 - 4x - 1$; б) $y = -2x^2 + 5x + 3$; в) $y = -64x^2 + 16x - 1$.

240 Вычислите координаты точки пересечения прямых:

а) $x + y + 1 = 0$ и $5x - 3y = 2$; б) $5x + 3y = -11$ и $7x + 2y = 0$.

241 Какая из предложенных систем уравнений не имеет решений?

1) $\begin{cases} 2x + y = 5; \\ x - 2y = -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x - y = -11; \\ x + 3y = 9; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5x = 2(2 - y); \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - y = 8; \\ y = -3x - 1. \end{cases}$

242 Найдите $7x_0 - 6y_0$, если $(x_0; y_0)$ – решение системы уравнений $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{3}{y} = 5; \\ \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = -5. \end{cases}$

243 Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению:

а) $x^2 + y^2 = 25$; б) $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$;

в) $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 0$; г) $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = -25$.

244 Изобразите график уравнения:

а) $|y| = -x$; б) $y^3 = x^6$; в) $4x^2 + 4y^2 = 4x - 4y + 7$.

245 Изобразите график уравнения $x^2 - x|x| = y^2 - y|y|$.

246 Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

а) $(3x + 4y - 7)(4x - 3y - 1) \leqslant 0$; б) $x^2 + y^2 > 6x - 8y$.

247 Найдите область определения алгебраической дроби:

а) $\frac{1}{x^2 - 9}$; б) $\frac{b - 7}{|b| - 7}$; в) $\frac{6 + 3d}{1 + |d|}$; г) $\frac{9 - t^2}{t^2 + 8n + 15}$.

248 Определите наименьшее и наибольшее значение функции:

а) $y = x^2 + 3x + 9$; б) $y = -x^2 - 3x + 3$; в) $y = 36x^2 + 60x + 25$.

249 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 10y - x = -21; \\ 3x + 5y = -7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{2}{3}y = -8; \\ -x + \frac{1}{3}y = 5. \end{cases}$

250 Найдите $5(y_0 - x_0)$, если $(x_0; y_0)$ – решение системы уравнений $\begin{cases} 4(x + 3y) + 2(x - y) = 28; \\ 2(y - x) + x + 3y = 2. \end{cases}$

C **251*** **Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $|2x + y| + |2x - y| \leqslant 10$, и найдите площадь получившейся фигуры.**

2.1.2. Общее понятие функции. Область определения и множество значений функции

Знать, чтобы предвидеть.

Огюст Конт (1798–1857),
французский философ

Мы работаем с понятием функции, начиная с шестого класса. Подведём некоторые итоги нашей многолетней работы, систематизируя имеющиеся у нас знания.

Сначала уточним известное нам определение функции. На протяжении изучения понятия функции мы делали это не раз – чем большим становится запас наших знаний, тем более точное определение мы можем рассмотреть.

Определение 1. Соответствие f между множествами X и Y называется ***функцией***, если каждому элементу $x \in X$ соответствует единственный элемент $y \in Y$. Множество X называется ***областью определения функции*** (обозначается $D(f)$). Множество элементов $y \in Y$, каждый из которых соответствует хотя бы одному $x \in X$, называется ***множеством значений функции*** (обозначается $E(f)$).

Причём, как мы знаем, множества X и Y необязательно числовые.

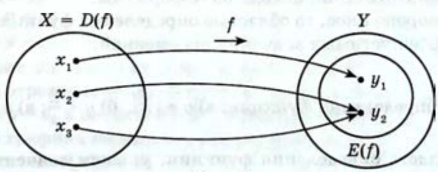


Рис. 1

На рисунке 1 изображена уже знакомая нам диаграмма Эйлера–Венна, иллюстрирующая определение функции. Отметим, что $E(f)$ – подмножество Y и не обязано совпадать с Y (в предыдущей, более простой, версии определения мы этих тонкостей не рассматривали для его упрощения).

Тот факт, что элементу x соответствует элемент y, мы записываем с помощью равенства $y = f(x)$. На рисунке $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2) = f(x_3)$.

Применяя известные нам кванторы $\forall$ («для любого») и $\exists$ («существует»), определение функции можно записать гораздо компактнее:

$$y = f(x) \text{ – функция с областью определения } X \text{ и множеством значений из } Y,$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall\ x \in X \to \exists!\ y \in Y \colon y = f(x)$$

Отметим, что в этой записи символ $\exists!$ означает «существует единственный».

Множество значений функции в этой символике можно задать так:

$$E(f) = \{y \in Y \colon \exists\ x \in X,\ y = f(x)\}.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только *числовые* функции, то есть такие, что $X \subset \boldsymbol{R}$, $Y \subset \boldsymbol{R}$.

Определение 2. ***Графиком числовой функции*** $y = f(x)$ называется график соответствующего уравнения $y = f(x)$.

Следует понимать, что график уравнения и график функции – это не одно и то же. Из графиков уравнений, изображённых нами в предыдущем пункте, графиками функций являются только $y = x$ и $y = x^2$; во всех остальных случаях возникшее соответствие между множествами $X \subset \boldsymbol{R}$ и $Y \subset \boldsymbol{R}$ не является функцией, так как значениям $x \in X$ может соответствовать более одного значения $y \in Y$.

* * *

Отметим, что не для каждой функции можно начертить график. Рассмотрим, например, так называемую функцию Дирихле:

$$y = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in \boldsymbol{Q}; \\ 0, \text{ если } x \in \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}. \end{cases}$$

Эта функция всем рациональным числам ставит в соответствие единицу, а всем иррациональным – нуль. График для функции Дирихле существует (как и для всякой числовой функции), его можно представить – это две «очень дырявые» параллельные прямые $y = 1$ и $y = 0$ (на первой прямой графика выколоты все точки с иррациональными абсциссами, а на второй – все точки с рациональными абсциссами). Но начертить его невозможно.

Теперь, уточнив свои представления об области определения и области значений, вспомним, как находить их для заданной функции. Рассмотрим на примере, как найти область определения функции, исходя из её формулы.

Если явно не оговорено иное, то областью определения функции, заданной формулой, считают область допустимых значений переменной.

Пример 1.

Указать область определения функции: а) $y = |x|$; б) $y = \dfrac{2}{x}$; в) $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Решение.

Чтобы найти область определения функции, укажем значения, которые может принимать аргумент.

а) Аргумент x может принимать любые значения, значит, $D(y) = (-\infty; +\infty)$, иначе это можно записать так: $D(y) = \boldsymbol{R}$.

б) Знаменатель дроби не может быть равен нулю, поэтому $x \neq 0$.
Тогда $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ или $D(y) = \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$.

в) Определение арифметического квадратного корня ограничивает область определения этой функции: подкоренное выражение может принимать только неотрицательные значения, значит, нам нужно решить неравенство:

$$1 - x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow (1 - x)(1 + x) \geqslant 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 1].$$

Значит, $D(y) = [-1; 1]$.

Ответ: а) $D(y) = (-\infty; +\infty)$; б) $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; в) $D(y) = [-1; 1]$.

В следующем примере мы найдём область определения функции, заданной графиком.

Пример 2.

На рисунке 2 изображена парабола с двумя выколотыми точками. Указать область определения этой функции по ее графику.

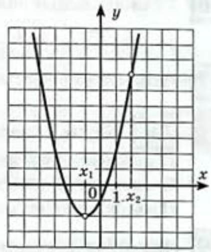


Рис. 2

Решение.

Найдём значения x, при которых функция не определена, для этого определим по графику абсциссы выколотых точек. Абсцисса нижней точки равна -1, абсцисса верхней точки равна 2.

Значит, $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 2) \cup (2; +\infty)$.

Найти множество значений функции – обычно более сложная задача.

Пример 3.

Найти множество значений функции $y = 2|x| - |x - 1|$.

Решение.

Область допустимых значений переменной x, а значит и область определения данной функции – вся числовая ось. Множество значений функции легче определить не с помощью формулы, а исходя из графика.

Разобьём числовую ось на промежутки, где знаки выражений под знаком модуля определены однозначно: $(-\infty; 0) \cup [0; 1) \cup [1; +\infty)$. Раскроем знак модуля, исходя из знака выражения на каждом из полученных промежутков.

При $x \geqslant 1$ имеем: $y = 2x - (x - 1) = x + 1$;

при $0 \leqslant x < 1$ имеем: $y = 2x + (x - 1) = 3x - 1$;

при $x < 0$ имеем: $y = -2x + (x - 1) = -x - 1$.

Построим график полученной кусочно-линейной функции

$$y = \begin{cases} x + 1, \text{ если } x \geqslant 1; \\ 3x - 1, \text{ если } 0 \leqslant x < 1; \\ -x - 1, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

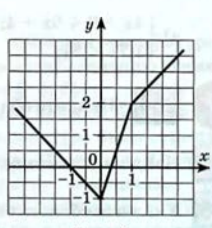


Рис. 3

График её состоит из трёх «кусков» прямых линий – двух лучей и одного отрезка (рис. 3). В точке $x = 1$ функция принимает значение $y = 2$, в точке $x = 0$ функция принимает значение $y = -1$. Из графика видно, что множеством значений функций является луч $[-1; +\infty)$.

Ответ: $E(y) = [-1; +\infty)$.

К **252** Постройте график уравнения:

а) $y = x + 2$; б) $y = x^2 + 2$; в) $y^2 = -x^2 + 25$; г) $|y| = x + 2$.

Какие из этих графиков являются графиками функций? Что такое график функции? Попробуйте дать определение этому понятию. Уточните свои знания о функции и её графике с помощью учебника.

253 Найдите область определения функции $y = \dfrac{x}{\sqrt{3x^2 + 4x + 1}}$.

254 Найдите область определения функции $y = \sqrt{11 - 2|x|} + \dfrac{4}{\sqrt{15 - 2x - x^2}}$.

255 Укажите область определения функции и постройте её график:

а) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$; б) $y = \dfrac{x^2 - x - 20}{x - 5}$; в) $y = 2 \cdot \dfrac{5x^2 - 2x}{5x^3 - 2x^2}$; г) $y = -\dfrac{2x^2 - x^3}{x - 2}$.

256 Укажите целые значения переменных, входящих в область определения функции $y = \sqrt{9 - x^2} + \sqrt{\dfrac{1}{x - 2}}$.

257 Найдите множество значений функции $y = |x + 1| + |x - 1|$.

П **258** Какие из данных множеств конечные, а какие бесконечные:

а) множество учеников вашей школы;

б) множество целых чисел, являющихся решениями неравенства $|x| < 1000$;

в) множество целых чисел, являющихся решениями неравенства $|x| > 1000$?

259 Линейная функция $y = -\dfrac{2}{7}x + 7$ задана на области определения $[-7; 7]$. Между какими множествами она задает соответствие?

260 Изобразите множество всех точек $(x; y)$ координатной плоскости Oxy, для которых выполняется равенство:

а) $\dfrac{y - x^2 + 4}{x - 1} = 0$; б) $\dfrac{x^2 + y^2 - 25}{x - 4} = 0$.

261 Постройте график уравнения $y = 2x|x| + x^2 - 6x$.

262 Решите двойное неравенство $-6 < 6 - \dfrac{1}{6}x \leqslant -1$.

263 Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 4x + 9 \leqslant 9x + 4; \\ 1{,}7x < 51; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{2x + 5}{5} > \dfrac{5x + 2}{2}; \\ \dfrac{x + 2}{5} < \dfrac{x + 5}{2}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} (4 - 3x)(\sqrt{3} - 2) > 0; \\ 0{,}4x < 4. \end{cases}$

Д **264** Найдите область определения функции $y = \dfrac{1 + x}{\sqrt{2 + 3x - 5x^2}}$.

265 Найдите область определения функции $y = \sqrt{12 + x - x^2} + \dfrac{4}{\sqrt{2|x| - 5}}$.

266 Укажите область определения функции и постройте её график:

а) $y = \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$; б) $y = \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 1}$; в) $y = -\dfrac{2x - 1}{2x^2 - x}$; г) $y = \dfrac{2x^2 - x^3}{x - 2}$.

267 Найдите множество значений функции $y = 2|x| - x + 2$.

268 Изобразите множество всех точек $(x; y)$ координатной плоскости Oxy, для которых выполняется равенство:

а) $\dfrac{y + x^2 - 1}{x + 2} = 0$; б) $\dfrac{16 - x^2 - y^2}{x + 3} = 0$.

С **269*** Найдите множество значений функции $y = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 5}$.

270* На доске написаны ненулевые числа a, b, c, а также числа $a^2 - b$, $b^2 - c$, $c^2 - a$. Какое наибольшее количество отрицательных чисел может быть записано на доске?

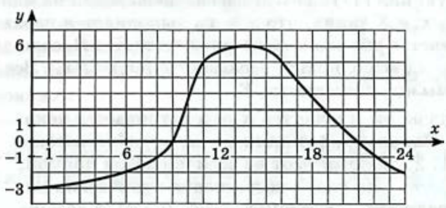
2.1.3. Основные свойства функции

Высшее назначение математики состоит в том, чтобы находить скрытый порядок в хаосе, который нас окружает.

Норберт Винер (1894–1964),
американский математик и философ,
основоположник кибернетики и
теории искусственного интеллекта

Знакомясь с той или иной функцией, мы выясняли, какими свойствами обладает каждая из них. В этом пункте мы систематизируем имеющиеся у нас знания о свойствах функций.

Рассмотрим график изменения температуры в течение суток.



По оси x отложены значения времени (в часах), а по оси y – значения температуры (в градусах по Цельсию). Эта функция ставит в соответствие каждому значению времени из промежутка $[0; 24)$ значение температуры из промежутка $[-3; 6]$.

График пересекает ось абсцисс в двух точках – температура дважды была равна нулю, это происходило в 9 часов и в 21 час. С 0 до 9 часов температура была отрицательной. После 9 и до 21 часа температура была выше нуля. После 21 часа и до 24 часов температура опять стала отрицательной. С 0 до 14 часов температура повышалась – со временем её значения увеличивались, а с 14 часов до 24 часов она понижалась – со временем её значения уменьшались. Самой низкой температура была в 0 часов и составила –3°. Максимальное значение температуры равно 6°, оно было достигнуто в 14 часов.

Чтобы узнать информацию об изменении температуры, мы *прочитали график*. Какие свойства функции мы при этом использовали? Мы определили область определения и область значений функции, нули функции, промежутки знакопостоянства, промежутки возрастания и убывания функции, а также наибольшее и наименьшее значения функции.

1. Об *области определения и области значений функции* мы уже подробно говорили в предыдущем пункте. Остановимся на остальных свойствах функции, обобщая имеющиеся у нас знания.

2. Значения аргумента, при которых функция равна нулю, принято называть ***нулями функции***.

Чтобы найти нули функции $y = f(x)$, нужно решить уравнение $f(x) = 0$. Чтобы установить нули функции по графику, нужно найти точку (или точки) пересечения графика с осью абсцисс и указать её (их) абсциссу.

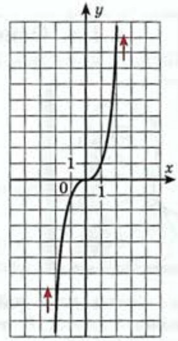


Рис. 1

Так, функция $y = x^3$, график которой изображён на рисунке 1, равна нулю при $x = 0$. При $x < 0$ график $y = x^3$ располагается ниже оси абсцисс, значит, на промежутке $(-\infty; 0)$ *значения функции отрицательны*. При $x > 0$ график $y = x^3$ располагается выше оси x, значит, на промежутке $(0; +\infty)$ *значения функции положительны*.

3. Промежутки, где функция сохраняет свой знак: «+» (положительна) или «−» (отрицательна), называют ***промежутками (интервалами) знакопостоянства***.

Так, функция $y = x^2$ (и вообще $y = x^{2n}$ при $n = 1, 2, ...$) положительна при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

А функции $y = x$, $y = x^3$ (и вообще $y = x^{2n+1}$ при $n = 0, 1, 2, ...$) отрицательны при $x \in (-\infty; 0)$, положительны при $x \in (0; +\infty)$.

4. Ещё одним важным свойством функции, которое мы будем исследовать, является её возрастание или убывание.

Определение. Функция $f(x)$ называется ***возрастающей*** на множестве $X \subset \boldsymbol{R}$, если для любых точек $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 > x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$. Функция $f(x)$ называется ***убывающей*** на множестве $X \subset \boldsymbol{R}$, если для любых точек x_1, $x_2 \in X$ таких, что $x_1 > x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$. Все такие функции называются ***монотонными*** на множестве X.

Как правило, в качестве множества X рассматривается некоторый промежуток. Например, функции $y = x$, $y = x^3$ (и вообще $y = x^{2n+1}$ при $n = 0, 1, 2, ...$) возрастают на всей числовой прямой, то есть при $x \in (-\infty; +\infty)$ – на рис. 1 возрастание кубической параболы показано стрелками. А функции $y = x^2$, $y = x^4$ (и вообще $y = x^{2n}$ при $n = 1, 2, ...$) убывают на луче $(-\infty; 0]$ и возрастают на луче $[0; +\infty)$ – см. рис. 2.

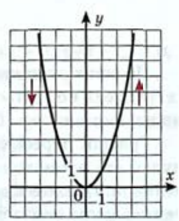


Рис. 2

Заметим, что функция $y = \dfrac{1}{x}$ (рис. 3) убывает на каждом из двух открытых лучей $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, входящих в область определения, но не является убывающей на всей области определения $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, так как, например, $1 > -1$, а $f(1) > f(-1)$. Функция $y = \dfrac{1}{x^2}$ возрастает на открытом луче $(-\infty; 0)$ и убывает на открытом луче $(0; +\infty)$ – см. рис. 4. Функция $y = \sqrt{x}$ возрастает на всей области определения $[0; +\infty)$ – см. рис. 5.

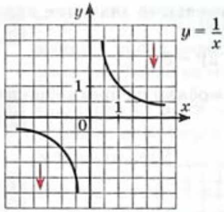


Рис. 3

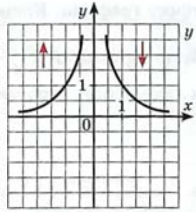


Рис. 4

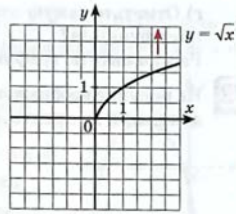


Рис. 5

В простых случаях возрастание и убывание функции устанавливается доказательством неравенств. Например, возрастание функции $y = \sqrt{x}$ следует из того, что при $x_1 > x_2$ по свойству корня $\sqrt{x_1} > \sqrt{x_2}$. В более сложных случаях для нахождения промежутков возрастания (убывания) применяются другие, пока недоступные нам методы.

Отметим, что не для всех функций можно выделить промежутки возрастания или убывания. Так, например, функция $y = 1$ постоянна, и промежутков возрастания или убывания у неё нет.

5. Помимо вышеуказанных свойств, для некоторых функций можно определить их *наибольшее* или *наименьшее значение.*

Определив ординату верхней точки графика, мы получим наибольшее значение функции, определив ординату нижней точки графика – наименьшее. Так, наименьшее значение функции $y = x^2$ равно 0, а наибольшего значения функции указать нельзя.

Итак, теперь мы можем привести план, которого нужно придерживаться при исследовании функции.

План исследования функции

1. Указать область определения функции $D(y)$.
2. Указать область значений функции $E(y)$.
3. Указать, на каких промежутках из области определения функция равна 0, положительна, отрицательна.
4. Указать, на каких промежутках из области определения функция возрастает (убывает, постоянна).

Наибольшее и наименьшее значения функции мы учитываем при нахождении области значений функции, поэтому в плане соответствующий пункт как отдельный мы не выделили.

Следует отметить, что для некоторых сложных функций не все пункты этого плана могут быть реализованы изученными нами методами.

К **271** Постройте график функции $f(x) = (x - 2)^2 - 3$. Выполните по графику следующие задания.

а) Выделите точки пересечения параболы с осью Ox. Обведите ту часть графика, где $f(x)$ положительна, ручкой, а где $f(x)$ отрицательна – простым карандашом.

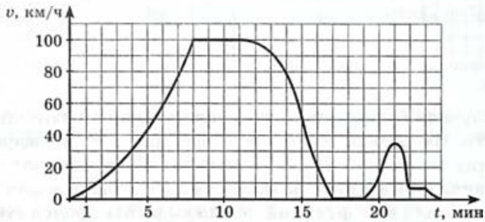
б) Обведите ту часть графика, где $f(x)$ возрастает, и отметьте её стрелкой ↑. Обведите ту часть графика, где $f(x)$ убывает, и отметьте её стрелкой ↓.

в) Начертите пунктирной линией ось симметрии этой параболы.

г) Отметьте самую нижнюю точку графика. Какое наименьшее значение принимает функция?

Расскажите по графику о свойствах функции $f(x) = (x - 2)^2 - 3$.

272 На рисунке изображён график изменения скорости автомобиля на протяжении его движения из пункта A в пункт B.



Пользуясь графиком, ответьте на вопросы:

а) Когда скорость автомобиля была равна нулю?

б) Сколько времени добирался автомобилист из пункта A в пункт B?

в) С какой максимальной скоростью двигался автомобиль?

г) В какие промежутки времени автомобиль двигался, а когда стоял?

д) В какие промежутки времени скорость автомобиля увеличивалась, уменьшалась, была постоянной?

Какие свойства функции вы использовали, чтобы ответить на эти вопросы?

273 Обобщите имеющиеся у вас знания о свойствах функции, опираясь на предыдущие задания. Сопоставьте результаты своей работы с текстом на с. 72–73.

274 Определите, на каких промежутках из области определения следующие функции положительны:

а) $y = 2x + 15 - x^2$; б) $y = \sqrt{x^2 - 5}$; в) $y = \dfrac{x^3(x-2)^2}{x-1}$; г) $y = x - 1 + 2|x|$.

275 Какие из следующих утверждений верны?

а) Сумма двух убывающих функций – убывающая функция.

б) Разность двух возрастающих функций – убывающая функция.

в) * Произведение двух возрастающих функций – возрастающая функция.

276 Определите, на каких промежутках из области определения следующие функции возрастают:

а) $y = 4x + 11 - x^2$; б) $y = 1 - \sqrt{x^2}$; в) $y = 2x + 1 + 3|x|$.

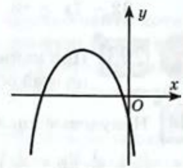
П **277** Сколько различных «слов» можно написать, переставляя буквы в слове:

а) «НОРМА»; б) «ДИСПЕРСИЯ» (словом считать даже бессмысленный набор букв)?

278 Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 так, чтобы цифры в записи числа не повторялись? Сколько трёхзначных чисел можно составить из этих же цифр, сколько двузначных?

279 Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 3, 5, 7, 9? Сколько двузначных чисел можно составить из этих же цифр? (Цифры в записи числа не повторяются. Число не может начинаться с нуля.)

280 Сколькими способами можно разбить 18 человек, участвующих в экскурсии по музею, на две группы по 9 человек в каждой?



281 Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ задана графиком, изображённым на рисунке. Определите знаки коэффициентов a, b и c.

282 Найдите область определения функции $y = \frac{(\sqrt{x^2 - x})^2}{x}$. Постройте её график, упростив выражение $\frac{(\sqrt{x^2 - x})^2}{x}$. Найдите значения m, при которых прямая $y = m$ не имеет с графиком данной функции общих точек.

283 Постройте график функции $y = -\frac{4(x + 2)}{x^2 + 2x}$. При каких значениях a прямая $y = a$ не имеет с построенным графиком ни одной общей точки?

284 Решите систему уравнений, применяя графический метод: $\begin{cases} |x| = 6 - y; \\ |x| - y = 4. \end{cases}$

285 Найдите наименьшее целое положительное решение системы неравенств
$$\begin{cases} 3x + 7 > -5; \\ 16 - 4x > 3. \end{cases}$$

Д **286** Определите, на каких промежутках из области определения функция отрицательна:

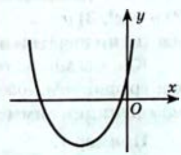
а) $y = 3x^2 + 2x - 5$; б) $y = -3 - \sqrt{x^2 - x}$; в) $y = \frac{(x - 3)(x - 1)^2}{(x + 2)^3}$; г) $y = 2|x - 1| - x - 2$.

287 Определите, на каких промежутках из области определения функция убывает:

а) $y = 3x^2 + 5x - 13$; б) $y = \sqrt{(x - 3)^2} - 5$; в) $y = 3|x + 1| - 4x + 1$.

288 а) Сколько различных «слов» можно написать, переставляя буквы в слове «ПРИЗМА»; б) Сколько различных «слов» можно получить, выбирая любые четыре буквы из слова «ПРИЗМА»?

289 Сколькими способами можно выбрать из 15 спортсменов троих для участия в соревновании?



290 Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ задана графиком, изображённым на рисунке. Определите знаки коэффициентов a, b и c.

291 Найдите область определения функции $y = \frac{\sqrt{(x^2 - x)^2}}{x}$. Постройте её график, упростив выражение $\frac{\sqrt{(x^2 - x)^2}}{x}$. Найдите значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

292 Найдите наибольшее целое положительное решение системы неравенств
$$\begin{cases} 9x + 1 < 19; \\ 32 - 7x > -3. \end{cases}$$

С **293*** При каких значениях параметра a функция $y = ax^2 + 2x + 5a$ положительна на всей области определения?

294* Ненулевые числа x, y, z, t таковы, что
$$\left(x + \frac{1}{yzt}\right)\left(y + \frac{1}{xzt}\right)\left(z + \frac{1}{xyt}\right)\left(t + \frac{1}{xyz}\right) > 0.$$
Докажите, что $xyzt > 0$.

2.1.4*. Ещё о свойствах функции

Человек должен верить, что непонятное можно понять: иначе он не стал бы размышлять о нём.

Иоганн Гёте (1749–1832),
немецкий поэт, мыслитель

В предыдущем пункте мы систематизировали свои знания об основных свойствах функции. Однако функции обладают и другими свойствами. В курсе 8 класса мы познакомились с такими свойствами функций, как чётность и нечётность. В этом пункте мы уточним свои представления об этих свойствах функции и познакомимся с новыми.

Определение 1. Функция $f(x)$, определённая на $\boldsymbol{R}$, называется ***чётной***, если для всех $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$. Функция $f(x)$, определённая на $\boldsymbol{R}$, называется ***нечётной***, если для всех $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Напомним, что функция $f(x)$ может не являться ни чётной, ни нечётной.

Приведем примеры чётных функций: 1) $y = 2x^2$, 2) $y = x^{2n}$ ($n = 1, 2, 3,...$), 3) $y = |x|$, 4) $y = 5$ (постоянная функция). Приведём примеры нечётных функций: 1) $y = x$, 2) $y = x^3$, 3) $y = x^{2n+1}$ ($n = 1, 2, 3,...$). Функции $y = x + 1$; $y = 3x^2 - 1$ не являются ни чётными, ни нечётными. Функция $y = 0$ одновременно и чётна и нечётна.

Как мы знаем, свойство чётности или нечётности функции отражается на её графике: график *чётной* функции симметричен относительно *оси ординат*, график *нечётной* функции симметричен относительно *начала координат*.

Пример 1.

Какой функцией (чётной, нечётной либо ни той, ни другой) является функция $f(x) = x^2 + x$?

Решение.

Если бы $f(x)$ была чётной функцией, то для всех x выполнялось бы равенство $f(-x) = f(x)$, а для нечётной функции для всех x выполнялось бы равенство $f(-x) = -f(x)$.

Однако, например, при $x_0 = 1$ получаем $f(x_0) = 2$, $f(-x_0) = 0$, то есть $f(-x_0) \neq f(x_0)$ и $f(-x_0) \neq -f(x_0)$. Функция не является ни чётной, ни нечётной.

Ответ: $f(x) = x^2 + x$ не является ни чётной, ни нечётной.

Для доказательства того, что функция не является чётной, достаточно найти хотя бы одну точку x_1, в которой $f(-x_1) \neq f(x_1)$, а для доказательства того, что функция не является нечётной – найти хотя бы одну точку x_2, в которой $f(-x_2) \neq -f(x_2)$. В то же время для установления, например, чётности функции, необходимо доказывать равенство $f(-x) = f(x)$ для **всех** x.

Понятия чётной и нечётной функции можно распространить на функции, определённые не при всех $x \in \boldsymbol{R}$, но для этого область определения функции должна быть симметричной относительно нуля.

Определение 2. Множество $X \subset \boldsymbol{R}$ называется ***симметричным относительно нуля***, если для каждой точки $x \in X$ точка $(-x)$ также принадлежит X.

Так, множества $(-a;\ a)$; $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$; $[-a;\ a]$; $[-a;\ 0) \cup (0;\ a]$; $[-2;\ -1] \cup [1;2]$; $(-3;\ -1) \cup \{0\} \cup (1;\ 3)$; $(-4;\ -3] \cup [-1;\ 1] \cup [3;\ 4)$ будут симметричными относительно нуля, а множества $[0;\ 1]$; $(-1;\ 2]$; $[-1;\ 1)$; $[-2;\ -1] \cup [1;\ 2)$ – симметричными относительно нуля не будут.

Определение 3. Функция $f(x)$, определённая на множестве $X \subset \boldsymbol{R}$, называется ***чётной***, если множество X симметрично относительно нуля и для всех $x \in X$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$. Функция $f(x)$, определённая на множестве $X \subset \boldsymbol{R}$, называется ***нечётной***, если множество X симметрично относительно нуля и для всех $x \in X$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Приведём примеры чётных и нечётных функций.

Чётные функции	Нечётные функции
1) $y = \dfrac{1}{x^{2n}}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $D(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$; 2) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$, $D(y) = (-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.	1) $y = \dfrac{1}{x^{2n+1}}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $D(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$; 2) $y = \dfrac{1}{x^3 - x}$, $D(y) = (-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 0) \cup (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.

Пример 2.

Исследовать на чётность-нечётность функцию:

а) $y = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}$; б) $y = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}$; в) $y = \sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}$.

Решение:

а) $D(f) = (-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$ – симметрична относительно нуля. Имеем $\forall x \in D(f)$: $f(-x) = \dfrac{1}{-x-1} + \dfrac{1}{-x+1} = -\left(\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}\right) = -f(x)$; функция нечётна.

б) $D(f) = (-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$ – симметрична относительно нуля. Имеем $\forall x \in D(f)$: $f(-x) = \dfrac{1}{-x-1} - \dfrac{1}{-x+1} = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} = f(x)$; функция чётна.

в) Для нахождения $D(f)$ нужно решить систему неравенств $\begin{cases} x^2 + x \geqslant 0; \\ x^2 - x \geqslant 0. \end{cases}$ Такие системы мы учились решать в 8 классе. Так как квадратный трехчлен $x^2 + x$ с положительным старшим коэффициентом имеет корни $x_1 = -1$; $x_2 = 0$, множеством решений первого неравенства системы является $(-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$. Аналогично, множеством решений второго неравенства системы является $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$. В пересечении этих множеств получим: $D(f) = (-\infty; -1] \cup \{0\} \cup [1; +\infty)$. Это множество симметрично относительно нуля.

Имеем $\forall x \in D(f)$: $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - x} + \sqrt{(-x)^2 + x} = \sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x} = f(x)$; функция чётна.

Теперь познакомимся с ещё одним свойством функций. Многие функции, описывающие реальные процессы окружающего нас мира, являются периодическими. Например, предположим, что мы катаемся на колесе обозрения, которое вращается с постоянной скоростью, делая один оборот за время $T = 5$ минут. Рассмотрим функцию, задающую высоту кабинки в зависимости от времени катания на колесе. Тогда, если мы засечём какой-то момент времени, то через каждые 5 минут, начиная от него, мы будем находиться в том же положении, то есть на той же высоте. Иначе говоря, значения указанной функции совпадают, когда аргумент (время катания) увеличивается на 5 минут. Нарисуем график этой функции, считая, что колесо вращалось и будет вращаться бесконечно долго, а мы начали отсчёт времени с момента посадки в кабинку. Получим график[1], изображённый на рис. 1.

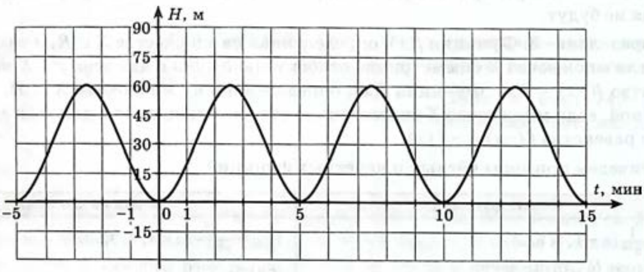


Рис. 1

Интересно, что график этой функции останется на листе (как множество точек), если все его точки сдвинуть на 5 единиц вдоль оси абсцисс, оставив оси координат на месте.

Определение 4. Функция $f(x)$, определенная для всех $x \in \boldsymbol{R}$, называется ***периодической***, если найдется положительное число T такое, что для всех $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство $f(x + T) = f(x)$; число T называется ***периодом*** функции.

Чтобы рассмотреть другие примеры периодических функций, введём следующие обозначения.

Целой частью числа x назовем наибольшее целое число, не превосходящее x, и обозначим $[x]$. *Дробной частью* числа x назовём результат вычитания из числа x его целой части и обозначим $\{x\}$, то есть $\{x\} = x - [x]$.

Например, $\left[5\frac{1}{3}\right] = 5$; $\left[-5\frac{1}{3}\right] = -6$; $[-2{,}14] = -3$; $\{2{,}14\} = 0{,}14$; $\{-2{,}14\} = 0{,}86$.

Если x – целое число, то $[x] = x$, и $\{x\} = 0$. Так, $[5] = 5$; $\{-2\} = 0$.

Рассмотрим функцию $y = \{x\}$ – дробная часть x.

Если $x \in [0; 1)$, то $[x] = 0$, и $\{x\} = x$; если $x \in [1; 2)$, то $[x] = 1$ и $\{x\} = x - 1$; если $x \in (2; 3)$, то $[x] = 2$ и $\{x\} = x - 2$, и т.д. Если $x \in [-1; 0)$, то $[x] = -1$ и $\{x\} = x + 1$; $x \in [-2; -1)$, то $[x] = -2$ и $\{x\} = x + 2$, и т.д.

[1] Полученный график называется синусоидой.

На рисунке 2 изображён график функции $y = \{x\}$.

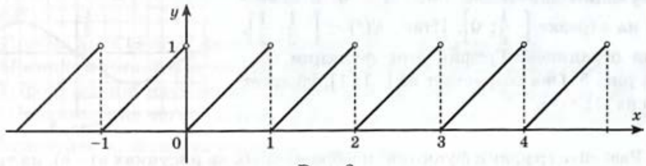


Рис. 2

При этом для всех $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство $[x + 1] = [x] + 1$, поэтому $\{x + 1\} = x + 1 - [x + 1] = x + 1 - [x] - 1 = \{x\}$; функция $y = \{x\}$ имеет период $T = 1$.

Для функции $y = C$ (постоянная функция) периодом является любое положительное число.

Рассмотрим ещё одно свойство функций.

Определение 5. Функция $f(x)$, определённая на множестве $X \subset \boldsymbol{R}$, называется ***ограниченной***, если множество её значений $E(f)$ ограничено, то есть содержится в некотором отрезке числовой прямой.

Рассмотрим примеры ограниченных функций.

1) $f(x) = \{x\}$; её множество значений $E(f) = [0;\, 1) \subset [0;\, 1]$.

2) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$;

$y = \sqrt{1 - x^2} \iff \begin{cases} y^2 = 1 - x^2; \\ y \geqslant 0. \end{cases}$

График этой функции – верхняя половина окружности $x^2 + y^2 = 1$ – изображён на рис. 3. $D(f) = [-1;\, 1]$; $E(f) = [0;\, 1] \subset [0;\, 1]$.

3) Функция Дирихле. Её множество значений состоит из двух чисел 1 и 0; $E(f) \subset [0;\, 1]$.

4) Функция $f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$ Множество значений этой функции состоит из трёх чисел: $E(f) = \{-1;\, 0;\, 1\} \subset [-1;\, 1]$ – см. рис. 4. Кстати, легко видеть, что эта функция является нечётной.

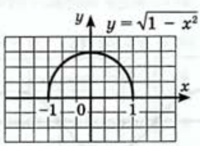


Рис. 3

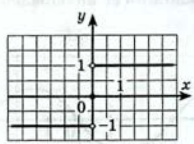


Рис. 4

Пример 3.

Доказать, что функция $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ ограничена на всей числовой прямой.

Доказательство.

При всех x имеет место неравенство $(x - 1)^2 \geqslant 0$, поэтому $x^2 + 1 \geqslant 2x$, то есть $\dfrac{x}{x^2 + 1} \leqslant \dfrac{1}{2}$. Это означает, что при $x \geqslant 0$ значения функции лежат на отрезке $\left[0;\, \dfrac{1}{2}\right]$. Заметим, что функция нечётная, поэтому её значения при $x < 0$ противоположны соответствующим значениям при $-x > 0$, и поэтому лежат на отрезке $\left[-\frac{1}{2};\ 0\right]$. Итак, $E(f) \subset \left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$, и функция ограничена. График этой функции изображён на рис. 5. Она возрастает на $[-1;\ 1]$, убывает $(-\infty;\ -1]$ и на $[1;\ +\infty)$.

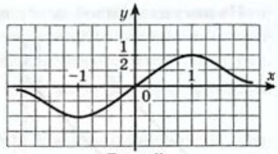
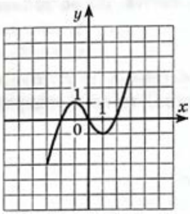
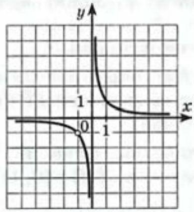
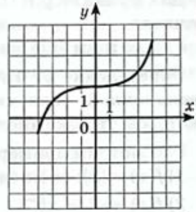


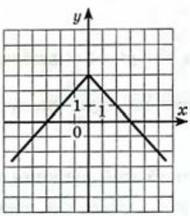
Рис. 5

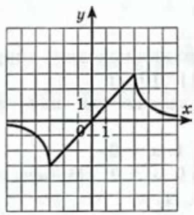
К **295** Разбейте графики функций, изображённых на рисунках а) – е), на три группы. По какому признаку вы это сделали? Сформулируйте определение соответствующего свойства функции. При затруднении обратитесь к тексту учебника.

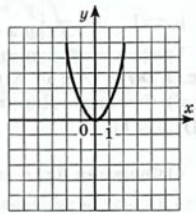
а)


б)


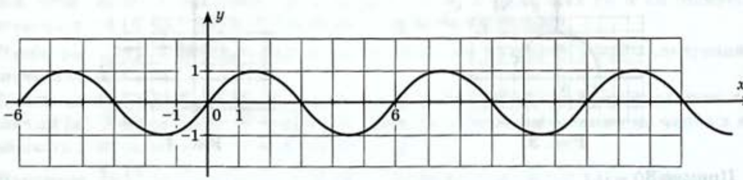
в)


г)


д)


е)


296 1) Перечертите изображённый на этом рисунке график на кальку или прозрачную плёнку, наложив её на образец:



Передвиньте нарисованный вами график на 6 единиц вдоль оси абсцисс. Что вы наблюдаете? Познакомьтесь с ещё одной подобной функцией на с. 78.

2) Знаете ли вы, как называются функции, обладающие таким свойством? Обратитесь к тексту учебника и найдите соответствующее определение.

3) Познакомьтесь с ещё одним свойством этой функции – ограниченностью, используя соответствующий текст учебника.

297 Верны ли следующие утверждения для функций, определённых на всей числовой оси?

а) Сумма двух чётных функций является четной функцией.
б) Разность чётной и нечётной ненулевых функций является нечётной функцией.
в) Произведение двух нечётных функций является чётной функцией.
г) Произведение чётной и нечётной функций является нечётной функцией.

298 Исследуйте на чётность-нечётность функцию:

а) $y = \dfrac{1}{x+1} + 5x$; в) $y = x \cdot \sqrt{x^2 - 5}$;

б) $y = 3x^4 - 2|x|$; г) $y = \dfrac{x^2}{|x| - 5}$.

299 Верны ли следующие утверждения?

а) Сумма двух ограниченных функций является ограниченной функцией.
б) Разность двух ограниченных функций является ограниченной функцией.
в) Произведение двух ограниченных функций является ограниченной функцией.
г) Отношение двух ограниченных функций является ограниченной функцией.

300 Какие из следующих функций являются ограниченными?

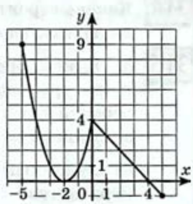
а) $y = x^2 - 3x$; б) $y = \sqrt{1 - x} + \sqrt{x}$; в) $y = \dfrac{1}{|x| + 1}$.

301 Дана функция $f(x) = \{5x + 0,5\}$. Докажите, что $f(x)$ – периодическая, и найдите её период.

302 Постройте график функции $y = [x]$ и определите, будет ли она периодической.

303 По графику, изображённому на рисунке, найдите:

1) область определения функции;
2) область значений функции;
3) промежутки знакопостоянства;
4) промежутки убывания функции.



304 Постройте график уравнения:

а) $\dfrac{y - |x|}{x + 1} = 0$; б) $|y| = x + 20$.

305 Решите уравнение $|x - 4| = 6 + x$.

306 Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x - 8 > 3; \\ 2x + 5 > 2; \\ 1 - x \geqslant -13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6 - \dfrac{x}{2} \geqslant x; \\ x + \dfrac{x-1}{4} \geqslant 1; \\ 3x - 8 \leqslant 0. \end{cases}$

307 Решите неравенство:

а) $|2x - 1| > 3$; б) $|5x - 1| \leqslant 5$.

308 Стрелок, не целясь, стреляет в мишень, площадь которой составляет 400 см^2, и попадает в неё. В центре этой мишени расположен маленький квадрат со стороной 5 см. Найдите вероятность того, что стрелок попал именно в этот квадрат.

309 В корзине лежало 40 груш, 3 из которых были испорчены. Повар для приготовления компота наугад взял 10 груш. Какова вероятность того, что у него качественные фрукты?

D **310** Верны ли следующие утверждения для функций, определённых на всей числовой оси?

а) Разность двух нечётных функций является нечётной функцией.

б) Сумма чётной и нечётной функций является чётной функцией.

в) Произведение двух чётных функций является чётной функцией.

311 Исследуйте на чётность-нечётность следующие функции:

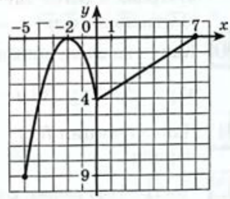
а) $y = x^3 - 5x$; в) $y = x^2 \cdot \sqrt{|x| - 3}$;

б) $y = \sqrt{x + 5} - 3|x| + 2$; г) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 11}$.

312 Какие из следующих функций являются ограниченными?

а) $y = |x| - x + 1$; б) $y = \sqrt{4 - x^2} + x^2$; в) $y = \dfrac{5}{x^2 + 1}$.

313 По графику, изображённому на рисунке, найдите:



1) область определения функции;

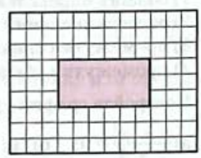
2) область значений функции;

3) промежутки знакопостоянства;

4) промежутки возрастания функции.

314 Какова вероятность того, что случайно выбранное натуральное число от 72 до 90 включительно делится на 3?

315 а) Центр брошенной наугад фишки попадает в фигуру, изображённую на рисунке. Какова вероятность того, что центр фишки не попадёт в закрашенную часть?



б) Случайным образом выбирают одно из решений неравенства $x^2 - 2x - 8 \leqslant 0$. Какова вероятность того, что оно окажется неотрицательным?

316 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 9 - x < 0; \\ -7x + 16 < 2; \\ 2 - x \leqslant 10. \end{cases}$$

317 Решите неравенство:

а) $|4x - 3| \geqslant 1$; б) $|7x + 2| < 5$.

C **318*** Найдите наименьшее целое x, удовлетворяющее неравенству $x \geqslant \dfrac{1000}{x}$.

319* При каких значениях параметра a функция $y = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + a}}$ будет ограничена на всей области определения?

§ 2. Исследование функций и построение графиков

2.2.1*. Общий план построения графика функции

Никогда не бывает больших дел без больших трудностей.

Вольтер (1694–1778),
великий французский писатель,
поэт, драматург, философ-просветитель

Построение графика позволяет представить все свойства функции в удобной для восприятия наглядной форме. Мы без труда можем построить[1] графики многих известных нам функций: прямой и обратной пропорциональностей, линейной функции, квадратичной функции, функции $y = \sqrt{x}$, $y = |x|$, а также график степенной функции с натуральным показателем.

Но как построить, например, график функции $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ (мы рассматривали её в последнем примере пункта 2.1.4)? Или любой другой функции, заданной тем или иным алгебраическим выражением?

Чтобы построить график функции, полезно подробно проанализировать её свойства. Например, решая уравнение $f(x) = 0$, мы сможем понять, в каких точках график пересечёт ось абсцисс. По формуле $y = f(x)$ мы можем определить, является ли функция чётной, а это расскажет нам о симметрии её графика.

Выявим, как нужно изменить известный нам план исследования функции, чтобы его можно было использовать для построения графиков. Для этого построим, например, график функции $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$.

Сначала выберем те шаги плана, которые можно выполнить из аналитических соображений.

1. Найдём область определения функции. Функция определена при всех $x \in \boldsymbol{R}$.

2. Найти область значений данной функции по формуле достаточно сложно. Поэтому этот пункт исследования функции мы опустим.

3. Найдём нули функции: $\dfrac{x}{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Значит, график пересекает и ось абсцисс, и ось ординат в точке (0; 0).

Теперь найдём промежутки знакопостоянства. Для этого нам нужно решить неравенства $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$.

Ясно, что $\dfrac{x}{x^2 + 1} > 0$ при $x > 0$; $\dfrac{x}{x^2 + 1} < 0$ при $x < 0$.

4. Легче построить график, зная о его симметрии. Ведь если функция чётна или нечётна, можно ограничиться построением только части её графика и достроить график из соображений симметрии. Поэтому исследуем функцию на чётность.

[1] Строго говоря, речь здесь идёт лишь об эскизах графиков. Графики всех этих функций, кроме линейной, строятся нами лишь схематически.

Функция нечётна (для всех $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство $f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 + 1} = -\frac{x}{x^2 + 1} = -f(x)$). Значит, график симметричен относительно начала координат и достаточно построить только часть графика при $x \geqslant 0$, а далее применить симметрию относительно точки (0; 0).

5. Построить график функции легче, если знать о её периодичности. Ведь для периодической функции можно ограничиться построением части графика на промежутке, равном её периоду, а потом просто копировать эту часть на остальные промежутки.

Достаточно ясно, что функция $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ не периодическая (если функция, являющаяся комбинацией многочленов, модулей и корней, периодична, то она постоянна – этот факт можно доказать и в общем виде).

Впрочем, попробуем доказать непериодичность именно этой функции.

В самом деле, пусть $\exists T > 0\colon \forall x \to f(x + T) = f(x)$. Тогда, взяв конкретное значение $x = 0$, получим $f(T) = f(0)$, т.е. $\frac{T}{T^2 + 1} = 0$. Такое уравнение имеет единственное решение $T = 0$, а период должен быть положительным. Полученное противоречие показывает, что функция непериодична.

В конкретных задачах договоримся пока не проводить подобное доказательство.

Теперь введём дополнительные шаги исследования функции.

6. Полезно определить точки, при стремлении аргумента к которым функция неограниченно растёт («стремится к бесконечности»)[2]. Такие точки дают нам вертикальные прямые, к которым неограниченно приближается график функции – **вертикальные асимптоты** графика.

Так как знаменатель $x^2 + 1$ нигде не обращается в нуль, нет точек, при стремлении к которым $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ неограниченно растёт. График не имеет вертикальных асимптот.

7. Теперь поймём, как ведёт себя функция при неограниченном увеличении аргумента по модулю («стремлении x к бесконечности»). Если при этом значения функции стремятся к некоторому конечному числу, то существует горизонтальная прямая, к которой неограниченно приближается график функции – **горизонтальная асимптота** графика.

Так как $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{x + \frac{1}{x}}$, при всех $x > 0$ выполняется неравенство

$$0 < f(x) < \frac{1}{x}.$$

При неограниченном росте x значение $\frac{1}{x}$ неограниченно приближается к нулю, это же имеет место и для меньшего выражения $f(x)$, то есть график неограниченно приближается к горизонтальной прямой $y = 0$ (оси абсцисс). В силу нечётности функции это же имеет место при неограниченном росте по модулю отрицательных значений x, т.е. график имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ (более «аккуратной» формулировки здесь мы пока привести не можем).

8. На основании этих данных можно, не вычисляя значения функции в конкретных точках, построить некоторое приближение к искомому графику – **эскиз графика** функции. Он изображён на рис. 1.

---

[2] Определение предельного поведения аргумента и функции нам пока недоступно.

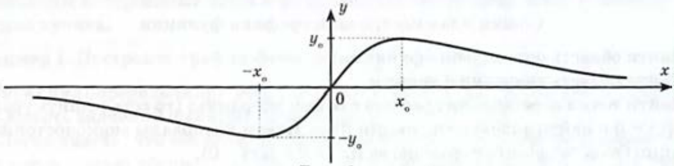


Рис. 1

Отсюда видно, что, скорее всего, найдётся положительное число x_0 такое, что на отрезке $[-x_0; x_0]$ функция возрастёт, а на лучах $(-\infty; -x_0]$ и $[x_0; +\infty)$ убывает. В точке x_0 достигается наибольшее значение $f(x)$ на всей числовой прямой, равное y_0. В точке $-x_0$ достигается наименьшее значение $f(x)$ на всей числовой прямой, равное $(-y_0)$.

9. Эти утверждения достаточно доказать для положительных значений x и y, для отрицательных нужно применить нечётность функции.

Как мы уже отмечали в п. 2.1.4, из неравенства $(x-1)^2 \geqslant 0$, верного при всех x, следует, что $f(x) \leqslant \frac{1}{2}$ при всех x, причём равенство достигается при $x = 1$. Поэтому наибольшее значение $f(x)$, равное $\frac{1}{2}$, достигается при $x = 1$, то есть $x_0 = 1$, $y_0 = \frac{1}{2}$.

Теперь построим достаточное количество точек на графике с положительными абсциссами, чтобы не осталось сомнений в монотонности функции (вывод о монотонности можно было сделать и аналитически).

Заполним таблицу:

x	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8
y	0,192	0,345	0,441	0,488	0,5	0,492	0,473	0,449	0,425

x	2	2,5	3	3,5	4	5	6	7	8
y	0,4	0,345	0,3	0,264	0,235	0,192	0,162	0,14	0,123

Как мы видим, при $x > 1$ с увеличением значений x значения y уменьшаются. Сомнений не остаётся! После этого можно окончательно вычертить график. Найденных точек более чем достаточно.

10. При построении графика для отрицательных значений x достаточно воспользоваться его симметрией относительно начала координат. Для соблюдения масштаба ограничимся значениями x, по модулю не превосходящими 2.

График функции $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ изображён на рис. 2.

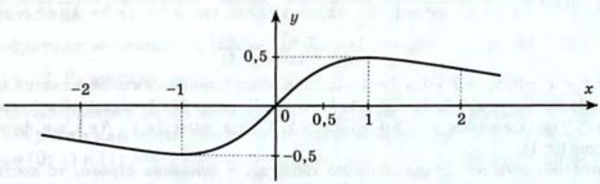


Рис. 2

Теперь мы можем зафиксировать следующий план исследования функции, который будем использовать с целью построения её графика.

Общий план построения графика функции

1. Найти область определения функции.
2. Найти область значений функции.
3. Найти точки пересечения графика с осями координат (то есть решить уравнение $f(x) = 0$ и найти значение функции $f(0)$). Найти интервалы знакопостоянства функции (то есть решить неравенства $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$).
4. Определить, является ли функция чётной, нечётной.
5. Определить, является ли функция периодической.
6. Выяснить, существуют ли вертикальные асимптоты графика.
7. Выяснить, существуют ли горизонтальные асимптоты графика.
8. На основании этих данных можно построить эскиз графика. При этом возникнут некоторые гипотезы о расположении графика: например, что на некотором промежутке функция, скорее всего, сначала возрастёт, потом убывает и где-то во внутренней точке x_0 промежутка принимает наибольшее значение.
9. Попытаться прояснить «поведение» графика, доказав или опровергнув возникшие гипотезы. Для этого можно:
   - по возможности применять аналитические соображения (т.е. приводить строгие доказательства);
   - использовать уже известные аналогичные свойства более простых функций;
   - если вышеописанные способы применить не получается, построить такое количество дополнительных точек на графике, чтобы не осталось сомнений в поведении графика (в любом случае построение «по точкам» не может считаться строгим доказательством нужных утверждений).
10. Завершить работу над графиком нужно, построив несколько дополнительных точек (если в этом возникает необходимость).

Следует отметить, что для некоторых сложных функций не все пункты этого плана могут быть реализованы изученными нами методами. Так, например, пункт, связанный с определением области значений, для функции $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ мы опустили.

* * *

Покажем, как можно аналитически доказать, что функция возрастает на отрезке $[0; 1]$ и убывает на луче $[1; +\infty)$, остальные выводы о монотонности следуют из нечётности функции. Пусть $x_1 > x_2 \geqslant 0$. Тогда

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{x_1^2 + 1} - \frac{x_2}{x_2^2 + 1} = \frac{x_1(x_2^2 + 1) - x_2(x_1^2 + 1)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} = \frac{x_1x_2^2 + x_1 - x_2x_1^2 - x_2}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} =$$

$$= \frac{(x_1 - x_2)(1 - x_1x_2)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)}.$$

Так как $x_1 - x_2 > 0$, $x_1^2 + 1 > 0$, $x_2^2 + 1 > 0$, знак всего выражения определяется знаком разности $1 - x_1x_2$. Но если $x_1 > x_2 \geqslant 1$, то $x_1x_2 > 1$, $1 - x_1x_2 < 0$, тогда $f(x_1) - f(x_2) < 0$ и функция убывает на луче $[1; +\infty)$; если же $1 \geqslant x_1 > x_2 \geqslant 0$, то $x_1x_2 < 1$, $1 - x_1x_2 > 0$ и $f(x_1) > f(x_2)$, т.е. функция возрастает на отрезке $[0; 1]$.

Если монотонность не установлена по таблице, а доказана строго, то достаточно взять 2 – 3 дополнительных точки на интервалах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$, чтобы окончательно определить вид графика. ■

Конечно, чем сложнее функция, тем сложнее будет элементарное аналитическое исследование монотонности, и, скорее всего, провести его не удастся.

Применим построенный план к функции, рассмотренной нами в примере 2б предыдущего пункта.

Пример 1. Построить график функции $y = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$.

1. Функция определена при всех $x \neq 1$ и $x \neq -1$, то есть $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

2. Область значений функции определять пока не будем.

3. Легко видеть, что значение $f(x)$ никогда не обращается в нуль (график не имеет общих точек с осью абсцисс), а $f(0) = -2$, поэтому график пересекает ось ординат в точке $(0; -2)$.

Преобразуем функцию: $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$.

Знак $f(x)$ совпадает со знаком знаменателя $x^2 - 1$; поэтому $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ и $f(x) < 0$ при $x \in (-1; 1)$.

4. Функция чётна (для всех $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = \frac{2}{(-x)^2-1} = \frac{2}{x^2-1} = f(x)$); значит, график симметричен относительно оси ординат и достаточно построить только часть графика при $x \geqslant 0$; далее применить симметрию относительно оси ординат.

5. Выше мы отмечали, что такие функции не могут быть периодическими. Можно доказать непериодичность именно этой функции.

В самом деле, пусть $\exists T > 0$: $\forall x \to f(x + T) = f(x)$. Взяв конкретное значение $x = 0$, получим $f(T) = f(0) = -2$ – противоречие, которое показывает, что функция непериодична, так как $f(x) = -2$ только при $x = 0$.

6. Знаменатель $x^2 - 1$ обращается в нуль в точках $x = 1$ и $x = -1$, а числитель дроби равен 2. Поэтому при стремлении x к 1 и к (-1) значения $f(x)$ неограниченно увеличиваются. График имеет вертикальные асимптоты $x = 1$ и $x = -1$.

7. Так как функция x^2, а вместе с ней и $x^2 - 1$ неограниченно растёт при стремлении x к бесконечности, обратная положительная величина неограниченно приближается к нулю, другими словами, при неограниченном росте x значение $\frac{2}{x^2-1}$ неограниченно приближается к нулю. График имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ (ось абсцисс).

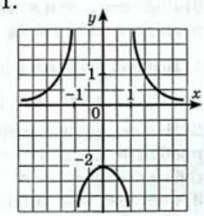


Рис. 3

8. На основании этих данных можно построить эскиз графика функции (рис. 3).

9. В точке $x = 0$ достигается наибольшее значение $f(x)$ на интервале $(-1; 1)$. Это легко доказать: при $-1 < x < 1$ выполняются неравенства $-1 \leqslant x^2 - 1 < 0$, поэтому отрицательная обратная величина $\frac{1}{x^2-1}$ принимает значения из промежутка $(-\infty; -1]$ и $\frac{2}{x^2-1} = f(x) \leqslant -2$. Равенство достигается при $x = 0$; $x^2 - 1 = -1 \Rightarrow f(x) = -2$.

Далее, $f(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty; -1)$ и $(-1; 0]$, убывает на промежутках $[0; 1)$ и $(1; +\infty)$. Так как функция чётна, то достаточно провести доказательство для промежутков $[0; 1)$ и $(1; +\infty)$. На $(1; +\infty)$ функция $x^2 - 1$ возрастает и положительна, значит, обратная величина $\frac{1}{x^2-1}$ (а вместе с ней и $\frac{2}{x^2-1}$) убывает. В самом деле, если $x_1 > x_2 > 1$, то $x_1{}^2 - 1 > x_2{}^2 - 1 > 0$; значит $0 < \frac{1}{x_1{}^2-1} < \frac{1}{x_2{}^2-1}$, т.е. $f(x_1) < f(x_2)$ и функция убывает на $(1; +\infty)$. Аналогично, на $[0; 1)$ функция $x^2 - 1$ возрастает и отрицательна, значит, обратная величина $\frac{1}{x^2 - 1}$ (а вместе с ней и $\frac{2}{x^2 - 1}$) убывает. В самом деле, если $1 > x_1 > x_2 > 0$, то $0 > x_1^2 - 1 > x_2^2 - 1 > -1$; значит, $\frac{1}{x_1^2 - 1} < \frac{1}{x_2^2 - 1} < 0$, то есть $f(x_1) < f(x_2)$, и функция убывает на $[0; 1)$.

10. Если исследование функции на монотонность проведено аналитически, то для окончательного построения графика достаточно взять по 2–3 дополнительных точки на каждом из интервалов $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$; при отрицательных значениях x достаточно воспользоваться чётностью функции.

Например, построим таблицу:

x	0,5	0,8	1,5	2	3
y	–2,67	–4,44	2,4	1,33	0,75

После этого можно окончательно вычертить график. Он изображён на рис. 4.

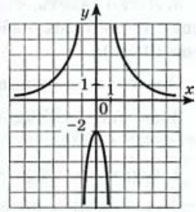


Рис. 4

320 1) Найдите нули функций $y = x^3$; $y = 4x^2 - 1$; $y = \frac{1}{x}$; $y = \sqrt{x}$; $y = 3x + 1$, решив соответствующие уравнения. В каких точках графики этих функций пересекут ось Ox?

2) Найдите, при каких x данные функции принимают положительные значения, решив соответствующие неравенства. На каких промежутках по оси Ox график каждой из этих функций лежит выше оси Ox? Можно ли выяснить, на каких промежутках график функции лежит ниже оси Ox без использования графика?

3) Найдите среди этих функций чётную и нечётную функции. Как это свойство отражается на графике функции?

321 1) Выберите из этих функций те, графики которых вы уже умеете строить:

$y = x^3$; $y = 4x^2 - 1$; $y = \frac{1}{x}$; $y = \sqrt{x}$; $y = 3x + 1$; $y = \frac{x}{x^2 + 1}$.

2) Что вы можете использовать для построения графика последней функции? Попробуйте построить её график. Сопоставьте ход выполнения этого задания со способом построения этого графика, описанным на с. 83 –85.

3) Составьте общий план построения функции, сравните свой вариант с планом на с. 86.

322 Постройте график функции:

а) $y = \frac{x}{|x|}$; б) $y = \frac{x - 1}{x^2 - 1}$; в) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$; г) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$.

323 Вычислите:

а) $\frac{\sqrt{70}}{\sqrt{2,8}}$; в) $\sqrt{5\frac{1}{16} \cdot 2\frac{7}{9}}$; д) $(3\sqrt{2} - \sqrt{3})(3\sqrt{2} + \sqrt{3})$;

б) $\sqrt{\frac{11,7 \cdot 6}{0,15 \cdot 13}}$; г) $\sqrt{61^2 - 60^2}$; е) $\sqrt{7 + \sqrt{13}} \cdot \sqrt{7 - \sqrt{13}}$.

324 Что больше:

а) $2\sqrt{7}$ или $3\sqrt{3}$; б) $\sqrt{11}$ или $2\sqrt{3}$; в) $4\sqrt{6}$ или $\sqrt{95}$; г) 5,5 или $\sqrt{31}$?

325 Упростите:

а) $\frac{95}{(5\sqrt{5})^2}$; б) $\sqrt{8}+\sqrt{50}-\sqrt{72}$; в) $(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2$; г) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$.

326 При каких x имеет смысл выражение:

а) $\frac{5x}{\sqrt{2-3x}}$; б) $\frac{\sqrt{x+8}}{\sqrt{1-0,5x}}$; в) $\sqrt{\frac{x}{(4x+1)(2-x)}}$?

327 Решите графически уравнение $\sqrt{x}=6-x$.

D **328** Постройте график функции:

а) $y=\frac{1}{|x|}$; б) $y=\frac{x-1}{x^3-1}$; в) $y=\frac{2x}{x^2-4}$; г) $y=\frac{2x}{x^2+4}$.

329 Упростите:

а) $(2\sqrt{6}-\sqrt{3})(2\sqrt{6}+\sqrt{3})$; б) $\sqrt{(2-\sqrt{6})^2}$; в) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$; г) $\sqrt{9+18m^2+9m^4}$.

330 Расположите числа $2\sqrt{11}; 4\sqrt{3}$; 6,6 в порядке возрастания.

331 Сколько целых чисел расположено между $\sqrt{5}$ и $\sqrt{53}$?

332 При каких значениях x имеет смысл выражение $\sqrt{x}\cdot\sqrt{-x}$?

C **333*** Последовательность $\{a_n\}$ задаётся следующим образом: $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$ для любого натурального n. Докажите, что $a_{100}>14$.

2.2.2. Преобразования графиков функций

Нечто трудное делать лёгким – заслуга.

Иммануил Кант (1724–1804),
немецкий философ

При построении графиков линейной и квадратичной функций мы использовали такое преобразование как сдвиг более простого вспомогательного графика ($y=kx$; $y=x^2$) вдоль осей координат. Возникает вопрос, можем ли мы использовать подобное преобразование в общем случае для функции $y=f(x)$? Ведь помимо прямой и параболы мы умеем строить и график $y=x^3$ (кубическую параболу), и $y=\frac{k}{x}$, $k\neq 0$ (гиперболу), а также $y=|x|$ («уголок»).

Это позволило бы нам строить графики более сложных функций без специального исследования их свойств. Отпала бы необходимость и в построении дополнительных точек. Зачем все это делать, если графики этих стандартных функций хорошо известны? В этом пункте мы ответим на этот вопрос и познакомимся с другими случаями преобразования графика.

I. Параллельный перенос (сдвиг) графика вдоль оси ординат

Сравним функции $y = f(x)$ и $y = f(x) + h$, $h \in \boldsymbol{R}$. При преобразовании графика $y = f(x)$ в график $y = f(x) + h$ ($y = f(x) \to y = f(x) + h$) все значения функции $y = f(x) + h$ станут на h больше значений функции $y = f(x)$ в соответствующих точках.

Поэтому **график функции $y = f(x) + h$ можно получить из графика $y = f(x)$ с помощью сдвига вдоль оси ординат на h единиц вверх при $h > 0$ или на $|h|$ единиц вниз при $h < 0$.**

Пример 1.

Построить график $y = \frac{1}{x} - 1$, если известен график $y = \frac{1}{x}$.

Решение.

Сдвинем график $y = \frac{1}{x}$ вдоль оси ординат на 1 единицу вниз ($-1 < 0$). Получим график функции $y = \frac{1}{x} - 1$, изображённый на рис. 1.

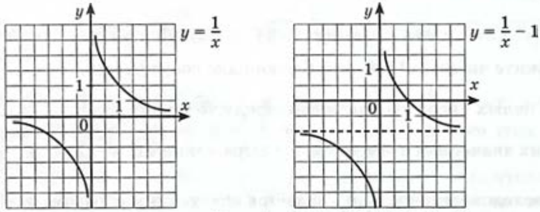


Рис. 1

График $y = \frac{1}{x}$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$ и горизонтальную асимптоту $y = 0$; график $y = \frac{1}{x} - 1$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$ и горизонтальную асимптоту $y = -1$.

II. Параллельный перенос (сдвиг) графика вдоль оси абсцисс

Рассмотрим преобразование $y = f(x) \to y = f(x - d)$, $d \in \boldsymbol{R}$. При таком преобразовании происходит «запаздывание» на величину d по переменной x. Если какое-то значение y_0 принималось функцией в точке 0, то сдвинутая функция принимает его «с запаздыванием» в точке d. Если график $y = f(x)$ имел вертикальную асимптоту $x = x_0$, то теперь значения функции стремятся к бесконечности при $x - d \to x_0$, то есть при $x \to x_0 + d$; имеем вертикальную асимптоту $x = x_0 + d$.

Значит, **график функции $y = f(x - d)$ можно получить из графика $y = f(x)$ с помощью сдвига вдоль оси абсцисс на d единиц вправо при $d > 0$ или на $|d|$ единиц влево при $d < 0$.**

Пример 2.

Построить график $y = \frac{1}{x - 1}$, если известен график $y = \frac{1}{x}$.

Решение.

Сдвинем график $y = \frac{1}{x}$ вдоль оси абсцисс на 1 единицу вправо ($1 > 0$). Получим график функции $y = \frac{1}{x - 1}$, изображённый на рис. 2.

График имеет вертикальную асимптоту $x = 1$ и горизонтальную асимптоту $y = 0$.

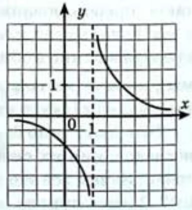


Рис. 2

Объединяя случаи I и II, мы видим, что **график функции $y = f(x - d) + h$ можно получить при помощи двух последовательных параллельных переносов: сдвига графика $y = f(x)$ на $|d|$ единиц вдоль оси абсцисс и сдвига полученного графика $y = f(x - d)$ на $|h|$ единиц вдоль оси ординат** (с соответствующими оговорками в случае положительных или отрицательных значений d и h).

Иначе можно сказать, что график **функции $y = f(x - d) + h$ можно получить параллельным переносом графика $y = f(x)$ на вектор $(d; h)$.**

Пример 3.

Построить график функции $y = |x + 3| - 1$.

Решение.

График $y = |x + 3| - 1$ получается из графика $y = |x|$ сдвигом на 3 влево вдоль оси абсцисс и на 1 вниз вдоль оси ординат (рис. 3).

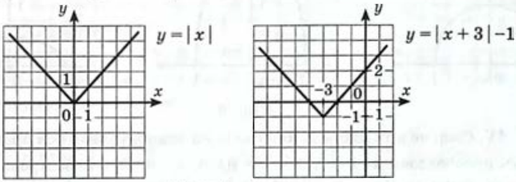


Рис. 3

Координаты вершины «уголка» $(-3; -1)$. График пересекает ось абсцисс в точках $(-4; 0)$ и $(-2; 0)$, ось ординат в точке $(0; 2)$. Это следует из того, что стороны угла параллельны прямым $y = x$ и $y = -x$ и образуют углы в $45°$ с осью абсцисс (для нахождения точек пересечения с осью абсцисс можно решить уравнение $|x + 3| = 1$, а для нахождения точки пересечения с осью ординат можно подставить $x = 0$ в выражение $y = |x + 3| - 1$, но это делать необязательно, так как координаты точек пересечения очевидны из геометрических соображений).

Функция убывает на луче $(-\infty; -3]$ и возрастает на луче $[-3; +\infty)$; наименьшее значение функции на всей числовой оси достигается в точке $x_0 = -3$ и равно -1. Эти факты также можно считать геометрически очевидными. Для построения графика нет необходимости искать дополнительные точки; достаточно провести две прямые через точку $(-3; -1)$ под углом $45°$ к оси абсцисс. ■

* * *

В некоторых случаях удобно использовать и другие преобразования известных графиков. Познакомимся с этими преобразованиями.

III. Сжатие или растяжение графика относительно оси абсцисс

Рассмотрим преобразование $y = f(x) \to y = kf(x)$, $k > 0$. При фиксированных абсциссах все ординаты точек графика увеличиваются в k раз, если $k > 1$; если $0 < k < 1$, происходит уменьшение всех ординат точек графика в $\frac{1}{k}$ раз. Таким образом, при $k > 1$ фактически происходит растяжение от оси абсцисс в k раз; а при $0 < k < 1$ – сжатие к оси абсцисс в $\frac{1}{k}$ раз.

Значит, график функции $y = kf(x)$, $k > 0$ можно получить из графика $y = f(x)$ с помощью:

- **сжатия графика $y = f(x)$ к оси абсцисс в $\frac{1}{k}$ раз $(0 < k < 1)$;**
- **растяжения графика $y = f(x)$ от оси абсцисс в k раз $(k > 1)$.**

Область определения функции при таком преобразовании не меняется.

Пример 4.

Построить график функции $y = 2\sqrt{1-x^2}$, $y = \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$.

Решение.

График $y = \sqrt{1-x^2}$ – верхняя полуокружность радиуса 1 с центром в начале координат.

График $y = 2\sqrt{1-x^2}$ получается из него растяжением от оси абсцисс в 2 раза, график $y = \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$ – сжатием к оси абсцисс в 2 раза.

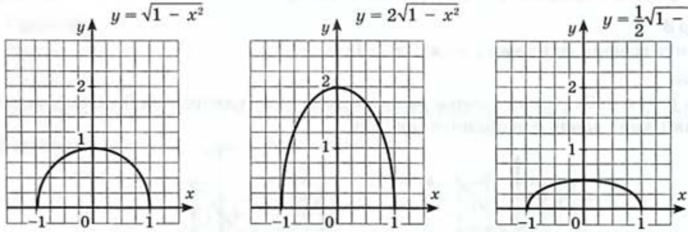


Рис. 4

IV. Сжатие или растяжение графика относительно оси ординат

Рассмотрим преобразование $y = f(x) \to y = f(kx)$, $k > 0$. При фиксированных ординатах все абсциссы точек графика $y = f(x)$уменьшаются в k раз (если значение y_0 функция $f(x)$ принимала в точке x_0, то функция $f(kx)$ принимает это значение в точке x_1 такой, что $kx_1 = x_0$, то есть $x_1 = \frac{x_0}{k}$. Например, если график $y = f(x)$ имел вертикальную асимптоту $x = 1$, то график $y = f(2x)$ имеет вертикальную асимптоту $x = \frac{1}{2}$). Таким образом, при $k > 1$ имеет место сжатие к оси ординат в k раз; при $0 < k < 1$ – растяжение от оси ординат в $\frac{1}{k}$ раз.

Область определения функции при таком преобразовании соответственно сжимается или растягивается.

Значит, график функции $y = f(kx)$, $k > 0$ можно получить из графика $y = f(x)$ с помощью:

- **растяжения графика $y = f(x)$ от оси ординат в $\frac{1}{k}$ раз ($0 < k < 1$);**
- **сжатия графика $y = f(x)$ к оси ординат в k раз ($k > 1$).**

Пример 5.

Построить график функции $y = \sqrt{1-4x^2}$, $y = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$.

Решение.

График $y = \sqrt{1-4x^2} = \sqrt{1-(2x)^2}$ получается из графика $y = \sqrt{1-x^2}$ сжатием в 2 раза к оси ординат (рис. 5а).

Область определения функции – отрезок $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

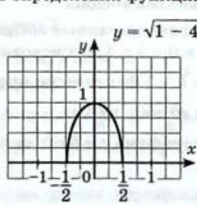


Рис. 5а

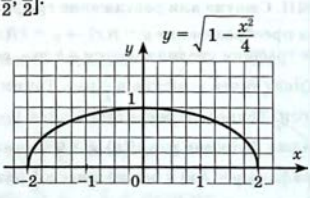


Рис. 5б

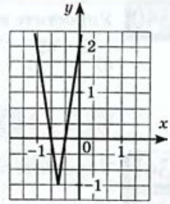


Рис. 6

График $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$ получается из графика $y = \sqrt{1 - x^2}$ растяжением в 2 раза от оси ординат (рис. 5б).

Область определения функции – отрезок $[-2; 2]$.

Пример 6.

Построить график функции $y = |6x + 3| - 1$.

Решение.

График функции $y = |6x + 3| - 1$ получается из графика $y = |x + 3| - 1$, построенного в примере 3, сжатием к оси ординат в 6 раз.

Этот график изображён на рис. 6.

К **334** 1) Постройте графики функций $y = 2x$ и $y = x^2$.

2) Постройте график $y = 2x - 1$, используя график $y = 2x$. Постройте график функции $y = (x + 3)^2 - 1$, используя график $y = x^2$. Какое преобразование вспомогательного графика вы использовали?

3) Можно ли использовать подобный способ для построения графика функции $y = |x + 3| - 1$? Какой вспомогательный график вы будете использовать? Постройте график этой функции и сравните его с графиком на с. 91.

4) Подумайте, можно ли использовать данный способ для построения графика $y = f(x - d) + h$. Составьте правило построения графика такой функции и сопоставьте свои выводы с выводами на с. 91.

335 Постройте график функции, представив её в виде $y = (x - d)^3 + h$:

а) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$; б) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 3$; в) $y = x^3 + 9x^2 + 27x + 30$.

336 Постройте график функции:

а) $y = \frac{1}{x + 2}$; б) $y = \frac{1}{x + 2} + 1$.

337 1) Постройте графики $y = x^2 + 1$ и $y = 2(x^2 + 1)$. Сравните расположения графиков относительно оси Ox. Чем отличается график $y = 2(x^2 + 1)$ от графика $y = x^2 + 1$?

2) Постройте график $y = 4x$ и $y = 2x$. Чем отличается график $y = 4x$ от графика $y = 2x$?

3) Обобщите сделанные вами наблюдения. Как они могут помочь построить график $y = 2\sqrt{1 - x^2}$, если график $y = \sqrt{1 - x^2}$ уже построен? Какое преобразование вспомогательного графика вы будете использовать?

4) Подумайте, можно ли использовать данный способ для построения графика $y = kf(x)$, $k > 0$. Рассмотрите случай $0 < k < 1$. Составьте правило построения графика такой функции и сопоставьте свои выводы с выводами на с. 91.

5) Познакомьтесь со способом построения графика $y = f(kx)$, $k > 0$.

338 Постройте график функции $y = f(x)$, где $f(x) = \frac{1}{x}$. С его помощью постройте график функции $y = \frac{1}{2x}$ двумя способами: сначала как график функции $y = \frac{1}{2}f(x)$, затем как график функции $y = f(2x)$.

П **339** Найдите значение выражения:

а) $\frac{\sqrt{1{,}8} \cdot \sqrt{6{,}3}}{\sqrt{0{,}14}}$; б) $\frac{21\sqrt{7}}{\sqrt{147} + \sqrt{63} - 7\sqrt{3}}$; в) $\frac{\sqrt{2} - 2}{\sqrt{14} - 2\sqrt{7}}$.

340 Упростите выражение:

а) $\dfrac{x-49}{\sqrt{x}-7}$; в) $\dfrac{5\sqrt{t}-t\sqrt{5}}{\sqrt{t}-\sqrt{5}}$; д) $\dfrac{8\sqrt{y}-3}{\sqrt{y}}+\dfrac{3\sqrt{y}}{y}$;

б) $(\sqrt{a}+3\sqrt{b})^2-6\sqrt{ab}$; г) $\dfrac{c-6\sqrt{c}+5}{\sqrt{c}-5}$; е) $\dfrac{\sqrt{b}+4}{\sqrt{b}-4}-\dfrac{\sqrt{b}-4}{\sqrt{b}+4}$.

341 Упростите выражение $\sqrt{69-16\sqrt{5}}$.

342 Определите, между какими двумя последовательными натуральными числами находится число $\frac{4}{3}\sqrt{63}$.

343 Решите неравенство $(1-\sqrt{2})x > 2-2\sqrt{2}$.

D **344** Постройте графики функций, представив их в виде $y=(x-d)^3+h$:

а) $y=x^3-3x^2+3x-1$;

б) $y=x^3-3x^2+3x-3$;

в) $y=x^3-15x^2+75x-120$.

345 Постройте графики функций:

а) $y=5-\dfrac{1}{x}$; б) $y=5-\dfrac{1}{x+1}$.

346 Постройте график функции $y=f(x)$, где $f(x)=\sqrt{x}$. С его помощью постройте графики функции $y=3\sqrt{x}$ двумя способами. Сначала как график функции $y=3f(x)$, затем как график функции $y=f(9x)$.

347 Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{\sqrt{2,8}\cdot\sqrt{4,2}}{\sqrt{0,24}}$; б) $\dfrac{\sqrt{99}+\sqrt{363}-3\sqrt{11}}{33\sqrt{3}}$; в) $\dfrac{\sqrt{5}-5}{\sqrt{15}-\sqrt{3}}$.

348 Упростите выражение:

а) $\dfrac{v-16}{\sqrt{v}+4}$; в) $\dfrac{30\sqrt{k}-k\sqrt{30}}{\sqrt{k}-\sqrt{30}}$; д) $\dfrac{4\sqrt{m}-7}{\sqrt{m}}+\dfrac{7\sqrt{m}}{m}$;

б) $(2\sqrt{q}-\sqrt{p})^2+4\sqrt{qp}$; г) $\dfrac{w-7\sqrt{w}+12}{\sqrt{w}-3}$; е) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-5}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+5}$.

349 Определите, между какими двумя последовательными натуральными числами находится число $\frac{3}{4}\sqrt{112}$.

350 Упростите выражение $\sqrt{67+16\sqrt{3}}$.

351 Решите неравенство $(2\sqrt{2}-3)x \leqslant (\sqrt{2}-1)^2$.

C **352*** Известно, что среди чисел $x+y$, $x-y$, x^2-y^2 и x^2+y^3 ровно одно отрицательное, а остальные положительны. Какие знаки могут иметь числа x и y?

2.2.3*. График дробно-линейной функции

Знание должно служить творческим целям человека. Мало накоплять знания; нужно распространять их возможно шире и применять в жизни.

Н. А. Рубакин (1862–1946)
русский просветитель, книговед, библиограф, писатель.

В предыдущем пункте мы видели, что преобразования графиков простых функций помогают строить графики более сложных функций. В этом пункте с помощью таких же преобразований мы ещё более расширим свои возможности по построению графиков.

Рассмотрим, например, функции $y = \dfrac{2x-1}{x+2}$, $y = \dfrac{x}{x-3}$, $y = \dfrac{x+3}{5x}$. На первый взгляд графики этих новых для нас функций можно построить только с помощью известного нам плана исследования функций, который довольно громоздок. Однако это можно сделать проще. Прежде чем выявить способ построения графиков данных функций, введём для них название.

Определение 1. Функция вида $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, где $a, b, c, d \in \boldsymbol{R}$, причём $c \neq 0$ и разность $ad - bc \neq 0$, называется ***дробно-линейной функцией***.

Если $c = 0$, то функция – линейная ($y = \dfrac{ax+b}{d}$, требуется ещё условие $d \neq 0$). Если $ad - bc = 0$, то $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$, коэффициенты числителя пропорциональны коэффициентам знаменателя, и функция принимает одно и то же постоянное значение при всех x из её области определения (например, $y = \dfrac{2x+4}{3x+6} = \dfrac{2(x+2)}{3(x+2)} = \dfrac{2}{3}$ при $x \neq -2$). Величину $ad - bc$ обычно обозначают греческой буквой Δ (читается «дельта»).

Попробуем преобразовать выражение $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ к известной нам функции. Имеем:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{x+\frac{b}{a}}{x+\frac{d}{c}} = \frac{a}{c}\left(\frac{x+\frac{d}{c}+\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{x+\frac{d}{c}}\right) = \frac{a}{c}\left(1+\frac{bc-ad}{ac\left(x+\frac{d}{c}\right)}\right) = \frac{a}{c} - \frac{\Delta}{c^2} \cdot \frac{1}{x+\frac{d}{c}}.$$

Обозначим $\dfrac{a}{c} = y_0$, $-\dfrac{d}{c} = x_0$, $-\dfrac{\Delta}{c^2} = k$. Тогда $y = y_0 + \dfrac{k}{x-x_0}$. Значит, график $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ можно получить из графика $y = \dfrac{k}{x}$ параллельным переносом на вектор $(x_0; y_0)$.

Функция $y = \dfrac{k}{x}$ нам хорошо известна, это обратная пропорциональность. Её график – гипербола. Как мы знаем, функция $y = \dfrac{k}{x}$ определена при всех $x \neq 0$. При $k > 0$ она убывает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$, этот график изображён на рис. 1а. При $k < 0$ она возрастает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$ – рис. 1б. График имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ и вертикальную асимптоту $x = 0$.

Таким образом, график дробно-линейной функции – это гипербола (если $\Delta \neq 0$, то $k \neq 0$, следовательно, мы исключили случай постоянной функции $y = y_0$).

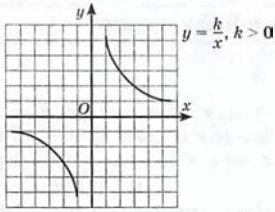


Рис. 1а

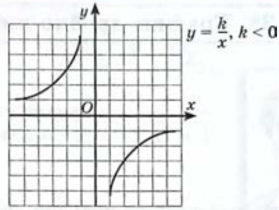


Рис. 1б

Отметим теперь свойства дробно-линейной функции.

1. Дробно-линейная функция $y = y_0 + \dfrac{k}{x - x_0} = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ определена при всех $x \neq x_0$, то есть $x \neq -\dfrac{d}{c}$. Иначе говоря, $D(f) = \left(-\infty; -\dfrac{d}{c}\right) \cup \left(-\dfrac{d}{c}; +\infty\right)$.

2. Графиком дробно-линейной функции является *гипербола*.

3. При $\Delta > 0$ (то есть $k < 0$) функция возрастает на $\left(-\infty; -\dfrac{d}{c}\right)$ и на $\left(-\dfrac{d}{c}; +\infty\right)$. При $\Delta < 0$ (то есть $k > 0$) функция убывает на $\left(-\infty; -\dfrac{d}{c}\right)$ и на $\left(-\dfrac{d}{c}; +\infty\right)$.

4. График имеет горизонтальную асимптоту $y = \dfrac{a}{c}$ и вертикальную асимптоту $x = -\dfrac{d}{c}$.

Рассмотрим примеры построения графиков дробно-линейных функций.

Пример 1.

Построить график функции $y = \dfrac{2x - 1}{x + 2}$.

Решение.

Имеем: $y = 2 \cdot \dfrac{x - \frac{1}{2}}{x + 2} = 2 \cdot \dfrac{x + 2 - 2 - \frac{1}{2}}{x + 2} = 2\left(1 - \dfrac{\frac{5}{2}}{x + 2}\right) = 2 - \dfrac{5}{x + 2}$. Функция определена при $x \neq -2$, возрастает на $(-\infty; -2)$ и на $(-2; +\infty)$. График получается из гиперболы $y = -\dfrac{5}{x}$ параллельным переносом на вектор $(-2; 2)$ и имеет горизонтальную асимптоту $y = 2$ и вертикальную асимптоту $x = -2$.

Для построения эскиза графика целесообразно изобразить сначала асимптоты $y = 2$ и $x = -2$ и учесть, что график расположен во II и IV четвертях относительно этих асимптот. Этот эскиз изображён на рис. 2.

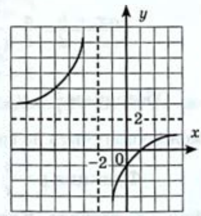


Рис. 2

Для уточнения расположения графика вычислим координаты точек пересечения графика с координатными осями.

С осью Ox: $y = 0$ при $x = \dfrac{1}{2}$;

с осью Oy: при $x = 0$, $y = -\dfrac{1}{2}$.

Найдём ещё 2–3 дополнительных точки на каждой из двух ветвей гиперболы.

x	-1	2	-3	-4	-5	-7
y	-3	$\frac{1}{2}$	7	$4\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	3

Построим теперь график $y = \dfrac{2x - 1}{x + 2}$, он изображён на рис. 3.

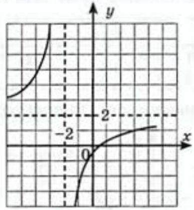


Рис. 3

Следует отметить, что гипербола $y = \dfrac{k}{x}$ центрально-симметрична относительно точки (0; 0) и имеет оси симметрии $y = x$ и $y = -x$. Поэтому график дробно-линейной функции $y = \dfrac{ax + b}{cx + d} = y_0 + \dfrac{k}{x - x_0}$ имеет центр симметрии $(x_0;\ y_0)$ и оси симметрии $y = y_0 + (x - x_0)$ и $y = y_0 - (x - x_0)$ – биссектрисы вертикальных прямых углов, образованных асимптотами графика.

Итак, можем сформулировать следующий способ построения графика дробно-линейной функции.

Чтобы построить график функции $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, нужно:

1. Преобразовать формулу $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ к виду $y = y_0 + \dfrac{k}{x - x_0}$.
2. Построить эскиз графика с помощью параллельного переноса гиперболы $y = \dfrac{k}{x}$ на вектор $(x_0;\ y_0)$, начиная с изображения асимптот $y = \dfrac{a}{c}$ и $x = -\dfrac{d}{c}$.
3. Вычислить координаты точек пересечения графика с осями координат.
4. Найти координаты дополнительных точек для уточнения графика.
5. Построить график функции.

Пример 2.

Построить график функции $y = \dfrac{x}{x - 3}$.

Решение.

1. Имеем: $y = \dfrac{x - 3 + 3}{x - 3} = 1 + \dfrac{3}{x - 3}$. Функция определена при $x \neq 3$, убывает на $(-\infty;\ 3)$ и на $(3;\ +\infty)$. График функции получается из гиперболы $y = \dfrac{3}{x}$ параллельным переносом на вектор (3; 1) и имеет горизонтальную асимптоту $y = 1$ и вертикальную асимптоту $x = 3$.

2. Для построения эскиза графика изобразим сначала асимптоты $y = 1$ и $x = 3$ и учтём, что график расположен в I и III четвертях относительно этих асимптот (рис. 4).

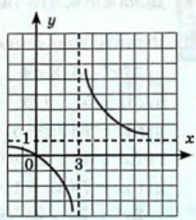


Рис. 4

3. $y(0) = \dfrac{0}{0-3} = 0$. Начало координат лежит на графике.

4. Найдём координаты дополнительных точек для каждой из двух ветвей гиперболы.

x	-1	2	1	4	5	7
y	$\frac{1}{4}$	-2	$-\frac{1}{2}$	4	$2\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$

Построим теперь график окончательно. Он изображён на рис. 5.

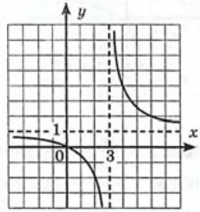


Рис. 5

353 1) Выберите из этих функций те, графики которых вы можете построить без вспомогательного исследования:

$y = -\dfrac{5}{x}$; $y = -\dfrac{5}{x+2}$; $y = -\dfrac{5}{x+2} + 2$; $y = \dfrac{2x-1}{x+2}$.

2) Что вы можете использовать для построения графика последней функции? Попробуйте преобразовать формулу этой функции к известному виду и построить её график. Сопоставьте ход выполнения этого задания со способом построения этого графика, описанным на с. 96.

3) Постройте общий план построения функции $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, сравните свой вариант с планом на с. 96.

354 Постройте графики функций:

а) $y = \dfrac{x+1}{x}$; б) $y = \dfrac{x}{x+1}$; в) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$; г) $y = \dfrac{2x+1}{x-2}$.

355 Постройте график функции $y = \dfrac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3}$.

356 Докажите, что число $(2-\sqrt{5})\sqrt{9+4\sqrt{5}}$ является рациональным.

357 Докажите, что число $1-\sqrt{3}$ является корнем уравнения $x^2 + x\sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 = 0$.

358 Решите уравнение:

а) $27x^2 - 6\sqrt{3}x + 1 = 0$;

б) $(3x-5)^2 - (2x+4)^2 = (x+3)^2$;

в) $(8x-1)(3x+5) - (2x-1)(8x+6) = 33x + 53$;

г) $7x^2 + 4x - 11 = 0$;

д) $(5x-7)(8x+1) = (8x+1)^2$;

е) $\dfrac{2x^2+3x}{5} + \dfrac{3x^2+4x}{7} = \dfrac{5-x}{2}$.

359 Составьте приведённое квадратное уравнение, корнями которого являются числа $5\sqrt{2} - \sqrt{7}$ и $5\sqrt{2} + \sqrt{7}$.

360 Вычислите:

а) $|-5| + 6 - 11$; б) $|-5 + 6| - 11$; в) $|-5 + 6 - 11|$; г) $|-5 + 6| + |-11|$.

361 Решите уравнения:

а) $|-x + 6| = 6$; б) $|-2x + 4| = -4$; в) $|x + 14| = |6x|$; г) $|2x + 12| = -|x|$.

D **362** Постройте графики функций:

а) $y = \dfrac{x-1}{x}$; б) $y = \dfrac{x}{x-1}$; в) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$; г) $y = \dfrac{3x+2}{2x-1}$.

363 Постройте график функции $y = \dfrac{x^2 - 10x + 9}{x^2 - 5x + 4}$.

364 Решите уравнение:

а) $3x^2 + 2\sqrt{51} \cdot x + 17 = 0$;

б) $(3x + 5)^2 - (2x - 4)^2 = (3 - x)^2$;

в) $(4x - 1)(3x + 10) - (x - 1)(4x + 6) = 35x + 106$;

г) $13x^2 + 4x - 9 = 0$;

д) $(5x - 11)(3x + 5) = (3x + 5)^2$.

C **365*** Если в произведении двух чисел первый множитель увеличить на 1, а второй уменьшить на 1, то произведение увеличится на 2011. Как изменится произведение исходных чисел, если, наоборот, первый множитель уменьшить на 1, а второй увеличить на 1?

2.2.4. Преобразование графиков: симметрия относительно осей координат. График $y = |f(x)|$ и $y = f(|x|)$

Человек, который знает «как», всегда найдёт работу, а человек, который знает «почему», будет его начальником.

Д. Рейвич (р. 1938), американский педагог

В этом пункте мы продолжим изучать преобразования графиков и выясним, как с их помощью построить графики функций с модулем.

Сначала уточним свои представления о построении графика, симметричного данному.

I. Симметрия относительно оси абсцисс

Рассмотрим преобразование $y = f(x) \to y = -f(x)$. При фиксированных абсциссах все ординаты точек графика $y = -f(x)$ противоположны ординатам точек $y = f(x)$.

Значит, *график функции* $y = -f(x)$ можно получить из графика $y = f(x)$ с помощью осевой симметрии относительно оси абсцисс.

II. Симметрия относительно оси ординат

Рассмотрим преобразование $y = f(x) \to y = f(-x)$. При фиксированных ординатах все абсциссы точек графика $y = f(-x)$ противоположны абсциссам точек $y = f(x)$.

Значит, *график функции* $y = f(-x)$ можно получить из графика $y = f(x)$ с помощью осевой симметрии относительно оси ординат.

III. Симметрия относительно начала координат

Последовательное применение рассмотренных выше двух преобразований: $y = f(x) \to y = -f(-x)$ меняет абсциссы и ординаты точек графика на противоположные.

Значит, *график функции* $y = -f(-x)$ можно получить из графика $y = f(x)$ с помощью центральной симметрии относительно начала координат.

Рассмотрим примеры применения симметрии при построении графиков.

Пример 1.

Построить график функции $y = -\sqrt{x}$, $y = \sqrt{-x}$, $y = -\sqrt{-x}$.

Решение.

Нужно применить преобразования I – III к графику вспомогательной функции $y = \sqrt{x}$. В первом случае областью определения функции будет луч $[0; +\infty)$, во втором и третьем случаях – луч $(-\infty; 0]$. Эти графики изображены на рис. 1.

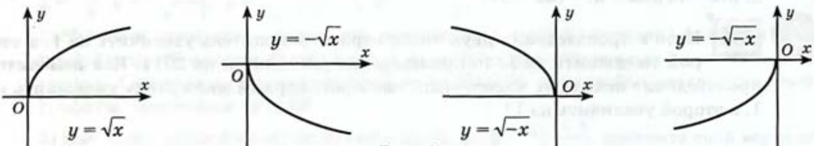


Рис. 1

Заметим, что в результате преобразования I область определения исходной функции не меняется. При преобразованиях II и III область определения меняется на множество из $\boldsymbol{R}$, симметричное $D(f)$ относительно начала координат. Если функция $f(x)$ четна, то в результате преобразования II её график останется на месте (не изменится как множество точек плоскости), если нечётная – график не изменится при преобразовании III.

* * *

Рассмотрим ещё несколько важных преобразований графика, использующих симметрию.

IV. $y = f(x) \to y = |f(x)|$

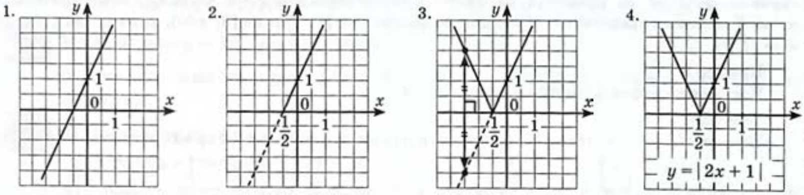
Так как $|f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{ если } f(x) \geqslant 0; \\ -f(x), \text{ если } f(x) < 0, \end{cases}$ часть графика $y = f(x)$, лежащая выше и на оси абсцисс, совпадает с соответствующей частью графика $y = |f(x)|$; а часть графика $y = f(x)$, лежащая ниже оси абсцисс, симметрична соответствующей части графика $y = |f(x)|$ относительно этой оси.

Значит, *чтобы построить график функции* $y = |f(x)|$, *можно*:

1. Начертить вспомогательный график $y = f(x)$.
2. Часть графика, лежащую выше и на оси абсцисс, оставить неизменной.
3. Часть графика, лежащую ниже оси абсцисс, отразить симметрично относительно этой оси.

Искомый график будет объединением множеств точек, описанных в пунктах 2 – 3.

Так, график функции $y = |2x + 1|$ может быть построен из графика $y = 2x + 1$ с помощью этого способа следующим образом:



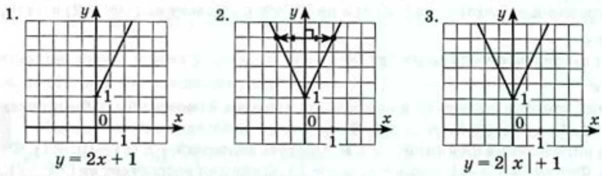
V. $y = f(x) \to y = f(|x|)$

При неотрицательных значениях аргумента $y = f(|x|) = f(x)$, значит, часть графика $y = f(|x|)$, лежащая правее и на оси ординат, совпадает с графиком $y = f(x)$. Если же значения аргумента отрицательны, то $y = f(|x|) = f(-x)$, значит, часть графика $y = f(|x|)$, лежащая левее оси ординат, симметрична $y = f(x)$ относительно этой оси.

Значит, *чтобы построить график функции $y = f(|x|)$ можно*:

1. Начертить часть вспомогательного графика $y = f(x)$, лежащую правее и на оси ординат.
2. Отразить эту часть симметрично оси ординат.
3. Искомый график будет объединением множеств, изображённых в пунктах 1 – 2.

Так, график функции $y = 2|x| + 1$ может быть построен из графика $y = 2x + 1$ с помощью этого способа следующим образом:



Заметим, что график функции $y = f(|x|)$ симметричен относительно оси ординат. Эта функция чётная.

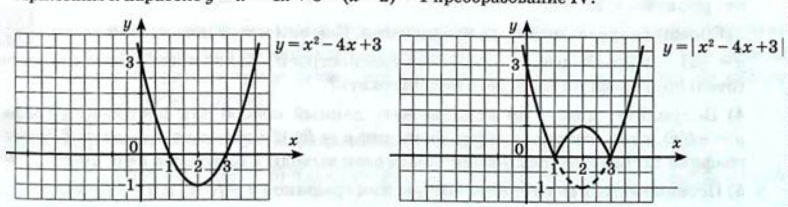
Замечание. Если ставится задача исследования графика, при построении которого применяются преобразования I – V, то нет необходимости специально исследовать окончательный график. Соответствующее исследование нужно провести для исходного графика $y = f(x)$ (или воспользоваться уже известными результатами), а для окончательного графика выводы можно сделать непосредственно по рисунку.

Пример 2.

Построить график функции $y = |x^2 - 4x + 3|$.

Решение.

Применим к параболе $y = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1$ преобразование IV:



Область определения функции – $x \in R$. Область значений – $E(y) = [0; +\infty)$. Функция равна 0 при $x = 1$ и $x = 3$, при этих значениях достигается наименьшее значение функции. Наибольшее значение функции на отрезке $[1; 3]$ равно 1 и достигается при $x = 2$. Функция неотрицательна на всей области определения. Функция возрастает на $[1; 2]$ и на $[3; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 1]$ и на $[2; 3]$.

Пример 3.

Построить график функции $y = x^2 - 4|x| + 3$.

Решение.

Так как $x^2 = |x|^2$, достаточно применить к параболе $y = x^2 - 4x + 3$ преобразование V (рис. 2):

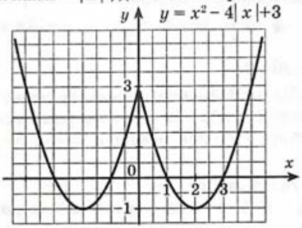


Рис. 2

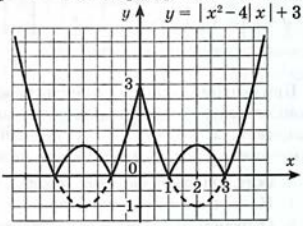


Рис. 3

Область определения функции – $x \in R$. Область значений – $E(y) = [-1; +\infty)$. Функция является чётной. Функция равна 0 при $x = \pm 1$ и $x = \pm 3$. Наименьшее значение функции равно -1 и достигается при $x = -2$ и $x = 2$. Наибольшее значение на отрезке $[-3; 3]$ равно 3 и достигается при $x = 0$. Функция возрастает на $[-2; 0]$ и на $[2; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -2]$ и на $[0; 2]$.

Пример 4.

Построить график функции $y = |x^2 - 4|x| + 3|$.

Решение.

Применим преобразование IV к графику из примера 3 (можно было бы применить преобразование V к графику из примера 2, рис. 3).

Область определения функции – $x \in R$. Область значений – $E(y) = [0; +\infty)$. Функция является чётной. Функция равна 0 при $x = \pm 1$ и $x = \pm 3$. Функция возрастает на $[-3; -2]$, на $[-1; 0]$, на $[1; 2]$ и на $[3; +\infty)$. Функция убывает на $(-\infty; -3]$, на $[-2; -1]$, на $[0; 1]$ и на $[2; 3]$. Наименьшее значение функции равно 0 и достигается при следующих значениях x: $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$. Наибольшее значение функции на $[1; 3]$ равно 1 и достигается при $x = 2$. Наибольшее значение функции на $[-3; -1]$ равно 1 и достигается при $x = -2$. Наибольшее значение функции на $[-1; 1]$ равно 3 и достигается при $x = 0$.

К **366** 1) Постройте графики $y = x^2 + 1$ и $y = -(x^2 + 1)$. Сравните расположения графиков относительно оси Ox. Чем отличается график $y = -(x^2 + 1)$ от графика $y = x^2 + 1$?

2) Постройте график $y = 2x - 1$ и $y = -(2x - 1)$. Чем отличается график $y = -(2x-1)$ от графика $y = 2x - 1$?

3) Обобщите сделанные вами наблюдения. Как они могут помочь построить график $y = -\sqrt{1 - x^2}$, если график $y = \sqrt{1 - x^2}$ уже построен? Какое преобразование вспомогательного графика вы будете использовать?

4) Подумайте, можно ли использовать данный способ для построения графика $y = -f(x)$, если имеется график функции $y = f(x)$? Составьте правило построения графика такой функции и сопоставьте свои выводы с выводами на с. 100.

5) Познакомьтесь со способом построения графиков $y = f(-x)$ и $y = -f(-x)$.

367 Постройте графики функций $y = f(-x)$, $y = -f(x)$, $y = -f(-x)$, если:

а) $f(x) = 2x - 5$; б) $f(x) = |x + 1| - 1$; в) $f(x) = x^2 - 3x + 2$; г) $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

368 Из функций $y = 2x$, $y = |2x - 4|$, $y = 5x^2 - 14$, $y = |x^2 + 1|$, $y = \left|\frac{3}{x}\right|$, $y = 2|x| - 8$ выберите функции вида $y = |f(x)|$. Укажите множество значений выбранных вами функций.

369 1) Постройте график $y = 2x + 1$.

2) Постройте график $y = |2x + 1|$.

3) Сравните полученные графики. Чем отличается график $y = |2x + 1|$ от графика $y = 2x + 1$? Опираясь на определение модуля, объясните, почему часть графика $y = 2x + 1$, лежащая выше и на оси абсцисс, совпадает с частью графика $y = |2x + 1|$, а часть графика $y = 2x + 1$, лежащая ниже оси абсцисс, симметрична части графика $y = |2x + 1|$ относительно этой оси.

4) Как сделанные вами наблюдения могут помочь построить график $y = |f(x)|$, если график $y = f(x)$ уже построен? Какое преобразование вспомогательного графика вы будете использовать? Составьте правило построения графика функции $y = |f(x)|$ и сопоставьте его со способом, описанным на с. 100.

5) Познакомьтесь со способом построения графика $y = f(|x|)$.

370 Постройте график функции:

а) $y = |x^2 - 3x + 2|$; б) $y = x^2 - 5|x| + 6$; в) $y = \left|\frac{2x}{x-2}\right|$; г) $y = ||x - 2| - 1| - 1$.

371 Сколько решений имеет уравнение $||2x - 3| - 1| = a$ в зависимости от значения параметра a? Проведите исследование, опираясь на график функции $y = ||2x - 3| - 1|$.

П **372** 1) Какое из уравнений не имеет решения? Почему?

а) $|x| = 5$; б) $|x| = 0$; в) $|x| = -5$.

2) Объясните, почему уравнение $|x| = -|2x - 1|$ не имеет решения.

3) Может ли корень уравнения обращать правую часть уравнения в отрицательное число?

а) $|2x - 3| = x$; б) $|2x - 1| = -x$.

4) Решите уравнение:

а) $|2x - 3| = x$; б) $|2x - 1| = -x$; в) $|x + 12| = 5x$; г) $|2x + 1| = -x + 4$.

Сделайте проверку, подставив полученные корни в исходное уравнение.

373 Решите уравнение:

а) $(2x^2 - x + 1)^2 - 2(2x^2 - x + 1) + 1 = 0$; б) $(x^2 - 7x + 13)^2 - (x - 3)(x - 4) = 1$.

374 Две бригады, восстанавливая лес после пожара, закончили посадку деревьев за 4 дня. Сколько дней потребуется на выполнение такого же объёма работы отдельно каждой бригаде при условии, что одна из них может выполнить эту работу на 15 дней быстрее другой?

Д **375** Постройте графики функций $y = f(-x)$, $y = -f(x)$, $y = -f(-x)$, если:

а) $f(x) = 2 - 3x$; б) $f(x) = |x - 2| + 1$; в) $f(x) = x^2 + 2x - 3$; г) $f(x) = -\frac{1}{x-2}$.

376 Постройте график функции:

а) $y = |x^2 + 5x - 6|$; б) $y = x^2 - 4|x| - 12$; в) $y = \left|\dfrac{2x+1}{x+1}\right|$; г) $y = ||2x - 5| - 1| - 2$.

377 Сколько решений имеет уравнение $|x^2 - 6|x| + 5| = a$ в зависимости от значения параметра a?

378 Решите уравнение:

а) $|3x - 5| = 2x$; б) $|5x - 9| = -4x$; в) $|x + 18| = 7x$.

Сделайте проверку, решив уравнение графически.

379 Решите уравнение $4(x^2 - x)^2 + 9(x^2 - x) + 2 = 0$.

380 Один из цехов мебельного завода должен был изготовить 810 фанерных листов, а второй – 900 таких же листов. Рабочие первого цеха выполнили всё задание, затратив на это на 3 дня больше, чем рабочие второго цеха. Какова производительность труда в каждом цехе, если во втором делали в день на 4 листа больше, чем в первом?

C **381*** Постройте график функции $y = \left|\dfrac{x^2 - 5|x| + 6}{x^2 - 6|x| + 8}\right|$.

Экспресс-тест № 2

Примерное время выполнения – 40 минут

Часть А

№ 1

№ 1. Дана функция $y(x) = -x^2 + 2x$. Найдите $y(-x)$.

А) $-x^2 - 2x$; В) $x^2 - 2x$;

Б) $-x^2 + 2x$; Г) $-3x^3$.

№ 2

№ 2. Найдите область определения обратной пропорциональности, график которой изображён на рис. 1:

А) $(-\infty; +\infty)$;

Б) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

В) $(-3; 0) \cup (0; 3)$.

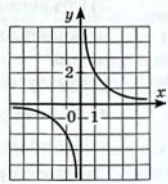


Рис. 1

№ 3		
1	2	3

№ 3. Функция задана графиком, изображённым на рис. 2. Установите соответствие между промежутками

1) $[-3; 3]$; 2) $(-3; 3)$; 3) $[0; 3]$

и свойствами, указанными для них:

А) функция отрицательна;

Б) область определения функции;

В) функция возрастает.

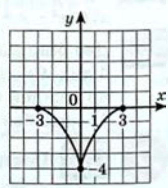


Рис. 2

№ 4

№ 4. Используя график функции, изображённый на рис. 3, определите, какое из утверждений верно:

А) $f(-2) > f(4)$;

Б) $f(2) = 0$;

В) $y = f(x)$ убывает на промежутке $[1; +\infty)$;

Г) $y_{\text{наиб.}} = 1$;

Д) $y = f(x)$ является чётной функцией.

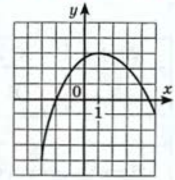


Рис. 3

№ 5

№ 5. Укажите функцию, график которой изображён на рис. 4.

А) $y = \sqrt{x-2}$; В) $y = \sqrt{x} + 2$;

Б) $y = \sqrt{x+2}$; Г) $y = \sqrt{x} - 2$.

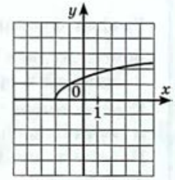


Рис. 4

Часть В

№ 6

№ 6. Постройте график $y = (x-1)^2 - 2$. Укажите промежуток возрастания функции.

А) $(-\infty; 1]$; В) $[2; +\infty)$;

Б) $(-\infty; 2)$; Г) $[1; +\infty)$.

№ 7

№ 7. Укажите функцию, график которой изображён на рис. 5.

А) $y = |x^2 + 3|$; В) $y = |x^2| - 3$;

Б) $y = |(x-3)^2|$; Г) $y = |x^2 - 3|$.

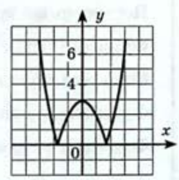


Рис. 5

Часть С

(ход решения и ответ записывается на отдельном листе)

№ 8. Постройте график функции $y = \dfrac{2x-1}{x-3}$.

Укажите:

1) нули функции,

2) промежутки знакопостоянства,

3) промежутки убывания,

4) какие значения принимает функция при $0 \leqslant x \leqslant 2$.

Ответы и решения к тесту:

№ 1	№ 2	№ 3			№ 4	№ 5	№ 6	№ 7
		1	2	3				
А	Б	Б	А	В	В	Б	Г	Г

№ 8

Преобразуем формулу

$$y = \frac{2x-1}{x-3} = \frac{2x-6+6-1}{x-3} = \frac{2x-6+5}{x-3} = \frac{2(x-3)}{x-3} + \frac{5}{x-3} = \frac{5}{x-3} + 2.$$

График функции $y = \frac{2x-1}{x-3}$ может быть получен из графика функции $y = \frac{5}{x}$ с помощью двух параллельных переносов на 3 единицы вправо вдоль оси Ox и на 2 единицы вверх вдоль оси Oy.

График имеет горизонтальную асимптоту $y = 2$ и вертикальную асимптоту $x = 3$.

Найдём точки пересечения с осями:

$\frac{2x-1}{x-3} = 0$ при $x = 0{,}5$;

$y(0) = \frac{1}{3}$.

Найдём несколько дополнительных точек:

x	-2	-1	1	2	$4{,}5$	5	6
y	1	$0{,}75$	$-0{,}5$	-3	$5\frac{1}{3}$	$4{,}5$	$3\frac{2}{3}$

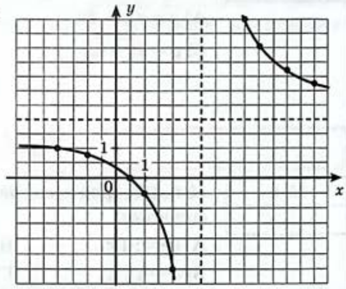


Рис. 6

Построенный график изображён на рис. 6.

Функция равна нулю при $x = 0{,}5$.

Функция положительна при $x \in (-\infty; 0{,}5) \cup (3; +\infty)$.

Функция отрицательна при $x \in (0{,}5; 3)$.

Функция убывает на каждом из двух лучей $(-\infty; 3)$ и $(3; +\infty)$.

При $0 \leqslant x \leqslant 2$ функция принимает значения из промежутка $\left[-3; \frac{1}{3}\right]$.

Шкала успешности:

9 – 10 баллов – *отлично*

7 – 8 баллов – *хорошо*

5 – 6 баллов – *удовлетворительно*

Задачи для самоконтроля к главе 2

382 Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению:

а) $x^2 + (y - 1)^2 = 16$; б) $(x - 1)^2 + y^2 = 16$; в) $(x - 1)^2 - y = 0$; г) $(|x| - 1)^2 - y = 0$.

Какие из построенных вами множеств являются графиками функций?

383 Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

а) $x^2 + (y - 1)^2 > 16$; б) $(x - 1)^2 + y^2 < 16$; в) $(x - 1)^2 - y > 0$; г) $(|x| - 1)^2 - y < 0$.

384 Дана функция $y(x) = x^2$. Найдите:

а) $y(-x)$; б) $y\left(\frac{2}{x}\right)$; в) $y(2 - x)$; г) $2y(x)$; д) $y(y(x))$; е) $y(y(3x))$.

385 Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{x - 3}$; б) $y = 4x^2 - 12x + 5$; в) $y = \frac{x^2 + x}{x}$; г) $y = \frac{4 - x}{2}$; д) $y = \frac{4 - x^2}{9 + x^2}$.

386 Найдите множество значений функции:

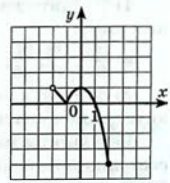
а) $y = x + \frac{1}{x}$; б) $y = \frac{3x}{1 + x^2}$; в) $y = \sqrt{x + 6}$; г) $y = |x + 5|$; д) $y = \frac{1}{x^2 + 4x + 4}$.

387 Определите, какие функции являются чётными, какие – нечётными и какие не являются ни чётными, ни нечётными:

а) $y = 5\sqrt{x^2} + 2x^6$; в) $y = \frac{|x|}{x^2 - 3}$; д) $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$;

б) $y = 2 + \frac{x}{x - 5}$; г) $y = 3 - \sqrt{2 + x}$; е) $y = |x + 1| - 3$.

388 Функция $y = f(x)$ задана графиком (см. рис.).



Какое из следующих утверждений ложно:

1) $D(y) = (-2; 2]$;
2) $E(y) = [-4; 1]$;
3) $f(x) = 0$ при $x \in \{-1; 1\}$; $f(x) < 0$ при $x \in (1; 2]$;
$f(x) > 0$ при $x \in (-2; -1)(-1; 1)$;
4) $f(x)$ возрастает при $x \in (-2; -1]$ и при $x \in [0; 2]$;
убывает при $x \in [-1; 0]$?

389 Постройте график функции $y = \frac{x^2 + 2x}{x}$. Укажите её область значений.

390 Постройте график функции $y = |x^2 + 2x|$. При каких значениях a прямая $y = a$ имеет с графиком этой функции ровно две общие точки?

391 Постройте график дробно-линейной функции $y = \frac{3x + 6}{x + 3}$.

392 Постройте график функции $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x - 2}, \text{ если } 2 < x < 6; \\ -x^2 + 4, \text{ если } -3 < x < 2. \end{cases}$

Найдите область определения и область значения функции $y = f(x)$, определите промежутки знакопостоянства, возрастания, убывания.

393 Решите графически уравнение:

а) $|x^2 - 4| = 5$; б) $\frac{4x - 4}{x - 3} = 7 - x$.

Проверьте своё решение аналитически.

Глава 3
Числовые последовательности

§ 1. Последовательности и их общие свойства

3.1.1. Последовательности. Способы задания последовательностей

Что пользы в том, что ты многое знал, раз ты не умел применять твои знания к твоим нуждам.

Франческо Петрарка (1304–1374),
итальянский поэт

Ранее мы не раз встречались с понятием числового ряда. Ещё в начальной школе мы искали закономерности и самостоятельно продолжали ряд по нескольким его элементам; при анализе статистических данных мы работали с упорядоченным конечным набором чисел – результатами различных измерений и наблюдений и пр.

Вспомним примеры заданий, в которых мы работали с некоторым упорядоченным рядом чисел.

1) Найдите закономерность и запишите следующие два числа в ряду положительных чисел:

а) $\frac{100}{99}; \frac{98}{97}; \frac{96}{95}; \ldots;$ б) 1,1; 2,02; 3,003; ... ; в) 1; 4; 9; 16; ... .

2) В течение месяца проводите ежедневные измерения температуры воздуха и найдите среднее значение и размах полученных данных.

Результаты измерения температуры из второго задания образуют числовой ряд, состоящий не более чем из 31 числа, количество чисел в ряду задания 1а будет равно 50. В отличие от них числа рядов в заданиях 1б и 1в можно продолжать выписывать до бесконечности.

Такие бесконечные ряды чисел называют *бесконечными числовыми последовательностями*. Приведем ещё несколько примеров бесконечных числовых последовательностей, которые нам уже знакомы:

1; 2; 3; 4; ... – последовательность натуральных чисел;

2; 4; 6; ... – последовательность чётных натуральных чисел;

1; 8; 27; ... – последовательность кубов натуральных чисел;

2; 3; 5; 7; 11; 13; ... – последовательность простых чисел.

Далее вместо «бесконечная числовая последовательность» будем говорить просто «последовательность».

Бывают и такие последовательности, которые составлены только из нескольких чисел (–1; 1; –1; 1; ...) или даже одного числа (5; 5; 5; ...).

Последовательности помогают описывать многие процессы из окружающего нас мира. Так, например, рассчитать сумму кредита, взятого под определённый процент, помогут знания о последовательностях. Поэтому мы займёмся их изучением, но сначала уточним понятия, связанные с последовательностями, и обозначения, которые принято использовать для их записи.

Определение 1. Числа, образующие последовательность, называют **членами последовательности**; число, стоящее на первом месте в последовательности, называют **первым членом последовательности**, на втором – вторым членом, ... на месте под номером n – ***общим членом последовательности*** (n-м членом).

Обозначают члены последовательности буквой латинского алфавита с индексами, показывающими их порядковые номера, например,

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$$

Тогда саму эту последовательность обозначают (y_n).

Отметим, что член последовательности, стоящий перед y_n, обозначают y_{n-1} (так как его номер $n-1$), а член последовательности, стоящий после y_n, обозначают y_{n+1}.

Таким образом, для любой последовательности мы можем указать, какое её число имеет номер 1, какое – номер 2, и т. д.

Пример 1.

С помощью числа $\sqrt{2} = 1{,}414\ 213\ 562\ 373\ 095\ 048\ 801\ 688\ 724\ 209\ 698\ 078\ 569\ 671\ 875\ 376\ 948\ 073\ 176\ 679\ 737\ 99\ldots$(выписаны первые 65 цифр) рассмотрим следующие последовательности:

1) (a_n) – последовательность целых неотрицательных чисел, получаемых при выписывании цифр этого числа последовательно – до запятой, первой цифры после запятой, второй цифры после запятой, ... и т.д.:

$$1; 4; 1; 4; 2; 1; 3; 5; 6; 3; 7; 3; 0;\ldots$$

2) (b_n) – последовательность конечных десятичных дробей, являющихся округлениями числа $\sqrt{2}$ с недостатком:

$$1; 1{,}4; 1{,}41; 1{,}414; 1{,}4142; 1{,}41421; 1{,}414213; 1{,}4142135; \ldots .$$

Укажите седьмой член каждой из этих последовательностей.

Решение.

В последовательности (a_n) под номером 7 идёт число 3, значит, $a_7 = 3$. В последовательности (b_n) под номером 7 идёт число 1,414213, значит, $b_7 = 1{,}414213$.

До сих пор мы рассматривали последовательность, выписывая несколько её первых членов или описывая, каким образом составлена эта последовательность. Однако такие способы задания последовательностей не очень удобны и чаще всего последовательности задают с помощью формул. Познакомимся с ними.

Для примера рассмотрим последовательность (x_n): 2; 4; 8; 16.... Первый её член равен 2, а каждый последующий член получается из предыдущего умножением на 2. Опишем её, используя введенные нами обозначения:

$$x_1 = 2;\ x_2 = 2x_1;\ x_3 = 2x_2;\ \ldots;\ x_{n+1} = 2x_n;\ \ldots .$$

Ясно, что для задания этой последовательности достаточно указать её первый член $x_1 = 2$, и то, как вычислить каждый её следующий член: $x_{n+1} = 2x_n$.

Если задан первый член последовательности и формула, выражающая каждый последующий член через предыдущий (т.е. x_{n+1} через x_n), то говорят, что ***последовательность задана рекуррентно.***

Заметим, что члены этой последовательности (x_n): 2; 4; 8; 16 ... являются натуральными степенями числа 2: 2^1; 2^2; 2^3; 2^4... . Понятно, что если $x_1 = 2^1$; $x_2 = 2^2$; $x_3 = 2^3$; ..., то её n–й член можно записать как $x_n = 2^n$. Последнее равенство можно рассматривать как формулу, которая позволяет вычислить любой член этой последовательности. Тогда эту последовательность можно задать, указывая лишь формулу её общего члена: $x_n = 2^n$. В таких случаях говорят, что *последовательность задаётся формулой общего члена*.

* * *

Мы записали формулу общего члена $x_n = 2^n$, обобщив наблюдения за первыми членами последовательности. Строго это можно доказать методом математической индукции. В самом деле, при $n = 1$ имеем $x_1 = 2^1 = 2$, т.е. база индукции проверена. Если при фиксированном натуральном n выполняется равенство $x_n = 2^n$, то $x_{n+1} = 2 \cdot x_n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. Значит, $x_n = 2^n$ при всех натуральных n.

Пример 2.

Выпишите четвёртый член последовательности, если:

а) последовательность (a_n) задана рекуррентно: $a_1 = 2$; $a_{n+1} = 5a_n$;

б) последовательность (b_n) задана формулой общего члена: $b_n = 5n$.

Решение.

а) Чтобы найти четвёртый член последовательности (a_n), мы должны последовательно вычислить все стоящие перед ним члены:

$a_2 = 5a_1 = 5 \cdot 2 = 10$, тогда $a_3 = 5a_2 = 5 \cdot 10 = 50$ и $a_4 = 5a_3 = 5 \cdot 50 = 250$.

б) Четвёртый член последовательности (b_n) мы можем найти сразу $b_4 = 5 \cdot 4 = 20$.

Ответ: а) 250; б) 20.

Как видно, при нахождении нужного нам члена последовательности формула n-го члена более удобна (она позволяет вычислить искомый член сразу, не находя всех предыдущих его членов).

Отметим, что при рекуррентном способе задания последовательности иногда требуется указывать не один, а несколько первых членов последовательности. Именно таким способом задаётся *последовательность Фибоначчи* (по имени итальянского математика XIII в. Леонардо Пизанского, или Фибоначчи). Зададим первые два члена этой последовательности и формулу, выражающую каждый последующий член через два предыдущих (т. е. x_{n+2} через x_{n+1} и x_n):

$$x_1 = x_2 = 1 \text{ и } x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \text{ где } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Тогда $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1 + 1 = 2$, $x_4 = 2 + 1 = 3$, $x_5 = 3 + 2 = 5$ и т. д.

Получим последовательность Фибоначчи (x_n): 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21... .

* * *

Для последовательности Фибоначчи можно получить и формулу n-го члена последовательности x_n, но это уже значительно сложнее.

Докажем, что $x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$, $n = 1,2,\ldots$ (любопытно, что такое громоздкое на первый взгляд иррациональное выражение на самом деле является натуральным числом). Для этого применим «индукцию с шагом два», т.е. проверим справедливость равенства при $n = 1$ и $n = 2$, а затем покажем, что из выполнения равенства при фиксированных натуральных значениях n и $n + 1$ следует его справедливость для следующего значения $n + 2$.

Доказательство.

Имеем: $x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = 1$;

$$x_2=\frac{1}{\sqrt5}\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^2\right)=\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac14+\frac{\sqrt5}{2}+\frac54-\frac14+\frac{\sqrt5}{2}-\frac54\right)=1.$$

Если нужное равенство выполняется при фиксированных натуральных значениях n и $n+1$, то $x_{n+2}=\frac{1}{\sqrt5}\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\right)+\frac{1}{\sqrt5}\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n+1}\right)=$

$$=\frac{1}{\sqrt5}\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n\left(1+\frac{1+\sqrt5}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\left(1+\frac{1-\sqrt5}{2}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt5}\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n\cdot\frac{3+\sqrt5}{2}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\cdot\frac{3-\sqrt5}{2}\right).$$

Заметим, что $\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^2=\frac{1+2\sqrt5+5}{4}=\frac{3+\sqrt5}{2}$, $\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^2=\frac{3-\sqrt5}{2}$, поэтому

$$x_{n+2}=\frac{1}{\sqrt5}\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n\cdot\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\cdot\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^2\right)=\frac{1}{\sqrt5}\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n+2}\right).$$

Значит, нужное равенство выполняется при всех натуральных n. ■

Пример 3.

Найти формулу общего члена последовательности (x_n) такой, что $x_1=4$, $x_{n+1}=3x_n-2$, $n=1, 2, ...$

Решение.

Попытаемся угадать формулу общего члена, а затем строго доказать её методом математической индукции.

Имеем: $x_1=4$, $x_2=10$, $x_3=28$, $x_4=82$, $x_5=244$. Так как последовательные степени числа 3 равны 3, 9, 27, 81, 243, то легко заметить, что $x_n=3^n+1$, $n=1, 2, ...$. Теперь докажем это равенство. Уже проверено, что $x_1=3+1=4$.

Пусть равенство $x_n=3^n+1$ установлено при фиксированном натуральном n.

Тогда $x_{n+1}=3x_n-2=3(3^n+1)-2=3\cdot3^n+3-2=3^{n+1}+1$; нужное равенство получено для следующего значения $n+1$. Методом математической индукции доказано, что $x_n=3^n+1$ при всех натуральных n.

Конечно, угадать такое равенство, выражающее x_n, бывает совсем непросто. Полезным было бы научиться получать формулу общего члена алгоритмическим способом (без угадывания нужного равенства и дальнейшего применения математической индукции). К поиску такого способа мы вернёмся в конце этой главы.

Отметим, что не все последовательности можно задать с помощью формул. Так, уже встречавшуюся нам в этом пункте последовательность простых чисел никакой формулой описать нельзя и её задают словесным описанием.

Итак, последовательность можно задавать: аналитически (рекуррентной формулой или формулой общего члена), перечислением её членов или словесным описанием.

В заключение заметим, что бесконечная числовая последовательность является частным случаем функции. Эта функция ставит в соответствие каждому натуральному числу определенное действительное число.

Определение 2. ***Бесконечной числовой последовательностью*** **называется функция, областью определения которой является множество натуральных чисел ($D(f)=N$), а множество значений является подмножеством множества действительных чисел ($E(f)\subset R$).**

Как всякую функцию, бесконечную числовую последовательность можно записать в виде $y=f(n)$, $n\in N$. Как мы видели, аргумент этой функции принято записывать в виде индекса: f_n, где $n=1, 2, ...$.

Вычислив значения функции $y = f(n)$, где, например, $f(n) = n^2$, при $n = 1$, $n = 2$, ..., получаем числа $f_1 = 1$, $f_2 = 4$, $f_3 = 9$, $f_4 = 16$ ... . Таким образом, получается последовательность, с которой мы в этом пункте уже встречались – последовательность квадратов натуральных чисел: 1; 4; 9; ..., заданная формулой общего члена $f_n = n^2$.

К **394** Найдите закономерность и продолжите ряд на три числа:

а) -8; -5; -2; 1; 4; ...;

б) $-\frac{3}{7}$; 3; -21; 147; ...;

в) 15,3; 5,1; 1,7; ....

395 Найдите закономерность, с помощью которой составлена нижняя строка таблицы, и запишите её с помощью формулы.

а)

x	1	2	3
y	3	4	5

б)

x	1	2	3
y	1	4	9

в)

x	1	2	3
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

396 Последовательность чисел задана формулой $y_n = 3^n$, где $n \in N$.

1) Запишите следующие члены этой последовательности: y_1; y_2; y_3; y_n; y_{n+1};

2) Во сколько раз y_2 больше y_1; y_3 больше y_2; y_{n+1} больше y_n?

3) Объясните, какими способами можно найти каждый член этой последовательности.

4) Предположите, как можно задавать последовательности. Сравните свои предположения с текстом на с. 109–111.

397 Запишите пять первых членов последовательности:

а) двузначных чисел, кратных 9, взятых в порядке возрастания;

б) правильных дробей с числителем 19, взятых в порядке убывания;

в) натуральных чисел, которые при делении на 7 дают в остатке 4, взятых в порядке возрастания.

398 Найдите четыре первых члена последовательности (a_n), заданной формулой:

а) $a_n = 5 - n$; б) $a_n = \dfrac{n^2 + 1}{n}$.

399 Рассмотрите последовательность последних цифр чисел 2, 4, 8, 16, 32, ..., 2^n... :

2, 4, 8, 6, 2, 4, ...

а) Чему равен десятый член последовательности?

б) Может ли какой-то член равняться 5? А нулю? Как можно обосновать ответ на эти вопросы, учитывая то, что в последовательности бесконечно много членов и поэтому нельзя их все выписать?

400 Найдите пятый член последовательности, если:

а) последовательность (a_n) задана рекуррентно: $a_1 = 2$; $a_{n+1} = 2a_n + 1$;

б) последовательность (b_n) задана формулой общего члена: $b_n = 4^n$.

401 Последовательность (y_n) задана формулой $y_n = 7n + 1$. Является ли членом данной последовательности число: а) 36; б) 41?
Если число является членом последовательности, найдите его номер.

402 Последовательность (a_n) задана рекуррентно: $a_1 = 1$; $a_{n+1} = 3a_n + 1$. Является ли число 123456789 членом этой последовательности?

403 Последовательность (a_n) задана формулой общего члена: $a_n = (-3)^n$. Задайте последовательность (a_n) рекуррентно.

404 В банке взят кредит в размере 12 000 рублей на срок 1 год. Возврат кредита осуществляется ежемесячно равными долями. Помимо этого, осуществляются дополнительные выплаты: начиная со второго месяца кредитор ежемесячно выплачивает процент по кредиту – 4% от суммы его задолженности.
Задайте последовательность, которую образуют суммы ежемесячных выплат, начиная со второго месяца погашения кредита, формулой общего члена. Выпишите все её члены. Сколько «переплатит» кредитор банку за пользование этим кредитом?

П **405** 1) Сократите дробь:

а) $\frac{9y^2 - x^2}{x^2 - 3xy}$; б) $\frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 3x}$.

2) Приведите дроби к общему знаменателю:

а) $\frac{x}{x+2}$ и $\frac{x-1}{x-2}$; б) $\frac{a}{12a^2 - 12b^2}$ и $\frac{b}{18a^3 - 18a^2b}$.

3) Какое свойство позволило выполнить эти преобразования?

406 Упростите выражение: $\frac{3}{2x^2 + 2x} + \frac{2x-1}{x^2-1} - \frac{2}{x}$.

407 Выполните действия:

а) $\frac{x^2 + 2x + 1}{18x^3} \cdot \frac{9x^4}{x^2 - 1}$; б) $\frac{a^3 - 2a^2}{3a + 3} : \frac{a^2 - 4}{9a^2 + 18a + 9}$.

408 Упростите:

а) $\frac{2x^2 + 9x - 5}{x^2 + x - 6} : \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 5x + 6} - 1$;

б) $\left(\frac{2a}{2a+b} - \frac{4a^2}{4a^2 + 4ab + b^2}\right) \cdot \frac{1}{\frac{2a}{4a^2 - b^2} + \frac{1}{b - 2a}} + \frac{8a^2}{2a + b}$.

Д **409** Найдите четыре первых члена последовательности (a_n), заданной формулой:

а) $a_n = 3n + 1$; б) $a_n = \frac{5^n}{(n+1)^2}$.

410 Найдите седьмой член последовательности, если:

а) последовательность (a_n) задана рекуррентно: $a_1 = 1$; $a_{n+1} = 2a_n + 3$;

б) последовательность (b_n) задана формулой общего члена: $b_n = 3 \cdot (-2)^n$.

411 Последовательность (y_n) задана формулой $y_n = 7n + 1$. Является ли членом данной последовательности число 106? Если число является членом последовательности, найдите его номер.

412 Последовательность (a_n) задана рекуррентно: $a_1 = 1$; $a_{n+1} = a_n^{\ 2} + 1$. Является ли число 1 000 000 000 000 членом этой последовательности?

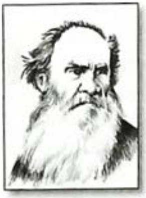
413 Последовательность (a_n) задана рекуррентно: $a_1 = 3$; $a_{n+1} = 2a_n$. Задайте последовательность (a_n) формулой общего члена.

414 Упростите:

$$\frac{3-x^2}{x^2-1}+\frac{3x}{x^2-1}:\frac{x}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}.$$

C **415*** Обозначим через $П\ (x)$ произведение цифр натурального числа x. В ряд выписаны числа $П\ (2013)$, $П\ (2014)$, $П\ (2015)$, ... Какое наибольшее количество чисел, записанных подряд, может оказаться последовательными натуральными числами?

3.1.2.* Свойства последовательностей: монотонность, ограниченность



Знание смиряет великого, удивляет обыкновенного и раздувает маленького человека.

Л. Н. Толстой (1828–1910),
великий русский писатель, просветитель, публицист

В предыдущем пункте мы познакомились с одним из основных понятий математики – последовательностью. В этом пункте мы познакомимся со свойствами последовательностей.

Мы выяснили, что бесконечные числовые последовательности являются важным, а потому выделяемым особо, частным случаем функций. В этом пункте мы познакомимся со свойствами последовательностей, опираясь на уже известные нам свойства функций. Мы знаем, что функции бывают возрастающие и убывающие.

Сравним две последовательности: 1; 2; 3; 4; ... и – 1; – 2; – 3; – 4;... . Каждый член первой последовательности больше предыдущего – с увеличением номера члены последовательности увеличиваются; каждый член второй последовательности меньше предыдущего – с увеличением номера члены последовательности уменьшаются. Введём соответствующее определение.

Определение 1. Последовательность (x_n) называется ***строго возрастающей***, если $x_{n+1} > x_n$ при всех $n = 1, 2,...$. Последовательность (x_n) называется ***строго убывающей***, если $x_{n+1} < x_n$ при всех $n = 1, 2, ...$.

В этом определении употреблялись строгие неравенства: $x_{n+1} > x_n$ или $x_{n+1} < x_n$. Для последовательностей можно ввести также понятие нестрогого возрастания и убывания.

Определение 2. Последовательность (x_n) называется ***нестрого возрастающей***, если $x_{n+1} \geqslant x_n$ при всех $n = 1, 2, ...$. Последовательность (x_n) называется ***нестрого убывающей***, если $x_{n+1} \leqslant x_n$ при всех $n = 1, 2,...$.

Отметим, что для функций можно сформулировать определение, аналогичное определению 2.

Определение 3. Все строго или нестрого возрастающие, а также строго или нестрого убывающие последовательности называются ***монотонными***.

Легко видеть, что уже известная нам последовательность Фибоначчи монотонная – она нестрого возрастает, так как для всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $x_{n+1} \geqslant x_n$, но $x_2 = x_1$, поэтому строгого возрастания нет (неравенство $x_{n+1} > x_n$ не выполняется при $n = 1$). А вот последовательность (a_n) из примера 1 предыдущего пункта не является монотонной (знак неравенства между x_{n+1} и x_n меняется без какой-либо закономерности).

Иногда имеет смысл исследовать монотонность последовательности не для всех номеров $n = 1, 2, \ldots$, а начиная с некоторого номера.

Определение 4. Последовательность (x_n) называется *строго возрастающей начиная с номера n_0*, если неравенство $x_{n+1} > x_n$ выполняется для всех номеров $n \geqslant n_0$. (Строгое убывание и нестрогое возрастание и убывание последовательности начиная с номера n_0 определяются аналогично.)

Последовательность Фибоначчи строго возрастает начиная с номера 2 (т. е. при $n \geqslant 2$), так как $x_{n+1} > x_n$ при $n \geqslant 2$.

Пример 1.

Исследуйте на монотонность последовательности, т. е. выясните строго (нестрого) возрастающей она является или строго (нестрого) убывающей:

а) $x_n = \dfrac{n}{n+1}$; б) $x_n = \dfrac{10^n}{n!}$; в) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Решение.

а) Для исследования монотонности последовательности часто бывает удобно рассмотреть знак разности $x_{n+1} - x_n$. Так как $x_{n+1} - x_n = \dfrac{n+1}{n+2} - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$ при всех $n = 1, 2, \ldots$, то $x_{n+1} > x_n$ при $n = 1, 2, \ldots$. Последовательность (x_n) строго возрастает. Можно заметить также, что $x_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$; так как при возрастании n величина $n + 1$ строго возрастает, то $\dfrac{1}{n+1}$ строго убывает. Так как из постоянной величины 1 вычитается строго убывающая последовательность, то в итоге (x_n) строго возрастает.

б) Если все члены последовательности положительны, то для исследования монотонности часто бывает удобно рассмотреть отношение $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ и сравнить его с единицей. Имеем: $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{10^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot 10^n} = \dfrac{10}{n+1}$. При больших n отношение становится меньше 1, а именно, $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ при $10 < n + 1$, т. е. при $n > 9$. Итак, $x_{n+1} < x_n$ при $n \geqslant 10$; $x_{n+1} = x_n$ при $n = 9$ и $x_{n+1} > x_n$ при $n \leqslant 8$. Поэтому последовательность (x_n) строго убывает при $n \geqslant 10$ и нестрого убывает при $n \geqslant 9$. Если рассматривать последовательные значения x_n, то

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_8 < x_9,\ x_9 = x_{10},\ \text{а затем}\ x_{10} > x_{11} > x_{12} > \ldots.$$

Отсюда видно, что члены последовательности x_9 и x_{10}, равные $\dfrac{10^9}{9!} = \dfrac{10^{10}}{10!}$, являются наибольшими её членами (все остальные члены положительны и принимают значения, меньшие $\dfrac{10^9}{9!}$).

в) Чтобы оценить, как изменяются члены последовательности при увеличении n, преобразуем формулу общего члена. Домножим и разделим $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ на $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$, тогда $x_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$. При возрастании n величины $\sqrt{n+1}$ и $\sqrt{n}$ строго возрастают, значит, строго возрастает знаменатель $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$. Так как числитель – постоянная положительная величина, то дробь строго убывает. ■

Чтобы исследовать последовательность на монотонность, можно:

- рассмотреть знак разности $x_{n+1} - x_n$
- или рассмотреть отношение $\frac{x_{n+1}}{x_n}$,
- или преобразовать формулу общего члена.

После чего сделать вывод, воспользовавшись следующей таблицей:

(x_n) строго [нестрого] возрастает, если	(x_n) строго [нестрого] убывает, если
$x_{n+1} - x_n > 0$ $[x_{n+1} - x_n \geqslant 0]$	$x_{n+1} - x_n < 0$ $[x_{n+1} - x_n \leqslant 0]$
при положительных членах последовательности: $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ $[\frac{x_{n+1}}{x_n} \geqslant 1]$	при положительных членах последовательности: $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ $[\frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant 1]$
при увеличении n величина x_n строго [нестрого] увеличивается	при увеличении n величина x_n строго [нестрого] уменьшается

Вернемся к последовательности (a_n), составленной из цифр числа $\sqrt{2}$ (мы рассматривали ее в примере 1 предыдущего пункта). Заметим, что все ее члены не превышают по модулю девяти (ведь все ее члены – это *цифры* числа), то есть выполняется неравенство $|x_n| \leqslant 9$. Такие последовательности называют ограниченными.

Определение 5. Последовательность (x_n) называется ***ограниченной***, если для всех номеров $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $|x_n| \leqslant C$, где C – некоторое положительное число. Если последовательность не является ограниченной, её соответственно называют *неограниченной*.

Применим это определение для доказательства ограниченности последовательностей, уже рассмотренных нами в примере 1.

Пример 2.

Доказать, что последовательность является ограниченной:

а) $x_n = \frac{n}{n+1}$; б) $x_n = \frac{10^n}{n!}$; в) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Доказательство.

а) Так как при всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $n < n + 1$, то $0 < x_n < 1$. Поэтому $|x_n| \leqslant 1$ для всех номеров n и по определению последовательность ограниченная. ■

б) В ходе решения примера 1б было доказано, что наибольшее значение x_n равно $C = \frac{10^9}{9!}$. При всех $n = 1, 2, \ldots$ значения x_n положительны, поэтому $|x_n| \leqslant C$, $n = 1, 2, \ldots$, и по определению последовательность ограниченная. ■

в) Так как $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, при всех $n = 1, 2,...$ выполняется неравенство $x_n \leqslant x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$. Все значения x_n положительны, поэтому $|x_n| \leqslant \sqrt{2} - 1$ при всех $n = 1, 2, ...$, и по определению последовательность ограниченная. ■

Пример 3.
Доказать ограниченность последовательности

$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$, $n = 1, 2, ...$

Доказательство.

При всех $k = 2, 3,...$ выполняется неравенство $k^2 > k(k-1)$, поэтому $\dfrac{1}{k^2} < \dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$. Значит, $x_n < 1 + (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + ... + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = 2 - \frac{1}{n} < 2$ при всех $n = 2, 3, ...$; при $n = 1$ также $x_1 = 1 < 2$. Так как все значения x_n положительны, $|x_n| \leqslant 2$ при всех $n = 1, 2, ...$. ■

Заметим, что величина C в определении ограниченной последовательности задаётся неоднозначно; если при всех n выполняется неравенство $|x_n| \leqslant 2$, то и подавно $|x_n| \leqslant 3$ и т.д. Вопрос об определении *наименьшего* возможного значения C выходит за рамки нашего курса. Отметим только, что такое наименьшее возможное значение C в примере 2а равно 1, в примере 2б равно $\dfrac{10^9}{9!}$, в примере 2в равно $\sqrt{2} - 1$, а в примере 3 равно $\dfrac{\pi^2}{6}$ (вот это уже никак нельзя было бы угадать!).

Пример 4.
Доказать неограниченность последовательности квадратов натуральных чисел.

Доказательство (от противного).

Пусть последовательность $x_n = n^2$ ограничена. Тогда по определению найдётся такое число C, что для всех $n = 1, 2,...$ выполняется неравенство $|x_n| \leqslant C$, то есть $n^2 \leqslant C$, или $n \leqslant \sqrt{C}$. Но это заведомо неверно, так как для фиксированного положительного числа $\sqrt{C}$ найдётся натуральное число $n > \sqrt{C}$. Полученное противоречие показывает, что последовательность неограничена.

Пример 5.
Доказать неограниченность последовательности

$x_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$.

Доказательство (от противного).

Пусть данная последовательность ограничена. Тогда по определению найдётся такое положительное число C, что для всех $n = 1, 2, ...$ выполняется неравенство $|x_n| \leqslant C$, то есть $x_n \leqslant C$ (так как $x_n > 0$). При $n = 2^m$, $m = 2, 3, ...$ разобьём слагаемые на такие группы:

$$x_{2^m} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{A_2} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{A_3} + \; ... + \underbrace{\frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-1}+2} + ... + \frac{1}{2^m}}_{A_m}.$$

В k-й группе ($k = 2, 3, \ldots, m$)

$$A_k = \frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^k},$$

всего 2^{k-1} слагаемых, при этом самое маленькое из них – последнее. Поэтому

$$A_k > 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \text{ и } x_{2^m} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{m}{2}.$$

Для фиксированного положительного числа C найдется натуральное число m такое, что $m > 2(C-1)$. Отсюда $x_{2^m} > 1 + \frac{m}{2} > C$, а это противоречит тому, что при всех натуральных n выполняется неравенство $x_n \leqslant C$. Значит, последовательность неограниченная.

Бесконечная сумма $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ называется ***гармоническим рядом***. Результат примера 5 часто формулируется как расходимость гармонического ряда. Определение бесконечной суммы и расходимости ряда выходят за рамки нашего курса.

Заметим, что при всех натуральных n и $k \geqslant 2$ выполняется неравенство

$$1 + \frac{1}{2^k} + \ldots + \frac{1}{n^k} \leqslant 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2 \text{ (пример 3).}$$

Поэтому последовательность $x_n = 1 + \frac{1}{2^k} + \ldots + \frac{1}{n^k}$ ограниченная при целых $k \geqslant 2$ и неограниченная при $k = 1$.

* * *

В заключение отметим, что ограниченная последовательность может иметь наибольший и наименьший члены, а может и не иметь.

Пример 6.

Рассмотрим последовательность $x_n = \frac{n}{n+1}$ из примера 1а. Мы видим, что она строго возрастает и ограничена, так как при всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $|x_n| \leqslant 1$. Так как $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < \ldots$, то наименьший член последовательности равен $x_1 = \frac{1}{2}$. Далее, $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_3 = \frac{3}{4}$, $x_4 = \frac{4}{5}$, и т.д.; $x_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. Мы видим, что все члены последовательности строго меньше, чем 1, но значение 1 ни один из членов не принимает.

Ясно, что если последовательность (x_n) строго возрастает, то она не имеет наибольшего члена, ведь за каждым её членом следует ещё больший по значению член. Итак, эта последовательность не имеет наибольшего члена, хотя и ограничена.

К **416** Докажите неравенства:

а) $a^2 + 9b^2 \geqslant 6ab$;

б) $\frac{(a-b)^2}{2} \leqslant a^2 + b^2$.

417 Постройте графики функций:

а) $y = -2x + 3$;

б) $y = 3x - 1$.

Какая из них является убывающей функцией? возрастающей функцией?

418 Даны две последовательности чисел (a_n): $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \ldots$ и (b_n): $\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \ldots$.

1) Как изменяются члены каждой из последовательностей? Чем отличаются эти последовательности?

2) Как бы вы назвали каждую из последовательностей? Сравните своё предположение с учебником на с. 114.

419 Дана последовательность $a_n = 9n - 10$.

1) Определите, какой является данная последовательность – убывающей или возрастающей.

2) Какой способ вы использовали, чтобы выполнить предыдущее задание?

3) Запишите выражение для $(n + 1)$-го члена данной последовательности и найдите разность $a_{n+1} - a_n$.

4) Сравните разность с нулём.

5) Сравните результаты выполнения заданий (1) и (4). Сделайте вывод.

6) Предложите способ определения монотонности последовательности. Сравните его со способом, изложенным в учебнике на с. 116. Какие ещё способы исследования последовательности на монотонность можно использовать?

420 Исследуйте на монотонность последовательность, то есть выясните, строго (нестрого) возрастающей она является или строго (нестрого) убывающей:

а) $x_n = \frac{n^2 + 2n}{(n + 1)^2}$; б) $x_n = \frac{n!}{2^n}$; в) $x_n = \sqrt{n^2 + 2n} - n$.

421 Какие последовательности из предыдущего задания являются ограниченными?

422* Дана последовательность (a_n), заданная рекуррентно: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{1 + \sqrt{a_n}}$. Докажите, что эта последовательность монотонна и ограничена.

П **423** Последовательность (c_n) задана формулой $c_n = 3 + \frac{1}{3}n$. Найдите:

а) c_1; б) c_9; в) c_{16}; г) c_{150}; д) c_{k+3}.

424 Сократите дробь, выполнив деление многочленов в столбик:

а) $\frac{x^3 + 4x^2 - 33x + 4}{x^2 + 8x - 1}$; б) $\frac{2x^4 - 22x^3 + x^2 - 17x + 66}{x - 11}$.

Д **425** Исследуйте на монотонность последовательность, то есть выясните, строго (нестрого) возрастающей она является или строго (нестрого) убывающей:

а) $x_n = \frac{2n^2 + 4n + 4}{(n + 1)^2}$; б) $x_n = \frac{(2n)!}{12^n}$; в) $x_n = \frac{1}{n - \sqrt{(n-1)(n+1)}}$.

426 Какие последовательности из предыдущего задания являются ограниченными?

427 Сократите дробь: $\frac{x^4 - x^3 + 8x^2 - 3x + 15}{x^2 - x + 5}$.

С **428*** Докажите неограниченность последовательности $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$.

429* При каком натуральном n величина $\frac{n^2}{1{,}001^n}$ достигает максимального значения?

§ 2. Арифметическая прогрессия

3.2.1. Арифметическая прогрессия. Формула общего члена

Знания, не рождённые опытом, матерью всякой достоверности, бесплодны и полны ошибок.

Леонардо да Винчи (1452–1519),
итальянский художник, учёный и изобретатель

Мы начали изучать числовые последовательности и их свойства, так как они помогают решать практические задачи. В этом пункте мы познакомимся с особым видом последовательностей, часто возникающих на практике. Для этого рассмотрим следующую задачу.

Задача 1.

На складе фабрики имеется 100 готовых костюмов. За день фабрика шьет 35 новых костюмов. Сколько костюмов будет на складе через один день, два дня, три дня и т. д., пока не состоится продажа со склада?

Решение.

Найдем количество костюмов на складе через один день: $100 + 35 = 135$.

Так как мы не знаем, когда состоится первая продажа со склада и состоится ли она вообще, рассмотрим последовательность $x_1, x_2, \ldots$, в которой k-й член равен количеству готовых костюмов на конец k-го рабочего дня, то есть

$x_1 = 135$;

$x_2 = 135 + 35 = 170$;

$x_3 = 170 + 35 = 205$;

...

Получим следующую последовательность: 135; 170; 205; 240;... .

В полученной последовательности каждый следующий член получается из предыдущего увеличением на одно и то же число, равное 35.

Приведём другой пример, показывающий появление последовательности такого типа. В жизни, стремясь сохранить имеющийся капитал или даже приумножить его, люди вкладывают деньги в банк. Получая возможность использовать вложенные средства, банк через определённые промежутки времени увеличивает вклады на счетах, «начисляет на них проценты». Как нам известно из курса 6 класса, наиболее простой формой увеличения вкладов является начисление «простых процентов», когда один раз за определённый период (раз в год, в полгода, в месяц) сумма вклада увеличивается *на одну и ту же фиксированную величину*, пропорциональную *начальному* вкладу. Возникающая при этом числовая последовательность, образуемая величинами вклада в начальный момент, в конце первого периода, в конце второго периода, и т. д., является примером последовательности, в которой также каждый следующий член превосходит предыдущий на одно и то же число.

Подобные последовательности получили специальное название – арифметическая прогрессия (от лат. *progression* – движение вперед). Займёмся их более подробным изучением. Но сначала введём определение.

Определение 1. Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, получается из предыдущего члена прибавлением одного и того же числа d, называется ***арифметической прогрессией***. Число d называется ***разностью*** (или шагом) арифметической прогрессии.

Опираясь на введённые нами обозначения, можно описать правило составления арифметической прогрессии на математическом языке: $x_{n+1} = x_n + d$ (это рекуррентная формула для задания арифметической прогрессии).

Отсюда $d = x_{n+1} - x_n$, теперь ясно, почему это число называют *разностью*.

Разность арифметической прогрессии может быть любым числом: положительным, отрицательным и даже нулём. Так, в рассмотренной нами задаче про костюмы разность арифметической прогрессии положительна: $d = 35$. В этой последовательности каждый следующий член больше предыдущего – она строго *возрастает*.

Приведём пример арифметической последовательности с отрицательной разностью: 130; 100; 70; 40; .... Здесь разность отрицательна: $d = -30$. В этой последовательности каждый следующий член меньше предыдущего – она строго *убывает*.

При $d = 0$ арифметическая прогрессия является *постоянной* последовательностью ($x_1 = x_2 = x_3 = ...$).

* * *

Покажем, что арифметическая прогрессия с положительной разностью – строго возрастающая последовательность. Так как $x_{n+1} - x_n = d > 0$ при всех $n = 1, 2, ...$, значит, $x_{n+1} > x_n$. Аналогично арифметическая прогрессия с отрицательной разностью – строго убывающая (так как $x_{n+1} - x_n = d < 0$ при всех $n = 1, 2, ...$). Если $d = 0$, то все члены арифметической прогрессии равны x_1, т.е. последовательность постоянна (строго говоря, такая последовательность является одновременно нестрого возрастающей и нестрого убывающей). При $d \neq 0$ арифметическая прогрессия является неограниченной последовательностью, при $d = 0$ – ограниченной.

Вернёмся к задаче 1. Пусть в этой задаче нам требуется найти, сколько костюмов будет на складе через 30 дней. Выписывать по очереди члены прогрессии, пока не дойдем до 30-го её члена – не самый рациональный способ ответа на этот вопрос. Проведём другие рассуждения.

Если $x_1 = 135$;

$x_2 = 135 + 35$;

$x_3 = 135 + 35 + 35 = 135 + 35 \cdot 2$,

$x_4 = 135 + 35 + 35 + 35 = 135 + 35 \cdot 3$,

тогда нетрудно понять, что $x_{30} = 135 + 35 \cdot 29 = 1150$.

Вообще говоря, если первый член арифметической прогрессии равен x_1, а разность равна d, то $x_2 = x_1 + d$, $x_3 = x_2 + d = x_1 + 2d$, $x_4 = x_3 + d = x_1 + 3d$ и т. д. Легко заметить, что $x_n = x_1 + d(n-1)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Мы получили ***формулу общего члена арифметической прогрессии***:

$$\boxed{x_n = x_1 + d(n-1).}$$

* * *

Строго эта формула обосновывается методом математической индукции.

Доказательство.

При $n = 1$ получим: $x_1 + d \cdot 0 = x_1$; формула справедлива.

Пусть при фиксированном $n = 1, 2, \ldots$ выполняется равенство $x_n = x_1 + d(n-1)$.

Тогда $x_{n+1} = x_n + d$ и по предположению индукции: $x_{n+1} = x_1 + d(n-1) + d$. Вынося множитель d за скобки, получим $x_{n+1} = x_1 + d((n+1)-1)$. ■

Отметим, что по формуле общего члена последовательности можно сразу определить, является ли последовательность арифметической прогрессией. Для этого нужно воспользоваться следующей теоремой.

Теорема 1. Последовательность (x_n) является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда $x_n = kn + b$, где $k, b \in \boldsymbol{R}$; при этом разность прогрессии равна k (таким образом, арифметические прогрессии – это линейные функции на множестве натуральных чисел).

Доказательство.

1. Если (x_n) – арифметическая прогрессия, то $x_n = x_1 + d(n-1) = dn + x_1 - d$. Переобозначив $d = k$ и $x_1 - d = b$, получим $x_n = kn + b$.

2. Обратно, если общий член последовательности (x_n) задан формулой $x_n = kn + b$, то $x_{n+1} - x_n = k(n+1) + b - kn - b = k$, $n = 1, 2, \ldots$, то есть (x_n) – арифметическая прогрессия с разностью k. ■

Пример 1.

Запишите формулу общего члена для данной арифметической прогрессии и вычислите 100-й её член:

а) последовательность всех чётных натуральных чисел;

б) последовательность всех натуральных чисел, дающих при делении на 3 остаток 1;

в) последовательность всех нечётных отрицательных чисел: $-1; -3; -5, \ldots$.

Решение.

а) Первый член прогрессии равен 2. Каждый последующий член получается из предыдущего прибавлением числа 2, значит, $d = 2$. По формуле общего члена прогрессии $x_n = 2 + 2(n-1) = 2n$. Отсюда $x_{100} = 2 \cdot 100 = 200$.

б) В данной прогрессии $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 7$, и т.д. Каждый последующий член получается из предыдущего прибавлением числа 3. Значит, это – арифметическая прогрессия с разностью 3, и $x_n = 1 + 3(n-1) = 3n - 2$. Отсюда $x_{100} = 3 \cdot 100 - 2 = 298$.

в) В данной прогрессии $x_1 = -1$, а каждый последующий член получается из предыдущего вычитанием числа 2, значит, $d = -2$. Тогда формула общего члена этой прогрессии $x_n = -1 - 2(n-1) = -2n + 1$. Отсюда $x_{100} = -2 \cdot 100 + 1 = -199$.

Пример 2.

Задана арифметическая прогрессия, первый член которой равен 0, а разность составляет 3,5. Является ли членом этой прогрессии число 210; число 73?

Решение.

1) Если 210 является членом этой прогрессии, то для него верна формула $x_n = x_1 + d(n-1)$ и выполняется равенство

$210 = 0 + 3{,}5(n-1)$, где n – номер этого члена прогрессии. Решим это уравнение:

$210 = 3{,}5(n-1) \Leftrightarrow n-1 = 210 : 3{,}5 \Leftrightarrow n-1 = 60 \Leftrightarrow n = 61.$

Значит, 210 является членом этой прогрессии (причем ее 61-ым членом).

2) Аналогично, составим уравнение и решим его:

$73 = 3{,}5(n-1) \Leftrightarrow n-1 = 73 : 3{,}5 \Leftrightarrow n-1 = 20\frac{6}{7} \Leftrightarrow n = 21\frac{6}{7}.$

Значит, 73 не является членом этой прогрессии (так как номер должен быть натуральным числом).

Ответ: число 210 является членом этой прогрессии; число 73 – нет.

Пример 3.

Сумма внутренних углов треугольника равна 180°, а при увеличении числа вершин выпуклого многоугольника на 1 сумма внутренних углов его увеличивается на 180°. Чему равна сумма внутренних углов выпуклого 2013–угольника?

Решение.

Рассмотрим арифметическую прогрессию (x_n) такую, что её первый член $x_1 = 180$ является выраженной в градусах суммой внутренних углов треугольника, второй член x_2 – суммой внутренних углов выпуклого четырёхугольника, третий член x_3 – суммой внутренних углов выпуклого пятиугольника и т.д.

Разность прогрессии $d = 180$. Тогда n-й член x_n – это сумма внутренних углов выпуклого $(n+2)$-угольника; $x_n = 180 + 180(n-1) = 180n$. Тогда сумма внутренних углов выпуклого $(n+2)$-угольника равна $180n°$, а для n-угольника получим $180(n-2)°$. Сумма внутренних углов выпуклого 2013-угольника равна $180 \cdot 2011° = 361\,980°$.

Ответ: 361 980°.

В заключение докажем еще несколько свойств членов арифметической последовательности. Сначала докажем свойство прогрессии, благодаря которому ее принято называть ***арифметической***.

Теорема 2. Последовательность x_n является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый ее член, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов, т. е. $x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n+1}}{2}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$.

Доказательство.

Если (x_n) – арифметическая прогрессия, то $x_{n+1} = x_n + d$, $x_{n-1} = x_n - d$, откуда $\frac{x_{n-1} + x_{n+1}}{2} = \frac{x_n - d + x_n + d}{2} = x_n$.

Обратно, если $x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n+1}}{2}$ при $n = 2, 3, 4, \ldots$, то $2x_n = x_{n-1} + x_{n+1}$, откуда

$x_{n+1} - x_n = x_n - x_{n-1}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$. Таким образом, $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 = \ldots = x_{n+1} - x_n = \ldots$, т.е. разность между двумя соседними членами последовательности – постоянная величина. Значит, x_n – арифметическая прогрессия. ■

* * *

Докажем ещё одно свойство, рассмотрев следующий пример.

Пример 4.

Пусть все члены $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и разность d арифметической прогрессии отличны от нуля.

Доказать, что $\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+...+\frac{1}{x_nx_{n+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_{n+1}}\right)$.

Доказательство.

При любом $k = 1, 2, ...$ разность $x_{k+1} - x_k$ равна d, поэтому $\frac{1}{x_kx_{k+1}}=\frac{x_{k+1}-x_k}{dx_kx_{k+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{x_k}-\frac{1}{x_{k+1}}\right)$. Значит, $\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+...+\frac{1}{x_nx_{n+1}}=$

$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_3}+...+\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n+1}}\right)=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_{n+1}}\right)$. ■

К **430** При вкладе в банк начальная сумма 800 р. увеличивается ежегодно на 10% от начальной суммы. Какой будет эта сумма через 1 год; 2 года; 3 года?

431 Объясните, как образованы члены последовательности:

а) 5; 7; 9; 11 ....

б) −100; −150; −200; −250; −300; ....

в) 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; ....

Придумайте пример аналогичной последовательности. Познакомьтесь с названием подобных последовательностей в учебнике. Какое определение вы использовали? Укажите разность каждой из данных прогрессий.

432 Найдите четыре первых члена арифметической прогрессии, если её первый член равен 1,5, а разность равна −0,4.

433 Дан первый член арифметической прогрессии $a_1 = 500$ и её разность $d = 20$.

1) Проанализируйте, каким образом записаны члены прогрессии, и продолжите запись:

$a_2 = 500 + 20$

$a_3 = 500 + 20 + 20 = 500 + 20 \cdot 2$

$a_4 =$

$a_5 =$

...

Что интересного вы наблюдаете? Какой вид будет иметь a_n?

2) Можно ли обобщить ваши наблюдения для любой арифметической прогрессии? Как найти общий член прогрессии, используя первый член и разность прогрессии. Сравните свою формулу с формулой на с. 122.

434 В арифметической прогрессии (a_n) первый член $a_1 = 5$; разность $d = 0,6$. Найдите: а) a_5; б) a_{26}; в) a_{32}.

435 Последовательность (a_n) – арифметическая прогрессия. Выразите:

а) a_8 через a_1 и d; б) a_{14} через a_5 и d.

436 Найдите разность арифметической прогрессии (x_n), если:

а) $x_1 = 14$; $x_8 = -7$; б) $x_5 = -4$; $x_{14} = 50$.

437 Найдите первый член арифметической прогрессии (y_n), если:

а) $y_{12} = -23$; $d = -2$; б) $y_6 = 16$; $y_{18} = 52$.

438 Найдите разность и сто пятидесятый член арифметической прогрессии 1,8; 2,2; 2,6; ....

439 Какие из чисел 123, 132, 213, 231, 312, 321 являются членами арифметической прогрессии 3; 7; 11; ... ?

440 Найдите формулу общего члена арифметической прогрессии:

а) 18; 14; 10; 6; ...; б) $2\frac{1}{6}$; $2\frac{1}{3}$; $2\frac{1}{2}$; $2\frac{2}{3}$; ... .

441 Пятый член арифметической прогрессии равен 1, а двенадцатый равен 15. Запишите формулу общего члена прогрессии и найдите её седьмой член.

442 Укажите количество положительных членов арифметической прогрессии 84,1; 78,3; 72,5 ....

443 В арифметической прогрессии $x_7 = 3$. При каком значении разности прогрессии величина произведения $x_4 \cdot x_8$ наибольшая?

444 Найдите разность арифметической прогрессии, если a_6 составляет 60% от a_3 и $a_6 + a_3 = 48$.

445 Могут ли быть членами одной арифметической прогрессии (не обязательно последовательными) числа: 2, 10, $5\sqrt{2}$?

446 Найдите пятый член арифметической прогрессии, если $a_3 + a_7 = 21$.

447 Третий член арифметической прогрессии равен 20, а девятый равен 2. Запишите формулу общего члена прогрессии и найдите её пятый член.

448 Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (a_n), если:

а) $a_4 + a_8 = 35$ и $a_3 + a_{21} = 65$; б) $a_5 + a_9 = 42$ и $a_3 \cdot a_{10} = 165$.

449 Является ли последовательность, заданная формулой, арифметической прогрессией:

а) $a_n = -8n - 1$; в) $a_n = -4{,}4n$;

б) $a_n = 5n^2 - 4n$; г) $a_n = 25 - 0{,}16n$.

П **450** Последовательность (b_n) задана формулой $b_n = n(n-4)$. Найдите b_1; b_4; b_{10}; b_k; b_{k+2}.

451 1) Какие из данных последовательностей строго убывающие, а какие строго возрастающие?

а) $a_n = 3n - 2$; в) $a_n = \frac{1}{n+1}$; д) 3, 6, 9, ..., $3k$, ...; ж) $a_n = 3 + n^2$;

б) $a_n = 50 + 7n$; г) $a_n = 2n - 1$; е) $a_n = \frac{1}{n}$; з) $a_n = 1 + \frac{n}{5}$.

2) Какие из этих последовательностей являются арифметическими прогрессиями?

452 Решите уравнение:

а) $\frac{3}{x} + \frac{33}{x^2 - 11x} = \frac{4 - x}{11 - x}$; б) $\frac{x}{x-2} = \frac{7}{x+2} - \frac{8}{4 - x^2}$; в) $\frac{x+1}{x+3} + \frac{10x}{x^2 + x - 6} = \frac{4}{x-2}$.

453 Решите уравнение с помощью замены неизвестного:

а) $\frac{1}{x - \frac{6}{x} - 3} - \frac{1}{x - \frac{6}{x} + 2} = \frac{5}{24}$; б) $\frac{4x-1}{x+5} = 5 + \frac{6}{x+5}$.

Д **454** Известны первый член арифметической прогрессии (c_n) и её разность: $c_1 = 1{,}5$; $d = -0{,}25$. Найдите c_5; c_{23}; c_{k+4}.

455 Найдите разность арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 = 3$ и $a_{25} = 53$.

456 Сколько отрицательных членов содержит арифметическая прогрессия -20; $-19{,}2$; $-18{,}4$; ...?

457 В арифметической прогрессии $a_4 = 117$, $a_5 = 114$. Найдите номер первого отрицательного члена прогрессии.

458 Найдите наиболее близкий к нулю член арифметической прогрессии 101,1; 97,2; 93,3; ....

459* Могут ли быть членами одной арифметической прогрессии (не обязательно последовательными) числа: $\sqrt{3}$, 5, $7\sqrt{3}$?

460 Последовательность (a_n) задана формулой $a_n = n(n - 3)$. Найдите a_1; a_3; a_{10}; a_k; a_{k+3}.

461 Решите уравнения:

а) $\dfrac{1}{x+4} - \dfrac{8}{x^2 - 16} = \dfrac{x-5}{x-4}$; б) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{10}{5x - x^2} = \dfrac{3-x}{x-5}$.

С **462*** Возрастающая арифметическая прогрессия такова, что произведение каждых двух различных её членов – также член этой прогрессии. Докажите, что все её члены – целые числа.

463* Какое наибольшее количество последовательных членов арифметической прогрессии с разностью 6 может оказаться простыми числами?

464* Имеется возрастающая арифметическая прогрессия с натуральными членами. Докажите, что найдётся член, в десятичной записи которого есть 999 девяток подряд.

465* Возрастающая арифметическая прогрессия содержит два натуральных числа и квадрат меньшего из них. Докажите, что она содержит и квадрат второго числа.

3.2.2. Сумма первых *n* членов арифметической прогрессии

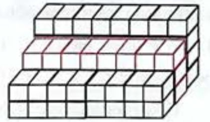
Доказывать человеку необходимость знания –
это всё равно, что убеждать его в полезности зрения.

Максим Горький (1868–1936),
русский советский писатель

В предыдущем пункте мы рассмотрели несколько формул, связанных с арифметической прогрессией. Среди них была и формула общего члена арифметической прогрессии, которая помогает, например, найти нужный её член, избежав громоздких вычислений. В этом пункте мы выявим и другие формулы, позволяющие проводить расчеты с членами прогрессий более рациональным способом.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1.



Рабочий выкладывает из кирпича ступени лестницы. На каждую следующую ступеньку уходит на 8 кирпичей больше, чем на предыдущую (кладка начинается от уровня земли). На первую ступеньку ушло 16 кирпичей. Сколько кирпичей потребуется на выкладывание лестницы с 15 ступенями?

В этом примере, если x_1, x_2, ... – соответственно количество кирпичей, требуемых для выкладывания первой, второй и т.д. ступеней, то числа x_1, x_2, ... являются членами арифметической прогрессии с первым членом, равным 16, и разностью 8. Для ответа на вопрос нам требуется найти сумму первых пятнадцати членов арифметической прогрессии: $x_1 + x_2 + ... + x_{15}$.

Другой пример задачи на суммирование членов арифметической прогрессии описан в математической литературе.

В школьные годы с великим немецким математиком Карлом Гауссом произошёл такой случай (возможно, это легенда). Учителю нужно было на уроке срочно заняться своими делами, и он озадачил учеников таким, с его точки зрения, трудным упражнением: найти сумму всех натуральных чисел от 1 до 100. Учитель полагал, что на его выполнение уйдет много времени, однако Гаусс справился с этим упражнением за пару минут. По всей видимости, он рассуждал так: $1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = ... = 50 + 51 = 101$. Поэтому он разбил 100 слагаемых на 50 пар, сумма чисел в каждой из которых составляла 101. Отсюда ему нетрудно было сделать вывод о том, что вся сумма равна $50 \cdot 101 = 5050$.

Итак, юный Гаусс, заметив определённую закономерность, вычислил сумму первых ста слагаемых арифметической прогрессии, обойдясь без поочерёдного прибавления каждого из слагаемых. Попробуем найти подобный способ нахождения суммы первых n членов арифметической прогрессии и мы.

Получить значение суммы Гауссу помогло то, что он заметил равенство попарных сумм, равноудалённых от начала x_1 и конца x_n арифметической прогрессии. Воспользуемся его идеей и решим задачу нахождения суммы первых n членов арифметической прогрессии в общем виде.

Обозначим сумму первых n членов арифметической прогрессии S_n. Чтобы получить попарные суммы членов прогрессии, запишем S_n двумя способами. В первой строке начнём с x_1 и будем получать каждый следующий член прибавлением разности d. Во второй строке начнём с x_n и будем получать каждый следующий член вычитанием разности d:

$$S_n = x_1 + (x_1 + d) + (x_1 + 2d) ... + (x_1 + (n - 1)\,d),$$
$$S_n = x_n + (x_n - d) + (x_n - 2d) ... + (x_n - (n - 1)\,d).$$

Как мы видим, каждая пара чисел, расположенных друг под другом, в сумме даёт одно и то же значение $x_1 + x_n$ (а значит, попарные суммы членов S_n арифметической прогрессии, равноудалённых от её начала x_1 и конца x_n, всегда равны).

Сложив эти равенства почленно, получим:

$$2S_n = \underbrace{(x_1 + x_n) + (x_1 + x_n) + (x_1 + x_n) + ... + (x_1 + x_n)}_{n \text{ раз}};$$

$$2S_n = (x_1 + x_n) \cdot n;$$

$$S_n = \frac{(x_1 + x_n) \cdot n}{2}. \blacksquare$$

Используем полученную формулу для задачи, решённой юным Гауссом. Натуральный ряд чисел образует арифметическую прогрессию, первый член которой равен 1, а n-й член равен n, поэтому $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$. При $n = 100$ получим тот же результат: $1 + 2 + ... + 100 = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$.

Полученная нами формула удобна, если нам известен первый и n–й члены прогрессии, как это было в истории про Гаусса. Однако в первой задаче, рассмотренной нами, 15-й член прогрессии неизвестен, и его придётся вычислять отдельно по формуле $x_{15} = x_1 + (15 - 1)d$. Выведем формулу суммы, которая сразу приведёт нас к нужному ответу.

Подставив в формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии вместо x_n выражение $x_1 + (n - 1)d$, получим другую формулу для подсчёта суммы:

$$S_n = \frac{x_1 + x_n}{2} \cdot n = \frac{x_1 + x_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = \frac{2x_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

Эта формула внешне напоминает формулу общего члена арифметической прогрессии, и поэтому её легко запомнить.

Итак, мы можем использовать две *формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии*

$$\boxed{S_n = \frac{(x_1 + x_n) \cdot n}{2}, n = 1; 2; 3; \ldots}$$

и

$$\boxed{S_n = \frac{2x_1 + d(n-1)}{2} \cdot n, n = 1; 2; 3; \ldots}$$

Вернёмся к решению задачи о кирпичной кладке:

$$S_{15} = \frac{2 \cdot 16 + 8 \cdot (15 - 1)}{2} \cdot 15 = (16 + 56) \cdot 15 = 1080.$$

Ответ: 1080 кирпичей.

Не зная этих формул, нам бы пришлось вычислять все первых пятнадцать членов арифметической прогрессии и складывать их.

Рассмотрим ещё несколько примеров, в которых применяются выведенные нами формулы.

Пример 1.

Найти сумму первых n нечётных чисел.

Решение.

Последовательность нечётных натуральных чисел образует арифметическую прогрессию с первым членом 1 и n-м членом, равным $2n - 1$. Тогда искомая сумма равна

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = \frac{1 + 2n - 1}{2} \cdot n = n^2.$$

Пример 2.

13 шахматистов разыгрывают турнир в один круг, т.е. каждые два участника встречаются друг с другом по одному разу. Сколько партий будет сыграно?

Решение.

Первый участник сыграет 12 партий, второй – также 12, но одна игра (с первым) уже учтена, поэтому «новых» (не учтённых ранее) партий будет 11. «Неучтённых» партий 3-го участника будет 10, 4-го – 9, и т.д. Для 12-го участника останется одна «неучтённая» партия с 13-м, а для 13-го все партии уже учтены. Итого сыграно $1 + 2 + \ldots + 12 = \frac{12 \cdot 13}{2} = 78$ партий.

Замечание. Эту же задачу можно решить и с помощью комбинаторики. Искомое число партий равно $C_{13}^2 = \frac{12 \cdot 13}{2} = 78$.

Пример 3.

Найти разность арифметической прогрессии, если сумма её второго и третьего членов равна 13, а сумма третьего и четвёртого членов равна 7.

Решение.

Разность $(x_3 + x_4) - (x_2 + x_3) = x_4 - x_2 = 2d$, где d – разность прогрессии. То есть $2d = 7 - 13 = -6$, откуда $d = -3$.

Пример 4.

Найти сумму первых 11 членов арифметической прогрессии, если сумма 3-го и 9-го членов равна 10.

Решение.

Пусть x_1 – первый член, а d – разность прогрессии. Тогда $x_3 = x_1 + 2d$, $x_9 = x_1 + 8d$, $x_3 + x_9 = 2x_1 + 10d = 10$. Сумма первых 11 членов прогрессии равна

$$S_{11} = \frac{x_1 + x_{11}}{2} = \frac{11}{2}(x_1 + x_1 + 10d) = \frac{11}{2}(2x_1 + 10d) = \frac{11}{2} \cdot 10 = 55.$$

Пример 5.

Сумма первых n членов арифметической прогрессии в два раза меньше суммы следующих n членов. Найти отношение суммы первых $3n$ членов прогрессии к сумме первых n членов (считать, что разность прогрессии не равна 0).

Решение.

$$S_n = \frac{x_1 + x_n}{2} \cdot n;\ S_{3n} = \frac{x_1 + x_{3n}}{2} \cdot 3n, \text{ поэтому } \frac{S_{3n}}{S_n} = 3 \cdot \frac{x_1 + x_{3n}}{x_1 + x_n}. \qquad (1)$$

По условию задачи, $x_{n+1} + \ldots + x_{2n} = 2S_n$, но $x_{n+1}, \ldots, x_{2n}$ образуют арифметическую прогрессию с первым членом x_{n+1} и n-м членом x_{2n}, поэтому $x_{n+1} + \ldots + x_{2n} = \frac{x_{n+1} + x_{2n}}{2} \cdot n$, т.е. $\frac{x_{n+1} + x_{2n}}{2} \cdot n = 2 \cdot \frac{x_1 + x_n}{2} \cdot n$, откуда

$$x_{n+1} + x_{2n} = 2(x_1 + x_n). \qquad (2)$$

Заметим, что $x_1 + x_{3n} = x_{n+1} + x_{2n}$ (суммы членов, равноудаленных от «начала» x_1 и «конца» x_{3n}, равны), поэтому из (1) и (2) следует $\frac{S_{3n}}{S_n} = 3 \cdot \frac{x_{n+1} + x_{2n}}{x_1 + x_n} = 6$.

* * *

Пример 6*. Найти сумму квадратов первых n натуральных чисел.

Решение.

Применяя равенство $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$, $k = 1, 2, \ldots$, получим:

$$2^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1;$$
$$3^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1;$$
$$4^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1;$$
$$\ldots$$
$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1.$$

Сложим эти равенства:

$2^3+3^3+...+n^3+(n+1)^3=1^3+2^3+...+n^3+3\cdot(1^2+2^2+...+n^2)+3\cdot(1+2+...+n)+n.$

В левой и правой частях последнего равенства имеются суммы общих слагаемых 2^3+3^3+ $+...+n^3$; «уничтожив» их, получим $(n+1)^3=1+3\cdot(1^2+2^2+...+n^2)+3\cdot(1+2+...+n)+n.$

Так как $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$, то искомая сумма равна

$$1^2+2^2+...+n^2=\frac{1}{3}\left((n+1)^3-1-3\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n\right)=\frac{n+1}{3}\left((n+1)^2-1-\frac{3n}{2}\right)=$$

$$=\frac{n+1}{6}(2(n+1)^2-2-3n)=\frac{n+1}{6}(2n^2+4n+2-2-3n)=\frac{n+1}{6}(2n^2+n)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Этот же результат был ранее выведен нами при помощи принципа математической индукции.

Аналогично можно найти $1^3+2^3+...+n^3$, зная выражения для $1+2+...+n$ и $1^2+2^2+...+n^2$. Для этого нужно воспользоваться формулой

$$(k+1)^4=k^4+4k^3+6k^2+4k+1 \text{ и т.д.}$$

Следует отметить, что если в арифметической прогрессии убрать несколько первых членов, то получится новая арифметическая прогрессия. Ведь у новой последовательности по-прежнему каждый последующий член больше предыдущего на разность прогрессии.

Пример 7.

Найти сумму членов арифметической прогрессии с 11-го по 25-й, если $x_1=2$, $d=5$.

Решение.

Заметим, что $x_{11}=2+5\cdot10=52$. То есть нам нужно найти сумму первых 15 членов прогрессии y_n, у которой первый член $y_1=x_{11}=52$, а разность равна 5. Также в этой прогрессии $y_{15}=x_{25}=122$. По формуле получаем, что эта сумма равна $\frac{y_1+y_{15}}{2}\cdot15=$ $=\frac{52+122}{2}\cdot15=1305.$

Сумму членов арифметической прогрессии с 11-го по 25-й можно вычислить иначе. Она равна разности между суммой первых 25 членов прогрессии и суммой первых 10 ее членов. То есть искомая сумма равна $S_{25}-S_{10}=\frac{x_1+x_{25}}{2}\cdot25-\frac{x_1+x_{10}}{2}\cdot10=$ $=\frac{2+122}{2}\cdot25-\frac{2+47}{2}\cdot10=1550-245=1305.$

К **466** 1) Пусть задана арифметическая прогрессия (a_n) с первым членом $a_1=7$ и разностью $d=2$. Запишите первые 10 членов этой прогрессии. Предположите, по какому принципу составлены суммы a_1+a_8; a_2+a_7; a_3+a_6? Составьте еще одну такую сумму членов. Найдите значения этих сумм. Что интересного вы замечаете? Продолжите исследование, вычислив несколько аналогичных сумм членов этой прогрессии. Сформулируйте гипотезу о свойстве пар членов прогрессии.

2)* Задайте произвольную арифметическую прогрессию и проверьте свою гипотезу. Докажите её в общем виде.

467 1) Решите задачу: «Для долговременного проката автомобиля на срок не более месяца предоставляются следующие условия. Первые сутки проката автомобиля стоят 2000 рублей. Оплата за каждые следующие сутки снижается на 50 рублей. Сколько нужно заплатить за третьи сутки проката?»

2) Прочитайте задачу: «Для долговременного проката автомобиля на срок не более месяца предоставляются следующие условия. Первые сутки проката автомобиля стоят 2000 рублей. Оплата за каждые следующие сутки снижается на 50 рублей. Сколько нужно заплатить за трое суток проката?» Чем эта задача отличается от предыдущей задачи? Решите её.

3) Удобен ли использованный вами способ решения для ответа на вопрос: «Сколько нужно заплатить за 20 суток? за 31 сутки проката?»

4) Как можно упростить выполнение этих заданий? Что вы пока не знаете?

Сформулируйте цель дальнейшей деятельности. Для достижения цели воспользуйтесь текстом учебника на с. 127–128 либо выполните следующее задание.

468 1) Пусть задана арифметическая прогрессия: 1; 2; 3; 4; 5; ... n, ... Чтобы быстрее вычислить сумму первых 100 её членов

$S_{100} = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 97 + 98 + 99 + 100$,

используется следующий способ:

$$S_{100} = \boxed{1} + \boxed{2} + ... + \boxed{99} + \boxed{100}$$
$$S_{100} = \boxed{100} + \boxed{99} + ... + \boxed{2} + \boxed{1}$$

Отсюда

$2S_{100} = 101 \cdot 100 = 10100;$

$S_{100} = \; = 5050.$

Объясните, с помощью каких рассуждений была найдена сумма первых 100 членов этой арифметической прогрессии. Можно ли использовать эту идею для нахождения первых 1000 членов этой прогрессии?

2)* Найдите сумму первых n членов произвольной арифметической прогрессии: x_1; x_2;... x_n;.... Каким способом можно это сделать? Сопоставьте полученное вами равенство с формулой на с. 128.

469 Дана арифметическая прогрессия с первым членом $-\frac{1}{3}$ и разностью $\frac{2}{3}$. Найдите сумму первых шести членов данной арифметической прогрессии.

1) Сколько действий вы должны выполнить, чтобы решить эту задачу?

2) Предположите, как нужно изменить формулу $S_n = \frac{(x_1 + x_n) \cdot n}{2}$, чтобы ответить на вопрос задачи сразу. Сравните свое предположение с учебником на с. 128.

470 Найдите сумму первых 24 членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 = -4{,}2$; $d = 0{,}6$.

471 Найдите сумму первых 40 членов арифметической прогрессии 14; 9; 4; ....

472 Арифметическая прогрессия задана формулой $a_n = 0{,}4n + 5$. Найдите S_{36}.

473 Найдите сумму:

а) всех чётных чисел от 2 до 1000;

б) всех натуральных чисел, кратных 11 и не больших 374;

в) всех натуральных чисел, которые при делении на 4 дают в остатке 1, не больших 145.

474 Стрелок сделал 30 выстрелов в мишень. За первое попадание ему начислили 13 баллов, а за каждое следующее попадание начисляли на 0,9 балла больше, чем за предыдущее. Сколько раз промахнулся стрелок, если он набрал 215,4 балла?

475 Сумма первых пяти членов арифметической прогрессии в 3 раза меньше суммы последующих пяти ее членов. Найдите третий член этой прогрессии, если седьмой член равен 52.

476 Найдите сумму первых десяти членов арифметической прогрессии, если для данной прогрессии верны следующие равенства:

а) $a_1 = 6$; $a_{13} = 42$; б) $a_6 = 45$; $a_{14} = -43$; в) $a_3 + a_7 = 5$, $a_4 = 1$.

477 Найдите разность и тринадцатый член арифметической прогрессии, если его первый член равен 9, а сумма первых десяти членов равна 10.

478 Найдите первый и девятый члены арифметической прогрессии, если её разность равна -4, а сумма её первых двадцати членов равна 336.

479 Найдите сумму членов арифметической прогрессии с 25-го по 35-й, если $a_1 = 40$; $d = -2$.

480 Про арифметическую прогрессию известно, что $a_5 + a_6 = 10$. Можно ли найти сумму первых: а) десяти, б) одиннадцати членов этой прогрессии?

481 Последовательность задана рекуррентно: $b_1 = 1$; $b_{n+1} = b_n - 3$. Задайте последовательность формулой n-го члена и найдите сумму первых 5 её членов.

П **482** Является ли членом арифметической прогрессии (z_n) число 3,8, если $z_1 = 10{,}4$ и $d = -0{,}6$? Если является, укажите его номер.

483 Найдите, при каком значении m числа $3m$; $m^2 + 2$ и $m + 4$ в указанном порядке будут последовательными членами арифметической прогрессии.

484 Найдите формулу общего члена арифметической прогрессии:

а) a^4; $5a^4$; $9a^4$; $13a^4$; ...; б) $10 - a$; $8 - a$; $6 - a$; $4 - a$; ....

485 Сумма второго, четвёртого и шестого членов арифметической прогрессии равна 18, а их произведение равно -168. Найдите первый член прогрессии и разность прогрессии.

486 Решите задачи:

а) Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 18 км, одновременно выехали два велосипедиста. Первый из них прибыл в пункт B на 12 минут раньше второго, потому что его скорость была на 3 км/ч больше скорости второго. Найдите скорости велосипедистов.

б) Катер проплыл 8 км по течению реки и 16 км против течения реки, потратив на весь путь 1 час 20 минут. Какова скорость катера против течения реки, если собственная скорость катера равна 20 км/ч?

Д **487** Найдите сумму всех нечётных чисел от 11 до 1001.

488 Найдите сумму всех чётных натуральных чисел, не превосходящих 300, которые при делении на 13 дают остаток 5.

489 Маше на 8 Марта подарили 777 конфет. Маша хочет съесть все конфеты за несколько дней так, чтобы в каждый следующий день съедать на одну конфету больше, чем в предыдущий. Для какого наибольшего числа дней это возможно?

490 Найти сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии, если для данной прогрессии верны следующие равенства: $a_3 + a_8 = 23$, $a_6 = 17$.

491 Про арифметическую прогрессию известно, что $a_3 + a_{13} = 6$. Найдите сумму первых пятнадцати членов этой прогрессии.

492 Найдите сумму членов арифметической прогрессии с 20-го по 30-й, если $a_1 = 5$; $d = 2$.

493 Является ли членом арифметической прогрессии (b_n) число 26,3, если $b_1 = 52$ и $d = 2{,}1$? Если является, укажите его номер.

494 Найдите, при каком значении m числа $2m$; $m^2 - 3$ и $8m - 6$ будут последовательными членами арифметической прогрессии.

495 От пристани A по направлению к пристани B отошёл катер. Через полчаса от той же пристани в том же направлении отошла моторная лодка, скорость которой на 6 км/ч больше скорости катера. К пристани B моторная лодка пришла одновременно с катером. Найдите скорость катера, если известно, что расстояние между пристанями составляет 90 км.

С **496*** Арифметическая прогрессия состоит из целых чисел. Сумма первых n членов этой прогрессии является степенью двойки (то есть имеет вид 2^k, где k – натуральное число). Докажите, что n – также степень двойки.

Экспресс-тест № 3

Примерное время выполнения – 60 минут

Часть А

№ 1

№ 1. Последовательности заданы несколькими первыми членами. Одна из них – арифметическая прогрессия. Укажите её.

А) 1; 2; 3; 5; ...; В) $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; ...$;

Б) −1; −2; −4; −8; ...; Г) −9; −7; −5; −3; ... .

№ 2

№ 2. Число −15,8 является членом арифметической прогрессии 8,2; 6,6; ... Определите порядковый номер этого числа.

А) 13; Б) 14; В) 17; Г) 16.

№ 3		
1	2	3

№ 3. Каждой из последовательностей

1) 6; 11; 16; ...; 2) 6; 1; −4; ...; 3) 6; 12; 18; ...

поставьте в соответствие формулу n-го члена

А) $x_n = 11 - 5n$; Б) $x_n = 6n$; В) $x_n = \frac{n+1}{n}$; Г) $x_n = 1 + 5n$.

№ 4

№ 4. Сумма второго и третьего членов арифметической прогрессии равна 16, разность её равна 4. Определите первый член прогрессии.

А) 2; Б) 4; В) 5; Г) 6.

№ 5

№ 5. Арифметическая прогрессия задана условием $x_n = 4n - 7$. Найдите сумму первых десяти членов прогрессии.

А) 75; Б) 150; В) 210; Г) −210.

№ 6

№ 6. Определите число членов арифметической прогрессии −12; −8; ..., меньших 48.

А) 15; Б) 12; В) 16; Г) 18.

№ 7

№ 7. Дана арифметическая прогрессия: 76; 65; 54; ... . Найдите последний положительный член этой прогрессии.

А) 1; Б) 11; В) 0; Г) 10.

Часть В

№ 8

№ 8. Четвёртый член арифметической прогрессии равен 18. Найдите сумму первых семи членов прогрессии.

А) 80; Б) 126; В) 72; Г) 96.

№ 9

№ 9. Третий член арифметической прогрессии равен −3, а десятый равен 11. Запишите формулу общего члена прогрессии.

А) $x_n = -2n - 5$; Б) $x_n = 2n + 6$; В) $x_n = 2n - 9$; Г) $x_n = -2n + 6$.

№ 10

№ 10. Числа 55; $5s$; 95 образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите число s.

А) 15; Б) 75; В) 30; Г) 16.

Часть С

(ход решения и ответ записывается на отдельном листе)

№ 11. Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 100, кратных 6.

№ 12. Известно, что сумма первых n членов последовательности находится по формуле $S_n = \frac{n^2 - 4n}{2}$. Запишите первые шесть членов этой последовательности. Является ли эта последовательность арифметической прогрессией?

Ответы и решения к тесту:

№ 1	№ 2	№ 3			№ 4	№ 5	№ 6	№ 7	№ 8	№ 9	№ 10
		1	2	3							
Г	Г	Г	А	Б	А	Б	А	Г	Б	В	А

№ 11

1) Ряд чисел, кратных 6, является арифметической прогрессией, в которой $x_1 = 6$, $d = 6$, $x_n = 6n$ – формула общего члена.

2) Определим количество членов этой прогрессии, не превосходящих 100:

$6n < 100 \Leftrightarrow n < 16\frac{2}{3}$.

Так как $n \in N$, то $n = 16$. Тогда число, не превосходящее 100 и кратное 6, равно

$x_{16} = 96$.

3) $S_n = \frac{(x_1 + x_n) \cdot n}{2}$, $S_{16} = 816$.

Ответ: 816.

№ 12

Находя разность S_n и S_{n-1}, мы получим n-й член этой последовательности.

$$S_n - S_{n-1} = \frac{n^2-4n}{2} - \frac{(n-1)^2-4(n-1)}{2} = \frac{n^2-4n-(n^2-2n+1-4n+4)}{2} =$$

$$= \frac{n^2-4n-n^2+2n-1+4n-4}{2} = \frac{2n-5}{2} = n - 2{,}5$$

Следовательно, общий член последовательности задаётся формулой $a_n = n - 2{,}5$. Значит, данная последовательность является арифметической прогрессией.

Тогда $a_1 = 1 - 2{,}5 = -1{,}5$;

$a_2 = 2 - 2{,}5 = -0{,}5$;

$a_3 = 3 - 2{,}5 = 0{,}5$;

$a_4 = 4 - 2{,}5 = 1{,}5$;

$a_5 = 5 - 2{,}5 = 2{,}5$;

$a_6 = 6 - 2{,}5 = 3{,}5$.

Ответ: –1,5; –0,5; 0,5; 1,5; 2,5; 3,5. Данная последовательность является арифметической прогрессией.

Шкала успешности:

12 – 18 баллов – *отлично*

9 – 11 баллов – *хорошо*

7 – 8 баллов – *удовлетворительно*

§ 3. Геометрическая прогрессия

3.3.1. Геометрическая прогрессия. Формула общего члена

Хорошее начало не мелочь, хоть начинается с мелочи.

Сократ (ок. 469 до н. э.–399 до н. э.),
древнегреческий философ

Рассматривая задачу о вкладах в банк, мы выявили особый вид последовательностей – арифметическую прогрессию – и изучили её. Выявим ещё один вид последовательностей, вновь обращаясь к банковским вкладам.

Рассмотрим ситуацию, когда вкладчик положил N рублей под a %. По прошествии расчётного периода сумма средств на счете вкладчика увеличилась на a %. Если вкладчик положит полученную (вместе с процентами) сумму в банк на тех же условиях, то банк будет распоряжаться большей суммой и к концу следующего периода начислит большую по сравнению с первым сумму денег. Вклад увеличится на определённое число процентов не от *начального* его значения, а от *предыдущего*. Как мы помним, так возникают «сложные проценты». В 6 классе мы вычисляли величину вклада, которую получит вкладчик через год, два года, три года, ..., n лет с помощью выведенных нами тогда формул, теперь решим эту задачу, используя понятие последовательности.

Пусть a % – это процент на вклад, который предлагает банк. Это означает, что начальный вклад в N рублей через год увеличится на величину $N \cdot \frac{a}{100}$ и станет равным $N \cdot \left(1 + \frac{a}{100}\right) = N \cdot q$, где через q мы обозначили число $1 + \frac{a}{100}$. Ещё через год новый вклад также увеличится в q раз, то есть он станет равным $(N \cdot q) \cdot q$, через три года эта величина увеличится в q раз и т. д.

Итак, рассматривая «сложные проценты», мы получили числовую последовательность, каждый член которой превосходит предыдущий в одно и то же число раз.

Возникающая при этом числовая последовательность называется геометрической прогрессией. Введем соответствующее определение.

Определение. Числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, получается из предыдущего члена умножением на одно и то же не равное нулю число q, называется ***геометрической прогрессией.*** Число q называется ***знаменателем*** геометрической прогрессии.

Опираясь на введённые нами обозначения, можно описать правило составления геометрической прогрессии на математическом языке: $x_{n+1} = x_n \cdot q$ (это рекуррентная формула). Отсюда знаменатель прогрессии $q = \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

Если первый член геометрической прогрессии равен x_1, а знаменатель равен q, то $x_2 = x_1 q$, $x_3 = x_2 q = x_1 q^2$, $x_4 = x_3 q = x_1 q^3$ и т.д. Легко заметить, что $x_n = x_1 q^{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$.

Формула $x_n = x_1q^{n-1}$ сохраняется для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$, если вспомнить, что $q^0 = 1$. Мы получили ***формулу общего члена геометрической прогрессии***:

$$\boxed{x_n = x_1 \cdot q^{n-1}}$$

* * *

Строго эта формула обосновывается при помощи принципа математической индукции.

Доказательство.

При $n = 1$: $x_1 = x_1q^0 = x_1$, это верно. Пусть при фиксированном $n = 1, 2, 3, \ldots$ выполняется равенство $x_n = x_1q^{n-1}$. Тогда $x_{n+1} = x_nq = x_1q^{n-1} \cdot q = x_1q^n = x_1q^{(n+1)-1}$; формула выполняется для следующего значения $n+1$. Таким образом, формула общего члена геометрической прогрессии выведена для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$ методом математической индукции. ■

Пример 1.

Дана геометрическая прогрессия 162; 54; ... . Найдите её седьмой член.

Решение.

$q = \frac{x_2}{x_1} = \frac{54}{162} = \frac{1}{3}$. По формуле общего члена геометрической прогрессии

$$x_7 = x_1 \cdot q^{7-1} = 162 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{2 \cdot 3^4}{3^6} = \frac{2}{3^2} = \frac{2}{9}.$$

Ответ: $\frac{2}{9}$.

Рассмотрим примеры геометрических прогрессий:

1) 2, 6, 18, 54,... (её первый член $x_1 = 2$, а знаменатель $q = 6 : 2 = 3$);

2) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{10}, -\frac{1}{50}, -\frac{1}{250}, \ldots$ $\left(\text{её первый член } x_1 = -\frac{1}{2}, \text{ а знаменатель } q = \frac{1}{5}\right)$;

3) $-3, -6, -12, -24, \ldots$ (её первый член $x_1 = -3$, а знаменатель $q = 2$);

4) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$ $\left(\text{её первый член } x_1 = \frac{1}{3}, \text{ а знаменатель } q = \frac{1}{3}\right)$.

Члены первых двух прогрессий увеличиваются, а члены последних двух прогрессий уменьшаются.

Вообще говоря, если $q > 1$, то при $x_1 > 0$ геометрическая прогрессия строго возрастает, а при $x_1 < 0$ – строго убывает. Если же $0 < q < 1$, то при $x_1 > 0$ геометрическая прогрессия строго убывает, а при $x_1 < 0$ – строго возрастает. При $q = 1$ геометрическая прогрессия является постоянной последовательностью $(x_1 = x_2 = x_3 = \ldots)$.

В отличие от рассмотренных выше последовательностей знаменатель прогрессии: $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ отрицательный, и знаки её членов чередуются. Ясно, что такая картина будет наблюдаться при любом $q < 0$ и такие геометрические прогрессии не будут являться ни возрастающими, ни убывающими.

* * *

Итак, если $q > 0$, то геометрическая прогрессия является монотонной последовательностью (строго возрастающей или строго убывающей), если $q < 0$ – не является монотонной.

Если $|q| \leqslant 1$, то $|x_n| = |x_1q^{n-1}| \leqslant |x_1|$ при всех $n = 1, 2, \ldots$, и геометрическая прогрессия является ограниченной последовательностью. Если $|q| > 1$, то геометрическая прогрессия является неограниченной последовательностью. Доказать в общем виде это пока нам не под силу, проведём доказательство для случая $q = 2$.

Формула общего члена геометрической прогрессии со знаменателем 2 имеет вид $x_n = x_1 \cdot 2^{n-1}$. Легко доказать, что при $n = 2, 3, ...$ выполняется неравенство $2^{n-1} \geqslant n$. В самом деле, при $n = 2$ имеем $2^1 \geqslant 2$ – верное неравенство. Предположим, что при фиксированном $n \geqslant 2$ выполняется неравенство $2^{n-1} \geqslant n$. Тогда

$$2^{(n+1)-1} = 2^n = 2 \cdot 2^{n-1} \geqslant 2n \geqslant n+1,$$

и неравенство $2^{n-1} \geqslant n$ выполняется для следующего значения $n+1$. Методом математической индукции доказано, что неравенство $2^{n-1} \geqslant n$ выполняется при всех $n = 2,3,...$. Тогда $|x_n| \geqslant n \cdot |x_1|$.

Предположим, что (x_n) – ограниченная последовательность. Значит, найдётся число $C > 0$ такое, что при всех $n = 1, 2, ...$ выполняется неравенство $|x_n| \leqslant C$. Тогда $n \cdot |x_1| \leqslant C$, и $n \leqslant \dfrac{C}{|x_1|}$ при всех $n = 2, 3, ...$ (мы учли, что $x_1 \neq 0$). Но обязательно найдётся натуральное число $n > \dfrac{C}{|x_1|}$. Полученное противоречие показывает, что x_n – неограниченная последовательность. ■

По формуле общего члена последовательности можно сразу определить, является ли последовательность геометрической прогрессией.

Теорема 1. Последовательность (x_n) является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда $x_n = aq^n$, где $a, q \in R$, $a \neq 0$, $q \neq 0$, при этом знаменатель прогрессии равен q.

Доказательство.

Если (x_n) – геометрическая прогрессия, то $x_n = x_1 q^{n-1} = \dfrac{x_1}{q} q^n = aq^n$, где $a = \dfrac{x_1}{q} \neq 0$, $q \neq 0$.

Обратно, если общий член последовательности задаётся формулой $x_n = aq^n$, $a, q \neq 0$, то $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{aq^{n+1}}{aq^n} = q$, $q \neq 0$, т.е. (x_n) – геометрическая прогрессия со знаменателем q. ■

Рассмотрим свойство геометрической прогрессии, благодаря которому она получила свое название.

Теорема 2. Последовательность x_n является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда все её члены отличны от нуля и квадрат каждого члена, начиная со второго, равен произведению предыдущего и последующего членов, т. е. $x_n^2 = x_{n-1} \cdot x_{n+1}$, $n = 2, 3, 4, ...$ (если все $x_n > 0$, то $x_n = \sqrt{x_{n-1} \cdot x_{n+1}}$ – среднее геометрическое чисел x_{n-1} и x_{n+1}).

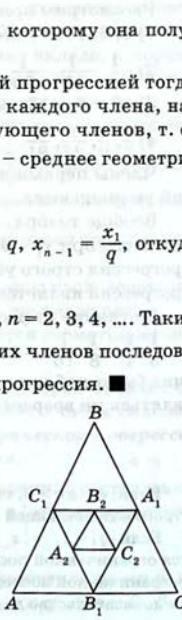
Доказательство.

Если x_n – геометрическая последовательность, то $x_{n+1} = x_n \cdot q$, $x_{n-1} = \dfrac{x_1}{q}$, откуда $x_{n-1} \cdot x_{n+1} = \dfrac{x_n}{q} \cdot x_n q = x_n^2$ $(q \neq 0)$.

Обратно, если $x_n^2 = x_{n-1} \cdot x_{n+1}$ при $n = 2, 3, 4, ...$, то $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{x_n}{x_{n-1}}$, $n = 2, 3, 4, ...$. Таким образом, $\dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{x_3}{x_2} = \dfrac{x_4}{x_3} = ... = \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = ...$, т.е. отношение двух соседних членов последовательности – постоянная величина. Значит, x_n – геометрическая прогрессия. ■

Пример 2.

Точки A_1, B_1, C_1 являются серединами сторон треугольника ABC, точки A_2, B_2, C_2 – серединами сторон треугольника $A_1B_1C_1$, и т.д., точки $A_nB_nC_n$ – серединами сторон треугольника $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$, и т.д. Доказать, что последовательность x_n площадей треугольников $A_nB_nC_n$ образует геометрическую прогрессию со знаменателем $\dfrac{1}{4}$.



Доказательство.

Так как $A_1C_1 = \frac{1}{2}AC$, $B_1C_1 = \frac{1}{2}BC$, $A_1B_1 = \frac{1}{2}AB$, то треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$. Как известно, при этом $S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{4}S_{ABC}$. Аналогично, $S_{A_2B_2C_2} = \frac{1}{4}S_{A_1B_1C_1}$, … , $S_{A_nB_nC_n} = \frac{1}{4}S_{A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}}$. Значит, площади треугольников образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{4}$. ■

* * *

Пример 3.

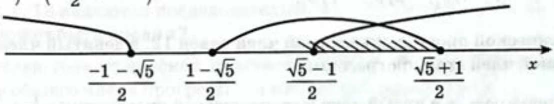
Стороны треугольника образуют геометрическую прогрессию. Какие значения может принимать знаменатель этой прогрессии?

Решение.

Запишем длины сторон треугольника в виде a, aq, aq^2, где q – искомый знаменатель. Из трёх отрезков можно составить треугольник тогда и только тогда, когда длина каждого из отрезков меньше суммы длин двух других, т. е. должны выполняться одновременно три неравенства: $a + aq > aq^2$, $a + aq^2 > aq$, $aq + aq^2 > a$. Так как a – положительное число, то остаётся решить систему трёх неравенств:

$$\begin{cases} q^2 - q - 1 < 0; & (1) \\ q^2 - q + 1 > 0; & (2) \\ q^2 + q - 1 > 0. & (3) \end{cases}$$

Неравенство (2) выполняется для всех действительных значений q, так как квадратный трёхчлен с положительным старшим коэффициентом $q^2 - q + 1$ имеет отрицательный дискриминант. Квадратный трёхчлен $q^2 - q - 1$ имеет корни $q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, поэтому множество решений первого неравенства системы имеет вид $q \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Квадратный трёхчлен $q^2 + q - 1$ имеет корни $q_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, поэтому множество решений третьего неравенства системы имеет вид $q \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; +\infty\right)$.



Пересечение этих множеств дает множество решений системы: $q \in \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$. Так как все эти значения q положительны, это и есть ответ к нашей задаче.

Ответ: знаменатель этой прогрессии $q \in \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$.

К **497** Какая сумма будет на срочном вкладе, если на него положили 2000 р. под 5% годовых, через 1 год, 2 года, 3 года? На срочном вкладе начисляются сложные проценты, то есть проценты начисляются как на сумму вклада, так и на начисленные в предыдущие периоды проценты.

498 Найдите закономерность и продолжите последовательность на три числа:

$-\frac{2}{29}; -\frac{4}{29}; -\frac{8}{29}; \ldots$.

Задайте эту последовательность рекуррентно.

499 Запишите последовательность из 5 чисел, в которой первое число равно 4, а каждое следующее больше предыдущего в 1,5 раза.

500 Даны последовательности чисел:

а) 1,2; 1,4; 1,6; ...; в) 2,4; 4,8; 9,6; ...;

б) 1,2; 0,6; 0,3;...; г) 8,1; 2,7; 0,9; ....

1) Определите, какая последовательность лишняя.

2) Чем похожи все остальные последовательности?

3) Придумайте пример аналогичной последовательности. Познакомьтесь с названием подобных последовательностей в учебнике. Какое определение вы использовали? Укажите знаменатель каждой из данных прогрессий.

501 Дан первый член геометрической прогрессии $b_1 = 36$, и её знаменатель $q = -3$.
1) Проанализируйте, каким образом выписаны члены этой прогрессии, и продолжите запись:

$b_2 = 36 \cdot (-3)$

$b_3 = 36 \cdot (-3) \cdot (-3) = 36 \cdot (-3)^2$

$b_4 =$

$b_5 =$

...

Что интересного вы наблюдаете? Какой вид будет иметь b_n?

2) Можно ли обобщить ваши наблюдения для любой геометрической прогрессии? Как найти общий член прогрессии, используя первый член и знаменатель прогрессии? Сравните составленную вами формулу с формулой из учебника на с. 137.

502 Найдите четыре первых члена геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 = -2$; $q = -3$.

503 В геометрической прогрессии (b_n) с первым членом $b_1 = \dfrac{1}{625}$ и знаменаталем $q = -5$ найдите: а) b_2; б) b_4; в) b_7; г) b_k.

504 В геометрической прогрессии восьмой член равен 12, а девятый член равен 4. Найдите седьмой член этой прогрессии.

505 Найдите знаменатель и пятый член геометрической прогрессии: $\dfrac{1}{256}$; $-\dfrac{1}{128}$; $\dfrac{1}{64}$; ....

506 Последовательность (a_n) – геометрическая прогрессия. Выразите:

а) a_5 через a_1 и q; б) a_7 через a_4 и q.

507 Найдите первый член геометрической прогрессии, если:

а) $c_5 = \dfrac{2}{3}$; $q = \dfrac{2}{3}$; б) $c_4 = 8$; $c_7 = -64$.

508 Числа 2, x, 8 являются последовательными членами геометрической прогрессии. Каким может быть число x?

509 Второй член геометрической прогрессии равен 3, а пятый равен –24. Запишите формулу общего члена прогрессии и найдите её седьмой член.

510 Как известно, клетки размножаются делением. Одноклеточная зелёная водоросль Chlorogonium, которая встречается в прудах и реках, имеет форму эллипса. Обычно она достигает размеров, превышающих исходные приблизительно в четыре раза, а затем делится на четыре дочерние клетки. Сколько водорослей образуется после пяти делений 100 таких растений?

511 При каком натуральном значении n числа n, $n + 15$, $46n - 30$ являются последовательными членами геометрической прогрессии?

512 В геометрической прогрессии с положительными членами выполнены следующие соотношения: $b_1 + b_2 = 20$, $b_3 + b_4 = 180$. Какой по счёту член данной последовательности равен 405?

513 Каким может быть пятый член геометрической прогрессии, если $b_3 \cdot b_7 = 4$?

514 Дана последовательность (b_n), у которой $b_8 = 12$, $b_{12} = -8$. Является ли данная последовательность геометрической прогрессией?

П **515** Найдите сумму первых 25 членов арифметической прогрессии (x_n), если $x_5 = 16$ и $x_{15} = 36$.

516 Найдите разность и пятнадцатый член арифметической прогрессии, если её седьмой член равен 0, а сумма первых семнадцати членов равна 17.

517 Решите неравенство:

а) $-x^2 + 6x - 5 < 0$; б) $-x^2 - 2x + 8 \geqslant 0$; в) $4x^2 - 12x + 9 > 0$; г) $-2x^2 + x - 1 \leq 0$.

Д **518** Найдите седьмой член геометрической прогрессии (c_n), если $c_1 = 6$ и $q = 2$.

519 В геометрической прогрессии третий член равен -6, а четвёртый член равен 3. Найдите первый член этой прогрессии.

520 Найдите первый член геометрической прогрессии (a_n), если $a_6 = 121{,}5$ и $q = 3$.

521 Числа 2, x, 18 являются последовательными членами геометрической прогрессии. Каким может быть число x?

522 Третий член геометрической прогрессии равен 40, а шестой равен 5. Запишите формулу общего члена прогрессии и найдите её седьмой член.

523 При каком значении x числа $2x + 1$; $x + 2$; $8 - x$ будут последовательными членами геометрической прогрессии? Найдите эти числа.

524 Каким может быть седьмой член геометрической прогрессии, если $b_2 \cdot b_{12} = 1$?

525 Числа x, 8, y являются тремя последовательными (в данном порядке) членами геометрической прогрессии. А числа x, 10, y являются последовательными (в данном порядке) членами арифметической прогрессии. Найдите x и y.

526 Дана последовательность (b_n), у которой $b_3 = 9$, $b_9 = -3$. Является ли данная последовательность геометрической прогрессией?

527 Найдите сумму первых 20 членов арифметической прогрессии (x_n), если $x_1 = 5$ и $x_9 = 45$.

528 Решите неравенство:

а) $-x^2+4x-3 \leqslant 0$; б) $-x^2-4x-3>0$; в) $9x^2-6x+1>0$; г) $-3x^2+x-1 \leqslant 0$.

С **529*** Последовательность из двух различных чисел продолжили двумя способами: так, чтобы получилась геометрическая прогрессия, и так, чтобы получилась арифметическая прогрессия. При этом третий член геометрической прогрессии совпал с десятым членом арифметической прогрессии. А с каким членом арифметической прогрессии совпал четвёртый член геометрической прогрессии?

3.3.2. Сумма первых n членов геометрической прогрессии

Успех во всяком деле зависит от двух условий: правильного установления конечной цели и отыскания соответствующих средств, ведущих к этой цели.

Аристотель (IV век до н.э.),
древнегреческий учёный, философ

Для арифметической прогрессии мы вывели формулу суммы первых n членов, которая существенно облегчает задачу суммирования её членов. Полезным будет вывести аналогичную формулу и для геометрической прогрессии.

Начнем с широко известной притчи, в которой описана задача на суммирование членов геометрической прогрессии.

Раджа, пожелав вознаградить изобретателя шахмат, обещал исполнить любое его желание. Изобретатель попросил положить одно зерно ячменя на первую клетку шахматной доски, два – на вторую и так удваивать количество зерен на каждой клетке, пока вся доска не будет заполнена.

Раджа поначалу обрадовался скромности мудреца. Он начал считать требуемое количество зерен: 1; 2; 4; 8; 16.... С каждой новой клеткой его энтузиазм уменьшался. Скоро стало ясно, что для выполнения обещания не хватит ячменя в зернохранилищах всего государства, поскольку сумма полученных 64 членов этой прогрессии составила бы 18 446 744 073 709 551 615 зёрен, которых хватило бы, чтобы 8 раз засадить ячменём весь земной шар!

Отметим, что существует приём, который позволит посчитать требуемое количество зёрен, не выполняя 63 операции сложения. Это можно сделать так: добавим в первую клетку ещё одно зерно. Тогда в первых двух клетках зёрен окажется поровну – по 2, и в первых двух клетках зерна будет столько же, сколько в третьей клетке, – 4. Значит, количество зёрен в первых трёх клетках равно удвоенному этому количеству, то есть 8 – количеству зёрен в четвёртой клетке и т.д. В итоге окажется, что общее количество зёрен на доске равно

$$2^{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616.$$

Осталось убрать одно зёрнышко.

Однако эта идея не каждому придёт в голову. К тому же рассмотренный нами приём не будет работать для других геометрических прогрессий. Решим задачу нахождения суммы первых n членов геометрической прогрессии в общем случае и будем пользоваться полученной формулой для всех аналогичных задач.

Пусть (x_n) – геометрическая прогрессия, q – знаменатель прогрессии, а S_n – сумма её первых n членов ($n = 1, 2, ...$). Найдём S_n.

Решение.

Рассмотрим равенство

$S_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$.

Умножив обе части этого равенства на q, получим

$S_n q = x_1 q + x_2 q + ... + x_n q$ или $S_n q = x_2 + x_3 + ... + x_n + x_{n+1}$;

Вычтем из полученного равенства первоначальное:

$S_n q - S_n = x_2 + x_3 + ... + x_n + x_{n+1} - x_1 - x_2 - x_3 - ... - x_n$, то есть $S_n(q-1) = x_{n+1} - x_1$.

Окончательно имеем (при $q \neq 1$) $S_n = \frac{x_{n+1} - x_1}{q-1}$ или $S_n = x_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$, так как $x_{n+1} = q^n x_1$.

Итак, мы получили следующую **формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии:**

$$S_n = x_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \text{ где } q \neq 1,\ n = 1, 2, ...$$

Если знаменатель геометрической прогрессии $q = 1$, то эта формула не работает, так как возникает деление на нуль. В этом случае непосредственно замечаем, что последовательность постоянна, и $S_n = nx_1$.

Найдём ответ к приведенной в начале притче о шахматах с помощью полученной нами формулы: $S_n = 1 \cdot \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1$. Решение не потребовало от нас никаких специальных идей и приемов.

Приведём примеры решения задач на геометрическую прогрессию.

Пример 1.

Найти сумму $96 + 48 + 24 + 12 + 6 + 3 + 1{,}5 + 0{,}75 + 0{,}375 + 0{,}1875$.

Решение.

Каждое слагаемое в этой сумме меньше предыдущего в 2 раза. Переформулируем эту задачу на языке последовательностей: найти сумму первых десяти членов геометрической прогрессии $x_1 = 96$, $q = \frac{1}{2}$.

Знаменатель меньше 1, и чтобы избежать вычислений с отрицательными числами, преобразуем формулу суммы: $S_n = x_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = x_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$. Тогда

$$S_{10} = 96 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = 96 \cdot 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{10}}\right) = 192 - 3 \cdot 2^6 \cdot \frac{1}{2^{10}} = 192 - \frac{3}{2^4} = 192 - \frac{3}{16} = 191\frac{13}{16}.$$

Вернёмся к притче про изобретателя шахмат. Если бы он попросил увеличивать количество зёрен с каждой клеткой не в 2 раза, а на 2 зерна, раджа вознаградил бы его всего лишь горстью зёрен. Это объясняется тем, что геометрическая прогрессия с положительным первым членом и знаменателем, большим 1, растёт очень быстро. Начиная с некоторого номера, члены такой прогрессии становятся очень большими, причём этот рост происходит значительно быстрее, чем у арифметической прогрессии.

* * *

Мы пока не можем аккуратно сформулировать и доказать утверждения такого рода. Отметим только, что если арифметическая прогрессия характеризуется постоянством разности $x_{n+1} - x_n$, то для геометрической прогрессии

$$x_{n+1} - x_n = x_1q^n - x_1q^{n-1} = x_1(q-1)q^{n-1},$$

то есть эта разность также является геометрической прогрессией с тем же знаменателем q и очень быстро растет.

Сравним арифметическую прогрессию и геометрическую прогрессию

$1, 2, 3, \dots, n;$ (1)

$1, 2, 4, \dots. 2^{n-1}.$ (2)

Если в прогрессии (1) каждый последующий член больше предыдущего на постоянное число 1, то в прогрессии (2) разность $x_{n+1} - x_n = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$ совпадает с x_n и очень быстро растёт.

В то же время для прогрессии (1) сумма первых n членов $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ и $\frac{S_n}{x_n} = \frac{n+1}{2}$, а для прогрессии (2) $S_n = 2^n - 1$, и $\frac{S_n}{x_n} = \frac{2^n-1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 2$. И в общем случае *для арифметической прогрессии с положительной разностью сумма первых n членов растёт значительно быстрее n-го члена, а в геометрической прогрессии с положительным первым членом и знаменателем, большим* 1, *отношение* $\frac{S_n}{x_n}$ *ограничено* (аккуратных доказательств мы не проводим).

Образно говоря, рост арифметической прогрессии равномерен, а геометрическая прогрессия (при $x_1 > 0$, $q > 1$) возрастает резко ускоренно, основная «доля» в сумме первых n членов приходится на n-й член.

Пример 2.

Все члены геометрической прогрессии положительны, сумма первых трёх её членов равна 14, а сумма их обратных величин равна $\frac{7}{8}$. Найти первый член и знаменатель прогрессии.

Решение.

Пусть первый член прогрессии равен x_1, а знаменатель равен q. Тогда $x_2 = x_1q$, $x_3 = x_1q^2$, и из условия имеем:

$$\begin{cases} x_1 + x_1q + x_1q^2 = 14 & (1) \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1q} + \frac{1}{x_1q^2} = \frac{7}{8} & (2) \end{cases}$$

Перемножим уравнения системы: $(1 + q + q^2) \cdot \left(1 + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q^2}\right) = \frac{49}{4}$.

Решим полученное уравнение: $4(1 + q + q^2)^2 = 49q^2$.

По условию все члены прогрессии положительны, значит, $q = \frac{x_2}{x_1} > 0$. Тогда последнее уравнение равносильно $2(1 + q + q^2) = 7q$, т.е. $2q^2 - 5q + 2 = 0$. Полученное квадратное уравнение имеет корни $q_1 = 2$ и $q_2 = \frac{1}{2}$. Если $q = 2$, то из уравнения (1) имеем: $x_1(1 + 2 + 4) = 14$, т.е. $x_1 = 2$.

Если $q = \frac{1}{2}$, то $x_1\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 14$, т.е. $x_1 = 8$.

Ответ: 2, 4, 8,... и 8, 4, 2,....

Пример 3.

Пусть S_n – сумма первых n членов геометрической прогрессии. Докажите, что $S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$.

Доказательство.

Пусть первый член прогрессии равен x_1, а знаменатель равен q. Тогда $S_n = x_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$,

$S_{2n} = x_1 \cdot \frac{q^{2n}-1}{q-1}$, $S_{3n} = x_1 \cdot \frac{q^{3n}-1}{q-1}$. Нужное равенство перепишется в виде

$$x_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1} \cdot \left(x_1 \cdot \frac{q^{3n}-1}{q-1} - x_1 \cdot \frac{q^{2n}-1}{q-1}\right) = \left(x_1 \cdot \frac{q^{2n}-1}{q-1} - x_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}\right)^2,$$

то есть $\frac{x_1^2}{(q-1)^2}(q^n-1)(q^{3n}-q^{2n}) = \frac{x_1^2}{(q-1)^2}(q^{2n}-q^n)^2$. После сокращения на ненулевой множитель $\frac{x_1^2}{(q-1)^2}$, получим равносильное равенство $(q^n-1)(q^{3n}-q^{2n}) = (q^{2n}-q^n)^2$, которое проверяется непосредственным раскрытием скобок (обе части равны $q^{4n}-2q^{3n}+q^{2n}$).

Заметим, что в случае $q = 1$ эта формула приобретает вид $nx_1 \cdot (3n \cdot x_1 - 2n \cdot x_1) = (2n \cdot x_1 - n \cdot x_1)^2$, т.е. $n^2 x_1^2 = n^2 x_1^2$, и также справедлива. ■

К **530** Решите задачи:

а) Найдите сумму первых пяти членов арифметической прогрессии с первым членом 2 и разностью −3.

б) Дана геометрическая прогрессия b_n, у которой $b_1 = 2$, а $q = -3$. Найдите b_5.

в) Дана геометрическая прогрессия b_n, у которой $b_1 = 2$, а $q = -3$. Найдите сумму первых пяти членов данной прогрессии.

Ответьте на вопросы:

1) Чем отличаются задачи и способы их решения?

2) Как можно упростить выполнение последнего задания?

3) Что вы пока не знаете?

Сформулируйте цель дальнейшей деятельности. Для достижения цели воспользуйтесь текстом учебника на с. 142–143 либо выполните следующее задание.

531 1) Прочитайте задачу: «Дана геометрическая прогрессия (x_n) со знаменателем 3, её первый член равен 999 999. Найдите сумму первых шести её членов».

2) Можно решить эту задачу, обозначив слагаемые искомой суммы $x_1; x_2; x_3; \ldots x_6$. Проанализируйте это решение.

Рассмотрим равенство

$S_6 = x_1 + x_2 + \ldots + x_6$.

Умножим обе части этого равенства на $q = 3$:

$S_6 \cdot 3 = x_1 \cdot 3 + x_2 \cdot 3 + \ldots + x_6 \cdot 3$ *или* $S_6 \cdot 3 = x_2 + x_3 + \ldots + x_6 + x_7$;

Вычтем из полученного равенства первоначальное:

$3S_6 - S_6 = x_2 + x_3 + \ldots + x_6 + x_7 - x_1 - x_2 - x_3 - \ldots - x_6$, *то есть* $2S_6 = x_7 - x_1$.

Значит, $S_6 = \frac{x_7 - x_1}{2}$, *а так как* $x_7 = x_1 q^6$, *то* $S_6 = \frac{x_1 q^6 - x_1}{2} = \frac{x_1(q^6-1)}{2}$.

Подставим значения x_1 *и* q *в полученную формулу:*

$S_6 = \frac{999999 \cdot (3^6-1)}{2} = \frac{999999 \cdot (729-1)}{2} = \frac{999999 \cdot 364}{1} =$

$= (1\,000\,000 - 1) \cdot 364 = 364\,000\,000 - 364 = 363999636.$

3) Предположите, как можно найти сумму первых n членов геометрической прогрессии со знаменателем q и первым членом x_1.

4)* Выведите формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии. Сравните свои рассуждения с учебником на с. 143.

532 Найдите сумму первых четырёх членов геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 = \frac{1}{259}$; $q = 6$.

533 Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии 162; 108; 72; ....

534 Найдите сумму первых семи членов геометрической прогрессии, если её второй член равен 6, а третий равен 18.

535 Найдите сумму первых девяти членов геометрической прогрессии, если её третий член равен 256, а шестой равен −32.

536 Найдите сумму первых десяти членов возрастающей геометрической прогрессии, если третий её член больше второго на 6, а пятый больше третьего на 36.

537 Последовательность задана рекуррентно: $b_1 = 1$; $b_{n+1} = -3b_n$. Задайте последовательность формулой n-го члена и найдите сумму первых 5 её членов.

538 При поступлении в университет студент ежегодно оплачивает своё обучение. При этом по договору оплата за каждый следующий год увеличивается на 5% от предыдущей выплаты. Сколько студент выплатит за пятый год обучения, если за первый год он заплатил 20 000 рублей? В какую сумму ему обойдётся 5 лет обучения в этом университете?
Переведите условие задачи на язык последовательностей. Какая последовательность рассматривается? Запишите формулы, которые следует использовать для решения этой задачи.

П **539** Число 192 является членом геометрической прогрессии −0,375; 0,75; −1,5; .... Найдите номер этого числа.

540 Между числами 16 и 81 вставьте три таких числа, чтобы с данными числами образовалась геометрическая прогрессия. Укажите все тройки таких чисел.

541 Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если $b_3 + b_6 = 1260$; $b_4 - b_5 + b_6 = 945$.

542 Решите неравенство:

а) $(x-3)(x+8) > 0$; б) $(x-3)^2(x+8) > 0$; в) $(x-3)^3(x+8)^2 > 0$.

543 Решите неравенство:

а) $(4-x)(x-2) \geqslant 0$; б) $(4-x)^2(x-2) \geqslant 0$; в) $(4-x)^3(x-2)^2 \geqslant 0$.

Д **544** Найдите сумму первых девяти членов геометрической прогрессии (a_n), если $a_1 = -3$ и $q = 3$.

545 Найдите первый член геометрической прогрессии (x_n), если $q = \frac{1}{5}$; $S_4 = 156$.

546 Найдите сумму первых десяти членов геометрической прогрессии, если её третий член равен 256, а восьмой равен 8.

547 Найдите сумму первых восьми членов геометрической прогрессии, если её второй член равен −3, а пятый равен 81.

548 Какой может быть сумма первых шести членов геометрической прогрессии, если её второй член равен 6, а четвертый равен 24?

549 Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если $b_{10} = 9b_8$; $b_3 + b_6 = 168$.

550 Решите задачу № 538. При расчётах используйте калькулятор, ответ округлите до рублей.

551 Решите неравенство:

а) $(x-5)(x+1)>0$; б) $(5-x)^2(x+1)\leqslant 0$; в) $(5-x)^3(x+1)^2>0$.

С **552*** Сумма первых трёх членов геометрической прогрессии равна 3, а сумма их квадратов 21. Какое наибольшее значение может принимать сумма их кубов?

553* Кузнечик прыгает по плоскости так, что длина каждого следующего прыжка вдвое больше длины предыдущего прыжка. Сможет ли кузнечик когда-нибудь вернуться в начальную точку?

3.3.3*. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии

В знанье – величие и краса,
Знанье дороже, чем клад жемчужин:
Время любой уничтожит клад,
Мудрый и знающий вечно нужен.

Мухаммед Аззахири ас-Самарканди (XII в.),
персидский поэт

Для геометрической прогрессии мы научились находить сумму нескольких её первых членов. Задача нахождения суммы *всех* членов прогрессии не ставилась – ведь количество слагаемых в такой сумме бесконечно. Однако, как это ни удивительно, для некоторых геометрических прогрессий можно вычислить сумму всех членов, несмотря на то что их бесконечно много. В этом пункте мы выясним, как и в каких случаях можно найти подобную сумму, и тем самым расширим круг своих возможностей при работе с последовательностями.

Вспомним формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии: $S_n = x_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$, которую можно переписать в виде: $S_n = \frac{x_1}{1-q} + \frac{x_1}{q-1} \cdot q^n$.

Если знаменатель прогрессии q по модулю меньше 1, то величина q^n при неограниченном увеличении n становится очень малой, «стремится к нулю». Пока мы не доказываем этот факт, а принимаем его как нечто интуитивно ясное. В старших классах мы введем необходимые определения и сделаем это на более строгом уровне обоснования.

Формула для S_n содержит постоянное слагаемое $\frac{x_1}{1-q}$, которое не зависит от значения n, и «переменное» слагаемое $\frac{x_1}{q-1} \cdot q^n$, которое при неограниченно большом n стремится к нулю (из-за умножения на q^n). Поэтому величина S_n при неограниченном увеличении n стремится к значению $S = \frac{x_1}{1-q}$, которое естественно считать суммой *всех* (в бесконечном количестве!) членов геометрической прогрессии.

Определение. Если знаменатель q геометрической прогрессии по модулю меньше 1, то геометрическая прогрессия называется ***бесконечно убывающей***. Число $S = \frac{x_1}{1-q}$, где x_1 – первый член прогрессии, называется ***суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии***.

> **Итак, мы имеем следующую формулу суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии:**
>
> $$S = \frac{x_1}{1-q}, \text{ где } |q| < 1.$$

Пример 1.

Найти сумму $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$.

Решение.

Заметим, что слагаемые являются последовательными членами бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{2}$. Применяя формулу суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получим

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

Пример 2.

Найти сумму площадей всех треугольников ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$,..., $A_nB_nC_n$,... из примера 2 п. 3.3.1, если площадь треугольника ABC равна S_0.

Решение.

В примере 2 п. 3.3.1. было показано, что площади треугольников образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{4}$ (бесконечно убывающую, т. к. $\frac{1}{4} < 1$). Так первый член её – площадь S_0 треугольника ABC, то сумма бесконечно убывающей прогрессии равна $\dfrac{S_0}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}S_0$.

Пример 3.

Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой сумма квадратов первых n членов равна сумме первых $2n$ членов, а сумма кубов первых n членов в три раза меньше суммы первых $3n$ членов.

Решение:

Если числа $x_1,\ldots, x_n,\ldots$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем q, то числа $x_1^2,\ldots, x_n^2,\ldots$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем q^2, а числа $x_1^3,\ldots, x_n^3,\ldots$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем q^3. Тогда из условия можно составить следующую систему уравнений для нахождения x_1 и q:

$$\begin{cases} x_1^2 \cdot \dfrac{q^{2n}-1}{q^2-1} = x_1 \cdot \dfrac{q^{2n}-1}{q-1}; \\ x_1^3 \cdot \dfrac{q^{3n}-1}{q^3-1} = \dfrac{1}{3}x_1 \cdot \dfrac{q^{3n}-1}{q-1}. \end{cases}$$

Так как прогрессия бесконечно убывающая, то $q^{2n} \neq 1$, $q^{3n} \neq 1$, $q \neq 1$, $q^2 \neq 1$, $q^3 \neq 1$.

Разделим обе части первого уравнения системы на $x_1 \cdot \dfrac{q^{2n}-1}{q-1}$:

$\dfrac{x_1}{q+1} = 1 \Leftrightarrow x_1 = q + 1.$

Разделим обе части второго уравнения системы на $x_1 \cdot \frac{q^{3n}-1}{q-1}$, получим $\frac{x_1^{\,2}}{q^2+q+1}=\frac{1}{3}$. Значит, $x_1^{\,2}=\frac{1}{3}(q^2+q+1)$.

Из первого уравнения $x_1^{\,2}=(q+1)^2$. Приравняв правые части последних равенств, получим квадратное уравнение относительно q:

$$q^2+q+1=3q^2+6q+3 \Leftrightarrow 2q^2+5q+2=0.$$

Это уравнение имеет два корня $q_1=-2$, $q_2=-\frac{1}{2}$. Так как прогрессия бесконечно убывающая, то $|q|<1$, значит, $q_1=-2$ – посторонний корень и $q=-\frac{1}{2}$, тогда $x_1=q+1=\frac{1}{2}$.

Искомая сумма бесконечно убывающей прогрессии равна

$$S=\frac{x_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}.$$

Формула суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии может быть применена к записи бесконечной периодической десятичной дроби в виде отношения двух целых чисел.

Пример 4.

Представить в виде отношения двух целых чисел бесконечные периодические десятичные дроби:

а) 0,(25); б) 1,1(234).

Решение.

а) Дробь 0,(25) можно представить как бесконечно убывающую прогрессию со знаменателем $q=\frac{1}{100}$:

$0{,}(25)=\frac{25}{10^2}+\frac{25}{10^4}+\frac{25}{10^6}+\ldots$. Тогда, применяя формулу суммы бесконечно убывающей прогрессии, получим: $0{,}(25)=\frac{\frac{25}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{25}{99}$.

б) Дробь 1,1(234) можно представить как сумму числа 1,1 и суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$1{,}1(234)=1{,}1+\frac{234}{10^4}+\frac{234}{10^7}+\frac{234}{10^{10}}+\ldots$ (первый член прогрессии $x_1=\frac{234}{10^4}$, знаменатель $q=\frac{1}{1000}$).

Тогда $1{,}1(234)=\frac{11}{10}+\frac{\frac{234}{10^4}}{1-\frac{1}{10^3}}=\frac{11}{10}+\frac{234}{10^4}\cdot\frac{10^3}{999}=\frac{11}{10}+\frac{234}{9990}=\frac{11}{10}+\frac{26}{1110}=\frac{1247}{1110}$.

Ранее мы переводили бесконечные периодические дроби в обыкновенные по-другому, теперь, познакомившись с ещё одним способом выполнения этого задания, мы можем выбрать для себя более удобный и применять его.

Как мы видим, расширяя свои возможности по работе с прогрессиями, мы применили эти знания при выполнении заданий, на первый взгляд не связанных с геометрической прогрессией. Такое часто случается в математике – открытия, сделанные в одном её разделе, неожиданно находят применение в совсем других её разделах.

Замечание. Вспомним геометрическое распределение случайной величины, изученной нами ранее. Если проведена серия одинаковых независимых испытаний, в которых вероятность «успеха» равна p, а вероятность «неудачи» $q = 1 - p$, то распределение вероятности количества испытаний до первого «успеха» будет таким:

Значение случайной величины	1	2	3	4	5	6	7	...
Вероятность	p	qp	q^2p	q^3p	q^4p	q^5p	q^6p	...

Мы знаем, что если просуммировать вероятности для каждого значения дискретной случайной величины, то получится 1. Поэтому получаем

$$1 = p + qp + q^2p + q^3p + q^4p + \ldots = p(1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots).$$

Значит, $1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots = \frac{1}{p} = \frac{1}{1-q}$. И мы получили ещё одно доказательство формулы суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

К **554** Найдите сумму первых пяти членов геометрической прогрессии, если $b_1 = 3$, $q = 2$.

555 Запишите пять первых членов геометрической прогрессии, первый член равен 36, а знаменатель равен 0,5. Ответьте на вопросы:

1) Как меняются члены этой прогрессии? Предположите, каким должен быть знаменатель геометрической прогрессии, чтобы её члены бесконечно убывали. Приведите пример другой бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

2) Сравните задания:
«Найдите сумму первых пяти членов данной геометрической прогрессии».
«Найдите сумму всех членов данной геометрической прогрессии».
Какое из этих заданий вы пока не можете сделать?

3) Поставьте цель своей дальнейшей деятельности.

4) Что вы можете использовать для реализации поставленной цели?

556 Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии: $21; 3\sqrt{7}; 3; \ldots$.

557 Найдите сумму $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots + \frac{1}{3^n} + \ldots$.

558 Найдите первый член бесконечной геометрической прогрессии, сумма которой равна 75, а знаменатель равен 0,8.

559 Найдите пятый член бесконечной геометрической прогрессии, первый член которой равен -24, а сумма равна -16.

560 Представьте в виде несократимой дроби бесконечные периодические десятичные дроби, используя формулу суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

а) 0,(2); б) 1,(23).

561 Сумма бесконечной геометрической прогрессии равна 27, а сумма первых трёх её членов равна 35. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

562 Найдите сумму первых четырёх членов геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $b_5 = -312{,}5$; $q = 2{,}5$; б) $b_1 = \sqrt{5}$; $b_5 = 25\sqrt{5}$, $q < 0$.

563 Решите неравенство:

а) $\dfrac{(x-1)(x+3)}{(3x-6)} > 0$; б) $\dfrac{(2x-1)(3-x)}{x(x-6)} \leqslant 0$.

564 Решите неравенство:

а) $\dfrac{4}{(x-1)^2} \geqslant 1$; б) $\dfrac{4(x-1)^2(2x+5)^5}{(3-x)^3x} > 0$; в) $\dfrac{(x-2)(x^2+2x+3)}{x^2+x-12} \leqslant 0$.

565 Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии: 36; 20; $11\frac{1}{9}$; ... .

566 Найдите сумму $\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{25} + \dfrac{1}{125} + \ldots + \dfrac{1}{5^n} + \ldots$.

567 Представьте в виде несократимой дроби бесконечные периодические десятичные дроби, используя формулу суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

а) 0,(7); б) 3,(21).

568 Решите неравенство:

а) $\dfrac{3}{x^2-1} \geqslant 1$; б) $\dfrac{(5+x)^3(18-5x)^4}{9(x-2)^3x^2} \leqslant 0$; в) $\dfrac{(x+3)(x^2-3x+10)}{x^2-7x+10} \geqslant 0$.

569* В круг встали 15 мальчиков. Могло ли оказаться, что количество денег у любых двух ребят, стоящих через одного, отличается ровно на 5 рублей?

3.3.4*. Линейные рекуррентные соотношения

Главное – идти. Дорога не кончается, а цель – всегда обман зрения странника: он поднялся на вершину, но ему уже видится другая...

Антуан де Сент-Экзюпери (1900–1944),
французский писатель

Изучая те или иные математические объекты, мы чаще всего идём от знакомства с частными их представителями к последующему рассмотрению их с более общей точки зрения. Так, например, мы изучали квадратичную функцию: сначала изучили её простейшие случаи $y = x^2$, $y = ax^2$, после чего перешли к изучению более сложных: $y = ax^2 + h$ и $y = a(x-d)^2$. После чего мы обобщили все эти случаи, узнали, что все они являются примерами квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, и продолжили их изучение уже с этой точки зрения. Такой подход позволяет увидеть связи между изученными по отдельности объектами и выявить их новые свойства.

Таким же образом мы поступим и с прогрессиями. Рассматривая арифметическую и геометрическую прогрессии, мы имели дело с последовательностями, где каждый последующий член задаётся через предыдущий (сложением или умножением на одно и то же число) – это частные случаи линейного *рекуррентного соотношения первого порядка*. Введём соответствующее определение.

Определение 1. Рекуррентное соотношение $x_{n+1} = qx_n + d$, $q \neq 0$, называется ***линейным рекуррентным соотношением первого порядка***.

Мы называем их соотношениями *первого* порядка, так как последующий член выражается через *один* предыдущий (выделяют и соотношения более высокого порядка, с ними мы познакомимся позже).

При $q = 1$ имеем $x_{n+1} = x_n + d$, такое рекуррентное соотношение задаёт арифметическую прогрессию. При $d = 0$ имеем $x_{n+1} = qx_n$, такое рекуррентное соотношение задаёт геометрическую прогрессию. Общий случай последовательности, заданной рекуррентным соотношением $x_{n+1} = qx_n + d$, часто называют *арифметико-геометрической прогрессией*.

Приведём примеры арифметико-геометрических прогрессий:

1) 1; 5; 13; 29... – её члены получаются умножением предыдущего члена на 2 и увеличением полученного произведения на 3 ($x_{n+1} = 2x_n + 3$);

2) 2000; 900; 350; ... – её члены получаются умножением предыдущего члена на $\frac{1}{2}$ и уменьшением полученного произведения на 100 ($x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n - 100$).

Выведем формулу общего члена арифметико-геометрической прогрессии $x_{n+1} = qx_n + d$. Для этого попробуем сделать это, например, для такой последовательности (x_n): $x_{n+1} = -3x_n + 1$, $n = 1, 2, ...$; $x_1 = 5$.

Сначала рассмотрим вспомогательную последовательность $y_n = x_n + \alpha$ и подберём число α так, чтобы она была геометрической прогрессией. Так как $x_n = y_n - \alpha$, то рекуррентное соотношение запишется в виде: $y_{n+1} - \alpha = -3(y_n - \alpha) + 1$, т.е. $y_{n+1} = -3y_n + 4\alpha + 1$. Последовательность (y_n) будет геометрической прогрессией $y_{n+1} = -3y_n$ при $4\alpha + 1 = 0$. Значит, последовательность (y_n) будет геометрической прогрессией со знаменателем (-3), если $\alpha = -\frac{1}{4}$.

Для геометрической последовательности формула общего члена нам известна, воспользуемся ею. Тогда $y_n = y_1 \cdot (-3)^{n-1}$, где $y_1 = x_1 + \alpha = 5 - \frac{1}{4} = \frac{19}{4}$, тогда искомая формула общего члена последовательности (x_n) имеет вид

$$x_n = y_n - \alpha = \frac{19}{4}(-3)^{n-1} + \frac{1}{4} = \frac{1 + 19(-3)^{n-1}}{4}.$$

Обобщим наши рассуждения. Чтобы получить формулу общего члена арифметико-геометрической прогрессии, заданной рекуррентно, можно рассмотреть вспомогательную последовательность $y_n = x_n + \alpha$, где α – некоторая постоянная величина. Затем выбрать α так, чтобы последовательность (y_n) была геометрической прогрессией. Так как $x_n = y_n - \alpha$, то рекуррентное соотношение запишется в виде $y_{n+1} - \alpha = q(y_n - \alpha) + d$, т.е. $y_{n+1} = qy_n + \alpha(1 - q) + d$. Последовательность будет геометрической прогрессией со знаменателем q, если $\alpha(1 - q) + d = 0$, т.е. $\alpha = \frac{d}{q-1}$. Тогда $y_n = y_1 \cdot q^{n-1}$, значит, $x_n + \alpha = (x_1 + \alpha)q^{n-1}$. Окончательно получим следующую ***формулу общего члена арифметико-геометрической прогрессии***:

$$\boxed{x_n = \left(x_1 + \frac{d}{q-1}\right)q^{n-1} - \frac{d}{q-1}.}$$

В примерах пункта 3.1.1. подобные соотношения мы сначала угадывали по нескольким первым членам, затем доказывали методом математической индукции. Полученное только что соотношение вряд ли удастся угадать, но в любом случае попробуйте доказать эту формулу общего члена методом математической индукции. Рекомендуется также решить задачу из примера 3 п. 3.1.1. изложенным только что методом.

Пример 1.

При каких значениях параметра a последовательность, заданная рекуррентно: $x_{n+1} = (a-4)x_n + (4a^2 - 25a + 34)$, $x_1 = 3$, будет бесконечно убывающей геометрической прогрессией? Найти сумму этой прогрессии.

Решение.

Последовательность (x_n) будет геометрической прогрессией со знаменателем $q = a - 4$, если $4a^2 - 25a + 34 = 0$. Последнее квадратное уравнение имеет два корня: $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{17}{4}$.

Знаменатели соответствующих геометрических прогрессий: $q_1 = a_1 - 4 = -2$, $q_2 = a_2 - 4 = \frac{1}{4}$.

Прогрессия бесконечно убывающая, то есть $|q| < 1$, поэтому $q = \frac{1}{4}$.

Сумма этой бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна

$$S = \frac{x_1}{q+1} = \frac{3}{1-\frac{1}{4}} = 4.$$

Рассмотрим теперь линейное рекуррентное соотношение *второго порядка.*

Определение 2. Рекуррентное соотношение $x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n$, $q \neq 0$, называется ***линейным однородным[1] рекуррентным соотношением второго порядка.***

Мы называем их соотношениями *второго* порядка, так как последующий член выражается через *два* предыдущих. Если заданы два первых члена, то общий член x^n определяется единственным образом. Примером такой последовательности является последовательность чисел Фибоначчи, с которой мы познакомились в п. 3.1.1.

* * *

Рассмотрим метод, позволяющий находить формулу общего члена последовательности, заданной линейным однородным рекуррентным соотношением второго порядка:

$$x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n,\ q \neq 0, \qquad (1)$$

если x_1 и x_2 заданы ($x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$).

Будем искать последовательность (x_n), удовлетворяющую рекуррентному соотношению (1), в виде геометрической прогрессии: $x_n = \lambda^n$, $\lambda \neq 0$ (λ – "лямбда" – буква греческого алфавита).

Имеем: $\lambda^{n+2} = p\lambda^{n+1} + q\lambda^n$. Так как $\lambda \neq 0$, то $\lambda^2 - p\lambda - q = 0$. $\qquad$ (2)

Полученное квадратное уравнение (2) называется *характеристическим уравнением* для рекуррентного соотношения (1). Ограничимся случаем, когда это уравнение имеет два различных корня λ_1 и λ_2 (т.е. когда $D = p^2 + 4q > 0$). В этом случае существуют две последовательности с общими членами $\lambda_1{}^n$ и $\lambda_2{}^n$, удовлетворяющие рекуррентному соотношению (1), т.е.

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1{}^{n+2} &= p\lambda_1{}^{n+1} + p\lambda_1{}^n; \\ \lambda_2{}^{n+2} &= p\lambda_2{}^{n+1} + p\lambda_2{}^n. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Покажем, что любая последовательность вида $x_n = C_1\lambda_1{}^n + C_2\lambda_2{}^n$, где $C_1, C_2 \in \boldsymbol{R}$ (линейная комбинация последовательностей $\lambda_1{}^n$ и $\lambda_2{}^n$), удовлетворяет рекуррентному соотношению (1).

[1] В данном случае термин «однородное» указывает на то, что если данному рекуррентному соотношению удовлетворяет некоторая последовательность x_n, то и последовательность Cx_n при любом C тоже удовлетворяет этому соотношению.

В самом деле, применяя равенства (3), получим:

$$x_{n+2} = C_1\lambda_1^{n+2} + C_2\lambda_2^{n+2} = C_1(p\lambda_1^{n+1} + p\lambda_1^{n}) + C_2(p\lambda_2^{n+1} + p\lambda_2^{n}) =$$
$$= p(C_1\lambda_1^{n+1} + C_2\lambda_2^{n+1}) + q(C_1\lambda_1^{n} + C_2\lambda_2^{n}) = px_{n+1} + qx_n.$$

Если удастся подобрать постоянные C_1 и C_2 такие, что $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$, то последовательность $x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$ удовлетворяет соотношению (1) и данным *начальным условиям* $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$. Такая последовательность определена единственным образом, поэтому она и будет искомой.

Имеем: $x_1 = C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 = \alpha$, $x_2 = C_1\lambda_1^2 + C_2\lambda_2^2 = \beta$. Нужно доказать, что система уравнений $C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 = \alpha$, $C_1\lambda_1^2 + C_2\lambda_2^2 = \beta$ имеет единственное решение относительно неизвестных C_1, C_2 (величины λ_1, λ_2, α, β фиксированы). Решаем эту систему:

$C_2 = \dfrac{\alpha - C_1\lambda_1}{\lambda_2}$ (так как $q \neq 0$, то корни уравнения (2) не могут равняться 0). Подставляя C_2 во 2-е уравнение системы, получим уравнение относительно C_1:

$C_1\lambda_1^2 + \dfrac{\alpha - C_1\lambda_1}{\lambda_2}\lambda_2^2 = \beta$, т.е. $C_1(\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_2) = \beta - \alpha\lambda_2$ (мы учли, что $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$).

Тогда $C_2 = \dfrac{1}{\lambda_2}\left(\alpha - \dfrac{\beta - \alpha\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) = \dfrac{\alpha\lambda_1 - \beta}{\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)}$, $C_1 = \dfrac{\beta - \alpha\lambda_2}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)}$.

Итак, система уравнений имеет единственное решение $(C_1; C_2)$; полученная последовательность $x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$ является искомой.

Пример 2.

Найти формулу общего члена последовательности, заданной рекуррентно:

$x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Решение.

Составим характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. Оно имеет два корня $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Тогда при любых $C_1, C_2 \in R$ последовательность $x_n = C_1 2^n + C_2 3^n$ удовлетворяет рекуррентному соотношению $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$. Найдем теперь C_1 и C_2 так, чтобы удовлетворить начальным условиям $x_1 = 0$, $x_2 = 1$:

$2C_1 + 3C_2 = 0$, $4C_1 + 9C_2 = 1$. Решая эту систему, получим: $C_1 = -\dfrac{1}{2}$, $C_2 = \dfrac{1}{3}$, т.е. $x_n = -\dfrac{2^n}{2} + \dfrac{3^n}{3}$, $n = 1, 2, \ldots$. Равенство это можно переписать в виде $x_n = 3^{n-1} - 2^{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$ (напомним, что $2^0 = 3^0 = 1$ по отдельному определению).

Таким же образом можно найти и формулу общего члена последовательности Фибоначчи. Характеристическое уравнение для рекуррентного соотношения $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ имеет вид $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, а корнями его являются числа $\lambda_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Этим и обусловлен столь на первый взгляд экзотический вид формулы общего члена (п.3.1.1.). Довести до конца расчёт рекомендуется самостоятельно.

Случаи, когда характеристическое уравнение (2) имеет единственный корень или не имеет корней, мы пока рассматривать не будем.

Отметим, что аналогично можно рассмотреть линейные однородные рекуррентные соотношения более высоких порядков. Например, линейное однородное рекуррентное соотношение третьего порядка имеет вид $x_{n+3} = px_{n+2} + qx_{n+1} + rx_n$, $r \neq 0$, и для однозначного определения последовательности нужно задать три начальных условия: $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \gamma$. Если характеристическое уравнение $\lambda^3 - p\lambda^2 - q\lambda - r = 0$ имеет три различных корня λ_1, λ_2, λ_3, то искомая последовательность ищется в виде $x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + C_3\lambda_3^n$, где числа C_1, C_2, C_3 однозначно определяются из начальных условий: $C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 + C_3\lambda_3 = \alpha$, $C_1\lambda_1^2 + C_2\lambda_2^2 + C_3\lambda_3^2 = \beta$, $C_1\lambda_1^3 + C_2\lambda_2^3 + C_3\lambda_3^3 = \gamma$.

К **570** Последовательность задана рекуррентно: $x_{n+1} = qx_n + d$, $q \neq 0$.

1) Вспомните обозначения для арифметической и геометрической прогрессии и назовите, из каких компонентов этих прогрессий составлено равенство.

2) Исследуйте данную последовательность для $q = 1$. Какой вывод вы можете сделать?

3) Исследуйте данную последовательность для $d = 0$. Какой вывод вы можете сделать?

4) Как можно назвать соотношение $x_{n+1} = qx_n + d$, $q \neq 0$ и последовательность, которую оно задаёт? Сравните свое предположение с учебником на с. 152.

571 Найдите формулы общего члена последовательностей, заданных рекуррентно:

а) $x_{n+1} = 2x_n + 2$, $x_1 = 0$; б) $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + 1$, $x_1 = 50$.

П **572** Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии (b_n), если $b_2 = 36$; $b_4 = 16$.

573 Докажите неравенство:

а) $a(a - b) \geqslant b(a - b)$;

б) $x + \frac{9}{x} \geqslant 6$ при $x > 0$.

574 Докажите неравенство:

$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, если $a + b \geqslant 0$.

575 Найдите наибольшее значение выражения $\frac{x}{x^2 + 5x + 100}$ при $x > 0$.

Д **576** Найдите формулу общего члена последовательности, заданной рекуррентно:

а) $x_{n+1} = -x_n + 1$, $x_1 = 1$;

б) $x_{n+1} = \frac{2x_n}{3} + 3$, $x_1 = 81$.

577 Четвёртый член геометрической прогрессии в 4 раза больше её первого члена. Во сколько раз десятый член этой прогрессии больше четвёртого?

578 Докажите неравенство:

а) $c(c + b) \geqslant b(c - b)$;

б) $n + \frac{16}{n} \leqslant -8$, при $n < 0$.

С **579*** Найдите формулу общего члена последовательности, заданной рекуррентно:

$x_{n+1} = 7x_{n+1} - 12x_n$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

580* Докажите, что для членов последовательности Фибоначчи ($F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$) справедливо тождество $F_n{}^2 + F_{n+1}{}^2 = F_{2n+1}$.

Экспресс-тест № 4

Примерное время выполнения – 50 минут

Часть А

№ 1

№ 1. Последовательности заданы несколькими первыми членами. Одна из них – геометрическая прогрессия. Укажите её.

А) 3; 9; 15; 21; ...;   В) $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; \frac{1}{8}; ...$;

Б) 3; 9; 27; 81; ...;   Г) $3; 1; \frac{1}{3}; \frac{1}{6}; ...$.

№ 2

№ 2. Найдите четвёртый член геометрической прогрессии $-18; 6; ...$.

А) $\frac{2}{3}$;   Б) $-\frac{2}{3}$;   В) 1;   Г) -1.

№ 3

№ 3. Существует ли геометрическая прогрессия, в которой восьмой член равен 12, а двенадцатый член равен -8?

А) существует;   Б) нет;   В) нельзя дать однозначный ответ.

Часть В

№ 4

№ 4. Сумма первого и третьего членов геометрической прогрессии равна 10, а сумма второго и четвёртого её членов равна -20. Найдите сумму шести первых членов прогрессии.

А) 126;   Б) -42;   В) -44;   Г) -48.

№ 5

№ 5. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если $x_1 = -2$, $q = \frac{3}{4}$.

А) 0,5;   Б) $-0,5$;   В) -8;   Г) 8.

№ 6

№ 6. Числа 25; $10t$; 5 образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Найдите число t при условии, что $q > 0$.

А) $2,5\sqrt{5}$;   Б) $5\sqrt{5}$;   В) $2\sqrt{5}$;   Г) $0,5\sqrt{5}$.

Часть С

(ход решения и ответ записывается на отдельном листе)

№ 7. Найдите шестой и десятый члены геометрической прогрессии, если их сумма равна 16, а произведение четырнадцатого и второго членов этой прогрессии равно 60.

Ответы и решения к тесту:

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6
Б	А	Б	Б	В	Г

№ 7

1) Так как числа x_6, x_{10}, x_{14}, x_2 – члены одной геометрической прогрессии, то выполняется условие

$$\begin{cases} x_6 + x_{10} = 16; \\ x_{14} \cdot x_2 = 60; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1q^5 + x_1q^9 = 16; \\ x_1q^{13} \cdot x_1q = 60; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1q^5 + x_1q^9 = 16; \\ x_1q^5 \cdot x_1q^9 = 60. \end{cases}$$

2) Введём новые переменные: пусть $a = x_1q^5$, $b = x_1q^9$. Тогда

$$\begin{cases} a + b = 16; \\ a \cdot b = 60; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\begin{cases} a = 6; \\ b = 10; \end{cases} \\ &\begin{cases} a = 10; \\ b = 6. \end{cases} \end{aligned} \right.$$

3) Значит, $x_6 = 6$, $x_{10} = 10$ или $x_6 = 10$, $x_{10} = 6$.

Ответ: $x_6 = 6$, $x_{10} = 10$ или $x_6 = 10$, $x_{10} = 6$.

Шкала успешности:

7 – 9 баллов – *отлично*

5 – 6 баллов – *хорошо*

4 балла – *удовлетворительно*

Задачи для самоконтроля к главе 3

581 а) Последовательность (a_n) – арифметическая прогрессия. Выразите a_{12} через a_6 и d.
б) Последовательность (a_n) – геометрическая прогрессия. Выразите a_{12} через a_6 и q.

582 а) В арифметической прогрессии (c_n) известно, что $c_2 = -12$, $d = 0{,}5$. Найдите c_1 и сумму первых трёх членов.
б) В геометрической прогрессии (c_n) известно, что $c_2 = -12$, $q = 0{,}5$. Найдите c_1 и сумму первых трёх членов.

583 а) Является ли членом арифметической прогрессии (b_n) число 26,3, если $b_1 = 52$ и $d = 2{,}1$?
б) Является ли членом геометрической прогрессии (b_n) число 2^6, если $b_1 = 0{,}5$ и $q = 2$?

584 Последовательность задана рекуррентно:
а) $b_1 = -2$; $b_{n+1} = b_n - 3$;
б) $b_1 = -2$; $b_{n+1} = -3b_n$;
Задайте последовательность формулой n-го члена и найдите сумму 5 её членов.

585 а) Даны последовательные члены арифметической прогрессии: $x - 4$; x^2; $x + 16$. Найдите x.
б) Даны последовательные члены геометрической прогрессии: $x - 3$; $\sqrt{5x}$; $x + 16$. Найдите x.

586 В арифметической прогрессии первый член $a_1 = 16$, разность $d = -4$. Сколько надо взять первых членов прогрессии, чтобы их сумма была равна -324?

587 Полугодовое обучение на курсах экстремального вождения можно оплатить сразу либо оплачивать по частям (ежемесячно). Стоимость курсов при единовременной оплате составляет 60 000 рублей. Сколько можно сэкономить, оплатив курсы сразу, если в случае выплаты по частям оплата за первый месяц составляет 10 000 рублей, а оплата каждого следующего месяца увеличивается на 20% от: а) от первоначальной выплаты; б) от предыдущей выплаты?

588 Найдите сумму первых двадцати одного членов арифметической прогрессии, если сумма седьмого и тринадцатого членов равна 21, а разность суммы восьмого, двенадцатого членов и пятнадцатого члена данной прогрессии равна 3.

589 Разница пятого и третьего членов геометрической прогрессии равна 1200, а разница пятого и четвёртого члена равна 1000. Найдите сумму первых пяти членов прогрессии.

590 Представьте в виде несократимой дроби бесконечные периодические десятичные дроби, используя формулу суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии:
а) 0,(23); б) 0,58(3).

591 Докажите, что данный многочлен при любых значениях входящих в него букв принимает только положительные значения:

а) $x^2 - 14x + 50$; б) $y^2 + z^2 - 12y - 8z + 55$.

592 Найдите наименьшее значение выражения:

а) $(5a - 3)(5a + 3) + 4b(4b - 10a)$; б) $20c^2 - 24cd + 9d^2 - 20c + 28$.

593 Найдите наибольшее значение выражения:

а) $2(x - 51) - (x - 3)(x + 3)$; б) $-13y^2 - 20yz - 25z^2 - 24y - 12$.

594 Найдите значение выражения:

а) $3(4 + 1)(4^2 + 1)(4^4 + 1)(4^8 + 1) - 4^{16}$; б) $9^8 - 8(9 + 1)(9^2 + 1)(9^4 + 1)$.

595 Постройте график кусочно-линейной функции:

$$y = \begin{cases} x - 7, \text{ если } x \geqslant 9; \\ -x + 10, \text{ если } 6 \leqslant x < 9; \\ x - 2, \text{ если } 2 \leqslant x < 6; \\ -x + 2, \text{ если } 0 \leqslant x < 2; \\ x + 2, \text{ если } -3 \leqslant x < 0; \\ -x - 4, \text{ если } x < -3. \end{cases}$$

596 Постройте график функции $y = f(x)$:

а) $f(x) = |x + 6| - |x - 7|$; б) $f(x) = -|9 - x| - |x - 5|$.

597 Решите уравнение:

а) $\left(\left(2y + \frac{3y}{7}\right) \cdot \frac{14}{17} + \left(3y + \frac{2y}{9}\right) \cdot \frac{27}{29}\right) \cdot 13 = 39$; б) $4 - \dfrac{2y - \frac{7 + y}{3}}{5} = \dfrac{4y}{15} - \dfrac{2y - \frac{4 - 3y}{5}}{3}$.

598 Решите уравнение с модулями:

а) $|x + 6| + |x - 7| + |x + 11| = 25$;

б) $|x + 4| + |x - 9| + |x + 8| + |x - 5| = 17$;

в) $|3t - 6| + |4t + 12| + |2t - 18| - |5t + 10| = 37$.

599 а) Целое число даёт при делении на 4 остаток 2, а при делении на 7 – остаток 5. Найдите остаток от деления этого числа на 28.

б) Найдите все числа, которые при делении на 11 дают остаток 9, а при делении на 3 – остаток 2.

600 Числа m, n, $\frac{47}{3m + 7n}$ – натуральные. Найдите все пары чисел m и n, для которых это будет верно.

601 Решите неравенство:

а) $2b - \frac{4b - 2}{-3} < \frac{7 - 4b}{5}$; б) $\frac{b - 7}{3} + \frac{b - 5}{9} - \frac{b - 1}{6} \geqslant \frac{b + 11}{18}$.

602 Решите неравенство, содержащее модули:

а) $|3n - 18| + |2n - 8| + |3n + 15| \leqslant 40$;

б $|x + 12| + |x - 6| + |x + 3| + |x - 7| > 30$.

Ответы

1. 6. **2.** 2) 24. **3.** 90720. **4.** 6720. **5.** 84. **7.** 8 при $x = 4$. **8.** $9 + 4\sqrt{10}$ при $x = \sqrt{10}$. **10.** а) -2; б) -1; 2; в) -5; -2; г) -1; 0; 1; д) $\varnothing$; е) -2; -1. **12.** 6. **13.** (1; 2; 3). **17.** 4 при $x = 2$. **18.** а) 1; б) $-5{,}25$; 0; в) -3; 1. **21.** 1) а) 120; б) 60. **22.** 120; 60. **23.** 96; 48; 16. **24.** перестановки: а, размещения: б, в. **25.** 120, 336. **26.** 30; 360. **27.** 1 728 000. **28.** а) 30 240; б) 90. **30.** чётные а, г; нечётные: б, в. **31.** а) $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}$; $f(-a) = a^2$; $f(a+5) = a^2 + 10a + 25$; б) $f(-2) = 8$; $f(-a) = a^3$; $0{,}2 \cdot f(a^2) = -0{,}2a^6$; в) $f(0)$ не существует; $f(0{,}1a) = \frac{1000}{a^3}$; $\frac{1}{f(a^3)} = a^9$; г) $f(-4)$ не существует; $f(0) = 0$; $f(100) = 10$; $f((a-1)^2) = |a - 1|$. **34.** а) $(-1; -5)$; б) (0; 2); в) (1; 1); (0,25; 0,5); г) $(-16; 4)$; $(-4; 2)$. **35.** 360. **36.** 2730. **37.** а) $(2; -1)$; $(-1; 2)$; б) (2; 3). **38.** $\sqrt{1\frac{11}{25}}$; $\sqrt{2\frac{7}{9}}$; $2\sqrt{3}$; $\sqrt{16}$; $3\sqrt{2}$. **40.** а) Да; б) нет; в) да; г) нет; д) да. **41.** а) Да; б) нет. **43.** а) 1365; б) 15015. **44.** $\frac{n(n-1)}{2}$. **45.** 120. **46.** а) 72 с; б) 105 с; в) 96 с. **47.** 462. **48.** 3003. **49.** 2970. **50.** Делящихся на 11, но не делящихся на 13 больше. **51.** 24, 4, 6. **52.** а) 6; б) 120. **53.** а) больше; б) меньше; в) больше; г) больше. **54.** а) 1; б) $\sqrt{5} - 1$; в) $\sqrt{7} - \sqrt{3}$; г) $\sqrt{5} - 1$; д) 1; е) 2; ж) $2\sqrt{2}$; з) $2\frac{2}{3}$. **57.** 21. **58.** 210. **59.** 1200. **60.** а) 3 628 800; б) 210; в) 5040. **61.** а) -17; б) $\sqrt{19} - 4$; в) 1; г) 3. **62.** а) $\{0; 8\}$; б) $\frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{2}}{2}$; в) $\{-6; 6\}$; г) $\{10\}$. **79.** а) $\{-13; 2\}$; б) $\{-29; -3\}$; в) $\varnothing$. **80.** $x^2 - 29x + 163 = 0$. **81.** а) $5\frac{1}{3}$; б) -10. **82.** $x = 1 - \sqrt{5}$; $c = -4$. **83.** а) $(x + 1)(x + 12)$; б) $-1{,}2(x - 5)\left(x + \frac{5}{6}\right)$; в) $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$; г) нельзя. **84.** а) 7 см и 24 см; б) 9 см, 12 см, 15 см. **85.** $(9; +\infty)$. **86.** -2; 0; $\frac{2}{3}$. **87.** $m = 2$. **95.** а) $\{-16; -2\}$; б) $\{-7; 13\}$; в) $\varnothing$. **96.** 29. **97.** а) $(x + 9)(x - 2)$; б) $(2 - 3x)(3x + 1)$; в) $(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$; г) нельзя. **98.** 18 м; 20 м. **99.** $(-\infty; -16)$. **100.** $-\frac{1}{3}$; 0; 1. **141.** а) $\sqrt{2}$; б) 0,25. **142.** а) $\sqrt{x} + \sqrt{y}$; б) $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$; в) $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$. **143.** а) $(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$; б) $(-\infty; -4] \cup [0; 1]$; в) $(-8; 8)$; г) $(-2; 0) \cup (0; 3)$; д) $(-3; 4)$; е) $[-0{,}6; 1]$; ж) $(-\infty; -1) \cup (1; 2]$; з) $\left(-2; -\frac{1}{6}\right) \cup (0{,}5; 2) \cup (6; +\infty)$. **144.** $\left(-1; \frac{1}{6}\right)$. **145.** $(-2; 3) \cup [4; 5)$. **146.** 8 км/ч. **150.** 48. **151.** 15120. **152.** $\frac{1}{969}$. **153.** а) 3; б) $\frac{3}{2\sqrt{11}}$. **154.** а) $(-9; -7)$; б) $[-3; 0) \cup (1; 7]$; в) $(-\infty; -10) \cup (10; +\infty)$; г) (3; 6); д) $(-\infty; -4) \cup (5; +\infty)$; е) $[-1; 1) \cup \{7\}$. **155.** $\left[-1; \frac{3}{7}\right]$. **156.** 9 км/ч. **166.** а) [0; 8]; б) $(-\infty; -1] \cup [0{,}8; +\infty)$; в) $(-\infty; -1{,}5) \cup (-1{,}5; +\infty)$; г) $\{5\}$; д) $(-\infty; +\infty)$; е) $\varnothing$. **167.** $(-1; 1]$. **168.** а) $[-7; -5) \cup (0; 3]$; б) [5; 11); в) [5; 7). **169.** $(d - 7)^2 - (d - 8)(d - 6) = 1 > 0$. **170.** 220 км. **174.** 27405 способами. **175.** а) [6; 12]; б) $\varnothing$; в) $\{13\}$; г) $(-\infty; +\infty)$. **176.** $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$. **177.** а) [3; 17); б) $[-9; -8)$. **179.** 350 км. **181.** а) 24; б) 420. **182.** а) 5040; б) 45360; в) 39916800. **183.** 303600. **184.** 120. **185.** 657800. **186.** 96. **187.** $\frac{7}{30}$. **188.** 0,995. **189.** 0,1. **190.** $\frac{12}{35}$. **191.** 0,11. **192.** а) $(29; -17)$; б) $(-1{,}5; -2)$; в) $(0; -3)$. **193.** а) $(-1, 5; +\infty)$; б) $(-\infty; \sqrt{5}) \cup (3; 10)$; в) $(-\infty; -5]$. **194.** $\left[-1\frac{1}{3}; 1\frac{1}{3}\right)$. **196.** 6,5; $\sqrt{41}$; $2\sqrt{10}$. **197.** а) 9; б) 8; в) $18 - 2\sqrt{77}$; г) -11; д) $4 - \sqrt{5}$; е) $1 - \sqrt{2}$. **198.** $(9 - x)\sqrt{2}$. **199.** а) -5; 15; б) 0; $\frac{3}{7}$; в) 6; г) $\varnothing$; д) -33; 3; е) $-\sqrt{51} \pm 5$. **200.** а) $\pm\frac{1}{2}$; б) ± 3; ± 5. **201.** а) $2(x - 5)(x + 0{,}5)$; б) нельзя разложить. **202.** 5. **203.** $m = -1$, $m = 2$. **204.** $x = 2$. **205.** а) $\left(-\infty; -\frac{4}{7}\right] \cup \left[\frac{4}{7}; +\infty\right)$; б) $[-1{,}6; 0]$; в) $(-\infty; 1) \cup (18; +\infty)$;

г) $\varnothing$; д) $\left\{1\frac{2}{3}\right\}$; е) $(-\infty; +\infty)$; ж) $[-5; 6]$; з) $(-\infty; -9]\cup[0; 8]$; и) $(-\infty; 0)\cup(0; 1)\cup(7; +\infty)$. **206.** а) $(-\infty; -4)\cup(0; 1)\cup(8; +\infty)$; б) $(-1; 2]\cup\{7\}$; в) $(-2; 0)\cup(2; 4)$. **207.** а) $\left[-1\frac{1}{3}; 1\right]$; б) $(-\infty; -1{,}5)\cup(-1; +\infty)$; в) $(-4; -1)\cup\left[1; 1\frac{1}{3}\right]$. **208.** а) $(1; 4)$; б) $(-2; -1]\cup\left\{-\frac{3}{4}\right\}\cup\left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$; в) $(-10; -7)\cup\{0\}$. **211.** а) 4; б) 0; в) -3; 2; $\frac{1 \pm \sqrt{151}}{2}$; г) -4; -2; -1; 1. **212.** $\frac{1}{a}$. **214.** 9 км. **215.** 12 км/ч. **216.** 60 км/ч. **218.** $\frac{19}{13}$. **235.** а) да; б) да; в) да. **236.** а) $[5; 8]$; б) $(-\infty; -6]\cup(6; +\infty)$. **237.** а) $(-\infty; 0)\cup\left(0; \frac{2}{7}\right)\cup\left(\frac{2}{7}; +\infty\right)$; б) $(-\infty; 2)\cup(2; 4)\cup(4; +\infty)$. **238.** а) $(-\infty; -4)\cup(-4; 4)\cup(4; +\infty)$; б) $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3}; 3\right)\cup(3; +\infty)$. **239.** а) $y_{наим} = -5$; $y_{наиб}$ не существует; б) $y_{наим}$ не существует; $y_{наиб} = 6{,}125$; в) $y_{наим}$ не существует; $y_{наиб} = 0$. **240.** а) $(-0{,}125; -0{,}875)$; б) $(2; -7)$. **241.** (3). **242.** -4. **247.** а) $(-\infty; -3)\cup(-3; 3)\cup(3; +\infty)$; б) $(-\infty; -7)\cup(-7; 7)\cup(7; +\infty)$; в) $(-\infty; +\infty)$; г) $(-\infty; -5)\cup(-5; -3)\cup(-3; +\infty)$. **248.** а) $y_{наим} = 6{,}75$; $y_{наиб}$ не существует; б) $y_{наим}$ не существует; $y_{наиб} = 5{,}25$; в) $y_{наим} = 0$; $y_{наиб}$ не существует. **249.** а) $(1; -2)$; б) $(-4; 3)$. **250.** -10. **251.** $S = 50$. **253.** $(-\infty; -1)\cup\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$. **254.** $(-5; 3)$. **255.** а) $(-\infty; -2)\cup(-2; +\infty)$; б) $(-\infty; 5)\cup(5; +\infty)$; в) $(-\infty; 0)\cup(0; 0{,}4)\cup(0{,}4; +\infty)$; г) $(-\infty; 2)\cup(2; +\infty)$. **256.** 3. **257.** $[2; +\infty)$. **259.** между $x \in [-7; 7]$ и $y \in [5; 9]$. **262.** $[42; 72)$. **263.** а) $[1; 30)$; б) $(-7; 0)$; в) $\left(1\frac{1}{3}; 10\right)$. **264.** $(-0{,}4; 1)$. **265.** $[-3; -2{,}5)\cup(2{,}5; 4]$. **266.** а) $(-\infty; 5)\cup(5; +\infty)$; б) $(-\infty; -1)\cup(-1; +\infty)$; в) $(-\infty; 0)\cup(0; 0{,}5)\cup(0{,}5; +\infty)$, г) $(-\infty; 2)\cup(2; +\infty)$. **267.** $[2; +\infty)$. **269.** $[0; 1{,}8]$. **270.** 3 числа. **274.** а) $(-3; 5)$; б) $(-\infty; -\sqrt{5})\cup(\sqrt{5}; +\infty)$; в) $(-\infty; 0)\cup(1; 2)\cup(2; +\infty)$; г) $(-\infty; -1)\cup(\frac{1}{3}; +\infty)$. **275.** (а). **276.** а) $(-\infty; 2]$; б) $(-\infty; 0]$; в) $[0; +\infty)$. **277.** а) 120; б) 90720. **278.** 1680; 336; 56. **279.** $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$ или $A_6^3 - A_5^2 = 100$; $5 \cdot 5 = 25$ или $A_6^2 - A_5^1 = 25$. **280.** 24310. **281.** $a < 0$, $b < 0$ и $c < 0$. **282.** $D(y) = (-\infty; 0)\cup[1; +\infty)$; $m \in [-1; 0)$. **283.** При $a = 0$, $a = 2$. **284.** $(-5; 1)$, $(5; 1)$. **285.** 1. **286.** а) $(-\frac{5}{3}; 1)$; б) $(-\infty; 0]\cup[1; +\infty)$; в) $(-2; 1)\cup(1; 3)$; г) $(0; 4)$. **287.** а) $\left(-\infty; -\frac{5}{6}\right]$; б) $(-\infty; 3]$; в) $(-\infty; +\infty)$. **288.** а) 720; б) 360. **289.** 455. **290.** $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$. **291.** $D(y) = (-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$; $m \in [0; 1)$. **293.** $a > \frac{1}{\sqrt{5}}$. **297.** а) верно; б) не верно; в) верно; г) верно. **298.** а) ни чётная, ни нечётная; б) чётная; в) нечётная; г) чётная. **299.** а) верно; б) верно; в) верно; г) не верно. **300.** (б), (в). **301.** $T = 0{,}2$. **303.** 1) $D(y) = [-5; 5]$; 2) $E(y) = [-1; 9]$; 3) $y > 0$ при $x \in [-5; -2)\cup(-2; 4)$; $y < 0$ при $x \in (4; 5]$; 4) функция убывает при $x \in [-5; -2]$, при $x \in [0; 5]$. **305.** -1. **306.** а) $(11; 14]$; б) $[1; 2\frac{2}{3}]$. **307.** а) $(-\infty; -1)\cup(2; +\infty)$; б) $[-0{,}8; 1{,}2]$. **308.** $\frac{1}{16} = 0{,}0625$. **309.** $\frac{203}{494}$. **310.** а) верно; б) не верно; в) верно. **311.** а) нечётная; б) ни чётная, ни нечётная; в) чётная; г) нечётная. **312.** (б), (в). **313.** 1) $D(y) = [-5; 7]$; 2) $E(y) = [-9; 0]$; 3) $y > 0$ при $x \in \varnothing$; $y < 0$ при $x \in [-5; -2)\cup(-2; 7)$; 4) функция возрастает при $x \in [-5; -2]$, при $x \in [0; 7]$. **314.** $\frac{7}{19}$. **315.** а) $\frac{5}{6}$; б) $\frac{2}{3}$. **316.** $(9; +\infty)$. **317.** а) $(-\infty; 0{,}5]\cup[1; +\infty)$; б) $\left(-1; \frac{3}{7}\right)$. **318.** -31. **319.** $a \geqslant 1$. **323.** а) 5; б) 6; в) 3,75; г) 11; д) 15; е) 6. **324.** а) $2\sqrt{7}$; б) $2\sqrt{3}$; в) $4\sqrt{6}$; г) $\sqrt{31}$. **325.** а) $\frac{19}{25}$; б) $\sqrt{2}$; в) $8 - 4\sqrt{3}$. **326.** а) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$; б) $[-8; 2)$; в) $(-\infty; -0{,}25)\cup[0; 2)$. **327.** 4. **329.** а) 21; б) $\sqrt{6} - 2$; в) $8 + 2\sqrt{15}$; г) $3 + 3m^2$. **330.** 6,6; $2\sqrt{11}$; $4\sqrt{3}$. **331.** 5. **332.** При $x = 0$. **339.** а) 9; б) 7; в) $\frac{\sqrt{7}}{7}$. **340.** а) $\sqrt{x} + 7$; б) $a + 9b$; в) $-\sqrt{5t}$; г) $\sqrt{c} - 1$; д) 8; е) $\frac{16\sqrt{b}}{b - 16}$. **341.** $8 - \sqrt{5}$. **342.** 10 и 11. **343.** $(-\infty; 2)$. **347.** а) 7; б) $\frac{1}{3}$; в) $-\sqrt{1\frac{2}{3}}$. **348.** а) $\sqrt{v} - 4$; б) $p + 4q$; в) $-\sqrt{30k}$; г) $\sqrt{w} - 4$; д) 4; е) $\frac{10}{x - 25}$. **349.** 7 и 8. **350.** $8 + \sqrt{3}$. **351.** $[-1; +\infty)$. **352.** $x > 0$, $y < 0$. **356.** $(2 - \sqrt{5})\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = (2 - \sqrt{5})\sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} + 2^2} =$

$= (2-\sqrt{5})\sqrt{(\sqrt{5}+2)^2} = (2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5}) = -1$. **358.** а) $\frac{\sqrt{3}}{9}$; б) 0; 13; в) $\pm\sqrt{6,5}$; г) $-1\frac{4}{7}$; 1; д) $-2\frac{2}{3}$; $-0,125$; е) $-3\frac{1}{58}$; 1. **359.** $x^2 - 10\sqrt{2}x + 43 = 0$. **360.** а) 0; б) -10; в) 10; г) 12. **361.** а) $\{0; 12\}$; б) $\varnothing$; в) $\{-2; 2,8\}$; г) $\varnothing$. **364.** а) $-\frac{\sqrt{51}}{3}$; б) -13; 0; в) $\pm 0,5\sqrt{55}$; г) -1; $\frac{9}{13}$; д) $-1\frac{2}{3}$; 8. **372.** 4) а) $\{3; 1\}$; б) $\varnothing$; в) $\{3\}$; г) $\{1; -5\}$. **373.** а) 0; 0,5; б) 3; 4. **374.** 5 дней и 20 дней. **378.** а) $\{1; 5\}$; б) $\varnothing$; в) $\{3\}$. **379.** 0,5. **380.** 20 листов в день и 24 листа в день. **382.** в, г. **384.** а) x^2; б) $\frac{4}{x^2}$; в) $4 - 4x + x^2$; г) $2x^2$; д) x^4; е) $81x^4$. **385.** а) $(3; +\infty)$; б) $(-\infty; +\infty)$; в) $(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$; г) $(-\infty; +\infty)$; д) $(-\infty; +\infty)$. **386.** а) $(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$; б) $(-\infty; +\infty)$; в) $[0; +\infty)$; г) $[0; +\infty)$; д) $(0; +\infty)$. **387.** а) чётная; б) ни чётная, ни нечётная; в) чётная; г) ни чётная, ни нечётная; д) нечётная; е) ни чётная, ни нечётная. **388.** 4. **390.** $\{0\}\cup(1; +\infty)$. **393.** а) $\{-3; 3\}$; б) $\varnothing$. **397.** а) 18; 27; 36; 45; 54; б) $\frac{19}{20}$; $\frac{19}{21}$; $\frac{19}{22}$; $\frac{19}{23}$; $\frac{19}{24}$; в) 4; 11; 18; 25; 32. **398.** а) 4; 3; 2; 1; б) 2; 2,5; $3\frac{1}{3}$; 4,25. **401.** а) да; $n = 5$; б) нет. **404.** $a_1 = 1000$; $a_{n+1} = 1000 + 0,04(12000 - 1000n)$; 2640 руб. **405.** 1) а) $-\frac{3y+x}{x}$; б) $\frac{3x-1}{x}$; 2) а) $\frac{x^2-2x}{x^2-4}$ и $\frac{x^2+x-2}{x^2-4}$; б) $\frac{3a^3}{36a^2(a^2-b^2)}$ и $\frac{2ab+2b^2}{36a^2(a^2-b^2)}$. **406.** $\frac{1}{2x(x-1)}$. **407.** а) $\frac{x^2+x}{2x-2}$; б) $\frac{3a^3+3a^2}{a+2}$. **408.** а) $\frac{10x+8}{x^2-3x+2}$; б) $2a$. **409.** а) 4; 7; 10; 13; б) 1,25; $\frac{25}{9}$; $\frac{125}{16}$; 25. **411.** Да. $n = 15$. **414.** $\frac{1}{x-1}$. **415.** 9. **420.** а) строго возрастает; б) нестрого возрастает, строго возрастает со 2 номера; в) строго возрастает. **421.** а) и в). **423.** а) $3\frac{1}{3}$; б) 6; в) $8\frac{1}{3}$; г) 53; д) $4 + \frac{1}{3}k$. **424.** а) $x - 4$; б) $2x^3 + x - 6$. **425.** а) строго убывает; б) нестрого возрастает с 5 номера, строго возрастает с 6 номера; в) строго возрастает. **426.** (а). **427.** $x^2 + 3$. **429.** 2001. **432.** 1,5; 1,1; 0,7; 0,3. **434.** а) 7,4; б) 20; в) 23,6. **435.** а) $a_8 = a_1 + 7d$; б) $a_{14} = a_5 + 9d$. **436.** а) -3; б) 6. **437.** а) -1; б) 1. **438.** $d = 0,4$; $a_{150} = 61,4$. **439.** 123; 231. **440.** а) $18 - 4(n-1)$; б) $2\frac{1}{6} + \frac{1}{6}(n-1)$. **441.** $x_n = -7 + 2(n-1)$; $x_7 = 5$. **442.** 15. **443.** -1. **444.** -4. **445.** Не могут. **446.** 10,5. **447.** $x_n = 26 - 3(n-1)$; $x_5 = 14$. **448.** а) $a_1 = 5$, $d = 2,5$; б) если $d = 4$, то $a_1 = -3$; если $d = -5,75$, то $a_1 = 55,5$. **449.** а) да; б) нет; в) да; г) да. **450.** -3; 0; 60; $k(k-4)$; $k^2 - 4$. **452.** а) $\{7\}$; б) $\{3\}$; в) $\{-7\}$. **453.** а) $\{3 \pm \sqrt{15}; 1; -6\}$; б) $\{-32\}$. **454.** $c_5 = 0,5$; $c_{22} = -4$: $c_{k+4} = 0,75 - 0,25k$. **455.** $2\frac{1}{12}$. **456.** 25. **457.** 44. **458.** $-0,3$. **459.** Не могут. **460.** -2; 0; 70; $k^2 - 3k$; $k^2 + 3k$. **461.** а) $\{-2\}$; б) $\{-3\}$. **463.** Пять (5, 11, 17, 23, 29). **470.** 64,8. **471.** -3340. **472.** 446,4. **473.** а) 250500; б) 6545; в) 2701. **474.** 18. **475.** 20. **476.** а) 195; б) 505; в) 32,5. **477.** $d = -1\frac{7}{9}$; $a_{13} = -12\frac{1}{3}$. **478.** $a_1 = 54,8$; $a_9 = 22,8$. **479.** -198. **480.** а) можно, $S_{10} = 50$; б) нельзя. **481.** а) $b_n = -3n + 4$; $S_5 = -25$. **482.** Да, $n = 12$. **483.** 0 и 2. **484.** а) $a^4 + 4a^4(n-1)$; б) $(10 - a) - 2(n-1)$. **485.** $d = \pm 4$, т.е. получается две последовательности: 1) при $d = 4$, $a_1 = -6$; 2) при $d = -4$, $a_1 = 18$. **485.** 20. **486.** а) 15 км/ч, 18 км/ч; б) 16 км/ч. **487.** 250976. **488.** 1628. **489.** 37. **490.** 1330. **491.** 45. **492.** 583. **493.** Нет. **494.** 0 и 5. **495.** 30 км/ч. **502.** -2; 6; -18; 54. **503.** а) $-0,008$; б) $-0,2$; в) 25; г) $\frac{1}{625}(-5)^{k-1}$. **504.** 36. **505.** $q = -2$; $b_5 = \frac{1}{16}$. **506.** а) $a_5 = a_1q^4$; б) $a_7 = a_4q^3$. **507.** а) 3,375; б) -1. **508.** 4 или -4. **509.** $x_n = 1,5\cdot(-2)^{n-1}$; $x_7 = -96$. **510.** $100\cdot 4^5 = 102400$. **511.** 3. **512.** 5. **513.** 2 или -2. **514.** Не является. **515.** 800. **516.** $d = 0,5$, $a_{15} = 4$. **517.** $(-\infty; 1)\cup(5; +\infty)$; б) $[-4; 2]$; в) $(-\infty; 1,5)\cup(1,5; +\infty)$; г) $(-\infty; +\infty)$. **518.** 384. **519.** -24. **520.** 0,5. **521.** 6 или -6. **522.** $x_n = 160\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; $x_7 = 2,5$. **523.** $-\frac{1}{3}$; 4. **524.** 1 или -1. **525.** 4 и 16. **526.** Не является. **527.** 1050. **528.** $(-\infty; 1]\cup[3; +\infty)$; б) $(-3; -1)$; в) $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$;

г) $(-\infty; +\infty)$. **529.** 74. **532.** 1. **533.** $443\frac{1}{3}$. **534.** 2186. **535.** 684. **536.** 3069. **537.** $b_n = (-3)^{n-1}$; $S_5 = 61$. **538.** $x_1 = 20000$; $q = 1{,}05$; $n = 5$; $x_5 = 24310$; $S_5 = 110\,512{,}625$. **539.** 10. **540.** $\{24; 36; 54\}$ и $\{-24; 36; -54\}$. **541.** $q = 3$, $b_1 = 5$. **542.** а) $(-\infty; -8)\cup(3; +\infty)$; б) $(-8; 3)\cup(3; +\infty)$; в) $(3; +\infty)$. **543.** а) $[2; 4]$; б) $[2; +\infty)$; в) $(-\infty; 4]$. **544.** $-29\,523$. **545.** 125. **546.** 2046. **547.** -1640. **548.** 63 или 189. **549.** Если $q = 3$, то $b_1 = \frac{2}{3}$; если $q = -3$, то $b_1 = -\frac{28}{39}$. **550.** 24310 рублей, 110513 рублей. **551.** а) $(-\infty; -1)\cup(5; +\infty)$; б) $(-\infty; -1]\cup\{5\}$; в) $(-\infty; -1)\cup(-1; 5)$. **552.** 57. **553.** Не может. **556.** $3{,}5(7+\sqrt{7})$. **557.** 0,5. **558.** 15. **559.** $-1{,}5$. **560.** а) $\frac{2}{9}$; б) $\frac{122}{99}$. **561.** $x_1 = 45$; $q = -\frac{2}{3}$. **562.** а) -203; б) $-\frac{24\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}$. **563.** а) $(-3; 1)\cup(2; +\infty)$; б) $(-\infty; 0)\cup[0{,}5; 3]\cup(6; +\infty)$. **564.** а) $[-1; 1)\cup(1; 3]$; б) $(-\infty; -2{,}5)\cup(0; 1)\cup(1; 3)$; в) $(-\infty; -4)\cup[2; 3)$. **565.** 81. **566.** 0,25. **567.** а) $\frac{7}{9}$; б) $\frac{106}{33}$. **568.** а) $[-2; -1)\cup(1; 2]$; б) $[-5; 0)\cup(0; 2)\cup\{3{,}6\}$; в) $[-3; 2)\cup(5; +\infty)$. **569.** Не могло. **571.** а) $x_n = 2^n - 2$; б) $x_n = \frac{96}{2^n} + 2$. **572.** ±162. **575.** $\frac{1}{25}$. **576.** а) $x_n = \frac{1}{2}(-1)^{n+1} + \frac{1}{2}$; б) $x_n = 108\left(\frac{2}{3}\right)^n + 9$. **577.** В 16 раз. **579.** $x_n = 2\cdot3^{n-1} - 4^{n-1}$. **581.** а) $a_6 + 6d$; б) a_6q^6. **582.** а) $-12{,}5$; $S_3 = -36$; б) -24; $S_3 = -42$. **583.** а) нет; б) да. **584.** а) $b_n = -3n+1$; $S_5 = -40$; б) $b_n = \frac{2}{3}(-3)^n$; $S_5 = -122$. **585.** а) $x = 3$ или $x = -2$; б) $x = 4$. **586.** 18. **587.** 30000 руб., 39299,2 руб. **588.** 252. **589.** 1562. **590.** а) $\frac{23}{99}$; б) $\frac{7}{12}$.

Инструкция по работе с экспресс-тестами

Друзья!

В этом году вы сможете самостоятельно определять уровень усвоения материала с помощью ***экспресс*-тестов.** За каждое верно выполненное задание (части А или части В) выставляйте себе по одному баллу. За каждое верно выполненное задание с развёрнутым ответом (часть С) – от 1 до 3 баллов в зависимости от правильности метода решения, формы записи и наличия вычислительных ошибок:

3 балла	решение верное, все его шаги обоснованы, получен верный ответ
2 балла	решение в целом верное, получен верный ответ, однако решение нерациональное или обосновано недостаточно
1 балл	решение в целом верное, но допущена вычислительная ошибка

Для проверки в конце теста представлен образец выполнения теста. Для оценки – *шкала успешности*. Важно помнить, что свой результат можно повысить, если разобраться, где и почему допущены ошибки, и потренироваться в выполнении аналогичных заданий.

Желаем вам высоких результатов!

Предметный указатель

ПРОСТЫЕ ЧИСЛА ДО 1000

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223	227	229
233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503	509	521	523	541
547	557	563	569	571	577	587	593	599	601
607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733
739	743	751	757	761	769	773	787	797	809
811	821	823	827	829	839	853	857	859	863
877	881	883	887	907	911	919	929	937	941
947	953	967	971	977	983	991	997		

ТАБЛИЦА КВАДРАТОВ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ДО 100

1^2	1	21^2	441	41^2	1681	61^2	3721	81^2	6561
2^2	4	22^2	484	42^2	1764	62^2	3844	82^2	6724
3^2	9	23^2	529	43^2	1849	63^2	3969	83^2	6889
4^2	16	24^2	576	44^2	1936	64^2	4096	84^2	7056
5^2	25	25^2	625	45^2	2025	65^2	4225	85^2	7225
6^2	36	26^2	676	46^2	2116	66^2	4356	86^2	7396
7^2	49	27^2	729	47^2	2209	67^2	4489	87^2	7569
8^2	64	28^2	784	48^2	2304	68^2	4624	88^2	7744
9^2	81	29^2	841	49^2	2401	69^2	4761	89^2	7921
10^2	100	30^2	900	50^2	2500	70^2	4900	90^2	8100
11^2	121	31^2	961	51^2	2601	71^2	5041	91^2	8281
12^2	144	32^2	1024	52^2	2704	72^2	5184	92^2	8464
13^2	169	33^2	1089	53^2	2809	73^2	5329	93^2	8649
14^2	196	34^2	1156	54^2	2916	74^2	5476	94^2	8836
15^2	225	35^2	1225	55^2	3025	75^2	5625	95^2	9025
16^2	256	36^2	1296	56^2	3136	76^2	5776	96^2	9216
17^2	289	37^2	1369	57^2	3249	77^2	5929	97^2	9409
18^2	324	38^2	1444	58^2	3364	78^2	6084	98^2	9604
19^2	361	39^2	1521	59^2	3481	79^2	6241	99^2	9801
20^2	400	40^2	1600	60^2	3600	80^2	6400	100^2	10000

ТАБЛИЦА КУБОВ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ДО 60

1^3	1	21^3	9261	41^3	68 921
2^3	8	22^3	10 648	42^3	74 088
3^3	27	23^3	12 167	43^3	79 507
4^3	64	24^3	13 824	44^3	85 184
5^3	125	25^3	15 625	45^3	91 125
6^3	216	26^3	17 576	46^3	97 336
7^3	343	27^3	19 683	47^3	103 823
8^3	512	28^3	21 952	48^3	110 592
9^3	729	29^3	24 389	49^3	117 649
10^3	1000	30^3	27 000	50^3	125 000
11^3	1331	31^3	29 791	51^3	132 651
12^3	1728	32^3	32 768	52^3	140 608
13^3	2197	33^3	35 937	53^3	148 877
14^3	2744	34^3	39 304	54^3	157 464
15^3	3375	35^3	42 875	55^3	166 375
16^3	4096	36^3	46 656	56^3	175 616
17^3	4913	37^3	50 653	57^3	185 193
18^3	5832	38^3	54 872	58^3	195 112
19^3	6859	39^3	59 319	59^3	205 379
20^3	8000	40^3	64 000	60^3	216 000

СВОЙСТВА СТЕПЕНИ

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\quad (ab)^n = a^n \cdot b^n$ $\quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$a^m : a^n = a^{m-n}$ $\quad (a : b)^n = a^n : b^n$ $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

ФОРМУЛЫ СОКРАЩЁННОГО УМНОЖЕНИЯ

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ – формула квадрата суммы

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ – формула квадрата разности

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ – формула разности квадратов

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ – формула куба суммы

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ – формула куба разности

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ – формула суммы кубов

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ – формула разности кубов

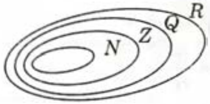
РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ВИДА: $kx + b = 0$

Значение k	Значение b	Корень уравнения
$k \neq 0$	b – любое число	$-\frac{b}{k}$
$k = 0$	$b \neq 0$	Нет корней
$k = 0$	$b = 0$	Корень – любое число

РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Значение k	Значение c	Решения неравенства $kx > c$	Решения неравенства $kx \geq c$	Решения неравенства $kx > c$	Решения неравенства $kx \geq c$
$k = 0$	$c < 0$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$\varnothing$ (Нет решений)	$\varnothing$ (Нет решений)
$k = 0$	$c = 0$	$\varnothing$ (Нет решений)	$(-\infty; +\infty)$	$\varnothing$ (Нет решений)	$(-\infty; +\infty)$
$k = 0$	$c > 0$	$\varnothing$ (Нет решений)	$\varnothing$ (Нет решений)	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
$k > 0$	c – любое	$(\frac{c}{k}; +\infty)$	$[\frac{c}{k}; +\infty)$	$(-\infty; \frac{c}{k})$	$(-\infty; \frac{c}{k}]$
$k < 0$	c – любое	$(-\infty; \frac{c}{k})$	$(-\infty; \frac{c}{k}]$	$(\frac{c}{k}; +\infty)$	$[\frac{c}{k}; +\infty)$

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА



$N = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ — множество натуральных чисел

$Z = \{... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ — множество целых чисел

$Q = \{\frac{m}{n}$, где $m \in Z, n \in N\}$ — множество рациональных чисел

Любое рациональное число может быть представлено в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби, и наоборот.

Иррациональным числам соответствуют бесконечные непериодические дроби. 1,01001000100001...; $\sqrt{7}$; $5\sqrt{2}$ — иррациональные числа.

Множество *R* действительных чисел составляют рациональные и иррациональные числа. Действительные числа представляются десятичными дробями — конечными или бесконечными (периодическими или непериодическими).

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВ

Доказать неравенство — значит обосновать, что оно выполняется при всех допустимых значениях входящих в него переменных (или для какого-то заданного множества их значений).

Неравенства о средних для двух чисел

1. Среднее геометрическое двух неотрицательных чисел не превосходит их среднего арифметического.

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \quad (a, b \geqslant 0)$$

2. Среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не превосходит их среднего квадратичного.

$$\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \quad (a, b \geqslant 0)$$

3. Среднее гармоническое двух положительных чисел не превосходит их среднего геометрического.

$$\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \quad (a, b > 0)$$

СВОЙСТВА АРИФМЕТИЧЕСКОГО КВАДРАТНОГО КОРНЯ

$(\sqrt{a})^2 = a$, где $a \geqslant 0$	$(\sqrt{a})^{2n} = a^n$, где $a \geqslant 0, n \in N$	$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, где $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$
$\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$, где $a \in R$	$\sqrt{a^{2n}} = \lvert a^n \rvert$, где $a \in R, n \in N$	$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, где $a \geqslant 0$ и $b > 0$
Если $a > b$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, где $a > 0$ и $b \geqslant 0$	Если $a < b$, то $\sqrt{a} < \sqrt{b}$, где $a \geqslant 0$ и $b > 0$	

РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Формулы корней квадратного уравнения
$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$

$D = b^2 - 4ac$		
$D < 0$	$D = 0$	$D > 0$
Нет корней	$x_{1,2} = -\dfrac{b}{2a}$	$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ и $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$

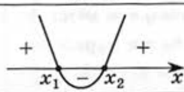
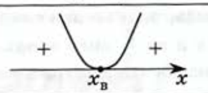
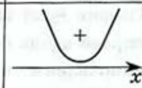
Формулы корней квадратного уравнения с чётным коэффициентом $b = 2k$

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a},$$

где $D_1 = \dfrac{D}{4} = k^2 - ac$

РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Квадратным неравенством называется неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leqslant 0$, где a, b, c — некоторые числа, $a \neq 0$.

Схема / Неравенство, где $a > 0$	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
			
$ax^2 + bx + c > 0$	$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$x \in (-\infty; x_в) \cup (x_в; +\infty)$	$x \in (-\infty; +\infty)$
$ax^2 + bx + c \geqslant 0$	$x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$	$x \in (-\infty; +\infty)$	$x \in (-\infty; +\infty)$
$ax^2 + bx + c < 0$	$x \in (x_1; x_2)$	$x \in \varnothing$	$x \in \varnothing$
$ax^2 + bx + c \leqslant 0$	$x \in [x_1; x_2]$	$x = x_в$	$x \in \varnothing$

Алгоритм решения квадратного неравенства с параметром

Если коэффициент при x^2 не содержит параметр

1. Вычислить дискриминант D квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$.
2. Указать значения параметра, при которых $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$, и найти соответствующие им решения неравенства.
3. Записать ответ, указывая соответствие между всеми значениями параметра и решением неравенства.

Если коэффициент при x^2 содержит параметр

1. Найти «особенные» значения параметра (когда коэффициент при x^2 равен 0) и решить неравенство при этих значениях параметра.
2. Вычислить дискриминант D квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$.
3. Решить неравенство, когда коэффициент при x^2 положителен, находя значения параметра, при которых $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$, и соответствующие им решения неравенства.
4. Решить неравенство, когда коэффициент при x^2 отрицателен, находя значения параметра, при которых $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$, и соответствующие им решения неравенства.
5. Записать ответ, указывая соответствие между всеми значениями параметра и решением неравенства.

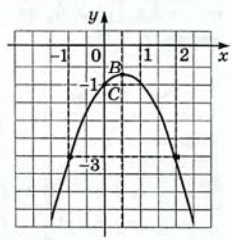
КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

Квадратичной функцией называется функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$.

Алгоритм построения графика функции $y = ax^2 + bx + c$

1. Найти и отметить вершину параболы $B\left(x_в = -\dfrac{b}{2a};\ y_в = y\,(x_в)\right)$.
2. Описать, с помощью какого сдвига и вдоль каких осей искомый график получается из графика $y = ax^2$, указать направление ветвей параболы.
3. Провести ось симметрии параболы.
4. Найти и отметить точки пересечения графика с осями координат.
5. Если нужно, найти и отметить дополнительные точки и симметричные к ним.
6. Построить параболу, используя отмеченные точки.

Пример: $y = -x^2 + x - 1$



$x_в = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{1}{2\cdot(-1)} = \dfrac{1}{2}$; $y_в = y\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2} - 1 = -\dfrac{3}{4}$

График – парабола, полученная смещением $y = -x^2$ на $\dfrac{1}{2}$ вправо вдоль Ox и на $\dfrac{3}{4}$ вниз вдоль Oy. Ветви параболы направлены вниз. Ось симметрии – прямая $x = 0{,}5$.

Точки пересечения с Ox: $-x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow \varnothing$;

с Oy: $-0^2 + 0 - 1 = -1 \Rightarrow C(0; -1)$.

Дополнительные точки: $(1; -1)$; $(-1; -3)$; $(2; -3)$.

МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ

Алгоритм решения целых неравенств методом интервалов

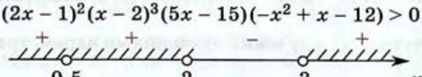
1. Используя равносильные преобразования, привести правую часть неравенства к нулю, а левую – к произведению множителей вида $(x - a)^n$, где $n \in N$.
2. Отметить на числовой прямой точки, при которых полученное произведение равно нулю (закрашенные либо выколотые в зависимости от строгости неравенства).
3. Указать знак «+» полученного произведения на первом справа интервале.
4. Последовательно проставить знаки в остальных интервалах, пользуясь **правилом смены знаков** произведения множителей вида $(x - a)^n$:

> При переходе через точку a знак произведения:
> - не меняется, если множитель $(x - a)$ имеет чётную степень;
> - меняется, если множитель $(x - a)$ имеет нечётную степень.

5. Определить по схеме интервалы и (или) точки, удовлетворяющие знаку неравенства (или то, что таких нет), и записать ответ.

Пример:

$(2x - 1)^2(x - 2)^3(5x - 15)(-x^2 + x - 12) > 0 \ \Leftrightarrow\ (x - 0{,}5)^2(x - 2)^3(x - 3) > 0$



$x \in (-\infty; 0{,}5) \cup (0{,}5; 2) \cup (3; +\infty)$.

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Системой двух линейных уравнений с двумя переменными x и y называется сис-тема уравнений вида $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, где a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 – некоторые числа.

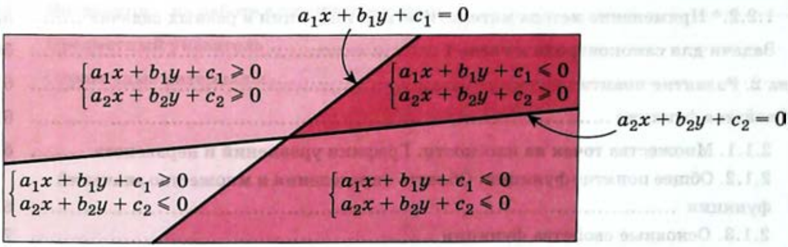
Система двух линейных уравнений с ненулевыми коэффициентами

- **имеет единственное решение,** если $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$,
- **не имеет решений,** если $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$,
- **имеет бесконечно много решений,** если $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$.

ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Линейным неравенством с двумя переменными x и y называется неравенство одного из четырех видов: $ax + by + c > 0$, $ax + by + c < 0$, $ax + by + c \geqslant 0$, $ax + by + c \leqslant 0$, где a, b, c — некоторые числа.

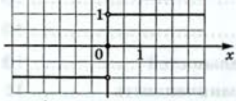
Графическое решение системы неравенств для положительных b_1 и b_2:



КУСОЧНО-ЗАДАННЫЕ ФУНКЦИИ

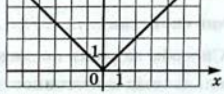
Кусочно-заданной функцией называется функция, которая на различных промежутках своей области определения задана формулами разных видов.

1. $y = \begin{cases} 1, \text{ если } x > 0; \\ 0, \text{ если } x = 0; \\ -1, \text{ если } x < 0 \end{cases}$



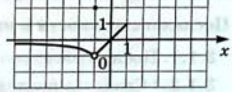
$x = 0$ — точка разрыва

2. $y = |x|$ или $y = \begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant 0; \\ -x, \text{ если } x < 0 \end{cases}$



точек разрыва нет

3. $y = \begin{cases} 3, \text{ если } x > 1; \\ x, \text{ если } -1 < x \leqslant 1; \\ 2, \text{ если } x = -1; \\ \dfrac{1}{x}, \text{ если } x < -1 \end{cases}$



разрывы в точках $x = -1$ и $x = 1$

Оглавление

Учебное издание

Петерсон Людмила Георгиевна
Агаханов Назар Хангельдыевич
Петрович Александр Юрьевич
Подлипский Олег Константинович
Рогатова Марина Викторовна
Трушин Борис Викторович

АЛГЕБРА

9 класс
Учебник
(в 2 частях)
Часть 1

Научный редактор ***Д. Л. Абраров***
Ведущий редактор ***Н. А. Шихова***
Художники ***П. А. Северцов, С. Ю. Гаврилова, А. Ю. Горнов***
Оформление ***Н. А. Новак***
Технический редактор ***Е. В. Денюкова***
Компьютерная верстка ***Р. Ю. Шаповалов***
Корректор ***Е. Н. Клитина***

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 18.11.2020. Формат 84x108/16. Объем 11,0 печ. л. 18,48 усл. печ. л. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Школьная. Тираж 320 экз. Заказ № ВЗК-06044-20 ДПВ.

Акционерное общество «Издательство «Просвещение»
Российская Федерация, 127473, г. Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3, этаж 4, помещение I.

Предложения по оформлению и содержанию учебников — электронная почта «Горячей линии» — fpu@prosv.ru.

Отпечатано в России

Отпечатано в АО «Первая Образцовая типография», филиал «Дом печати - ВЯТКА» в полном соответствии с качеством предоставленных материалов. 610033, г. Киров, ул. Московская, 122.

2019500554

ИЗДАТЕЛЬСТВО БИНОМ

Алгебра

ISBN 978-5-09-081137-8

9 785090 811378