ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»
(ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

МАТЕМАТИКА В EXCEL

Учебник для вузов

*Рекомендован УМО
в качестве учебника для вузов*

МОСКВА
2019

УДК 621.396.218
ББК 32.884.1я73
М34

Рецензенты:

К.Э. Плохотников — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник кафедры математического моделирования и информатики физического факультета Московского государственного университета;

В.Г. Феклин — кандидат физико-математических наук, доцент Первый заместитель руководителя Департамента анализа данных, принятия решений и финансовых технологий Финансового университета при Правительстве Российской Федерации.

М34 Математика в Excel: Учебник для вузов / О.А. Баюк, Д.В. Берзин, А.В. Золотарюк [и др.]; под ред. Т.Л. Фомичевой. — М.: Прометей, 2019. — 230 с.

Структурно учебник представляет собой 15 компьютерных практикумов по изучению и применению вычислительных возможностей табличного процессора Excel в решении базовых задач линейной алгебры и математического анализа и календарно соответствует программе дисциплины «Компьютерный практикум», читаемой в Финансовом университете при Правительстве РФ на первом курсе общеэкономических специальностей.

Содержательно в учебнике последовательно излагаются общие характеристики табличного процессора MS Excel с последовательным углублением по мере изучения основных положений математического анализа и линейной алгебры. Отдельное внимание уделяется построению графиков функций. Показаны возможности решения задач линейного программирования. Приведены примеры решения финансово-экономических задач. В каждом разделе представлены задания для самостоятельной работы.

Соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования последнего поколения.

Учебник полезен всем студентам первых курсов бакалавриата, изучающим линейную алгебру и математический анализ, которые стремятся освоить инструментальные средства табличного процессора Excel и их применение при решении финансово-экономических задач с помощью инновационных математических методов и технологий. Учебник также может быть интересен магистрантам, аспирантам, преподавателям и научным сотрудникам.

ISBN 978–5907100–22–0

АВТОРСКИЙ КОЛЛЕКТИВ

1. Баюк Олег Александрович — кандидат технических наук, доцент, доцент Финансового университета при Правительстве Российской Федерации.

2. Берзин Дмитрий Викторович — кандидат физико-математических наук, доцент Финансового университета при Правительстве Российской Федерации.

3. Гобарева Яна Львовна — кандидат экономических наук, доцент, доцент Финансового университета при Правительстве Российской Федерации.

4. Городецкая Ольга Юрьевна — кандидат экономических наук, доцент, доцент Финансового университета при Правительстве Российской Федерации.

5. Жукова Галина Севастьяновна — доктор физико-математических наук, профессор, профессор Финансового университета при Правительстве Российской Федерации.

6. Зададаев Сергей Алексеевич — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент Финансового университета при Правительстве Российской Федерации.

7. Золотарюк Анатолий Васильевич — кандидат технических наук, доцент, доцент Финансового университета при Правительстве Российской Федерации.

8. Иванюк Вера Алексеевна — кандидат экономических наук, доцент Финансового университета при Правительстве Российской Федерации.

9. Криволапов Сергей Яковлевич — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент Финансового университета при Правительстве Российской Федерации.

10. Магомедов Рамазан Магомедович —кандидат педагогических наук, доцент, доцент Финансового университета при Правительстве Российской Федерации.

11. Маевский Евгений Валерьевич — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент Финансового университета при Правительстве Российской Федерации.

12. Мелехина Татьяна Леонидовна — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент Финансового университета при Правительстве Российской Федерации.

13. Утакаева Ирина Хайрлыевна — кандидат физико-математических наук, доцент Финансового университета при Правительстве Российской Федерации.

14. Фомичева Татьяна Леонидовна — кандидат экономических наук, доцент, доцент Финансового университета при Правительстве Российской Федерации.

15. Хрипунова Марина Борисовна — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент Финансового университета при Правительстве Российской Федерации.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Образование как одна из сфер человеческой деятельности всегда способствовало поступательному развитию общества, социально-экономическому и научно-педагогическому процессу. Такой же является роль образования и в современных условиях проявления тенденции к повсеместной информатизации и автоматизации. Ставится задача уже не выборочного использования программных средств и информационных систем в различных отраслях и направлениях для решения отдельных, частных вопросов. Изменились технологические возможности — глобальные информационные сети, мобильные коммуникационно-вычислительные устройства, облачные ресурсы, интеллектуальные системы, робототехника, обработка больших данных, дистанционное управление и обучение. Другими стали материальные и духовные потребности человека, общественное сознание и культура. В таких условиях переход к цифровой экономике является осознанной объективной необходимостью, позволяющей комплексно решить многие жизненно-важные процессы за счет интеллектуализации труда и производства с целью обеспечения стабильного роста благосостояния всех членов общества.

Решение поставленной задачи требует коренного изменения подходов к деятельности различных государственных институтов, в том числе системы образования.

В Финансовом университете при Правительстве Российской Федерации в образовательные программы подготовки студентов внесены коренные изменения, направленные на внедрение в учебный процесс инновационных средств и методов информационных технологий.

Данный учебник предназначен для освоения технологических возможностей табличного процессора MS Excel в ходе решения математических финансово-экономических задач, формирования профессионально-ориентированных компетенций, необходимых студентам как в ходе учебного процесса при изучении других дисциплин образовательных программ, так и в процессе дальнейшей профессиональной деятельности.

В соответствии с требованиями цифровизации учебного процесса в Финансовом университете при Правительстве Российской Федерации студентам бакалавриата первого курса всех направлений и профилей преподается дисциплина «Компьютерный практикум», являющаяся инструментальной поддержкой математических и профессионально-ориентированных дисциплин.

В качестве инструментария выбраны табличный процессор MS Excel и язык программирования R, определяющие профессиональные компетенции, формирование которых раскрыто в данном учебнике:

1. Способность применять математические методы для решения стандартных профессиональных финансово-экономических задач, интерпретировать полученные математические результаты:

- знать вычислительные методики основных математических задач, используемых в экономике и финансах;
- уметь использовать компьютерные технологии при реализации математических методов и моделей для описания и анализа прикладных задач;
- владеть навыками вычислительной работы в Excel и R.

2. Способность оформлять аналитические и отчетные материалы по результатам выполненной работы:

- знать основные средства визуализации количественных данных, используемых в экономике и финансах;
- уметь использовать компьютерные технологии представления данных и графической визуализации

результатов применения математических методов и моделей для описания и анализа прикладных задач;

- владеть навыками работы в Excel и R в части визуализации количественных данных.

3. Способность применять методики расчетов и основные методы исследований:

- знать вычислительные методики расчетов основных математических задач, используемых в экономике и финансах;
- уметь использовать компьютерные технологии при реализации вычислительных методик математических методов и моделей описания и анализа задач экономики и финансов;
- владеть навыками вычислительной работы в Excel и R.

Практикум 1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ТАБЛИЧНОГО ПРОЦЕССОРА MS EXCEL

Табличный процессор MS Excel предназначен для решения многофункциональных задач обработки разнотипной информации с применением множества инструментальных средств и встроенных функций.

Обработка осуществляется в электронной табличной книге большой размерности. В клетки книги записываются исходные данные прикладной задачи, а также формульные зависимости, обеспечивающие вычисление результатов. Результаты решения формируются на месте записи формул. По желанию они могут быть проиллюстрированы. При изменении исходных данных автоматически выполняется пересчет результатов, изменяется вид построенных графиков и диаграмм.

Примерный вид окна табличного процессора с описанием его элементов показан на рис. 1.

Электронная книга, в зависимости от версии процессора, по умолчанию состоит из одного или трех электронных листов (максимально возможное количество листов — 65535 (2^{16}–1), зависит от объема оперативной памяти ПК). Каждый лист книги — совокупность клеток (ячеек), образованных 16 384 столбцами (2^{14}) и 1 048 576 строками (2^{20}). Столбцы именуются латинскими буквами (от A до

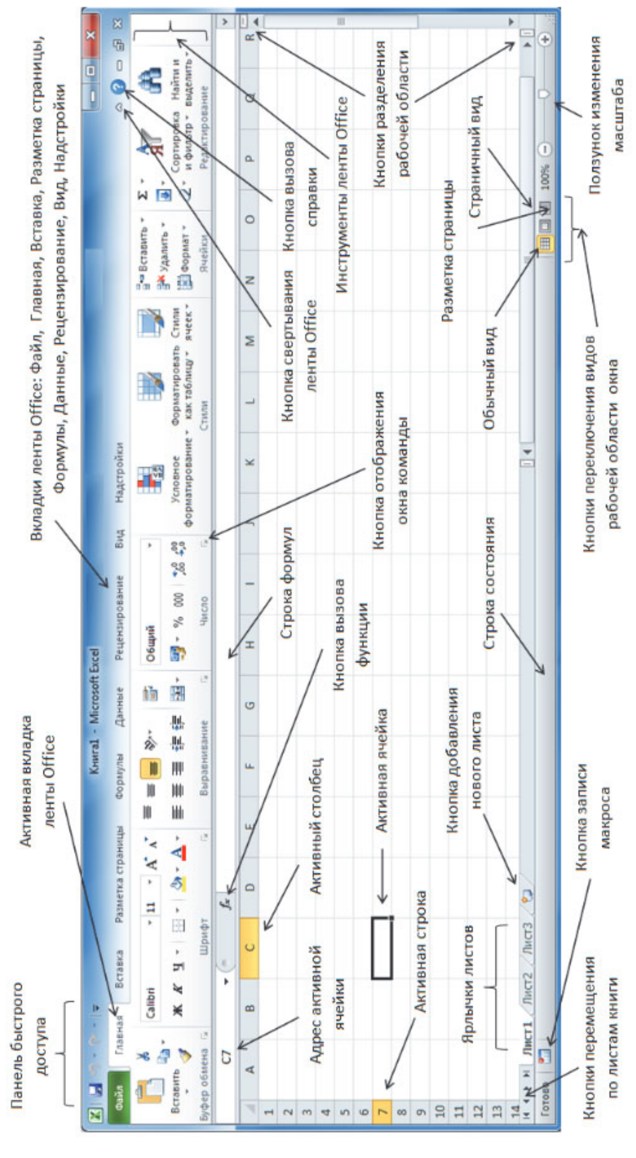


Рис. 1. Элементы окна Excel

XFD, строки — цифрами. Это позволяет адресовать ячейки. Например, левая верхняя ячейка листа имеет адрес A1, правая нижняя — XFD1048576.

Одна из ячеек листа — активная. В эту ячейку записывается информация, которую набирают на клавиатуре или после выполнения операции вставки. Для выбора активной ячейки используют левую кнопку мыши или клавиши перемещения курсора. Быстрый переход в любую ячейку листа книги может быть выполнен командами:

Функциональная клавиша *[F5]* → В поле *Ссылка* ввести адрес ячейки → *OK*

Содержимое активной ячейки отображается в строке формул. Это позволяет просматривать информацию, введенную в ячейку (особенно с применением формул), а при необходимости — ее корректировать.

Данные можно вводить не только в активную ячейку, но и в массивы клеток — диапазоны. Выделяют *смежные* и *несмежные* диапазоны (располагаются на одном листе) и трехмерные (занимающие на нескольких листах одно и то же место).

На листе диапазоны ячеек выделяются перемещением мыши при нажатой ее левой кнопке (или при удерживании клавиши [Shift] и нажатии на клавиши перемещения курсора). Для выбора несмежных диапазонов дополнительно удерживают клавишу [Ctrl]. Для выделения трехмерного диапазона предварительно выделяют несколько листов книги, выполнив щелчки левой кнопкой мыши по ярлычкам листов при удерживаемой клавише [Ctrl].

При записи адресов диапазонов указывают адрес левой верхней ячейки и адрес правой нижней ячейки, разделяя их двоеточием. Группы несмежных ячеек разделяют точкой с запятой (рис.2).

Ввод информации в активную ячейку завершается нажатием клавиши [Enter] (или клавиш перемещения курсора). В смежный диапазон (а также часть несмежного

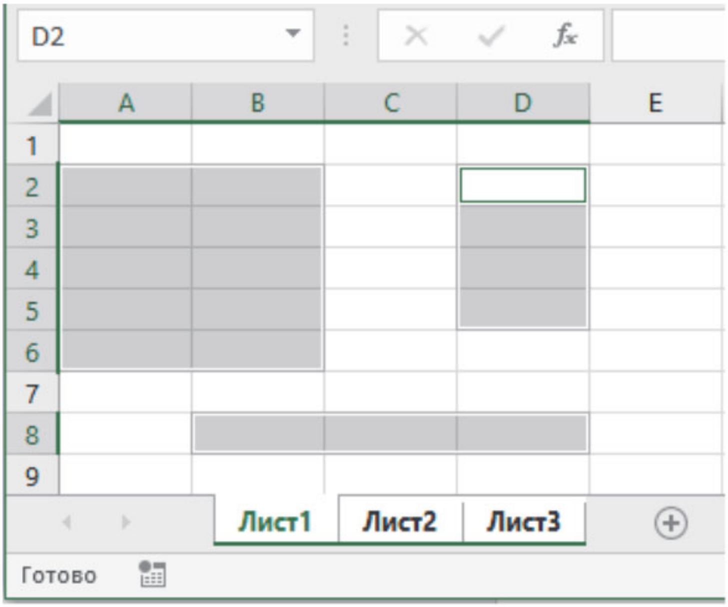


Рис. 2. Несмежный трехмерный диапазон ячеек A2:B6; B8:D8; D2:D6 (клетка D2 – активная)

диапазона с активной ячейкой) ввод данных во все ячейки одновременно фиксируется комбинацией клавиш [Ctrl+Shift+Enter].Максимальный объем данных, который может быть введен в каждую из ячеек книги — 32 767 (2^{15}–1) байт (символов) Правда, отображены в ячейке могут не все символы: одна из причин — ограниченность видимой ширины столбца и наличие данных в ячейке справа. Да в этом и нет необходимости: принцип структурированного заполнения данных предполагает в отдельные ячейки помещать только взаимосвязанные, желательно неделимые данные, принадлежащие к двум категориям — *значение* или *формула* (рис.3).

Признаком ввода формулы является указываемый в начале знак = (равно), за которым следует

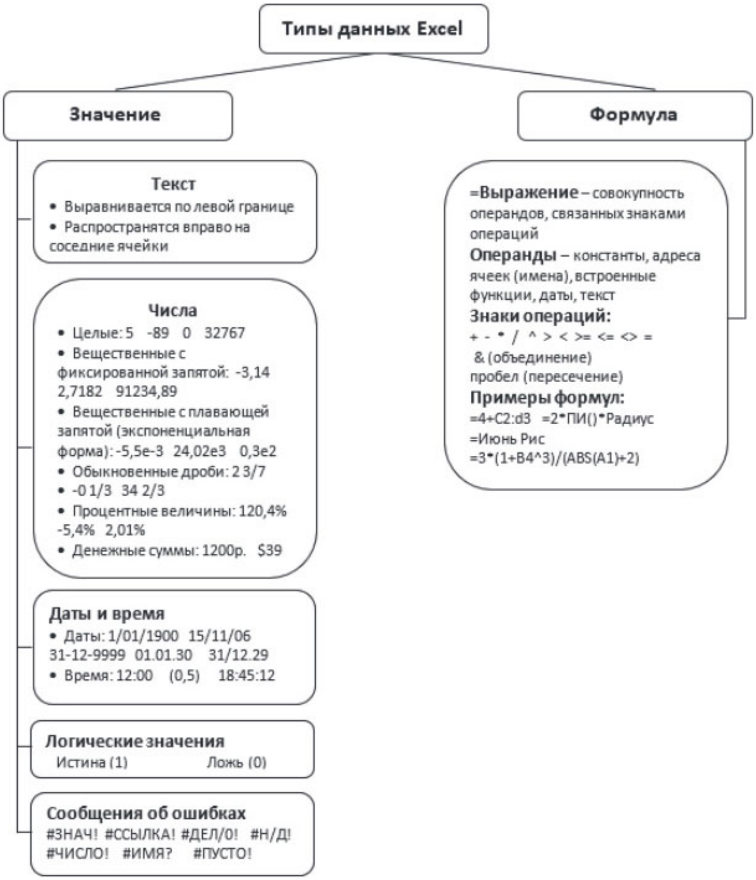


Рис. 3. Типы данных Excel

выражение — совокупность *операндов*, связанных между собой знаками *математических операций*. Порядок вычислений в формуле определяется ее математической записью (слева направо), а также с учетом *приоритетов*, указанных в ней операций. При необходимости изменения последовательности обработки данных в формуле используются круглые скобки.

По окончании ввода формулы в ячейке сразу же отображается ее результат — данное, представленное в виде *числа, даты, текста, логического значения* или *сообщения об ошибке*. Сама формула будет видна только в строке формул после выделения соответствующей ячейки.

Введенный в ячейку текст выравнивается по ее левой границе, правильно воспринятые данные других типов — по правой границе. Это простейшее правило позволяет избежать ошибок, когда из-за каких-то погрешностей указания формата, введенные данные (числа, формулы, даты и время, логические значения) идентифицируются как текст.

В формулах адреса ячеек могут указываться как относительные, так и абсолютные. Ранее по тексту указывались относительные адреса ячеек и их диапазонов.

При копировании формул относительные адреса соответствующим образом изменяются; абсолютные адреса остаются неизменными.

Характерным признаком абсолютного адреса являются знаки $ перед именами столбцов и строк. Например, $A$1 и $XFD$1048576 — соответственно абсолютные адреса первой (левой верхней) и последней (правой нижней) ячеек электронного листа.

Абсолютные адреса могут быть непосредственно набраны с клавиатуры либо преобразованы из относительных адресов после их выделения и нажатия функциональной клавиши [F4]. При преобразовании следует быть внимательным: повторное нажатие [F4] может сделать адрес снова относительным либо смешанным, когда, например, зафиксирован только столбец или только строка: $D4, G$5:F$8.

Абсолютную адресацию в формулах обеспечивает также применение имен ячеек и их диапазонов. Имена должны начинаться с буквы или знака подчеркивания, не содержать пробелов и специальных знаков (исключение — цифры и точки) и быть уникальными в пределах электронной книги.

Один из способов присвоения имен ячейкам:

Выделить ячейку или диапазон → Открыть меню щелчком правой кнопки мыши → Команда *Присвоить имя…*→ Ввести имя → ОК

При указании в выражениях адресных ссылок на ячейки других листов или книг (файлов книг) адрес дополняется их именами, например:

[Книга2]Лист4!G5:L10   [Отчет]Квартал_1!$A$5:$Z$129

Если имена листов или книг содержат пробелы, то такие имена обрамляются апострофами:

'[Книга 1]Лист 3'!$E$8
'[Квартальный отчет]Филиал 3'!$D$2:$K$120

Во избежание ошибок при формировании выражений с именами имена не вводят с клавиатуры, а выделяют в электронной книге соответствующие ячейки или диапазоны, что существенно облегчает процесс. Сами имена появляются в выражениях.

Возможности форматирования электронных таблиц

Операции форматирования представим схематично.

- Изменение ширины столбца путем захвата границы между наименованиями столбцов (рис. 4).

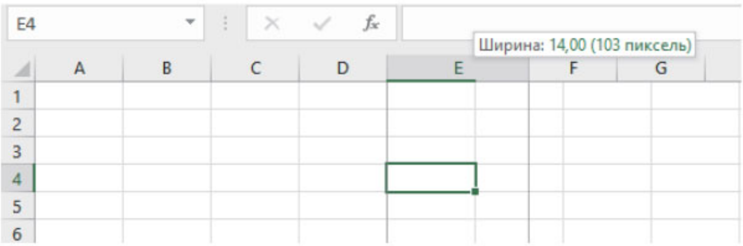


Рис. 4. Увеличение ширины столбца E

Для выравнивания ширины нескольких столбцов их следует выделить и изменить границу одного из них.

· Изменение высоты строк выполняется по аналогии (рис. 5).

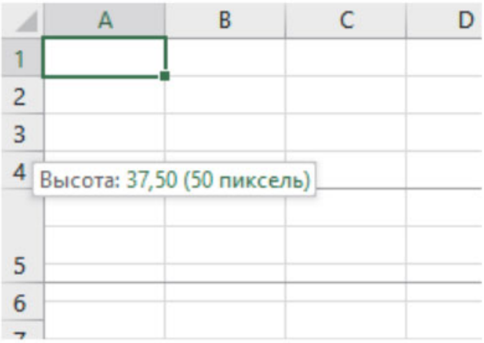


Рис. 5. Изменение высоты строки 5

· Для выравнивания информации в выделенных ячейках можно воспользоваться инструментальными кнопками группы *Выравнивание* вкладки *Главная* либо вызвав окно *Формат ячеек*, например, из меню правой кнопки мыши (рис. 6).

· Для объединения ячеек можно воспользоваться как возможностями окна *Формат ячеек* (рис. 6), так и с помощью инструментальной кнопки в группе *Выравнивание* вкладки *Главная* (рис. 7).

· Аналогичным образом через окно *Формат ячеек* можно изменить ориентацию текста в ячейках, направив его под любым углом (рис. 6).

· Изменение гарнитуры шрифта, размера и цвета символов, заливки и обрамления ячеек выполняется с помощью инструментальных кнопок вкладки *Главная* (рис. 8) и возможностей окна *Формат ячеек* (рис. 9).

Имеется еще ряд возможностей форматирования электронных таблиц Excel — автоформатирование, создание пользовательских числовых форматов, условное форматирование, задание стилей форматирования, вставка примечаний, защита ячеек от изменений, использование спарклайнов и т.п. Данные возможности описаны в рекомендованной литературе. Некоторые их них рассматриваются на последующих занятиях.

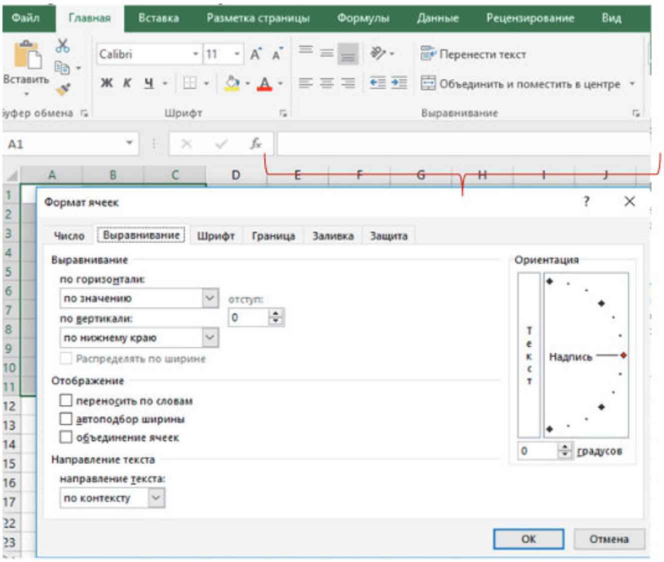


Рис. 6. Окно изменения форматирования данных в ячейках

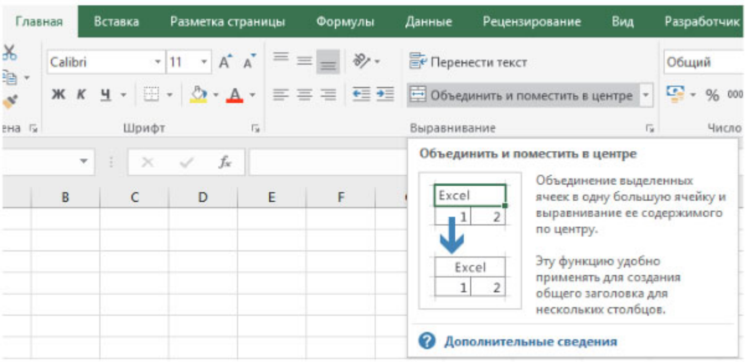


Рис. 7. Объединение ячеек с помощью инструментальной кнопки

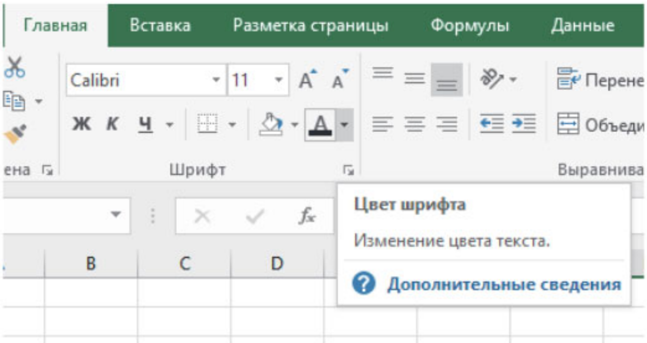


Рис. 8. Инструментальные возможности изменения параметров шрифта и заливки ячеек

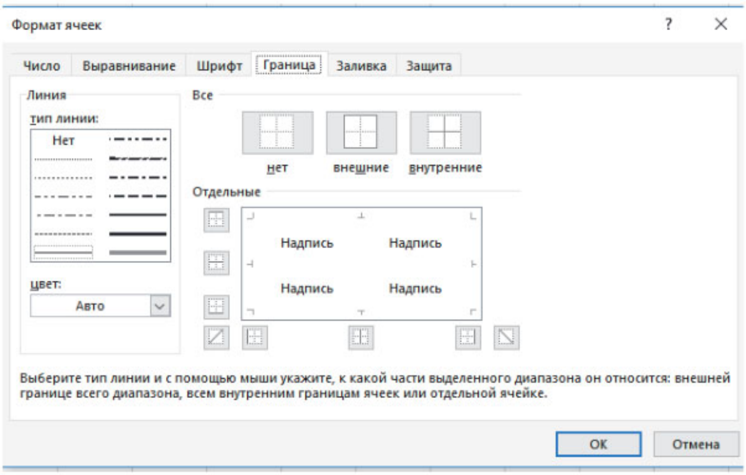


Рис. 9. Возможности задания границ ячеек электронной таблицы

Особенности работы с большими таблицами

Копирование (табулирование) данных (формул, последовательностей, констант) вниз по столбцу большой таблицы:

Выделить ячейку (две ячейки для распространения последовательности) → Захватить мышкой правый нижний уголок выделенной области → Выполнить двойной щелчок левой кнопкой мыши по черному плюсику

Данные в столбце автоматически протабулируются до конца таблицы (пока в левом столбце будет какая-то информация).

Отметим также некоторые комбинации клавиш, полезные при работе с таблицами:

– [Ctrl+Shift+↓] — выделение столбца таблицы от текущей ячейки по направлению стрелки (вниз).

– [Ctrl+Shift+→] — выделение строки таблицы от текущей ячейки по направлению стрелки (вправо).

– [Ctrl+Shift+End] — выделение части таблицы до последней используемой ячейки (справа внизу).

– [Ctrl+C] — копирование выделенных ячеек в Буфер обмена.

– [Ctrl+V] — вставка данных их Буфера обмена (в активную ячейку с распространением вниз и вправо).

– [Ctrl+Shift+F] — изменение параметров шрифта и ячеек выделенном диапазоне с помощью окна Формат ячеек.

– [Ctrl+Shift+:] — вставка текущего времени.

– [Ctrl+Shift+;] — вставка текущей даты.

– [Ctrl+Shift+&] — вставка внешних границ в выделенный диапазон ячеек.

Задание 1

История Финансового университета отсчитывается со 2 марта 1919 г., когда в МФЭИ — первом финансово-экономическом институте нашей страны — начались занятия.

Разработать таблицу Excel, содержащую сведения, в какой день недели отмечалась (будет отмечаться) годовщина вуза, начиная с 1919 года по 2019 год.

Выделить ячейки с юбилейными датами — 10 лет, 25 лет, 50 лет, 75 лет, 100 лет.

В какой день недели отмечалась годовщина вуза в 1975 и 2000 годах?

Сохранить файл под именем ВашеФИО_Задание1 в личную папку на своей группы на сетевом диске.

Порядок решения.

Открыть книгу Excel.

В ячейку A1 ввести текст: Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации.

В ячейку A3 ввести текст: Год существования.

В ячейку B3 ввести текст: Дата.

В ячейку C3 ввести текст: Порядковый день недели.

В ячейку D3 ввести текст: День недели.

В ячейку A4 ввести число 0, в ячейку A5 — число 1.

В ячейку B4 ввести дату: 02.03.1919, в ячейку B5 — 02.03.1920.

В ячейку C4 ввести формулу: =ДЕНЬНЕД(B4;2). Для появления окна (рис. 10) необходимо нажать на кнопку f_x левее строки формул.

В ячейки диапазона-столбца G4:G10 соответственно ввести названия дней недели — Понедельник, Вторник, Среда, Четверг, Пятница, Суббота, Воскресенье.

В ячейки диапазона-столбца F4:F10 соответственно ввести числа от 1 до 7.

Выделить диапазон F4:G10 → Вкладка *Формулы* → *Определенные имена* → *Присвоить имя* → Ввести имя *Дни_недели* → *ОК* (рис. 12).

В ячейку D4 ввести формулу: =ПРОСМОТР(C4;Дни_недели) (рис. 13).

Выделить ячейки A4:A5. Захватив левой кнопкой мыши правый нижний уголок, когда курсор мыши станет маленьким черным плюсом, протабулировать данные

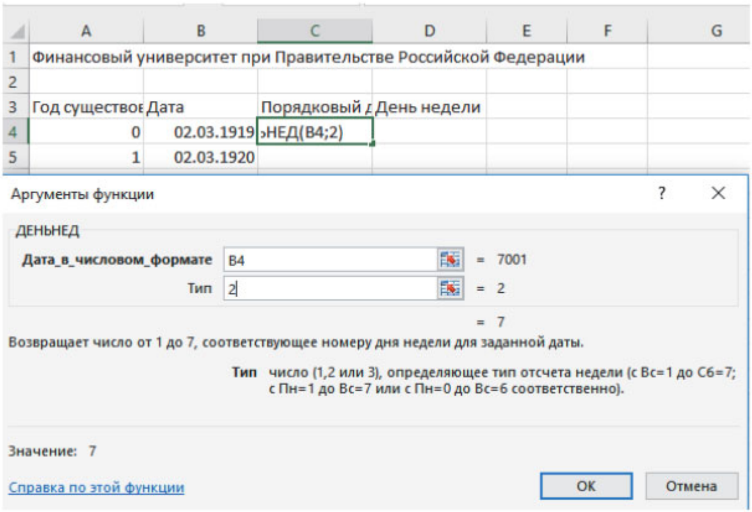


Рис. 10. Окно задания параметров функции ДЕНЬНЕД (день недели по дате)

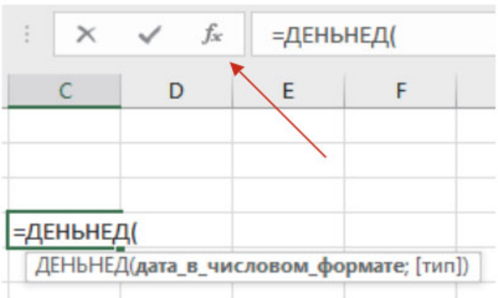


Рис. 11. Способ вызова окна встроенной функции

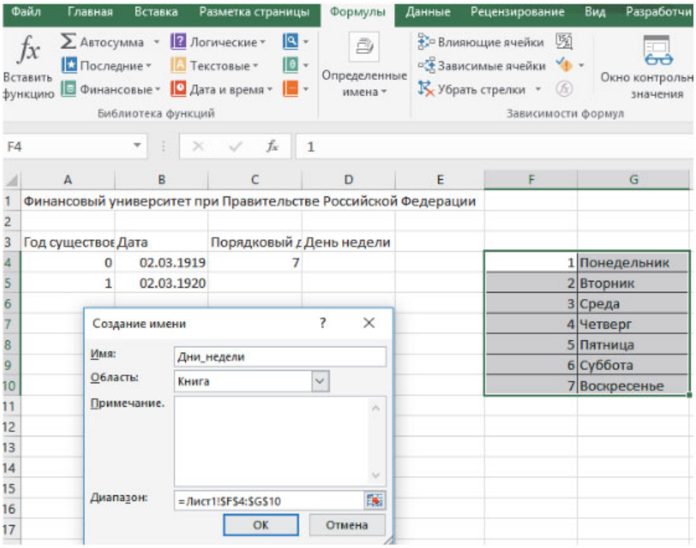


Рис. 12. Присвоение имени диапазону ячеек

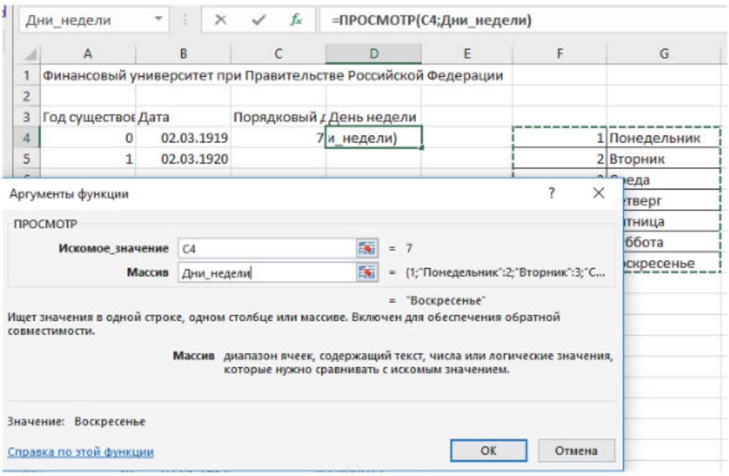
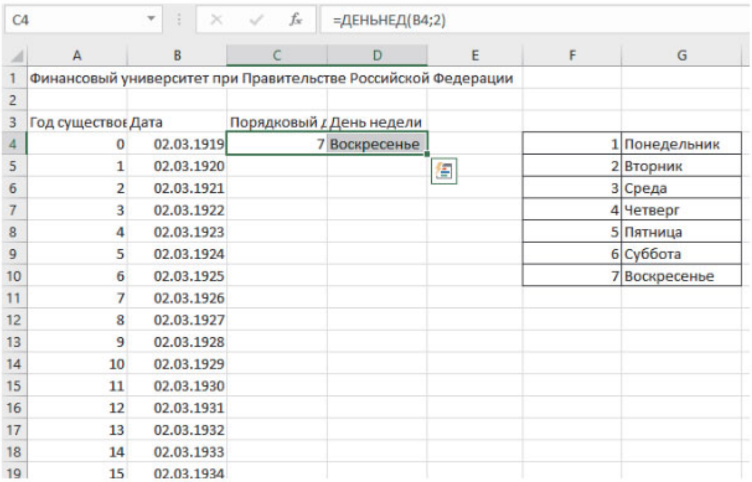


Рис. 13. Ввод формулы со встроенной функцией ПРОСМОТР (искомое значение Массив)

до числа 100 (ячейки A104); снять выделение щелчком левой кнопки мыши по свободной ячейке.

Выделить ячейки B4:B5. Подведя курсор мыши к правому нижнему уголку выделенной области и, как тот примет вид черного плюсика, выполнить по нему двойной щелчок левой кнопкой мыши. Данные в столбце автоматически протабулируются до ячейки B104 (пока в левом столбце будут данные).

Выделить диапазон C4:D4. Аналогично, захватив правый нижний уголок, протабулировать его до конца таблицы (рис. 14). Расчет таблицы будет завершен.



C4 =ДЕНЬНЕД(B4;2)

	A	B	C	D	E	F	G
1	Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации						
2							
3	Год существов	Дата	Порядковый д	День недели			
4	0	02.03.1919	7	Воскресенье		1	Понедельник
5	1	02.03.1920				2	Вторник
6	2	02.03.1921				3	Среда
7	3	02.03.1922				4	Четверг
8	4	02.03.1923				5	Пятница
9	5	02.03.1924				6	Суббота
10	6	02.03.1925				7	Воскресенье
11	7	02.03.1926					
12	8	02.03.1927					
13	9	02.03.1928					
14	10	02.03.1929					
15	11	02.03.1930					
16	12	02.03.1931					
17	13	02.03.1932					
18	14	02.03.1933					
19	15	02.03.1934					

Рис. 14. Подготовка к табуляции формул в столбцах C и D

Выделить ячейки A1:D1 и выполнить их объединение с переносом по словам. Изменить параметры шрифта.

Выделить ячейки A3:D3 и изменить их формат, задав значения по центру и перенос по словам.

При необходимости изменить ширину столбцов таблицы (A:D).

Для выделения всей таблицы и задания границ, обрамляющих ячейки, выполнить:

Поместить табличный курсор в ячейку А3 →
Выделить шапку таблицы комбинацией клавиш [Ctrl+Shift+→] →
Выделить всю таблицу комбинацией клавиш [Ctrl+Shift+↓] →
Задать обрамление ячеек: *Все границы*

Выполнить заливку данных по юбилейным датам.

Отметить дни недели празднования юбилея вуза в 1975 и 2000 годах.

Сохранить файл под требуемым именем на сетевой диск в личную папку студента.

Задания для самостоятельной работы

1. Разработать таблицу, в которой, опираясь на информацию данных методических рекомендаций, рассчитать параметры электронного листа — количество ячеек и максимальное количество символов, которые могут быть размещены на электронном листе (в единицах измерения памяти). В расчетах принять значение символов в ячейке 2^{15}.
2. Выполнить аналогичные расчеты для электронной книги. В расчетах принять количество листов книги 2^{16}.
3. Оценить, какой должна быть оперативная память компьютера, если электронная книга Excel будет заполнена «под завязку».
4. Сделать выводы.

Практикум 2.
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ, ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ, ПОДБОР ПАРАМЕТРА ПОД ЗАДАННОЕ ЗНАЧЕНИЕ (EXCEL)

Семинарское занятие «Excel как калькулятор» — второе занятие в курсе дисциплины «Компьютерный практикум».

Теоретический раздел

Ввод данных и формул в ячейки рабочего листа

Выражения и операции Excel

Excel является универсальным вычислителем, выполняющим операции над данными и использующим принцип программного управления. Для записи программы вычислений служат выражения.

Выражение — это указание на выполнение какого-либо действия. Выражения в Excel служат для записи формул, для записи условий фильтрации. Выражение включает хотя бы один из таких элементов, как оператор, литерал, адресную ссылку, идентификатор или функцию. Литералы, идентификаторы, адресные ссылки и функции, соединенные операторами, называются операндами.

Оператор в выражении указывает, какое действие должно быть выполнено над операндами. Различают арифметические операторы, операторы сравнения, операторы фильтрации, операторы конкатенации, операторы идентификации и адресные операторы. Перечень операторов и их назначение приведен в следующей таблице.

Таблица 1.1.

Операторы Excel

Оператор	**Выполняемое действие**	**Пример**
Арифметические операторы		
+ (плюс)	Арифметическое сложение	12+24 результат 36
- (минус)	Арифметическое вычитание Унарный минус (изменение знака числа)	36–12 результат 24
* (звездочка)	Арифметическое умножение	13*3 результат 39
/ (слэш)	Арифметическое деление	39/13 результат 3
ˆ (крышка)	Возведение в степень	9ˆ2 результат 81 9ˆ(1/2) результат 3
% (процент)	Процент	

Типы данных Excel

Тип данных определяет формат данных хранимых в памяти и способ их отображения в ячейках рабочего листа. Тип данных для активной ячейки или выделенного фрагмента устанавливается следующим образом:

по команде ГЛАВНАЯ/ЧИСЛО и в окне: Общий выбрать нужный тип;

щелчком правой кнопкой мыши на активной ячейке или выделенного диапазона ячеек и из контекстного меню выбрать команду Формат ячеек и далее во вкладке Число выбрать нужный тип.

Типы данных Excel приведены в следующей таблице.

Таблица 1.2.

Тип данных	Назначение	Пример
Числовой	Служит для представления чисел с фиксированной запятой	451,12 -9267,123
Денежный	Числовой формат, применяемый для отображения денежных величин	451,12р. 9267,12р.
Финансовый	Применяется для выравнивания денежных величин по разделителю целой и дробной части.	
Дата	Применяется для отображения дат	16.4 16.4.02 апрель 02
Время	Применяется для отображения времени	14:20 4.5.02 12:35

Тип данных	Назначение	Пример
Процентный	Значение ячеек умножается на 100 и сопровождается символом процента	12%
Дробный	Применяется для отображения чисел в виде рабочий дроби	3/4 4/7
Экспоненциальный	Применяется для отображения чисел с плавающей запятой	1,23E-01, здесь 1,23 — значащая часть (мантисса) E — основание счисления (10) -01- порядок число может быть представлено в виде 1,23*10–1
Текстовый	Применяется для отображения текстовой информации. Вне зависимости от содержания обрабатываются как строки	
Дополнительный	Текстовый, использующий различные шаблоны для ввода специфических данных (номер телефона, почтовый индекс)	123–4567 456500
Общий	Служит для отображения текстовых и числовых значений произвольного типа	

Ввод данных

Любая ячейка таблицы может быть заполнена данными. Для ввода данных в ячейку надо активизировать эту ячейку (ячейка выделяется жирным контуром) и начать ввод. Вводимые символы сразу появляются в текущей ячейке и в строке формул.

По окончании ввода данных в текущую ячейку может быть выполнено одно из следующих действий:

– нажата клавиша <Enter> — данные зафиксируются в текущей ячейке, и выделение переместится на одну ячейку вниз;

– нажата кнопка с «галочкой» на строке формул — данные зафиксируются в текущей ячейке, и выделение останется в этой же ячейке;

– нажата любая клавиша со стрелкой — данные зафиксируются в текущей ячейке, и выделение переместится в ячейку в направлении, указанном стрелкой;

– нажата кнопка с крестиком на строке формул или нажата клавиша <Esc> — ввод данных будет отменен.

Для ввода одинаковых данных в диапазон ячеек, следует сначала выделить нужный диапазон ячеек, затем ввести необходимые данные и завершить ввод нажатием комбинации клавиш <Ctrl><Shift><Enter>.

По умолчанию по окончании ввода *текстовые* данные выравниваются по левому краю ячейки, *числовые* — по правому. Если выравнивание требуется изменить, нужно воспользоваться командой ГЛАВНАЯ/ВЫРАВНИВАНИЕ, или щелкнуть правой кнопкой мыши на активную ячейку или выделенный диапазон ячеек и из контекстного меню выбрать команду Формат ячеек и далее во вкладке Выравнивание выбрать нужный тип выравнивания.

Ввод формул

Ввод формулы обязательно должен начинаться со знака равенства (=).

В составе формул могут быть числа, функции, ссылки на адреса или имена ячеек, операторы (см. таблицу 1.1), круглые скобки для задания приоритетности операций, логические функции, а также текст, заключенный в кавычки. Например, =B12+A2*4 или =A1&" "&B1 (результатом выполнения этой формулы будет объединение значений ячеек A1 и B1, разделенных пробелом. Допустим, в A1 содержится имя, а в B1 — фамилия. Результатом вычисления формулы будет текст, содержащий имя и фамилию).

Формулу так же, как и данные, можно вводить сразу в несколько ячеек. Для этого следует сначала выделить нужный диапазон ячеек, затем ввести необходимое выражение и завершить ввод нажатием комбинации лавиш <Ctrl><Shift><Enter>.

После ввода формулы в ячейке появляется вычисленный результат, а сама формула отображается в строке формул. Если необходимо (в ходе выверки таблицы) отобразить в ячейках таблицы именно формулы расчета, а не результаты, то следует задать команду ФОРМУЛЫ / ЗАВИСИМОСТИ ФОРМУЛ/ПОКАЗАТЬ ФОРМУЛЫ.

Если результат вычисления формулы или преобразования формата окажется длиннее ширины столбца, в ячейке появляются символы #######. Для получения числового изображения следует увеличить ширину столбца.

Организация ссылок

Адреса ячеек в формулы могут быть помещены с помощью указания мышью на соответствующую ячейку (диапазон ячеек). Вид адресной ссылки на ячейку, содержащую значение операнда, зависит от выбранного формата адресации.

При перемещении или копировании формулы адрес в указанной ссылке изменяется, ориентируясь на ту позицию, в которую переносится формула. Такие ссылки носят название относительных ссылок.

Для ввода в формулу значения из фиксированной ячейки (адрес которой при копировании или перемещении формулы остается неизменным) используются *абсолютные* ссылки. При их обозначении в написании адреса ячейки добавляется знак доллара (например, $A$20, $IA$200).

В случае изменения только одного значения адреса и фиксации другого используются *смешанные ссылки* (Знаком $ фиксируется только имя столбца (например, $A9) или номер строки (например, E$6)). Для ввода смешанных и абсолютных ссылок используется клавиша F4 (курсор в этом случае помещается либо внутрь ссылки, либо после нее).

Автозаполнение

Во многих задачах может потребоваться заполнить некоторый диапазон ячеек арифметической последовательностью чисел или дат. Для автоматического создания таких последовательностей можно воспользоваться одним из следующих способов:

– ввести данные в первые две ячейки ряда и выделить их. Далее протянуть маркер заполнения (маленький черный квадрат, расположенный в нижнем правом углу выделенной области) по всему ряду. После того, как мышь будет отпущена, ряд заполнится данными;

– ввести данные в первую ячейку ряда. Протянуть маркер заполнения по всему ряду, удерживая при этом нажатой клавишу <Ctrl>. Образуемая при этом последовательность чисел будет всегда иметь приращение 1;

– ввести данные в первую ячейку ряда. Выделить все ячейки, которые должны быть заполнены данными. Задать команду ГЛАВНАЯ/ РЕДАКТИРОВАНИЕ, нажать кнопку ЗАПОЛНИТЬ и выбрать параметр ПРОГРЕССИЯ. Далее задать тип заполняемого ряда (как правило, тип определяется автоматически), в поле ШАГ указать приращение.

Для создания собственного Списка автозаполнения для ввода данных можно воспользоваться одним из следующих способов:

Задать команду ФАЙЛ/ПАРАМЕТРЫ вкладка ДОПОЛНИТЕЛЬНО **раздел** ОБЩИЕ **далее щелкаете командную кнопку** ИЗМЕНИТЬ СПИСКИ. В окне ЭЛЕМЕНТЫ СПИСКА ввести элементы этого списка, отделяя их друг от друга нажатием клавиши <Enter>. Нажать кнопку ДОБАВИТЬ.

Ввести список в диапазон ячеек. Выделить полученный диапазон. Задать команду ФАЙЛ/ПАРАМЕТРЫ вкладка ДОПОЛНИТЕЛЬНО **раздел** ОБЩИЕ **далее щелкаете командную кнопку** ИЗМЕНИТЬ СПИСКИ. Убедиться, что в поле ИМПОРТ СПИСКА ИЗ ЯЧЕЕК указан верный диапазон. Нажать кнопку ИМПОРТ.

Для применения Списка можно использовать как всю последовательность элементов списка сразу, так и отдельные элементы. Для этого нужно установить курсор в первую ячейку заполняемого диапазона, ввести первый элемент списка, протянуть маркер заполнения по всему ряду.

Изменение формата вывода чисел

В зависимости от вида таблицы, представленные в ней числовые данные также могут иметь различный формат отображения. Для управления этим форматом следует выделить ячейки с числовой информацией. Выбрать команду ГЛАВНАЯ/ЧИСЛО, далее можно:

Нажать кнопку ДЕНЕЖНЫЙ ФОРМАТ — выделенные числа будут переведены в денежный формат — к числу добавляется символ денежной единицы, а также два знака после запятой (изменение денежной единицы проще всего осуществить, последовательно выполнив действия ГЛАВНАЯ/ЧИСЛО, нажать кнопку ФИНАНСОВЫЙ ЧИСЛОВОЙ ФОРМАТ, включить параметр ДРУГИЕ ФИНАНСОВЫЕ ФОРМАТЫ, выбрать другой вид валюты).

Нажать кнопку ПРОЦЕНТНЫЙ ФОРМАТ — выделенные числа будут переведены в процентный формат — число умножается на 100 и в конце ставится знак процента (%).

Нажать кнопку ФОРМАТ С РАЗДЕЛИТЕЛЕМ — выделенные числа будут переведены в формат тысяч — каждые три знака числа отделяются пробелами и добавляются два знака после запятой.

Нажать кнопку УВЕЛИЧИТЬ РАЗРЯДНОСТЬ панели форматирования — точность вычислений в выделенных ячейках увеличится на один разряд.

Нажать кнопку УМЕНЬШИТЬ РАЗРЯДНОСТЬ панели форматирования — точность вычислений в выделенных ячейках уменьшится на один разряд.

В общем виде, чтобы задать необходимый формат можно задать команду ГЛАВНАЯ/ ЯЧЕЙКИ нажать кнопку ФОРМАТ, выбрать раздел ФОРМАТ ЯЧЕЕК, далее выбрать вкладку **ЧИСЛО и** выбрать нужный формат.

Для отмены заданного формата и возврата на обычный стиль отображения чисел задать команду ГЛАВНАЯ/ СТИЛИ, нажать кнопку СТИЛИ ЯЧЕЕК и выбрать параметр ОБЫЧНЫЙ.

Основы работы со встроенными функциями

Встроенные функции MS Excel и их применение

Встроенные функции в MS Excel позволяют значительно упростить написание формул и выражений, за счет чего можно оптимизировать работу пользователя. *Функция* — **это** подпрограмма, которая представляет собой заранее созданную формулу для вычисления результата на основе одного или нескольких аргументов. Помимо встроенных функций возможно создание пользовательских функций, которые создаются пользователем с помощью Visual Basic для MS Excel. Каждую встроенную функцию можно идентифицировать по имени, присвоенному ей. Все встроенные функции имеют определенный синтаксис, с помощью которого значения задачи записываются в виде аргументов функции (исходных данных для вычислений). Синтаксис функции имеет общий вид:

ИМЯ_ФУНКЦИИ (список аргументов)

Количество аргументов вводимых через символ «;» (точка с запятой) и их синтаксис зависит от конкретной функции. В качестве аргументов могут применяться:

– адресные ссылки;
– имена ячеек или диапазонов;
– функции;
– литералы.

Например, функция позволяющая суммировать значения имеет вид:

– СУММ(A1:A5) — вычисляет сумму всех значений находящихся в диапазоне A1:A5.

– СУММ(Доход) — вычисляет сумму всех значений диапазона с именем Доход.

– СУММ(5;7;10) — вычисляет сумму всех значений, заданных списком числовых литералов.

Список аргументов вводится в круглые скобки после имени функции без каких-либо интервалов. Существуют функции, список аргументов которых пуст, например СЛЧИС() и т.д., наличие скобок в них тоже обязательно.

Для задания функции используют следующие *правила*.

Прежде всего, следует установить курсор в ячейку, которая должна содержать результат выполнения функции. Далее можно выполнить одно из следующих действий:

Нажать клавиши «Shift»+«F3».

Задать команду ВСТАВИТЬ ФУНКЦИЮ находящейся на ленте ФОРМУЛЫ.

Нажать на кнопку f_x в строке формул.

Далее следует выбрать категорию функции и саму функцию в диалоговом окне ВСТАВКА ФУНКЦИИ. Для выполнения пошаговой подстановки аргументов с помощью диалогового окна ВСТАВКА ФУНКЦИИ нажать кнопку ОК. На следующих шагах следует указать адреса (имена) ячеек, значения которых будут использованы в качестве аргументов функции.

Примечание: При использовании в качестве аргумента вводимой функции другой какой-либо функции следует выбрать имя требуемой функции из списка функций в строке формул слева и произвести требуемые шаги диалогового окна ВСТАВКА ФУНКЦИЙ. После завершения ввода аргументов вложенной функции щелкните указателем мыши в строке формул (в конце вводимой формулы).

Суммирование ячеек, удовлетворяющих определенному критерию

– СУММЕСЛИ(Диапазон;Критерий;Диапазон_суммирования) — категория математических функций. Функция предназначена для суммирования значений в ячейках, удовлетворяющих определенному критерию:

– Диапазон — это диапазон, в котором определяется критерий;

– Критерий — указывается в форме числа, выражения или текста;

– Диапазон_суммирования — это диапазон суммируемых ячеек (необязательное поле для заполнения, если области Диапазон и Диапазон_суммирования совпадают).

Массив — это совокупность данных одного типа. В электронной таблице Excel массив хранится в виде диапазона ячеек. Электронная таблица Excel предоставляет возможность хранения достаточно разнообразной информации в виде массивов, в частности *векторов* и *матриц*. Данное приложение позволяет работать с массивами различной размерности: одномерными, двумерными и трехмерными. Одномерные и двумерные массивы размещаются на одном листе рабочей книги. Ссылки на одномерные и двумерные массивы можно представить как: Адрес_первой_ячейки:Адрес_последней_ячейки. Трехмерные массивы хранятся в одноименных областях смежных листов рабочей книги, ссылку на которую можно представить в следующем виде: Имя_первого_рабочего_листа:Имя_последнего_рабочего_листа!Адрес_первой_ячейки:Адрес_последней_ячейки.

Массивы различной размерности чаще всего содержат числовые данные, с которыми можно выполнять следующие арифметические операции:

– умножение массива на число (элементы массива и единственная переменная);

– почленно-построчное умножение (элементы одномерного и двумерного массивов);

– перемножение массивов любой размерности.

При выполнении арифметических операций сложения, умножения и т.д. над элементами массива необходимо:

1. Выделить диапазон в соответствии с условием задачи для расположения результата.

2. Вести в строку формул знак «=» и в соответствии с условием задачи необходимое выражение.

3. Завершить ввод выражения комбинацией клавиш Ctrl+Shift+Enter, необходимый для получения результата задачи в диапазоне ячеек (см. пункт 1).

Вычисление суммы векторов. Последовательность следующих операций приведет к вычислению суммы векторов:

1. Введите в соответствующие диапазоны одинаковой размерности числовые значения элементов векторов.

2. Для вычисления результата, выделите диапазон ячеек такой же размерности, что и исходные вектора.

3. Введите в диапазон следующую формулу:

= Адрес_Вектора_1+Адрес_Вектора_2.

4. Завершить ввод формулы комбинацией клавиш Ctrl+Shift+Enter (рис. 15).

Умножение массива на число. Для того, что бы умножить массив на число выполните следующие действия:

1. Введите в соответствующие диапазоны числовые значения элементов массива.

2. Для вычисления результата, выделите диапазон ячеек такой же размерности, что и исходный массив.

3. Введите в диапазон следующую формулу: = Адрес_Массив*3;

4. Завершить ввод формулы комбинацией клавиш Ctrl+Shift+Enter (рис. 16).

Моделирование числовых последовательностей и рядов

Числовые последовательности представляют собой множества чисел. Если каждому числу n из натурального ряда чисел 1,2,3, ..., n...поставлено в соответствие вещественное число xn, то множество чисел x_1, x_2, x_3, ..., x_n ... называют числовой последовательностью. Числа x_1, x_2, x_3, ... называют, членами последовательности, x_n— n-ным или общим элементом, а число n –его номером.

Таким образом, последовательность представляет собой множество пронумерованных элементов.

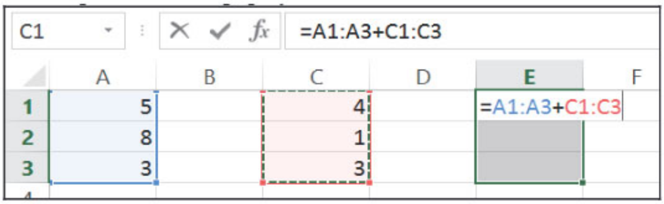


Рис. 15. Вычисление суммы векторов

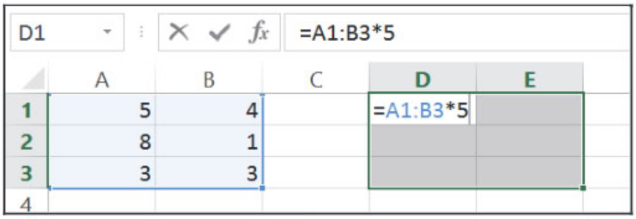


Рис. 16. Умножение массива на число

Последовательность задана, если известен способ получения любого ее элемента. Последовательность обозначается символом $\{x_n\}$. Например, символ {1/n} обозначает последовательность чисел 1, 1/2, 1/3, 1/4, ..., 1/n. В общем случае для создания массива элементов последовательности нужно выполнить следующие действия:

Создать массив, содержащий множество чисел натурального ряда;

Ввести в ячейку формулу последовательности, делая в ней адресные ссылки на ячейки, содержащие номера элементов последовательности

Скопировать введенную формулу во все другие ячейки массива.

Пример создания последовательности {1/n}, и последовательности {n/(n+1)}.

B3 fx =1/A3

	A	B
1	Последовательность {1/n}	
2	Номер элемента	Элемент
3	1	1
4	2	1/2
5	3	1/3
6	4	1/4
7	5	1/5
8	6	1/6
9	7	1/7

B3 fx =A3/(A3+1)

	A	B	C
1	Последовательность {n/(n+1)}		
2	Номер элемента	Элемент	
3	1	1/2	
4	2	2/3	
5	3	3/4	
6	4	4/5	
7	5	5/6	
8	6	6/7	
9	7	7/8	

Для создания наиболее часто встречающихся последовательностей, таких как арифметическая или геометрическая прогрессия, табличный процессор имеет специальный инструмент “Прогрессия”, который находится: линейка Главная → Редактирование → Заполнить → Прогрессия .

Технология вычисления пределов числовых последовательностей

Технологию приближенного вычисления предела числовой последовательности рассмотрим на примере. Пусть требуется найти предел числовой последовательности

$$Lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}$$

B2 ▾ f_x =A2/(A2+1)

	A	B
1	**Предел последовательности {n/(n+1)}**	$n \to \infty$
2	100000000000000000000000000000,0	1
3		

Технология моделирования числовых рядов

Числовым рядом называется бесконечная последовательность чисел $u_1, u_2, \ldots, u_n \ldots$, соединенных знаком сложения $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n-1}^{\infty} u_n$.

Ряд считается заданным, если известен его общий член $u_n = f(n)$. Сумма n первых членов ряда называется частичной суммой ряда. Для вычисления частичной суммы ряда в электронной таблице нужно выполнить следующие шаги:

– Вычислить n первых членов числовой последовательности

– Вычислить сумму членов числовой последовательности

– Численное вычисление пределов функций

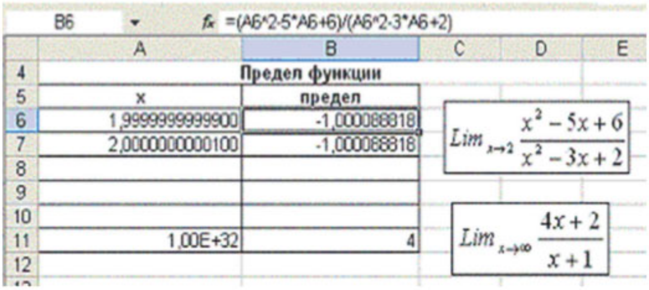
В математике для нахождения пределов функций применяются специальные приемы, в частности такой, как разложением числителя и знаменателя на сомножители и некоторые другие. Используя электронную таблицу, можно применить следующую технологию:

В ячейку рабочего листа ввести формулу, соответствующую выражению функциональной зависимости, в которой значение аргумента указывается адресной ссылкой на ячейку, которая содержит аргумент

В ячейку, предназначенную для записи аргумента функции, ввести число, максимально близкое к точке, в которой вычисляется предел функции.

Пример.
Найти предел функции

$$Lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$$



Подбор параметра

Реализация различных экономических и финансовых проектов и задач, зачастую требует решения проблемы подбора одного параметра так, чтобы другой параметр принял требуемое значение. То есть, если известен целевой показатель вычисления формулы, но не известны входные значения, позволяющие получить его, то в MS Excel используется инструмент *Подбор параметра*. Этот инструмент является средством решения задач анализа данных «что если», когда путем перебора одного значения достигается необходимое значение исследуемой функции (критерии оптимальности).

Итак, для того, чтобы определить значение, удовлетворяющее требуемому значению критерия оптимальности, необходимо вывести инструмент *Подбор параметра* в списке команд «Анализ «что-если»» в группе команд Работа с данными ленты ДАННЫЕ (рис. 17).

Для того, чтобы применить инструмент *Подбор параметра* (рис. 18) необходимо настроить соответствующие поля диалогового окна:

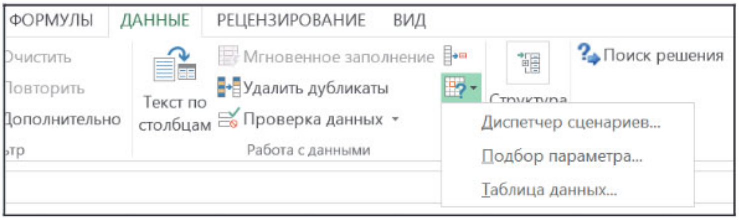


Рис. 17. Работа с данными (Анализ «что если»)

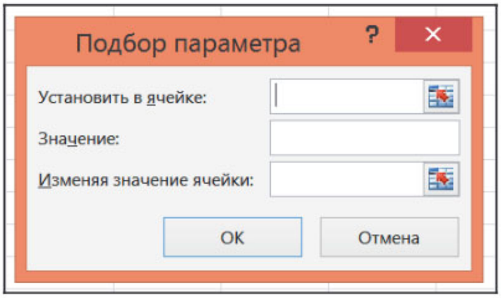


Рис. 18. Окно Подбор параметра

1. Установить в ячейке — ссылка на ячейку с исследуемой формулой;
2. Значение — планируемое значение, в виде частного экстремума;
3. Изменяя значение ячейки — ссылка на ячейку с подбираемым параметром;
4. Нажать ОК.

Пример 1. Требуется определить, каким должен быть курс евро, чтобы имея в наличии 3678 рублей, купить 90 евро.

Решение (уравнение для упомянутой задачи имеет вид $x * 90 = 3678$, где x — искомый курс доллара, для которого в MS Excel создадим модель):

В ячейке A2 должно быть подобрано значение курса доллара (предварительно ячейка пустая).

В ячейку B2 вводим формулу: =A2 * 90, предварительный итог которой 0.

Запустив инструмент *Подбор параметра*, необходимо в поле *Установить в ячейке* указать ссылку на ячейку B2, в поле *Значение* ввести 3678, а в поле *Изменяя значение ячейки* указать ссылку на ячейку A2 (рис. 19) (ответ: 40,866667).

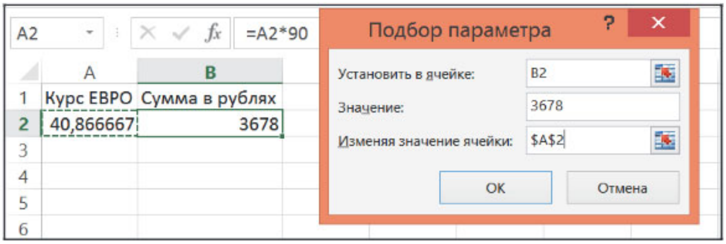


Рис. 19. Результат решения примера 1

Пример 2. Определить, под какую процентную ставку необходимо сделать вклад в банк в сумме 500000 рублей, с ежемесячным начислением процентов, чтобы за 4 года накопить на счету 1000000 рублей? Модель задачи представлена на рис. 20.

С помощью встроенной финансовой функции (БС), позволяющей вычислять будущую стоимость, определим ее значение при условных 10% (744 677,05 р.).

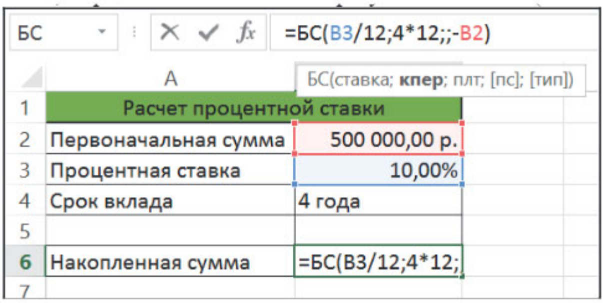


Рис. 20. Расчет процентной ставки

Решение:

Установите курсор в ячейку B6, где расположена функция (формула) и запустите инструмент *Подбор параметра*.

В поле *Установить* в ячейке, должна быть ссылка на ячейку B6.

В поле *Значение* введите 1000000.

В поле *Изменяя значение* ячейки установите ссылку на ячейку B3 (рис. 21) (ответ: 17,45%).

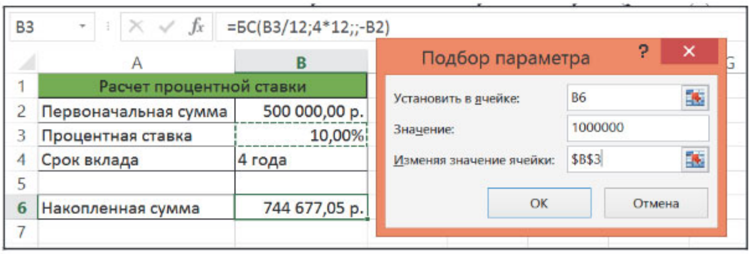


Рис. 21. Подбор параметра расчета процентной ставки

В результате получим искомое значение процентной ставки 17,45% (рис. 22).

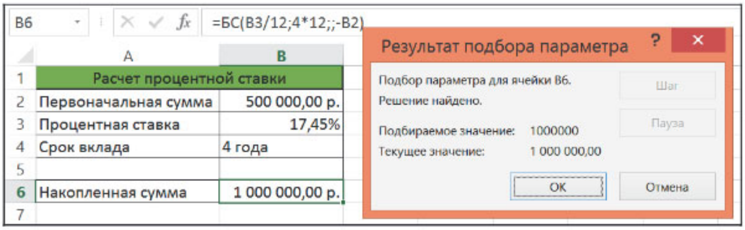


Рис. 22. Расчет процентной ставки после подбора параметра

Итак, инструмент Подбор параметра, подбирает конкретный показатель, при котором требуемый результат достигает определенного значения.

Практический раздел

Задание 1

Математические операции в Excel

Произвести математические операции с помощью Excel.

$$135+243$$
$$135*243$$
$$135-243$$
$$135/243$$
$$145^3.$$
$$145^{\frac{2}{3}}.$$
$$\sqrt[233]{145}$$
$$\sqrt[4]{1450{,}08}$$
$$-35/28{,}5$$

Задание 2

Произвести математические операции с помощью Excel, по заданным значениям

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}$$
$$\mathbf{a}^*\mathbf{b}$$
$$\mathbf{a}-\mathbf{b}$$
$$\mathbf{a}/\ \mathbf{b}$$
$$\mathbf{a}^3$$
$$\mathbf{a}^{\frac{2}{3}}$$
$$\sqrt[233]{\mathbf{a}}$$
$$\sqrt[233]{\mathbf{b}}$$
$$a^*\left(-b\right)$$
$$\sqrt[4]{a}$$

Задание 3

Формулы в Excel

Задать в Excel формулу вручную и найти значение выражения при

$$y = 34, z = 10, x = 243$$

$$\left(y + \frac{1}{z} - \frac{x}{2x+5}\right)^{-1}$$

Задать в Excel формулу вручную и найти значение выражения при $R = 3000, n = 6, i = 0.12$

$$R\frac{1 - e^{-n^* i}}{i}$$

Задать в Excel формулу вручную и найти значение выражения при $x = 127, i = 10, n = 120, n_1 = 40, S = 100$

$$x + i\frac{\frac{9n}{10} - S}{n_1}$$

Задать в Excel формулу вручную и найти значение выражения при

$$n = 46, k = 5, \ln(\det R) = 34$$

$$-\left(n - 1 - \frac{1}{6} * (2k+5)\right) * \ln(\det R)$$

Задать в Excel формулу вручную и найти значение выражения при x=0.0002543

$$\frac{2x^3 - 3x + 8}{x^3 - 2x^2 + 100}$$

Задать в Excel формулу вручную и найти значение выражения при x=0.0002543

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + x} - x}$$

Задать в Excel формулу вручную и найти значение выражения при x=0.0002543

$$2\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$$

Задать в Excel формулу вручную и найти значение выражения при x=678

$$\frac{5}{25-x}$$

Задать в Excel формулу вручную и найти значение выражения при x=-15,25

$$\frac{x^2-3x+4}{x^2-5x+6}$$

Задать в Excel формулу вручную и найти значение выражения при x=0.00025

$$\frac{(4x+13)^3(x+3)}{2x+\sqrt[3]{x}}$$

Задание 4

Используя функции Excel, задать формулы для вычисления следующих выражений и вычислить их При x=180 рад.

$$\frac{\sin 4x}{tg 2x}$$

При x=32

$$\left(25 sin x+\ln(18x)-\frac{\sqrt{x}}{tg(2x+8)}\right)^{-1}$$

При x=0,990077

$$10x\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$$

При x=0,990077

$$2\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$$

При x=0.0002543

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+x}-x}$$

При x=0

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

При x=2853,006

$$\left(\frac{7-x+3x^2}{7-tg5x}\right)^{\frac{2}{x}}$$

При x=2853,006

$$\frac{(4x+13)^3\left(x+\cos(3x-1)\right)}{2x+\sqrt[3]{x}}$$

При x=2853,006

$$\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{4x-3}$$

При x=2853,006

$$\frac{\sin x^2}{x^2}$$

Если в результате компьютер выдает «ошибку», пояснить ее происхождение и указать как нужно изменить значение x.

Задание 5

Вычисление значений функций в Excel

Вычислите значений функции y(x)=k*f(x) для всех значений переменной x на отрезке [a;b] с шагом c при заданном k, где f(x) из задания 4.

I (номер варианта)	k	a	b	c
1	2	1	2	0,1
2	4	2	4	0,2
3	5	3	4	0,1
4	3	4	6	0,2
5	6	5	6	0,1
6	8	6	8	0,2
7	2	7	8	0,1
8	3	8	10	0,2
9	1	9	10	0,1
10	7	10	12	0,2

Задание 6

Найти сумму 20 первых членов числовой последовательности

$$\sum_{n=1}^{20} \frac{5}{25-n}$$

Найти сумму первых 9 членов числовой последовательности

$$\{n(n-3)\}$$

Найти сумму 30 первых членов числовой последовательности

$$\left\{\sqrt[3]{n}\right\}$$

Найти сумму с 10 по 15 членов числовой последовательности

$$\frac{n}{\sqrt{n}}$$

Найти сумму 30 первых членов числовой последовательности

$$\left\{\frac{(4n+13)^3\left(n+\cos(3n-1)\right)}{2n+\sqrt[3]{n}}\right\}$$

Найти сумму 30 первых членов числовой последовательности

$$\left\{\frac{3^{n+2}+ln(n^7+1)+3n^6}{\sqrt[3]{4n+5}+3lgn-3^n}\right\}$$

Найти сумму 30 первых членов числовой последовательности

$$\left\{\frac{2n^2+n+1}{1+2+\ldots+n}\right\}$$

Найти сумму 30 первых членов числовой последовательности

$$\left\{\frac{\sin n^2}{n^2}\right\}$$

Найти сумму 30 первых членов числовой последовательности

$$\left\{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{4n-3}\right\}$$

Найти сумму 30 первых членов числовой последовательности

$$\left\{\left(\frac{2n^2-3n+4}{8n^2-5n+6}\right)^{3n-2}\right\}$$

Задание 7

Найти приближенное значение предела числовой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{25-n}$

Найти приближенное значение предела числовой последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\{n(n-3)\}$$

Найти приближенное значение предела числовой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sqrt[3]{n}\right\}$

Найти приближенное значение предела числовой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n}}$

Найти приближенное значение предела числовой последовательности

$$\lim_{n\to2}\frac{n^2-3n+4}{n^2-5n+6}$$

Найти приближенное значение предела числовой последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-3n+4}{n^2-5n+6}$$

Найти приближенное значение предела числовой последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+4}{n^3-5n+6}$$

Найти приближенное значение предела числовой последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+4}{8n^3-5n+6}$$

Найти приближенное значение предела числовой последовательности

$$\lim_{n\to 0}\frac{\sin n}{n}$$

Найти приближенное значение предела числовой последовательности

$$\lim_{n\to 2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Пояснение к заданию 7. Предположим, что в ячейке A30 расположено значение n, которое стремится к бесконечности. В ячейке B30 вводим формулу для вычисления n–го члена. Далее в ячейке A30 запишем достаточно большое число, например, 10^100. В ячейке B30 появиться примерное значение предела.

Задание 8

Подбор параметра под заданное значение в Excel

1. Известно, что длина окружности первого круга составляет 100, а площадь второго круга составляет 1000. С помощью инструмента Подбор параметра определить во сколько раз радиус первого круга отличается от радиуса второго. Ответ дать с двумя знаками после запятой.

2. Дана формула линейной функции: $y = b + ax$. Известно, что $a = 10$, $b = 20$. Протабулировать функцию

на интервале значений x от 1 до 10 с шагом 1. С помощью инструмента Подбор параметра, изменяя значение b определить, чему равен y в точке $x = 10$, если в точке $x = 6$ значение $y = 100$.

3. Площадь первого круга составляет 1500, площадь второго круга составляет 100. С помощью инструмента Подбор параметра определить во сколько раз радиус первого круга отличается от радиуса второго.

4. Дана формула линейной функции: $y = 2b - ax$. Известно, что $a = 25$, $b = 10$. Протабулировать функцию на интервале значений x от −3 до 5 с шагом 0,5. С помощью инструмента Подбор параметра, изменяя значение b определить, чему равен y в точке $x = 5$, если в точке $x = 1$ значение $y = -10$.

5. Найти решение уравнения 2,84x^2−14,7=0. Ответ дать с двумя знаками после запятой.

6. Найти решение уравнения x^2−11,7x+3=0. Ответ дать с двумя знаками после запятой.

7. Дана формула линейной функции: $y=a-bx+3$. Известно, что $a=10$, $b=20$. Протабулировать функцию на интервале значений x от −2 до +2 с шагом 0,2. С помощью инструмента Подбор параметра, изменяя значение b определить, чему равен y в точке $x=2$, если в точке $x=0,2$ значение $y=15$.

8. Найти решение уравнения x^2−8,2x+6=0. Ответ дать с двумя знаками после запятой.

9. Известно, что площадь первого прямоугольника (*a1*b1*) равна 135, а площадь второго прямоугольника (*a2*b2*) равна 195. С помощью инструмента Подбор параметра определить во сколько раз отличается сторона *a1* от стороны *a2*, если стороны *b1* и *b2* равны по 3,75. Ответ дать с двумя знаками после запятой.

10. Известно, что площадь первого прямоугольного треугольника (*a1*b1/2*) равна 156, а площадь второго прямоугольника (*a2*b2/2*) равна 185. С помощью инструмента Подбор параметра определить во сколько раз отличается сторона *a1* от стороны *a2*, если стороны *b1* и *b2* равны по 4,15. Ответ дать с двумя знаками после запятой.

11. Найти корни уравнения $\cos(x)+\sin(x)=0$ на отрезке [−2,5; 2,5]. В ответе записать большее значение. Построить график.

12. Найти корни уравнения $\sqrt{x^3+2x^2}-5=0$ на отрезке [−1,5; 2,5]. Построить график

Задания для самостоятельной работы

1. С помощью финансовых функций определить, какая сумма будет накоплена при следующих условиях: начальное значение вклада (Пс) — 8000 долларов, срок вклада (Кпер) — 18 месяцев, годовая процентная ставка (Ставка) — 11%. Дополнительные вложения и изъятия не производятся. Проценты начисляются ежемесячно. Ответ дать с двумя знаками после запятой

2. С помощью финансовых функций определить, каким должно быть начальное значение вклада при следующих условиях: срок вклада (Кпер) — 12 месяцев, будущее значение вклада (Бс) — 9600 долларов, годовая процентная ставка (Ставка) — 13%. Дополнительные вложения и изъятия не производятся. Проценты начисляются ежемесячно. Ответ дать с двумя знаками после запятой.

3. С помощью финансовых функций определить, на какой срок нужно вложить средства при следующих условиях: начальное значение вклада (Пс) — 8000 долларов, будущее значение вклада (Бс) — 10000 долларов, годовая процентная ставка (Ставка) — 11%. В конце каждого периода (тип 0) производится доплата (Плт) 100 долларов. Проценты начисляются ежемесячно. Ответ дать с двумя знаками после запятой.

4. С помощью финансовых функций определить, какую сумму нужно ежемесячно докладывать при следующих условиях: начальное значение вклада (Пс) — 90000 рублей, будущее значение вклада (Бс) — 160000 рублей, годовая процентная ставка (Ставка) — 9%, срок вклада (Кпер) — 15 месяцев. Доплата производится в конце каждого периода (тип 0). Проценты начисляются ежемесячно.

5. Определить, какой должна быть годовая процентная ставка при следующих условиях: начальное значение вклада (Пс) — 100000 рублей, срок вклада (Кпер) — 5 лет, будущее значение вклада (Бс) — 180000 рублей. В конце каждого периода (тип 0) производится снятие средств (Плт) 500 рублей. Проценты начисляются ежемесячно. Ответ записать в процентном формате с двумя десятичными знаками после запятой (например, 7,38%).

6. Определить, какая сумма будет накоплена при следующих условиях: начальное значение вклада (Пс) — 9000 долларов, срок вклада (Кпер) — 16 месяцев, годовая процентная ставка (Ставка) — 9%. Дополнительные вложения и изъятия не производятся. Проценты начисляются ежемесячно. Ответ дать с двумя знаками после запятой.

Практикум 3. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ (EXCEL)

1. Основные свойства и графики элементарных функций

ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ $y = ax + b$

Свойства функции $y = b$

1) $D(y) = R$;

2) $E(y) = \{b\}$;

3) Функция является четной;

4) Функция не является периодической;

5) При $b \neq 0$ функция не имеет корней;

при $b = 0$ корнем функции является любое действительное число;

6) При $b > 0$ функция положительна на промежутке $(-\infty; +\infty)$,

при $b < 0$ функция отрицательна на промежутке $(-\infty; +\infty)$;

7) График функции пересекает ось Oy в точке $(0; b)$;

Промежутков возрастания и убывания нет. На всей области определения функция принимает одно и то же значение;

9) Точек максимума и минимума нет.

10) График функции — ***прямая*** (рис. 23–25).

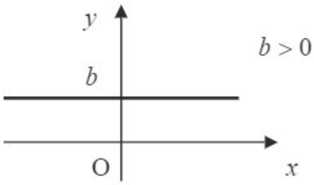


Рис. 23

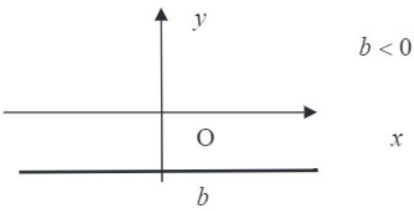


Рис. 24

Рис. 25

Свойства функции $y = ax \quad (a \neq 0)$

1) $D(y) = R$;

2) $E(y) = R$;

3) Функция является нечетной;

4) Функция не является периодической;

5) Функция имеет единственный корень $x_1 = 0$ при любом $a \neq 0$.

График функции пересекает ось Ox в точке $(0;0)$;

6) При $a > 0$ функция положительна на промежутке $(0;+\infty)$ и отрицательна на промежутке $(-\infty;0)$; при $a < 0$ функция положительна на промежутке $(-\infty;0)$ и отрицательна на промежутке $(0;+\infty)$;

7) График функции пересекает ось Oy в точке $(0;0)$;

8) При $a > 0$ функция возрастает на всей области определения;

при $a < 0$ функция убывает на всей области определения;

9) Точек максимума и минимума нет.

10) График функции — <u>*прямая*</u> (рис. 26–27).

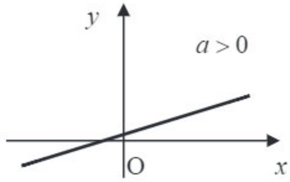


Рис. 26

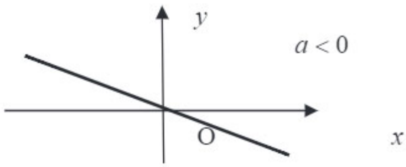


Рис. 27

Свойства функции $y = ax + b \quad (a \neq 0, \quad b \neq 0)$

1) $D(y) = R$;

2) $E(y) = R$;

3) Функция является функцией общего вида;

4) Функция не является периодической;

5) Функция имеет единственный корень $x_1 = -b/a$.

График функции пересекает ось Ox в точке $(-b/a;0)$;

6) При $a > 0$ функция положительна на промежутке $(-b/a;+\infty)$,

отрицательна на промежутке $(-\infty;-b/a)$;

при $a < 0$ функция положительна на промежутке $(-\infty;-b/a)$

отрицательна на промежутке $(-b/a;+\infty)$;

7) График функции пересекает ось Oy в точке $(0;b)$;

8) При $a > 0$ функция возрастает на всей области определения;

при $a < 0$ функция убывает на всей области определения;

9) Точек максимума и минимума нет.

10) График функции — <u>прямая</u> (рис. 28–31).

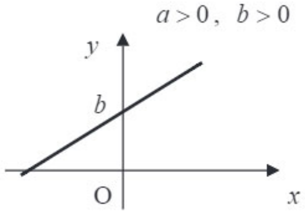


Рис. 28

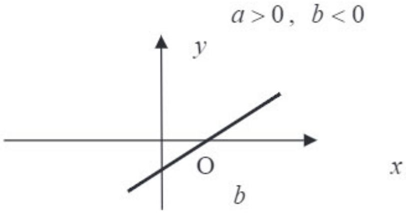


Рис. 29

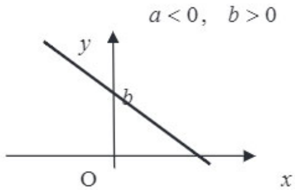


Рис. 30

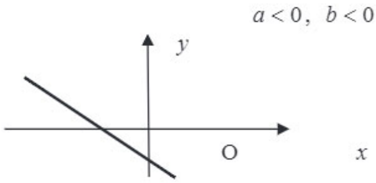


Рис. 31

<u>СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ</u> $y = x^k$ $(k \in N)$

Свойства функции $y = ax^{2n}$ $(a \neq 0, \quad n \in N)$

1) $D(y) = R$;

2) $E(y) = [0; +\infty)$, если $a > 0$,

$E(y) = (-\infty; 0]$, если $a < 0$;

3) Функция является четной;

4) Функция не является периодической;

5) Функция имеет единственный корень $x_1 = 0$ при любом $a \neq 0$. График функции касается оси Ox в точке $(0;0)$;

6) При $a > 0$ функция положительна на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, при $a < 0$ функция отрицательна на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$;

7) График функции пересекает ось Oy в точке $(0;0)$;

8) При $a > 0$ функция убывает на промежутке $(-\infty; 0)$ и возрастает на промежутке $(0; +\infty)$; при $a < 0$ функция возрастает на промежутке $(-\infty; 0)$ и убывает на промежутке $(0; +\infty)$;

9) При $a > 0$ функция имеет минимум в точке $x = 0$, причем $y_{min} = y(0) = 0$. При $a < 0$ функция имеет максимум в точке $x = 0$, причем $y_{max} = y(0) = 0$;

10) График функции изображен на рис. 32–33.

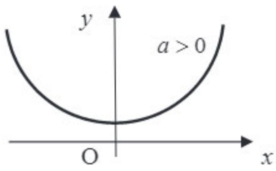


Рис. 32

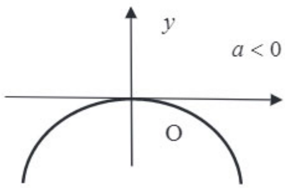


Рис. 33

Свойства функции $y = ax^{2n+1}$ $(a \neq 0, \quad n \in N)$

1) $D(y) = R$;

2) $E(y) = R$;

3) Функция является нечетной;

4) Функция не является периодической;

5) Функция имеет единственный корень $x_1 = 0$ при любом $a \neq 0$. График функции пересекает ось Ox в точке $(0;0)$;

6) При $a > 0$ функция отрицательна на промежутке $(-\infty;0)$ и положительна на $(0;+\infty)$, при $a < 0$ функция положительна на промежутке $(-\infty;0)$ и отрицательна на $(0;+\infty)$;

7) График функции пересекает ось Oy в точке $(0;0)$;

8) При $a > 0$ функция возрастает на всей области определения, при $a < 0$ функция убывает на всей области определения;

9) Функция не имеет минимумов и максимумов;

10) График функции изображен на рис. 34–35.

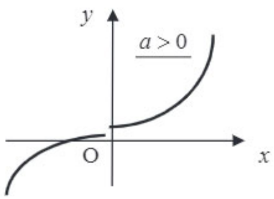


Рис. 34

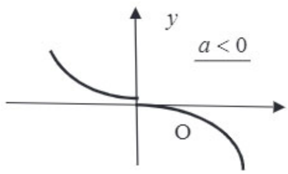


Рис. 35

Свойства функции $y = \dfrac{a}{x^{2n}}$ $(a \neq 0, \quad n \in N)$

1) $D(y) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$;

2) $E(y) = (0;+\infty)$, если $a > 0$,

$E(y) = (-\infty;0)$, если $a < 0$;

3) Функция является четной;

4) Функция не является периодической;

5) Функция не имеет корней при любом a. График функции не пересекает ось Ox;

6) При $a>0$ функция положительна на промежутках $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$, при $a<0$ функция отрицательна на промежутках $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$;

7) График функции не пересекает ось Oy;

8) При $a>0$ функция возрастает на промежутке $(-\infty;0)$ и убывает на промежутке $(0;+\infty)$; при $a<0$ функция убывает на промежутке $(-\infty;0)$ и возрастает на промежутке $(0;+\infty)$;

9) Функция не имеет минимумов и максимумов;

10) График имеет вертикальную асимптоту $x=0$ и горизонтальную асимптоту $y=0$ при $x\to\pm\infty$;

11) График функции изображен на рис. 36–37.

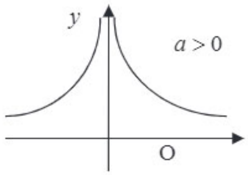


Рис. 36

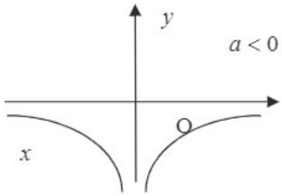


Рис. 37

Свойства функции $y=\dfrac{a}{x^{2n}}$ $(a\neq 0,\ \ n\in Z,\ \ n\geq 0)$

1) $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$;

2) $E(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$;

3) Функция является нечетной;

4) Функция не является периодической;

5) Функция не имеет корней при любом a. График функции не пересекает ось Ox;

6) При $a>0$ функция отрицательна на промежутке $(-\infty;0)$ и положительна на $(0;+\infty)$, при $a<0$ функция положительна на промежутке $(-\infty;0)$ и отрицательна на $(0;+\infty)$;

7) График функции не пересекает ось Oy ;

8) При $a>0$ функция убывает на промежутках $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$; при $a<0$ функция возрастает на промежутках $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$;

9) Функция не имеет минимумов и максимумов;

10) График имеет вертикальную асимптоту x=0 и горизонтальную асимптоту $y=0$ при $x \to \pm\infty$;

11) График функции изображен на рис. 38–39.

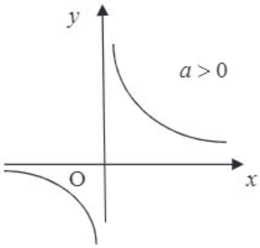


Рис. 38

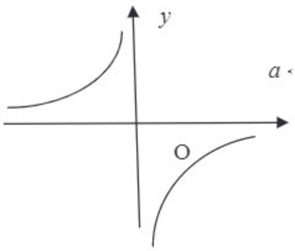


Рис. 39

2. Построение таблиц значений и графиков функций в Excel.

Визуальный анализ поведения функций.

Задание 1. Для примера рассмотрим построение графика кусочно-линейной функции описанной следующей системой уравнений:

$$y = \begin{cases} x-2, \ x \in [-4;-1] \\ x^2-4, \ x \in (-1;3] \end{cases}$$

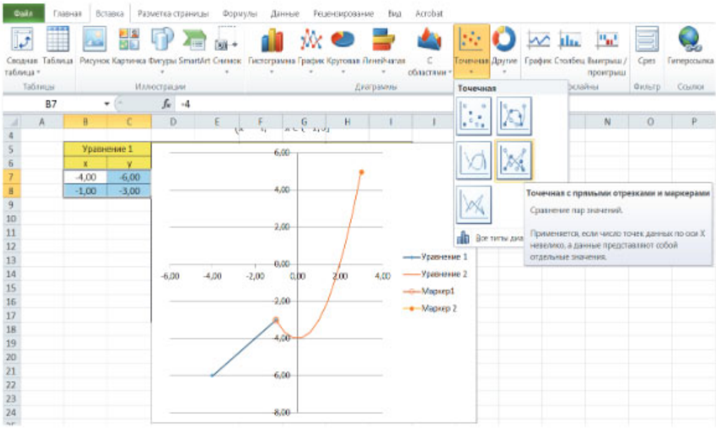
Для начала определим шаг построения:

1. Поскольку первая часть функции $y=x-2$, линейна, ее можно отобразить с шагом, определяемым промежутком существования

2. $[-4;-1]$ т.е. $h_1=(-1)-(-4)=3$.

1.2. Вводим в диапазон ячеек B7:B8 рабочего листа Excel числа -4,-1.

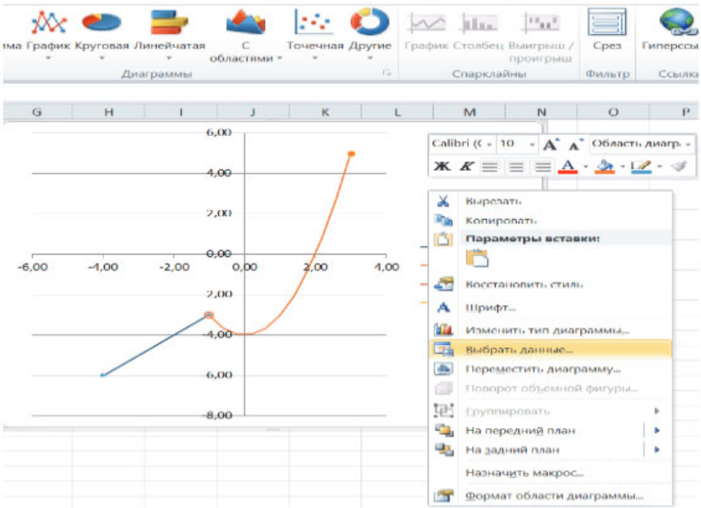
1.3. В ячейку C7 вводим формулу =B7–2. Копируем формулу до ячейки C8.



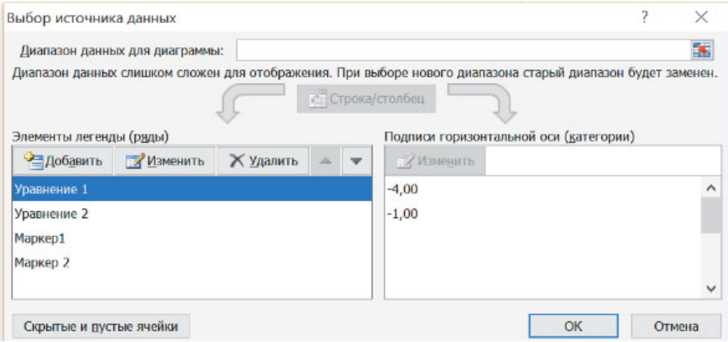
1.4. Выделяем диапазон ячеек B7:C8. Задаем команду ВСТАВКА/ДИАГРАММЫ и выбираем тип диаграммы Точечная с прямыми отрезками и маркерами, как показано на рисунке.

1.5. Оформляем таблицу как показано на рисунке выше.

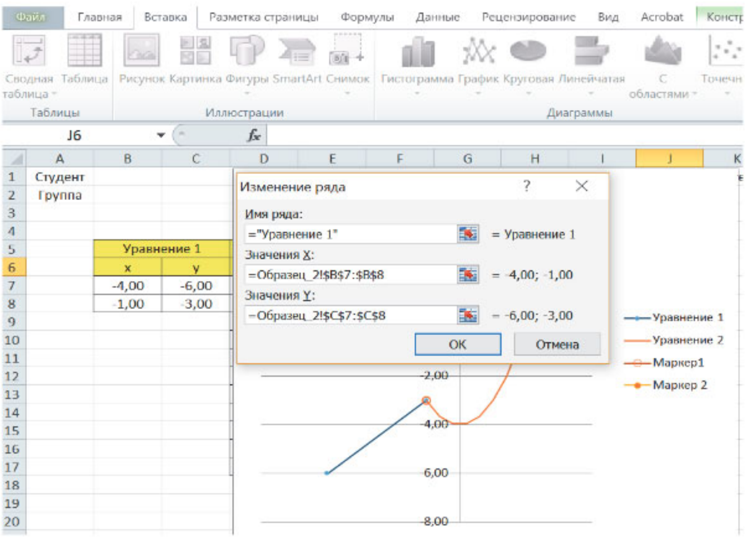
1.6. Из меню выбираем команду Выбрать данные.



1.7. В окне Выбор источника данных задаем команду Добавить.



1.8. Заполняем окно Изменение ряда как показано на рисунке:



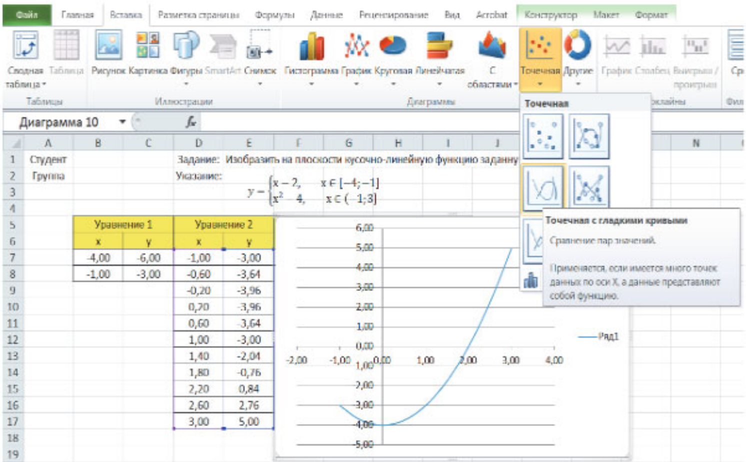
1.9. В результате получится прямая (выделена синим цветом) как показано на рисунке выше.

2.1. Вторая часть функции $y = x^2 - 4$ существует на промежутке $(-1;3]$, длиной 4; поскольку она не линейна, для того чтобы отобразить ее в виде 10-ти линейных сегментов разделим длину промежутка на количество сегментов: $h_2 = \dfrac{(3)-(-1)}{10} = 0{,}4$.

2.2. Вводим в диапазон ячеек D7:D17 рабочего листа Excel числа от -1 до 3 с шагом 0,4.

2.3. В ячейку E7 вводим формулу =D7^2−4. Копируем формулу до ячейки D17.

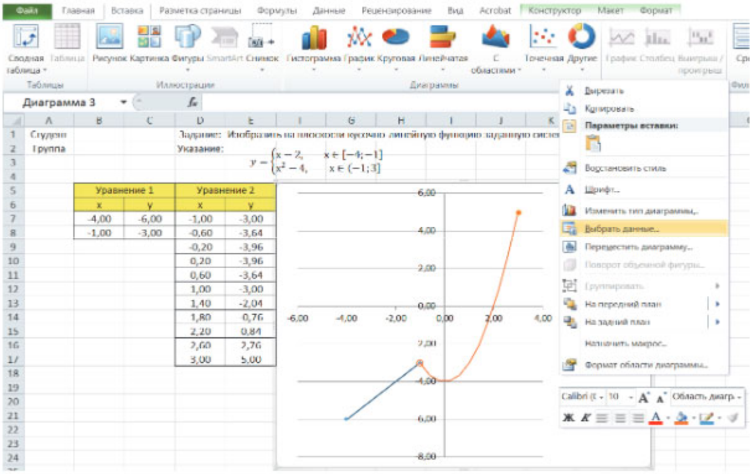
2.4. Выделяем диапазон ячеек D7:E17. Задаем команду ВСТАВКА/ДИАГРАММЫ и выбираем тип диаграммы Точечная с гладкими кривыми, как показано на рисунке:



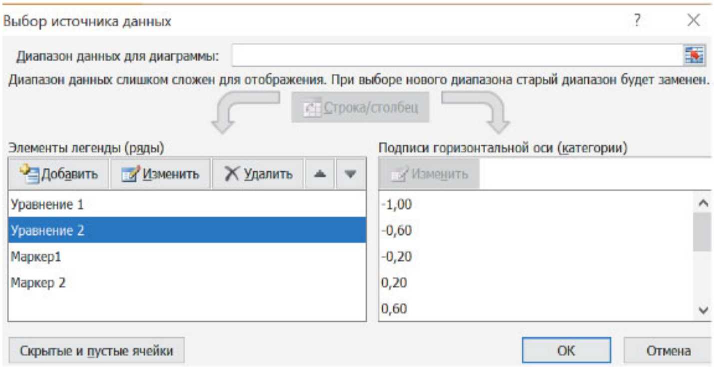
2.5. Оформляем таблицу как показано на рисунке выше.

2.6. Выделяем диаграмму.

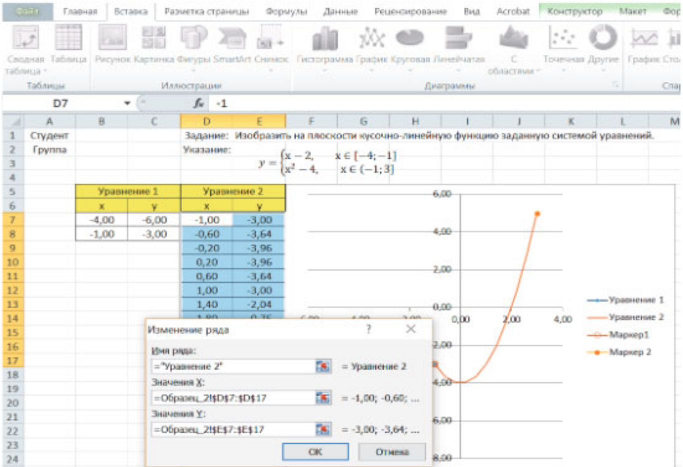
2.7. Из контекстного меню выбираем команду Выбрать данные.



2.8. В окне Выбор источника данных задаем команду Добавить.



2.9. Заполняем окно Изменение ряда как показано на рисунке:

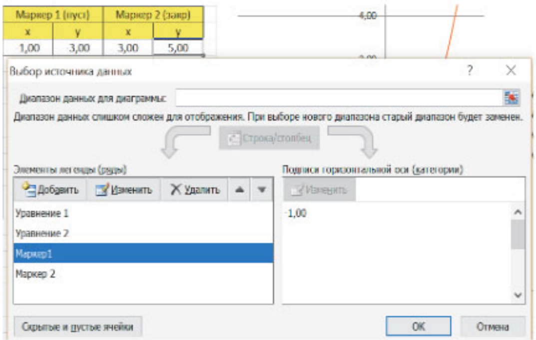


2.10. В результате получится ломанная как показано на рисунке выше.

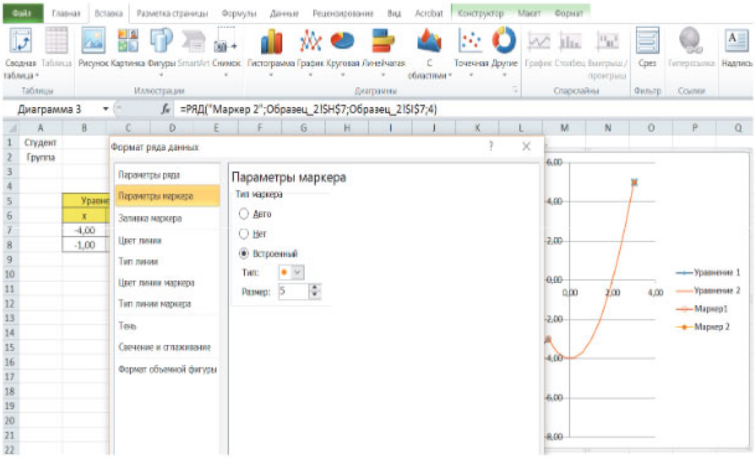
2.11. Конечные точки существования функций обозначаются закрашенными или пустыми окружностями, определим количество необходимых дополнительных маркеров:

Для функции $y = x^2 - 4$, нужны два дополнительных маркера (пустой слева и закрашенный — справа).

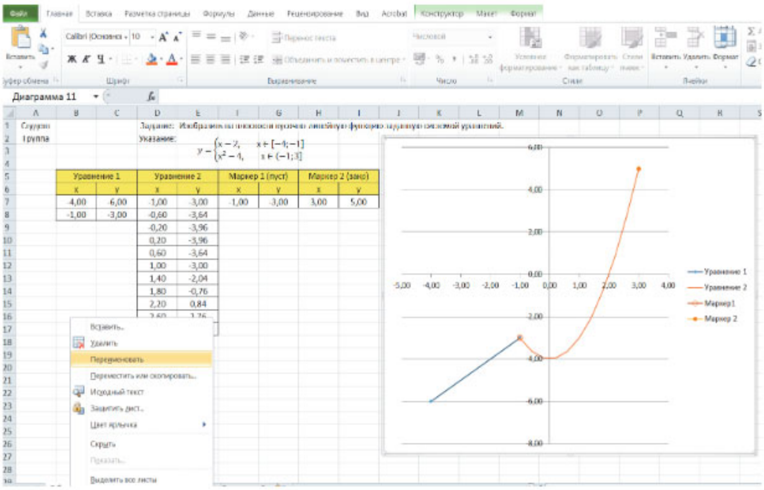
С помощью меню Выбрать данные / Выбор источника данных добавим маркер 1 и маркер 2.



2.11. Введем параметры маркера.



2.12. Задаем имя листа Образец_1.



Задание

2. Изобразим на плоскости функцию заданную уравнением, с заданным шагом

$$y(x)=\left|\cos\frac{x}{2}\right| \quad x\in[-2\pi;\pi]$$

1.1. Для функции $y(x)=\left|\cos\frac{x}{2}\right| \quad x\in[-2\pi;\pi]$ вычислим таблицу значений для оси Ox с шагом $\frac{\pi}{20}$.

1.1.1. В ячейку B6 вводим формулу =ПИ()/20.

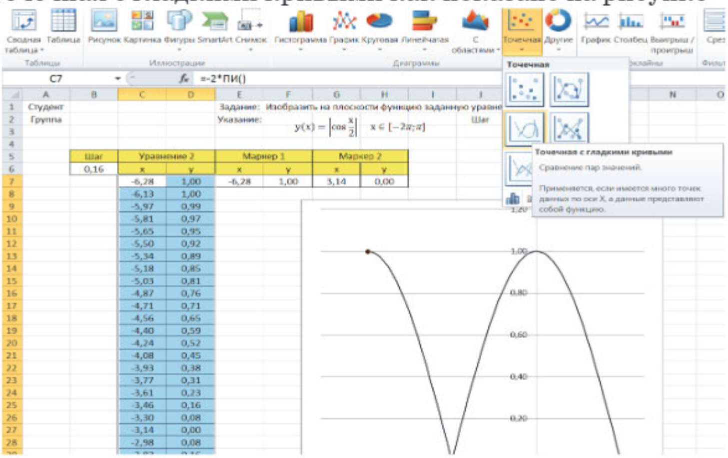
1.1.2. В ячейку C7 вводим формулу = — 2*ПИ().

1.1.3. В ячейку C8 вводим формулу =C7+B$6. Копируем формулу до ячейки C67.

1.2. Для функции $y(x)=\left|\cos\frac{x}{2}\right| \quad x\in[-2\pi;\pi]$ вычислим таблицу значений для оси Oy

1.2.1. В ячейку D7 вводим формулу =ABS(COS(C7/2)). Копируем формулу до ячейки D67.

1.3. Выделяем диапазон ячеек C7:D67. Задаем команду ВСТАВКА/ДИАГРАММЫ и выбираем тип диаграммы Точечная с гладкими кривыми как показано на рисунке

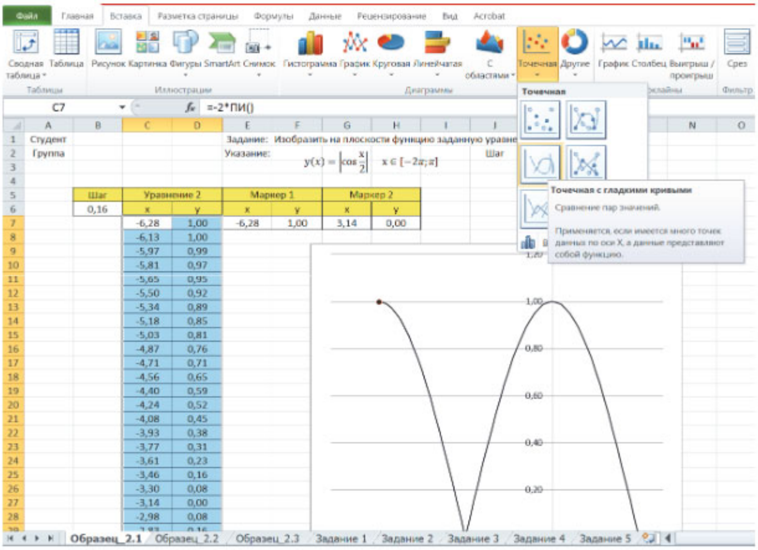


1.4. Оформляем таблицу как показано на рисунке выше.

1.5. Конечные точки существования функций обозначаются закрашенными или пустыми окружностями, определим количество необходимых дополнительных маркеров:

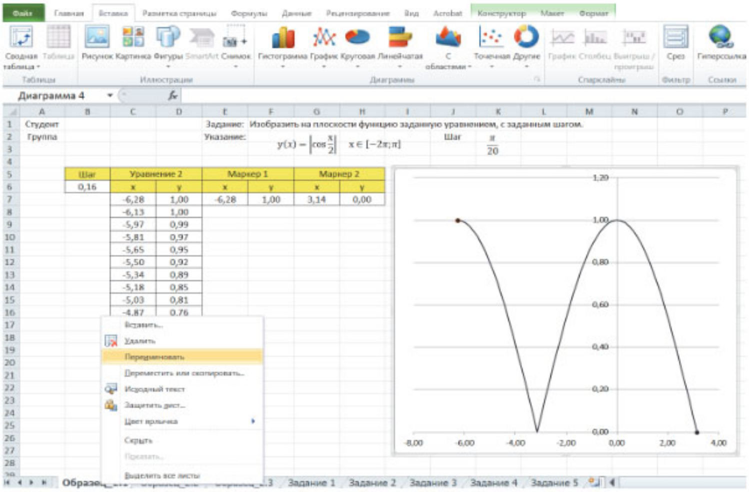
Для функции $y(x) = \left|\cos\frac{x}{2}\right| \quad x \in [-2\pi; \pi]$ нужны два дополнительных маркера (закрашенный слева и справа).

Маркер 1		Маркер 2	
x	y	x	y
-6,28	1,00	3,14	0,00



1.6. В результате получим осциллирующую функцию как показано на рисунке выше.

1.7. Задаем имя листа Образец_2.1.



2. Повторим то же построение для максимального шага. Для вычисления максимально допустимого шага отображения функции можно воспользоваться теоремой Котельникова. Для минимально точного отображения функции необходимо отобразить ее с шагом, достаточным для описания всех ее экстремумов на промежутке существования (отображения).

$$h_{max} = \frac{L_{\epsilon}}{2(N+1)},$$

где N —число экстремумов, L_{ϵ} — длина промежутка отображения

Существование верхнего предела точности не доказано.

2.1.1. В ячейку B6 вводим формулу =3*ПИ()/(2*(4+1)).

2.1.2. В ячейку C7 вводим формулу =-2*ПИ().

2.1.3. В ячейку C8 вводим формулу =C7+B$6. Копируем формулу до ячейки C17.

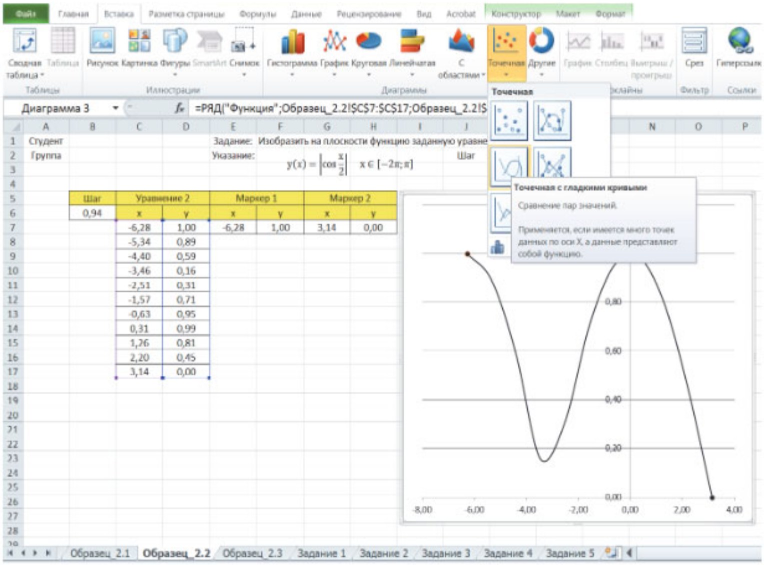
2.2. Для функции $y(x) = \left|\cos\frac{x}{2}\right| \quad x \in [-2\pi; \pi]$ вычислим таблицу значений для оси Oy 2.2.1. В ячейку D7 вводим формулу =ABS(COS(C7/2)). Копируем формулу до ячейки D 17.

2.3. Выделяем диапазон ячеек C7:D67. Задаем команду ВСТАВКА/ДИАГРАММЫ и выбираем тип диаграммы Точечная с гладкими кривыми как показано на рисунке.

2.4. Оформляем таблицу как показано на рисунке выше.

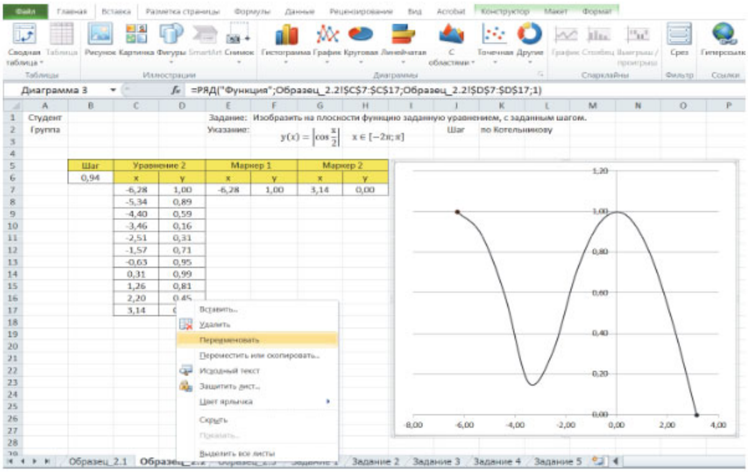
2.5. Для функции $y(x)=\left|\cos\frac{x}{2}\right| \quad x\in\left[-2\pi;\pi\right]$ нужны два дополнительных маркера (закрашенный слева и справа).

Маркер 1		Маркер 2	
x	y	x	y
-6,28	1,00	3,14	0,00



2.6. В результате получится осциллирующая функция как показано на рисунке выше.

2.7. Задаем имя листа Образец 2.2.



3. Повторим то же построение для шага вдвое меньше, чем рассчитанному по теореме Котельникова.

3.1.1. В ячейку B6 вводим формулу =3*ПИ()/(4*(4+1))

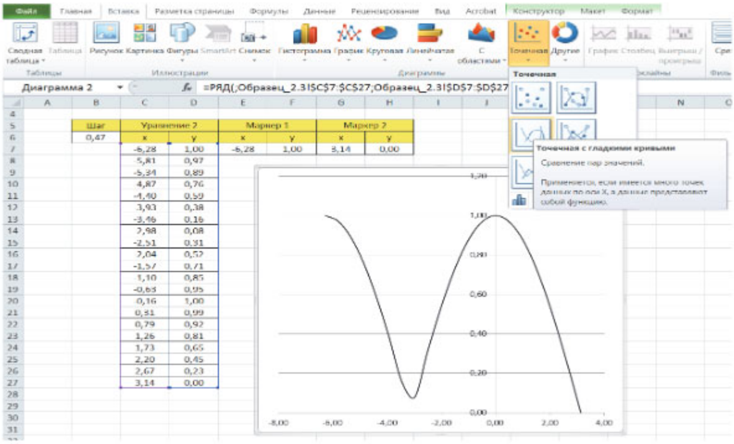
3.1.2. В ячейку C7 вводим формулу = — 2*ПИ().

3.1.3. В ячейку C8 вводим формулу =C7+B$6. Копируем формулу до ячейки C27.

3.2. Для функции $y(x)=\left|\cos\dfrac{x}{2}\right| \quad x\in[-2\pi;\pi]$ вычислим таблицу значений для оси Oy.

3.2.1. В ячейку D7 вводим формулу =ABS(COS(C7/2)). Копируем формулу до ячейки D 27.

3.3. Выделяем диапазон ячеек C7:D27. Задаем команду ВСТАВКА/ДИАГРАММЫ и выбираем тип диаграммы Точечная с гладкими кривыми как показано на рисунке:



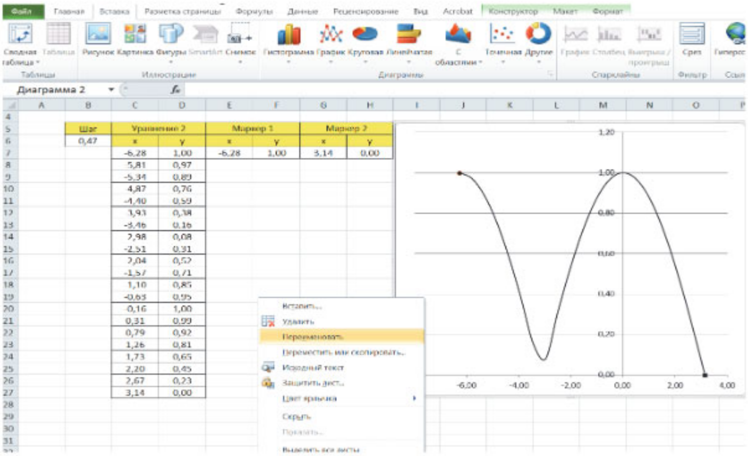
3.4. Оформляем таблицу как показано на рисунке выше.

3.5. Для функции $y(x)=\left|\cos\frac{x}{2}\right| \quad x\in\left[-2\pi;\pi\right]$ нужны два дополнительных маркера (закрашенный слева и справа).

Маркер 1		Маркер 2	
x	y	x	y
-6,28	1,00	3,14	0,00

3.6. В результате получится осциллирующая функция как показано на рисунке выше.

3.7 Задаем имя листа Образец 2.3.



Задания для самостоятельной работы

$$y=\begin{cases}-x+10,\ x\in[-1;1]\\ 12x-3x^2,\ x\in(1;5]\end{cases}$$

$$y=\begin{cases}-x,\ x\in[-3;-2]\\ x^2-1,\ x\in(-2;3]\end{cases}$$

$$y=\begin{cases}x+5,\ x\in[-3;-2]\\ x^2-1,\ x\in(-2;4]\end{cases}$$

$$y(x)=2\sqrt{x-1}\quad x\in[1;5]$$

$$y(x)=\sqrt{x+1}\quad x\in[-1;4]$$

$$y(x)=\left|4y-y^2\right|\quad x\in[-1;5]$$

$$y(x)=\left|3+4x+x^2\right|\quad x\in[0;4]$$

$$y(x)=2^{-|x|}\quad x\in[-1;1]$$

$$y(x)=\left|\log_2(-x)\right|\quad x\in[-2;-0,5]$$

$$y(x)=\frac{x}{1+x^2} \quad x\in[-2;2]$$

$$y(x)=\frac{x^2-6x+9}{(x-1)^2} \quad x\in[2;5]$$

$$y(x)=\frac{x^2}{(x-3)^2} \quad x\in[-3;2]$$

$$y(x)=\frac{x^2}{x^3-1} \quad x\in[-3;1)$$

Изобразите на плоскости кусочную функцию заданную системой уравнений с шагом 0,1.

$$\begin{cases} y=5; x\in[0;5] \\ y=5{,}5+sin\,2x; x\in(5;7) \end{cases}$$

Изобразим на плоскости кусочную функцию заданную системой уравнений с шагом 0,1.

$$\begin{cases} y=x+sin\,3x; x\in[-3;3] \\ y=1{,}62+ln\,2x; x\in[3;7] \\ y=2{,}35+\sqrt[3]{x}; x\in[7;9] \end{cases}$$

Изобразите на плоскости кусочно-линейную функцию заданную системой уравнений.

$$\begin{cases} y=5; x\in[0;5] \\ y=3; x\in(5;9) \end{cases}$$

Изобразите на плоскости кусочно-линейную функцию заданную системой уравнений.

$$\begin{cases} y=0{,}5x; x\in[0;5] \\ y=1{,}2x; x\in(5;7] \end{cases}$$

Изобразите на плоскости функцию заданную уравнением с шагом 0,1.

$$y=x+\sin 3x; x\in(-3;3)$$

Практикум 4.
ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ ВБЛИЗИ ТОЧЕК РАЗРЫВА. ГРАФИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ НАКЛОННЫХ АСИМПТОТ (EXCEL)

Введение

Пусть $f(x)$ определена в окрестности точки a , кроме быть может самой точки a . Наличие разрыва в точке a означает, что $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

1. Предположим, что $\lim_{x \to a} f(x)$ существует, но не равен $f(a)$, при этом последнее может существовать, а может не существовать, т.е. функция может быть не определена в точке a . Такая ситуация называется устранимым разрывом. Типичный случай — неопределенность $\frac{0}{0}$, которая раскрывается и в пределе получается число, например $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

2. Пусть $\lim_{x \to a} f(x)$ не существует, но существуют конечные односторонние пределы $\lim_{x \to a-0} f(x)$, $\lim_{x \to a+0} f(x)$, не равные друг другу (поскольку не существует двусторонний

предел). Эта ситуация называется (неустранимым) разрывом I-го рода. Типичные примеры функций с такими разрывами — неопределенности с модулями, например $f(x)=\dfrac{\left|x^2-3x-4\right|}{x+1}$.

Иногда разрывом I-го рода называют разрыв, при котором существуют конечные односторонние пределы. Тогда рассмотренные два типа разрыва объединяются в один: разрыв будет устранимым, если односторонние пределы равны друг другу, и неустранимым — в противном случае.

3. Самым сложным типом разрыва является разрыв II-го рода, при котором хотя бы один из односторонних пределов бесконечен или не существует. Отметим сразу, что в случае отсутствия односторонних пределов, как например у функции $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$, для численного исследования требуется дополнительная информация, уточняющая поведение функции в окрестности разрыва.

Рассмотрим более подробно ситуацию, когда оба односторонних пределов бесконечны. В этом случае вертикальная прямая $x=a$ называется (двусторонней) вертикальной асимптотой графика функции $f(x)$. Типичным примером здесь является $f(x)=\dfrac{C}{(x-a)^{\alpha}}$ при $\alpha>0$. Показатель степени α можно вычислить через предел $\alpha=-\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln\left|f(x)\right|}{\ln\left|x-a\right|}$. Зная α, найдем коэффициент $C=\lim\limits_{x\to a}f(x)(x-a)^{\alpha}$.

Пусть теперь функция $f(x)$ определена при всех достаточно больших значениях $|x|$. График функции имеет наклонную асимптоту $y=kx+b$ на $+\infty$, если существуют числа k,b при которых $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(kx+b)\right)=0$. Аналогично определяется наклонная асимптота на $-\infty$. В частном случае, когда $k=0$, т.е. когда наклонная асимптота является горизонтальной прямой, говорят о горизонтальной асимптоте. Наличие асимптот на $\pm\infty$ означает, что график функции вдалеке от начала координат практически сливается с некоторой прямой.

Коэффициенты наклонных асимптот вычисляются по формулам: $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)$.

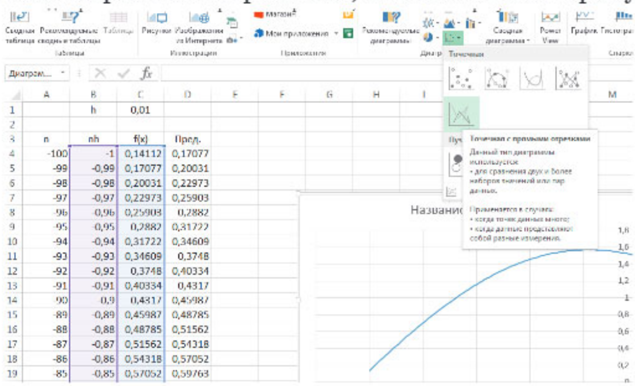
Выполнение работы

1. Для функции $f(x)=\dfrac{\sin 3x}{x^2+2x}$ вычислим таблицу значений при $x=nh$, где $h=0.01$, $n=-100,-99,\ldots,-1,1,2,\ldots,100$. Построим две линии по найденным точкам: отдельно для отрицательных и положительных n. Найдем численно значение предела $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

1.1. Вводим в диапазон ячеекA4:A203 рабочего листа Excel числа $-100,-99,\ldots,-1,1,2,\ldots,100$. В ячейку C1 вводим число 0,01.

1.2. В ячейку B4 вводим формулу =A4*$C$1. Копируем формулу до ячейки B203.

1.3. Выделяем диапазон ячеек B4:C103. Задаем команду ВСТАВКА/ДИАГРАММЫ и выбираем тип диаграммы Точечная с прямыми отрезками, как показано на рисунке:

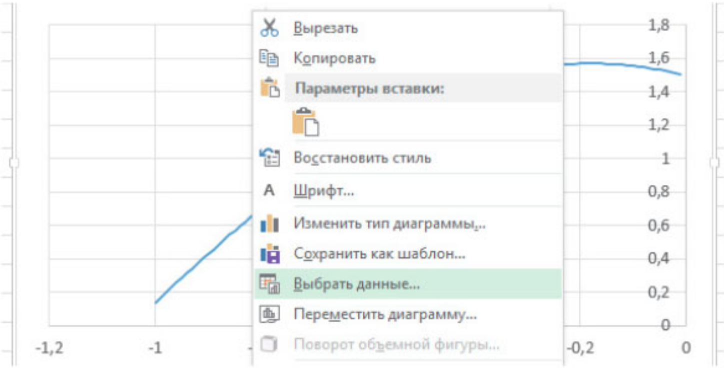


	A	B	C	D
1		h	0,01	
2				
3	n	nh	f(x)	Пред.
4	-100	-1	0,14112	0,17077
5	-99	-0,99	0,17077	0,20031
6	-98	-0,98	0,20031	0,22973
7	-97	-0,97	0,22973	0,25903
8	-96	-0,96	0,25903	0,2882
9	-95	-0,95	0,2882	0,31722
10	-94	-0,94	0,31722	0,34609
11	-93	-0,93	0,34609	0,3748
12	-92	-0,92	0,3748	0,40334
13	-91	-0,91	0,40334	0,4317
14	90	0,9	0,4317	0,45987
15	-89	-0,89	0,45987	0,48785
16	-88	-0,88	0,48785	0,51562
17	-87	-0,87	0,51562	0,54318
18	-86	-0,86	0,54318	0,57052
19	-85	-0,85	0,57052	0,59763

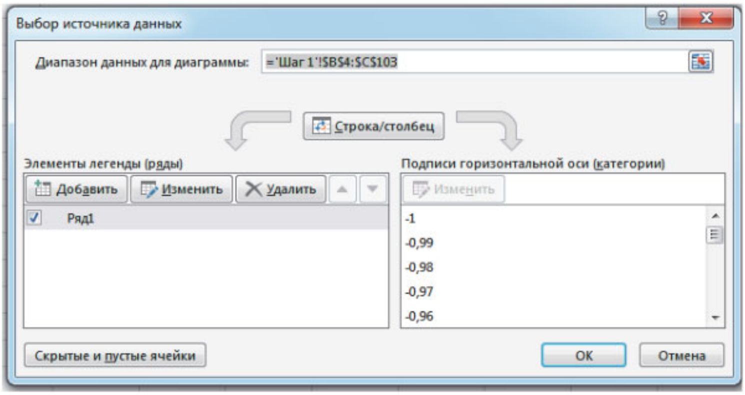
1.4. Оформляем таблицу как показано на рисунке выше.

1.5. Выделяем диаграмму.

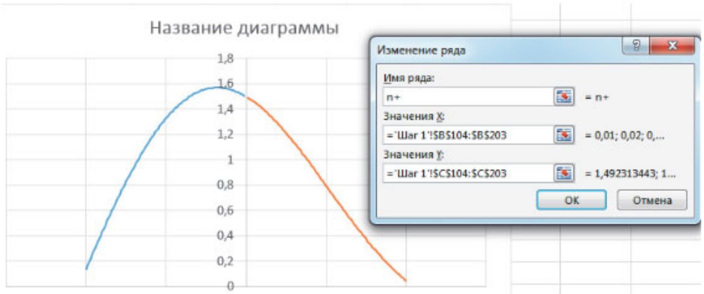
1.6. Из контекстного меню выбираем команду Выбрать данные.



1.7. В окне Выбор источника данных задаем команду Добавить.



1.8. Заполняем окно Изменение ряда как показано на рисунке:



1.9. В результате получится ломанная как показано на рисунке выше.

1.10. В ячейку D4 введем формулу для вычисления численно значение предела $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$:

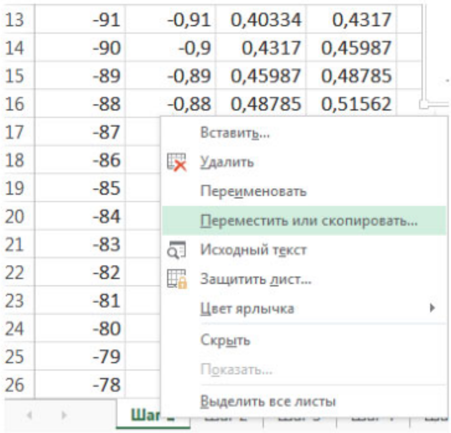
=SIN(3*(B4+$C$1))/((B4+$C$1)^2+2*(B4+$C$1))

1.11. Копируем эту формулу до ячейки D203/

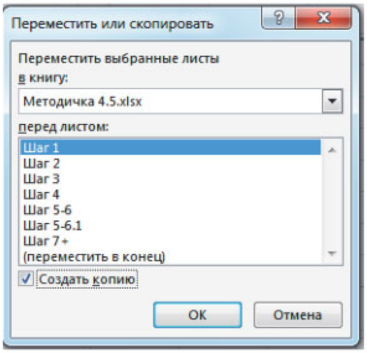
1.12. Задаем имя листа Шаг 1.

2. Повторим то же построение для $h = 0.0001$. Уточним значение предела.

2.1. Создаем копию листа Шаг 1. Для этого из контекстного меню листа Шаг 1 (см. рис.) выбираем команду Переместить или скопировать... .



2.2. Оформляем окно Переместить или скопировать как показано на рисунке:

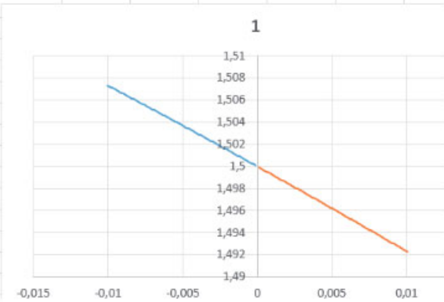


2.3. Задаем имя Шаг 2 для получившегося листа.

2.4. На Листе Шаг 2, меняем значение ячейки C1 на 0,0001.

2.5. В результате у вас должно получиться данные как показано на рисунке.

	A	B	C	D
1		h	0,0001	
2				
3	n	nh	f(x)	Пред.
4	-100	-0,01	1,50731	1,50724
5	-99	-0,0099	1,50724	1,50717
6	-98	-0,0098	1,50717	1,5071
7	-97	-0,0097	1,5071	1,50703
8	-96	-0,0096	1,50703	1,50695
9	-95	-0,0095	1,50695	1,50688
10	-94	-0,0094	1,50688	1,50681
11	-93	-0,0093	1,50681	1,50674
12	-92	-0,0092	1,50674	1,50667
13	-91	-0,0091	1,50667	1,5066
14	-90	-0,009	1,5066	1,50653
15	-89	-0,0089	1,50653	1,50645
16	-88	-0,0088	1,50645	1,50638
17	-87	-0,0087	1,50638	1,50631



2. Для функции $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ вычислим таблицу значений при $x=nh$, где $h=0.01$, $n=-100,-99,\ldots,-1,1,2,\ldots,100$. Построим две линии по найденным точкам: отдельно для

отрицательных и положительных n. Найдем численно значения односторонних пределов $\lim\limits_{x\to -0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +0} f(x)$.

3.1. Создаем новый лист и задаем имя Шаг 3.

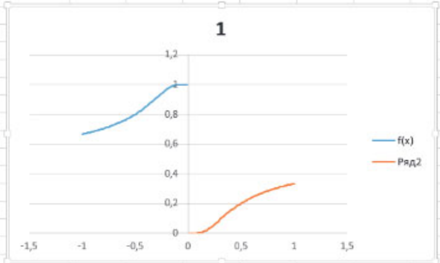
3.2. Вводим в диапазон ячеекA4:A203 рабочего листаExcelчисла $-100,-99,\ldots,-1,1,2,\ldots,100$. В ячейку C1 вводим число 0,01.

3.3. В ячейку B4 вводим формулу =A4*$C$1. Копируем формулу до ячейки B203.

3.4. Строим две линии по найденным точкам: отдельно для отрицательных и отдельно для положительных n, как показано в пп. 1.3–1.8.

3.5. В результате должно получиться две линии как показано на рисунке:

	A	B	C	D	E
1		h	0,01		
2					
3	n	nh	f(x)	Пред.+h	Пред.-h
4	-100	-1	0,666667	0,668221	0,66514
5	-99	-0,99	0,668221	0,669803	0,666667
6	-98	-0,98	0,669803	0,671413	0,668221
7	-97	-0,97	0,671413	0,673054	0,669803
8	-96	-0,96	0,673054	0,674724	0,671413
9	-95	-0,95	0,674724	0,676425	0,673054
10	-94	-0,94	0,676425	0,678158	0,674724
11	-93	-0,93	0,678158	0,679924	0,676425
12	-92	-0,92	0,679924	0,681723	0,678158
13	-91	-0,91	0,681723	0,683556	0,679924
14	-90	-0,9	0,683556	0,685425	0,681723
15	-89	-0,89	0,685425	0,68733	0,683556
16	-88	-0,88	0,68733	0,689273	0,685425
17	-87	-0,87	0,689273	0,691253	0,68733
18	-86	-0,86	0,691253	0,693273	0,689273



3.6. Оформляем таблицу как показано на рисунке.

3.7. В ячейку D4 введем формулу для вычисления численно значение предела $\lim\limits_{x\to -0} f(x)$: =1/(1+2^(1/(B4+$C$1)))

3.8. В ячейку D4 введем формулу для вычисления численно значение предела $\lim\limits_{x\to +0} f(x)$: =1/(1+2^(1/(B4-$C$1))).

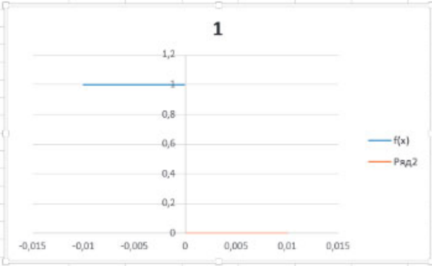
4. Повторим то же построение для $h = 0.0001$. Уточним значения пределов.

4.1 Создаем копию листа Шаг 3, как показано в пп. 2.1.-2.4. Задаем имя листа Шаг 4.

4.2. На Листе Шаг 4, меняем значение ячейки C1 на 0,0001.

4.3. В результате у вас должно получиться данные как показано на рисунке.

	A	B	C	D	E
1		h	0,0001		
2					
3	n	nh	f(x)	Пред.+h	Пред.-h
4	-100	-0,01	1	1	1
5	-99	-0,0099	1	1	1
6	-98	-0,0098	1	1	1
7	-97	-0,0097	1	1	1
8	-96	-0,0096	1	1	1
9	-95	-0,0095	1	1	1
10	-94	-0,0094	1	1	1
11	-93	-0,0093	1	1	1
12	-92	-0,0092	1	1	1
13	-91	-0,0091	1	1	1
14	-90	-0,009	1	1	1
15	-89	-0,0089	1	1	1
16	-88	-0,0088	1	1	1
17	-87	-0,0087	1	1	1
18	-86	-0,0086	1	1	1
19	-85	-0,0085	1	1	1
20	-84	-0,0084	1	1	1



5. Для функции $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{\sqrt[3]{x^5+3x^4}}$ вычислим таблицу значений при $x=nh$, где $h=0.01$, $k=-100,-99,\ldots,-1,1,2,\ldots,100$. Построим две линии по найденным точкам: отдельно для отрицательных и положительных n.

5.1. Создаем новый лист и задаем имя Шаг 5–6.

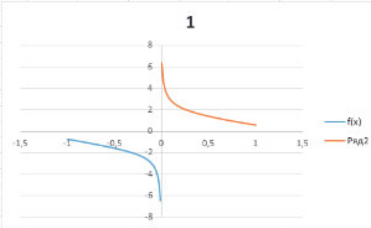
5.2. Вводим в диапазон ячеекA4:A203 рабочего листа Excel числа $-100,-99,\ldots,-1,1,2,\ldots,100$. В ячейку C1 вводим число 0,01.

5.3. В ячейку B4 вводим формулу =A4*$C$1. Копируем формулу до ячейки B203.

5.4. Строим две линии по найденным точкам: отдельно для отрицательных и отдельно для положительных n, как показано в пп. 1.3–1.8.

5.5. В результате у Вас получаться две ломанные как показано на рисунке.

	A	B	C	D	E	F
1		h	0,01			
2						
3	n	nh	f(x)	ln|f(x)|/ln|x|	f(x)*x^α	C/(x^α)
4	-100	-1	-0,72171			
5	-99	-0,99	-0,73677	-30,39514855	-0,733779	1,001841
6	-98	-0,98	-0,75189	-14,11502855	-0,7457723	1,005959
7	-97	-0,97	-0,76708	-8,705494066	-0,757687	1,010137
8	-96	-0,96	-0,78233	-6,013259355	-0,7695203	1,014375
9	-95	-0,95	-0,79765	-4,407679744	-0,7812693	1,018676
10	-94	-0,94	-0,81303	-3,345216754	-0,7929313	1,023041
11	-93	-0,93	-0,82847	-2,59293316	-0,8045036	1,027472
12	-92	-0,92	-0,84398	-2,034366789	-0,8159834	1,03197
13	-91	-0,91	-0,85955	-1,604821817	-0,827368	1,036538
14	-90	-0,9	-0,87517	-1,265485309	-0,8386546	1,041176
15	-89	-0,89	-0,89087	-0,991662028	-0,8498405	1,045888
16	-88	-0,88	-0,90662	-0,766891855	-0,8609231	1,050674
17	-87	-0,87	-0,92243	-0,579782265	-0,8718997	1,055537
18	-86	-0,86	-0,93831	-0,422198318	-0,8827675	1,06048

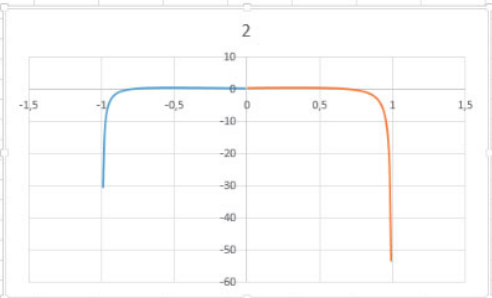


5. Для исследуемой функции вычислим значения $\frac{\ln|f(x)|}{\ln|x|}$ в тех же точках x и, построив соответствующие две линии, оценим значение α.

6.1. На листе Шаг 5–6, в ячейке D5 вводим формулу для вычисления значения $\frac{\ln|f(x)|}{\ln|x|}$: =-LN(ABS(C5))/LN(ABS(B5)).

6.2. Копируем формулу до ячейки D202.

6.3. Выделив соответствующие диапазоны ячеек (для отрицательных nB4:B103, D4:D103; положительных nB104:B203, D104:D202) строим две линии по найденным точкам: отдельно для отрицательных и отдельно для положительных n, как показано в пп. 1.3–1.8.В результате должно получиться две линии как показано на рисунке.

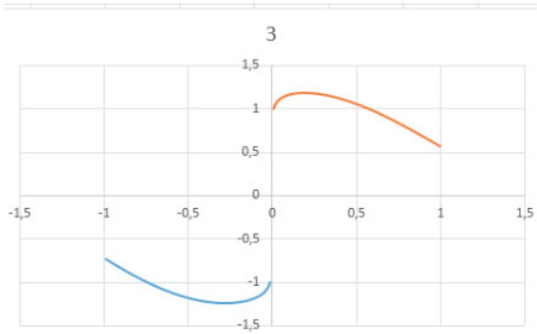


6.4. Значение α берем из ячейки D103 равное -0,404555323102164.

7. Для исследуемой функции и найденного α вычислим значения $f(x)x^{\alpha}$ в тех же точках x и, построив соответствующие две линии, оценим значение C.

7.1. На листе Шаг 5–6для вычисления значения $f(x)x^{\alpha}$ введем в ячейку E5 формулу: =C5*ABS(B5)^$D$103

7.2. Выделив соответствующие диапазоны ячеек (для отрицательных nB4:B103, E4:E103; положительных nB104:B203, E104:E202) строим две линии по найденным точкам: отдельно для отрицательных и отдельно для положительных n, как показано в пп. 1.3–1.8.В результате должно получиться две линии как показано на рисунке.

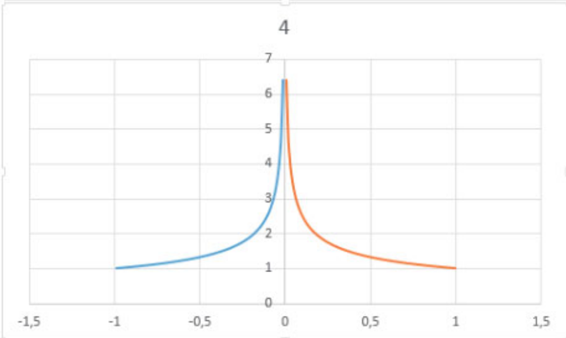


7.3. Значение C берем из ячейки E102 равное -1,02492234237999.

8. По тому же массиву точек x построим две ветви графика $y = \frac{C}{x^{\alpha}}$ и сравним его с графиком исходной функции.

8.1. На листе Шаг 5–6, в ячейке F5 для вычисления значения $y = \frac{C}{x^{\alpha}}$ вводим формулу: =$E$104/(ABS(B5)^$D$104)

8.2. Выделив соответствующие диапазоны ячеек (для отрицательных n B4:B103, F4:F103; положительных n B104:B203, F104:F202) строим две линии по найденным точкам: отдельно для отрицательных и отдельно для положительных n, как показано в пп. 1.3–1.8. В результате должно получиться две линии как показано на рисунке.



9. Повторим построения пунктов 5–8 для $h = 0.0001$, уточняя значения всех пределов.

9.1. Создаем копию листа Шаг 5–6, как показано в пп. 2.1.-2.4. Задаем имя листа Шаг 7.

9.2. На Листе Шаг 7, меняем значение ячейки C1 на 0,0001.

10. Для функции $f(x) = (x+2)\operatorname{arcctg} 3x$ вычислим таблицу значений при $x = nh$, где $h = 0.01$, $n = -100, -99, \ldots, -1, 1, 2, \ldots, 100$. Построим две линии по найденным точкам: отдельно для отрицательных и положительных n.

10.1. Создаем новый лист и задаем имя Шаг 8.

10.2. Вводим в диапазон ячеекA4:A203 рабочего листа Excel числа $-100, -99, \ldots, -1, 1, 2, \ldots, 100$. В ячейку C1 вводим число 1.

10.3.В ячейку B4 вводим формулу =A4*$C$1. Копируем формулу до ячейки B203.

10.4. В ячейке C5 водим формулу для вычисления значения $f(x) = (x+2)\operatorname{arcctg} 3x$: =(B4+2)*ATAN(3*B4)

10.5. Строим две линии по найденным точкам: отдельно для отрицательных и положительных n.

11. Для исследуемой функции вычислим значения $\frac{f(x)}{x}$ в тех же точках x и, построив соответствующие две линии, оценим значения k.

11.1. На листе Шаг 8, в ячейке D4 вводим формулу для вычисления значения $\frac{f(x)}{x}$ =C4/B4

11.2. Строим две линии по найденным точкам: отдельно для отрицательных и положительных n.

11.3. Значение k берем для отрицательной бесконечности равное 1,24904577239825 (из ячейки D4), для положительной бесконечности из ячейки D203 равное 3,74713731719476.

12. Для исследуемой функции и найденных k вычислим значения $f(x)-kx$ в тех же точках x и, построив соответствующие две линии, оценим значения b.

12.1. На листе Шаг 8, в ячейке E4 вводим формулу для вычисления значения $f(x)-kx$ для отрицательной бесконечности:=C4-$D$4*B4. Копируем формулу до ячейки E103.

12.2. в ячейке E104 вводим формулу для вычисления значения $f(x)-kx$ для положительной бесконечности:=C4-$D$203*B4. Копируем формулу до ячейки E203.

12.3. Строим две линии по найденным точкам: отдельно для отрицательных и положительных n.

12.4. Значение b берем для отрицательной бесконечности равное 1,27119062808401 (из ячейки D5), для положительной бесконечности из ячейки D202 равное 3,76322770096158.

13. По тому же массиву точек x построим две наклонные асимптоты $y=kx+b$ и сравним их с графиком исходной функции.

13.1. На листе Шаг 8, в ячейке F4 вводим формулу для вычисления значения $y=kx+b$ для отрицательной бесконечности: =$D$4*B4+$D$5. Копируем формулу до ячейки F103.

13.2. В ячейке F104 вводим формулу для вычисления значения $f(x)-kx$ для положительной бесконечности: =$D$4*B4+$D$202. Копируем формулу до ячейки F203.

13.3. Строим две линии по найденным точкам: отдельно для отрицательных и положительных n .

14. Повторим построения пунктов 10–13 для $h=10$, уточняя значения всех пределов.

14.1. Создаем копию листа Шаг8, как показано в пп. 2.1–2.4. Задаем имя листа Шаг 9.

14.2. На Листе Шаг 9, меняем значение ячейки C1 на 10.

Задания для самостоятельной работы

Исследуйте с помощью Excel точки разрыва следующих функций:

$$f(x)=\frac{\operatorname{arctg}\left(x^2+x\right)}{x^2+4x+3},$$

$$f(x)=\frac{\ln\left(x^2+3x+1\right)}{\sqrt[5]{\left(x^2+2x-3\right)^6}},$$

$$f(x)=\frac{2^{x+2}-1}{\sqrt{x^2+4x+4}}$$

Исследуйте с помощью Excel наклонные асимптоты следующих функций:

$$f(x)=\sqrt[4]{x^4+5x^3-1},$$

$$f(x)=\frac{x^2\operatorname{arctg}(2x-1)}{x-2}$$

Практикум 5. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ В ЗАДАННОЙ ТОЧКЕ (EXCEL)

Введение

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки a. Тогда *производной* функции $f(x)$ в точке a называется $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Простейшими формулами для приближенного численного вычисления производной являются так называемые *двухточечные* формулы, которые можно получить непосредственно из определения производной: $f'(a)\approx\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, $f'(a)\approx\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$. Такое название связано с тем, что указанные формулы позволяют оценить значение производной в точке по значениям функции в двух точках.

Если зафиксировать функцию и точку a и исследовать зависимость погрешности двухточечной оценки производной от малого шага h, то можно доказать, что погрешность будет пропорциональна величине h.

Более точная оценка получится, если использовать значения функции в трех точках:

$$f'(a) \approx \frac{-f(a+2h)+4f(a+h)-3f(a)}{2h},\ f'(a) \approx \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h},$$

$$f'(a) \approx \frac{3f(a)-4f(a-h)+f(a-2h)}{2h}.$$

Первая из этих формул используется при оценке производной на левой границе промежутка, вторая — во всех внутренних точках промежутка, а третья — на правой границе. Погрешности трехточечных формул пропорциональны h^2.

Еще более точными являются формулы, оценивающие производную по большему количеству точек (4 и более). Однако следует иметь в виду, что увеличение количества участвующих в формуле точек усложняет вычисление по формуле и увеличивает ошибку округления, возникающую при этом вычислении. Потому, хотя и возможно теоретически использовать для оценки производной в данной точке весь массив известных значений функции, но на практике этого никогда не делают.

Другой способ уточнения значения производной — уменьшение шага h. Такой подход представляется более рациональным для функций, заданных аналитическим выражением, но неприменим к функции, заданной таблицей значений.

Задание 1

Вычислить в Excel приближенно производную функцию в заданной точке по следующему алгоритму.

Алгоритм нахождения производной

1. Составим таблицу значений функции $f(x)=\frac{x^2+3x+1}{x^2+2x+2}$ при $x=nh$, где $h=1$, $n=-10,-9,\ldots,10$.

1.1. Вводим в диапазон ячеек A3:A23 рабочего листа Excel числа от -10 до 10 с шагом 1, как показано на рисунке. В ячейку C1 вводим число 1. В ячейку B3 вводим формулу для нахождения значений функции $f(x)=\frac{x^2+3x+1}{x^2+2x+2}$

при $x = nh$, где $h = 1$, $n = -10, -9, \ldots, 10$: =(A3^2+3*A3+1)/(A3^2+2*A3+2)

1.2. Копируем формулу до ячейки B23.

2. В каждой точке $x = nh$ при $n = -10, -9, \ldots, 9$ оценим значение производной по двухточечной формуле $f'(a) \approx$ $\approx \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$. Изобразим соответствующую ломанную.

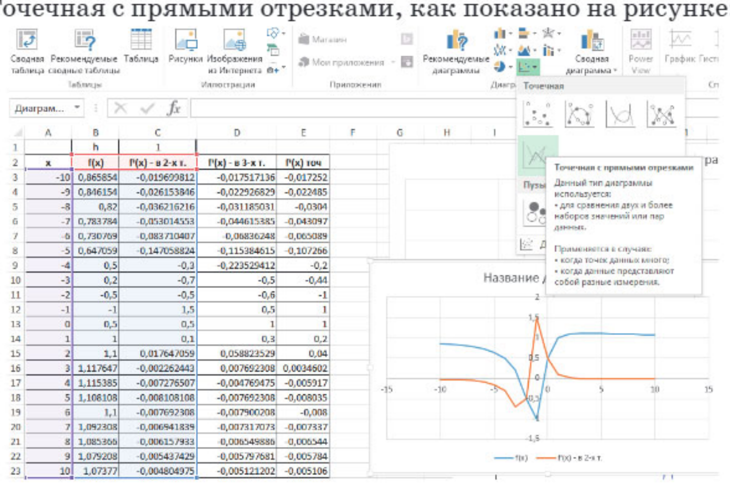
2.1. В ячейку C3 водим формулу:

=(((A3+$C$1)^2+3*(A3+$C$1)+1)/((A3+$C$1)^2+
2*(A3+$C$1)+2)-((A3)^2+3*(A3)+1)/((A3)^2+
2*(A3)+2))/$C$1

2.2. Копируем формулу до ячейки C23.

2.3. Для оформления и построения ломанной в ячейки A2, B2, C2 водим соответственно x, f(x), f'(x) — в 2-х т., как показано на рисунке.

2.4. Выделяем диапазон ячеек A2:C23. Задаем команду ВСТАВКА/ДИАГРАММЫ и выбираем тип диаграммы Точечная с прямыми отрезками, как показано на рисунке:



	A	B	C	D	E
1		h	1		
2	x	f(x)	f'(x) - в 2-х т.	f'(x) - в 3-х т.	f'(x) точ
3	-10	0,865854	-0,019699812	-0,017517136	-0,017252
4	-9	0,846154	-0,026153846	-0,022926829	-0,022485
5	-8	0,82	-0,036216216	-0,031185031	-0,0304
6	-7	0,783784	-0,053014553	-0,044615385	-0,043097
7	-6	0,730769	-0,083710407	-0,06836248	-0,065089
8	-5	0,647059	-0,147058824	-0,115384615	-0,107266
9	-4	0,5	-0,3	-0,223529412	-0,2
10	-3	0,2	-0,7	-0,5	-0,44
11	-2	-0,5	-0,5	-0,6	-1
12	-1	-1	1,5	0,5	1
13	0	0,5	0,5	1	1
14	1	1	0,1	0,3	0,2
15	2	1,1	0,017647059	0,058823529	0,04
16	3	1,117647	-0,002262443	0,007692308	0,0034602
17	4	1,115385	-0,007276507	-0,004769475	-0,005917
18	5	1,108108	-0,008108108	-0,007692308	-0,008035
19	6	1,1	-0,007692308	-0,007900208	-0,008
20	7	1,092308	-0,006941839	-0,007317073	-0,007337
21	8	1,085366	-0,006157933	-0,006549886	-0,006544
22	9	1,079208	-0,005437429	-0,005797681	-0,005784
23	10	1,07377	-0,004804975	-0,005121202	-0,005106

2.5. Нажимаем Ок.

2.6. В результате получится ломанная как показано на рисунке выше.

3. В каждой точке $x = nh$ при $n = -10, -9, \ldots, 10$ оценим значение производной по соответствующей трехточечной формуле. Изобразим ломанную.

3.1. В ячейку D3 водим формулу:

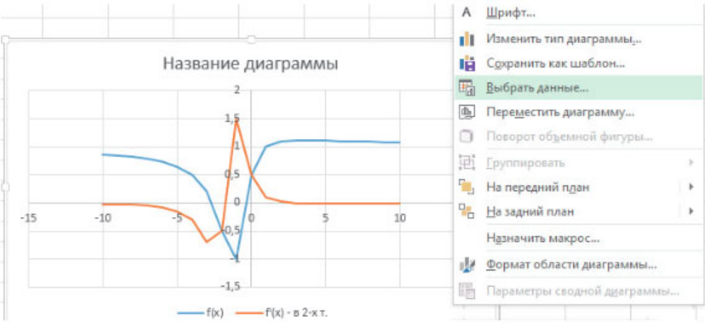
=(((A3+$C$1)^2+3*(A3+$C$1)+1)/((A3+$C$1)^2+2*(A3+$C$1)+2)-((A3-$C$1)^2+3*(A3-$C$1)+1)/((A3-$C$1)^2+2*(A3-$C$1)+2))/(2*$C$1)

3.2. Копируем формулу до ячейки D23.

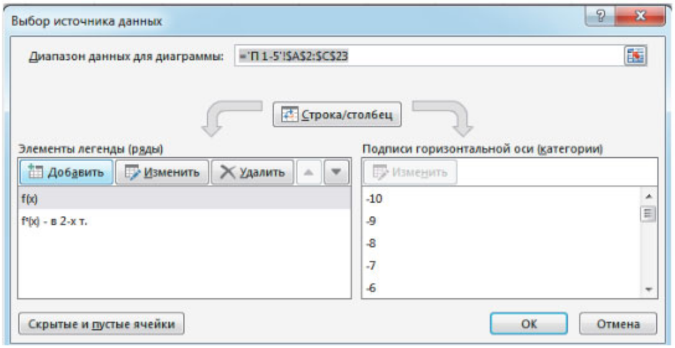
3.3. Для оформления и построения ломанной в ячейку D2 водим f'(x) — в 3-х т., как показано на рисунке.

3.4. Выделяем диаграмму.

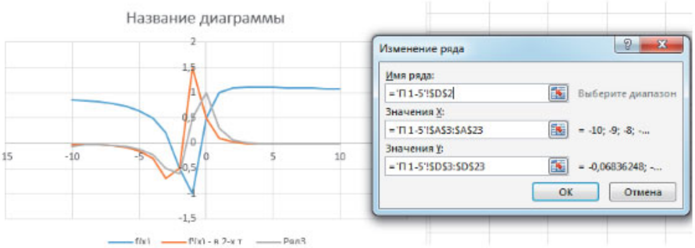
3.5. Из контекстного меню выбираем команду Выбрать данные.



3.6. В окне Выбор источника данных задаем команду Добавить.



3.7. Заполняем окно Изменение ряда как показано на рисунке:



3.8. В результате получиться ломанная как показано на рисунке выше.

4. Составим таблицу точных значений производной $f'(x)=\dfrac{-x^2+2x+4}{\left(x^2+2x+2\right)^2}$ при тех же значениях x.

4.1. В ячейку E3 водим формулу:

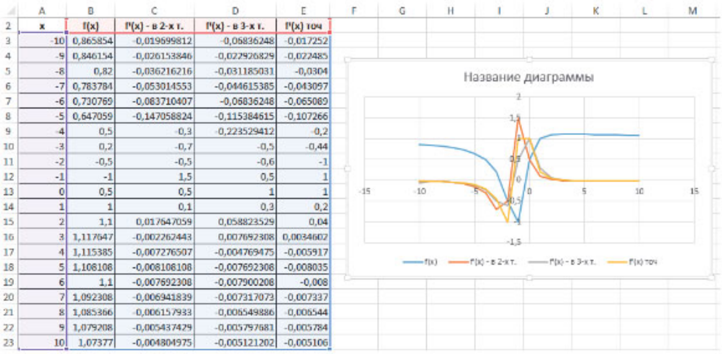
=(-(A3^2)+2*A3+4)/((A3^2+2*A3+2)^2)

4.2. Копируем формулу до ячейки E23.

4.3. Для оформления и построения ломанной в ячейку E2 водим f'(x) точ, как показано на рисунке.

4.4. Как показано в пункте 3 в область диаграммы добавляем новые данные из диапазона E3:E23.

4.5. В результате должна получиться диаграмма как показано на рисунке:



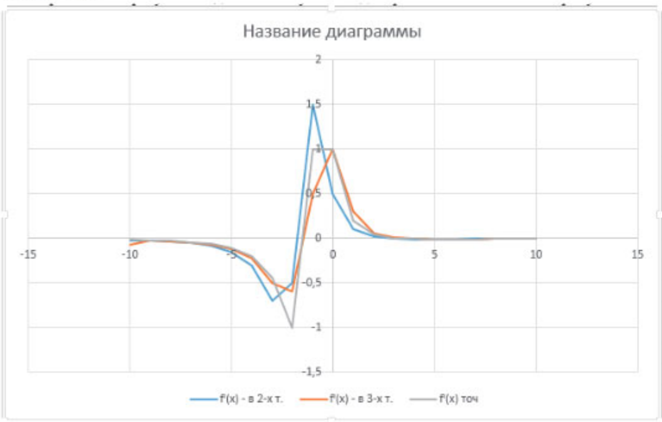
x	f(x)	f'(x) - в 2-х т.	f'(x) - в 3-х т.	f'(x) точ
-10	0,865854	-0,019699812	-0,06836248	-0,017252
-9	0,846154	-0,026153846	-0,022926829	-0,022485
-8	0,82	-0,036216216	-0,031185031	-0,0304
-7	0,783784	-0,053014553	-0,044615385	-0,043097
-6	0,730769	-0,083710407	-0,06836248	-0,065089
-5	0,647059	-0,147058824	-0,115384615	-0,107266
-4	0,5	-0,3	-0,223529412	-0,2
-3	0,2	-0,7	-0,5	-0,44
-2	-0,5	-0,5	-0,6	-1
-1	-1	1,5	0,5	1
0	0,5	0,5	1	1
1	1	0,1	0,3	0,2
2	1,1	0,017647059	0,058823529	0,04
3	1,117647	-0,002262443	0,007692308	0,0034602
4	1,115385	-0,007276507	-0,004769475	-0,005917
5	1,108108	-0,008108108	-0,007692308	-0,008035
6	1,1	-0,007692308	-0,007900208	-0,008
7	1,092308	-0,006941839	-0,007317073	-0,007337
8	1,085366	-0,006157933	-0,006549886	-0,006544
9	1,079208	-0,005437429	-0,005797681	-0,005784
10	1,07377	-0,004804975	-0,005121202	-0,005106

5. Сравним точные значения производной с приближенными, построив три ломанные на одном графике.

5.1. Выделяем диапазон ячеек A2:A23, C2:E23, как показано на рисунке:

A	B	C	D	E
x	f(x)	f'(x) - в 2-х т.	f'(x) - в 3-х т.	f'(x) точ
-10	0,865854	-0,019699812	-0,06836248	-0,017252
-9	0,846154	-0,026153846	-0,022926829	-0,022485
-8	0,82	-0,036216216	-0,031185031	-0,0304
-7	0,783784	-0,053014553	-0,044615385	-0,043097
-6	0,730769	-0,083710407	-0,06836248	-0,065089
-5	0,647059	-0,147058824	-0,115384615	-0,107266
-4	0,5	-0,3	-0,223529412	-0,2
-3	0,2	-0,7	-0,5	-0,44
-2	-0,5	-0,5	-0,6	-1
-1	-1	1,5	0,5	1
0	0,5	0,5	1	1
1	1	0,1	0,3	0,2
2	1,1	0,017647059	0,058823529	0,04
3	1,117647	-0,002262443	0,007692308	0,0034602
4	1,115385	-0,007276507	-0,004769475	-0,005917
5	1,108108	-0,008108108	-0,007692308	-0,008035
6	1,1	-0,007692308	-0,007900208	-0,008
7	1,092308	-0,006941839	-0,007317073	-0,007337
8	1,085366	-0,006157933	-0,006549886	-0,006544
9	1,079208	-0,005437429	-0,005797681	-0,005784
10	1,07377	-0,004804975	-0,005121202	-0,005106

5.2. Задаем команду ВСТАВКА/ДИАГРАММЫ и выбираем тип диаграммы Точечная с прямыми отрезками. В результате должна получиться диаграмма как показано на рисунке:



6. Повторим вычисления пунктов 1–5, взяв величину шага $h = 0.1$.

6.1. Для этого на новом листе рабочей книги оформляем таблицу как показано на рисунке:

	A	B	C	D	E	F
1			h	0,1		
2	x	nh	f'(x)	f'(x) - в 2-х т.	f'(x) - в 3-х т.	f'(x) точ
3	-10	-1	-0,02704	1,188118812	0,99009901	1
4	-9	-0,9	-0,02785	1,50418888	1,346153846	1,362612
5	-8	-0,8	-0,02805	1,711362032	1,607775456	1,627219
6	-7	-0,7	-0,0269	1,803226827	1,75729443	1,775945
7	-6	-0,6	-0,02262	1,793103448	1,798165138	1,813317
8	-5	-0,5	-0,01065	1,705882353	1,749492901	1,76
9	-4	-0,4	0,022624	1,569285432	1,637583893	1,643599
10	-3	-0,3	0,126697	1,407759044	1,488522238	1,490924
11	-2	-0,2	0,520362	1,239725104	1,323742074	1,323617
12	-1	-0,1	1,447964	1,077348066	1,158536585	1,156863
13	0	0	0,927602	0,92760181	1,002474938	1
14	1	0,1	0,452489	0,793709665	0,860655738	0,857886
15	2	0,2	0,266968	0,676458041	0,735083853	0,73233
16	3	0,3	0,180995	0,575203456	0,625830749	0,623264
17	4	0,4	0,134006	0,488565489	0,531884472	0,529584
18	5	0,5	0,105173	0,414866033	0,451715761	0,449704
19	6	0,6	0,085973	0,352387279	0,383626656	0,381896
20	7	0,7	0,072398	0,299510113	0,325948696	0,324476
21	8	0,8	0,062355	0,254778374	0,277144243	0,275899
22	9	0,9	0,054657	0,21691974	0,235849057	0,2348
23	10	1	0,048587	0,184842884	0,200881312	0,2

6.2. В ячейке B3 введена формула:

=A3*$D$1

6.3. В ячейке C3 введена формула:

=(((A3)^2+3*A3+1)/(A3^2+2*A3+2)-($D$1^2+3*$D$1+1)/($D$1^2+2*$D$1+2))/(A3-$D$1)

6.4. В ячейке D3 введена формула:

=(((B3+$D$1)^2+3*(B3+$D$1)+1)/((B3+$D$1)^2+2*(B3+$D$1)+2)-((B3)^2+3*(B3)+1)/((B3)^2+2*(B3)+2))/$D$1

6.5. В ячейке E3 введена формула:

=(((B3+$D$1)^2+3*(B3+$D$1)+1)/

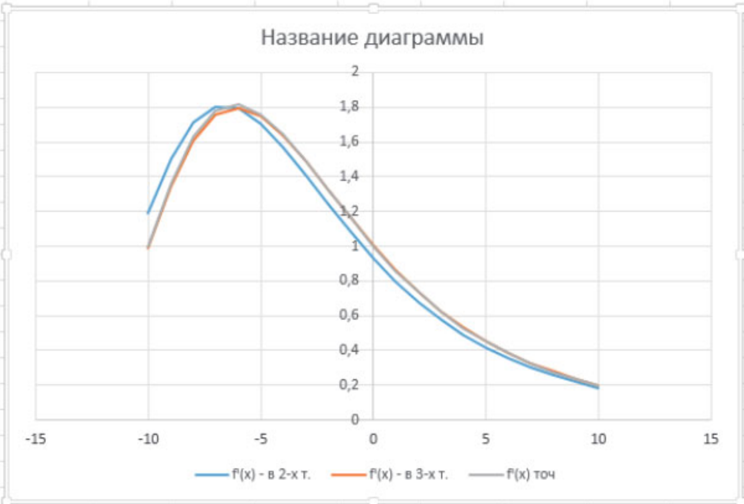
((B3+$D$1)^2+2*(B3+$D$1)+2)-((B3-$D$1)^2+3*(B3-$D$1)+1)/((B3-$D$1)^2+2*(B3-$D$1)+2))/(2*$D$1)

6.6. В ячейке F3 введена формула:

=(-(B3^2)+2*B3+4)/((B3^2+2*B3+2)^2)

6.7. Выделяем диапазон ячеек A2:A23, D2:F23/

6.8. Задаем команду ВСТАВКА/ДИАГРАММЫ и выбираем тип диаграммы Точечная с прямыми отрезками. В результате должна получиться диаграмма как показано на рисунке:



7. Составим таблицу погрешностей двухточечной приближенной формулы, вычисляя разность $f'(0)-\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$ при $h=n\delta$, где $\delta=0.01$, $n=-50,-49,\ldots,-1,1,2,\ldots,50$.

7.1. На новом листе рабочей книги Excel вводим в диапазон ячеек A4:A103 числа от -50, -49,…,-1,1,2,…,50 с шагом 1, как показано на рисунке (начало таблицы):

	A	B	C	D	E
1			0		0,01
2					
3	n	h	2-х точ.	3-х точ.	
4	-50	-0,5	-0,4	-0,04615	
5	-49	-0,49	-0,39275	-0,04496	
6	-48	-0,48	-0,38539	-0,04375	
7	-47	-0,47	-0,37794	-0,04251	
8	-46	-0,46	-0,37039	-0,04124	
9	-45	-0,45	-0,36276	-0,03996	
10	-44	-0,44	-0,35505	-0,03867	
11	-43	-0,43	-0,34727	-0,03736	
12	-42	-0,42	-0,33942	-0,03604	
13	-41	-0,41	-0,3315	-0,03472	
14	-40	-0,4	-0,32353	-0,03339	
15	-39	-0,39	-0,3155	-0,03206	
16	-38	-0,38	-0,30743	-0,03073	
17	-37	-0,37	-0,29931	-0,0294	
18	-36	-0,36	-0,29115	-0,02808	
19	-35	-0,35	-0,28295	-0,02677	
20	-34	-0,34	-0,27473	-0,02547	
21	-33	-0,33	-0,26648	-0,02419	
22	-32	-0,32	-0,25821	-0,02292	
23	-31	-0,31	-0,24992	-0,02167	
24	-30	-0,3	-0,24161	-0,02043	

7.2. В ячейку C1 вводим число 0. В ячейку E1 вводим число 0,01.

7.3. В ячейку B4 вводим формулу:

=A4*$E$1

7.4. В ячейку C4 вводим формулу:

=(-$C$1^2+2*$C$1+4)/(($C$1^2+2*$C$1+2)^2)-((B4^2+3*B4+1)/(B4^2+2*B4+2)-($C$1^2+3*$C$1+1)/($C$1^2+2*$C$1+2))/B4

8. Исследуем зависимость погрешности от *h*, построив график по предыдущей таблице.

8.1. Выделяем диапазон ячеек A3:A103, C3:C103.

8.2. Задаем команду ВСТАВКА/ДИАГРАММЫ и выбираем тип диаграммы Точечная с прямыми отрезками. В результате должна получиться диаграмма как показано на рисунке (см. пункт 9).

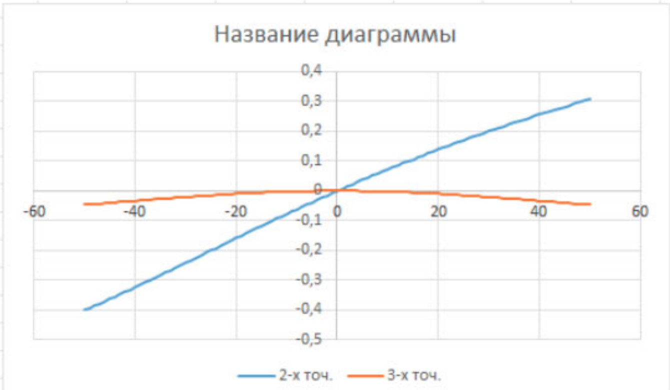
9. Повторим шаги 7–8 для погрешности трехточечной формулы $f'(0)-\dfrac{f(h)-f(-h)}{2h}$.

9.1. В ячейку D4 вводим формулу:

=(-$C$1^2+2*$C$1+4)/(($C$1^2+2*$C$1+2)^2)-((B4^2+3*B4+1)/(B4^2+2*B4+2)-(-B4^2+3*(-B4)+1)/(-B4^2+2*(-B4)+2))/(2*B4)

9.2. Выделяем диапазон ячеек A3:A103, C3:D103.

9.3. Задаем команду ВСТАВКА/ДИАГРАММЫ и выбираем тип диаграммы Точечная с прямыми отрезками. В результате должна получиться диаграмма как показано на рисунке:



Задание 2

Найти первую производную функции $y=4x^2-4x+6$ в точке $x=2$. Заметим, что производная приведенной функции в точке $x=2$, вычисленная аналитическим методом, равна 12 — это значение нам понадобится для проверки результата, полученного путем вычисления численным методом в электронной таблице.

Из вышесказанного известно, что выражение для вычисления производной функции одной переменной в точке x, имеет вид:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

где h — очень малая конечная величина. То есть вместо выражения h можно взять достаточно маленькое число, например, 0,00001.

Примечание. Количество точек после запятой для выражения h зависит от того с какой заданной точностью нужно вычислить производную, если, например, производную нужно вычислить с точностью до 2 знаков после запятой, то достаточно взять h равной 0,0001.

Решение

Решим задачу двумя способами.

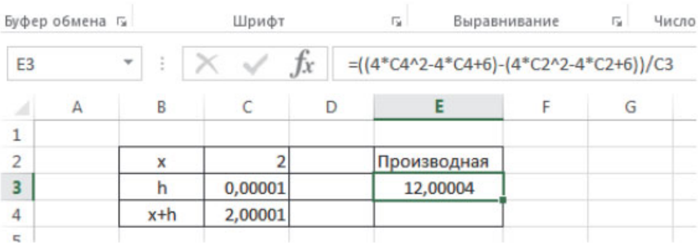
Способ 1

Вводим в ячейку B2 рабочего листа заданное значение аргумента, равное 2, в другой ячейке — B3 укажем достаточно малое приращение аргумента — например 0,00001, в ячейке B4 вычисляем сумму B3=B1+B2.

В ячейку E3 вводим формулу для вычисления производной:

=((4*B4^2−4*B4+6)-(4*B2^2−4*B2+6))/B3.

После нажатия клавиши Enter получаем результат вычисления 12,00004 (см. рис.).



Способ 2

Зададим окрестность точки $x=2$ достаточно малого размера, например, значение слева X_k =1,99999, а значение справа X_{k+1} =2,00001 и введем эти значения в ячейку B3 и B4 соответственно.

Вводим в ячейку рабочего листа формулу правой части заданной функциональной зависимости, например, в ячейку C3, как показано на рис., делая ссылку на ячейку B3, где находится значение x:

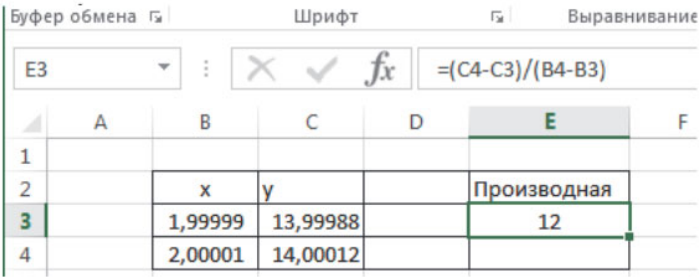
z= 4*B3^2 -4*B3+6.

Копируем эту формулу в ячейку C4.

В ячейку E3 вводим формулу вычисления производной (рис.):

=(C4-C3)/(B4-B3).

В результате вычисления в ячейке E3 будет выведено приближенное значение производной заданной функции в точке $x = 2$, величина которой равна 12, что соответствует результату, полученному аналитически.



Задание 3

Найти первую производную функции $y = \sin^2(1 + \frac{1}{x})$ в точке $x = \frac{3\pi}{14}$.

Из вышесказанного известно, что выражение для вычисления первой производной функции одной переменной в точке x, имеет вид:

$$f^{1}(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

где h — очень малая конечная величина. То есть вместо выражения h можно взять достаточно маленькое число, например, 0,00001.

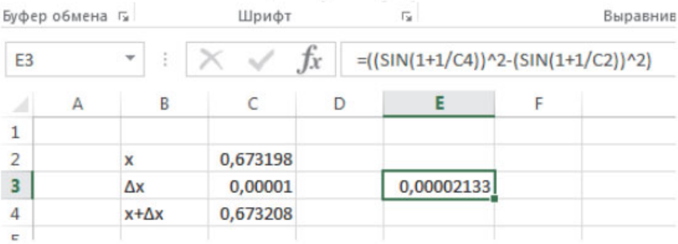
Решение

Вводим в ячейку B2 рабочего листа заданное значение аргумента, равное =3*пи()/4, в другой ячейке — B3 укажем достаточно малое приращение аргумента — например 0,00001, в ячейке B3 вычисляем сумму B3=B1+B2.

В ячейку E3 вводим формулу для вычисления производной:

=((SIN(1+1/C4))^2-(SIN(1+1/C2))^2).

После нажатия клавиши Enter получаем результат вычисления 0,0000213 (см. рис.).



Задание 4

Найти вторую производную функции $y = 4x^3 - 2x^2$ в точке $x = 2$. Заметим, что вторая производная приведенной функции в точке $x = 2$, вычисленная аналитическим методом, равна 40 — это значение нам понадобится для проверки результата, полученного путем вычисления численным методом в электронной таблице.

Из математики известно, что выражение для вычисления второй производной функции одной переменной в точке x, имеет вид:

$$f''(x_0) \approx f_0^{(2)}(x_0, h) = \frac{1}{h^2}(f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)).$$

где h — очень малая конечная величина. То есть вместо выражения h можно взять достаточно маленькое число, например, 0,00001.

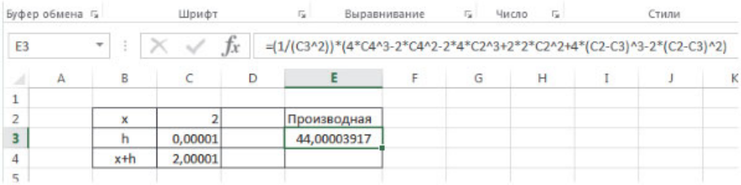
Решение

Вводим в ячейку B2 рабочего листа заданное значение аргумента, равное 2, в другой ячейке — B3 укажем достаточно малое приращение аргумента — например 0,00001, в ячейке B4 вычисляем сумму B3=B1+B2.

В ячейку E3 вводим формулу для вычисления второй производной:

=(1/(C3^2))*(4*C4^3–2*C4^2–2*4*C2^3+2*2*C2^2+
4*(C2-C3)^3–2*(C2-C3)^2).

После нажатия клавиши Enter получаем результат вычисления 44,00003917 (см. рис.).



Производная функции, заданной таблично

В случае таблично заданной функции имеем: дискретному множеству значений аргумента (x_i) поставлено в соответствие множество значений функции (y_i), $y_i = f(x_i), i = 0,1,2,\ldots,n$. Шаг — разность между соседними значениями аргумента, $\Delta x = h$, постоянный.

Производную функции $y_1^{\prime}$ в узле $x = x_1$ можно найти с помощью конечных разностей несколькими способами:

- левые разности: $\Delta y_1 = y_1 - y_0$, $\Delta x = x_1 - x_0 = h$,

$$y_1^{\prime} \approx \frac{y_1 - y_0}{h};$$

- правые разности: $\Delta y_1 = y_2 - y_1$, $\Delta x = x_2 - x_1 = h$,

$$y_1^{\prime} \approx \frac{y_2 - y_1}{h};$$

- центральныеразности: $\Delta y_1 = y_2 - y_0$, $\Delta x = x_2 - x_0 = 2h$,

$$y_1^{\prime} \approx \frac{y_2 - y_0}{2h}.$$

Заметим, что вторая производная будет вычисляться по формуле:

$$y_1'' \approx \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2}.$$

Задание 5. Найти производную функции, заданной таблично. Функция $y = 6x^4 - 4x^2$, где $x = 0,5;1,5;2,5\ldots.$. Найти производную функции в точке $x_2 = 2,5$.

Производную функции заданной таблично, найдем по формуле:

$$y_1' \approx \frac{y_2 - y_0}{2h}.$$

Решение

Вводим в ячейку С3 рабочего листа значение аргумента x_1, равное 1,5, в ячейке — С4 значение аргумента x_2, равное 2,5, в ячейке — С5 значение аргумента x_3, равное 3,5, в ячейке С6 найдем $2h$ по формуле С6=С5-С3.

В ячейку D3 вводим формулу для вычисления значения функции в точке x_1.

=6*C3^4–4*C3^2.

Копируем эту формулу до ячейки D5.

В ячейку D3 вводим формулу для вычисления производной функции в точке x_2.

=(D5-D3)/C6

После нажатия клавиши Enter получаем результат вычисления 415,00.

E4 =(D5-D3)/C6

	A	B	C	D	E	F
1						
2			x	y		
3		x_1	1,5	21,375	**Производная**	
4		x_2	2,5	209,375	415,00	
5		x_3	3,5	851,375		
6		2h	2			

Задания для самостоятельной работы

1. Найти первую производную функции $y = 3\cos^3(x)$ в точке $x = \frac{\pi}{2}$.

2. Найти первую производную функции $y = 2\lg^2(x)$ в точке $x = 10$. Результат вычислить двумя способами.

3. Вычислить первую производную функции $y = \ln^3(x) + 3x^2 - \log_2(x)$ в точке $x = 8$. Результат вычислить двумя способами.

4. Найти вторую производную функции $y = 3\cos^3(x)$ в точке $x = \frac{\pi}{2}$.

5. Найти вторую производную функции $y = 2\lg^2(x)$ в точке $x = 10$.

6. Вычислить вторую производную функции $y = \ln^3(x) + 3x^2 - \log_2(x)$ в точке $x = 8$.

7. Найти производную функции, заданной таблично. Функция $y = 3x^2 + 2x^3$, где $x = 1, 2, 3, \ldots.$. Найти производную функции в точке $x_3 = 4$.

8. Найти производную функции, заданной таблично. Функция $y = 2^x$, где $x = 1, 2, 3, \ldots.$. Найти производную функции в точке $x_2 = 3$.

Практикум 6. КАСАТЕЛЬНАЯ К ГРАФИКУ ФУНКЦИИ (EXCEL)

Введение

Обратимся к задаче о нахождении касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

В качестве примера рассмотрим функцию $f(x) = xe^{-x}$ в точке $x_0 = 0{,}5$. Точное (аналитическое) нахождение уравнения касательной здесь получить совсем нетрудно:

$$f(x_0) = f(0{,}5) = 0{,}5e^{-0{,}5}$$

$$f'(x) = \left(xe^{-x}\right)' = (x)'e^{-x} + x\left(e^{-x}\right)' = e^{-x} + xe^{-x}(-1)$$

$$f'(x) = e^{-x}(1 - x)$$

$$f'(x_0) = f'(0{,}5) = e^{-0{,}5}(1 - 0{,}5)$$

В итоге уравнение искомой прямой принимает вид:

$$y = 0{,}5e^{-0{,}5} + e^{-0{,}5}(1 - 0{,}5)(x - 0{,}5).$$

Раскрывая далее скобки и приводя подобные, окончательно получаем

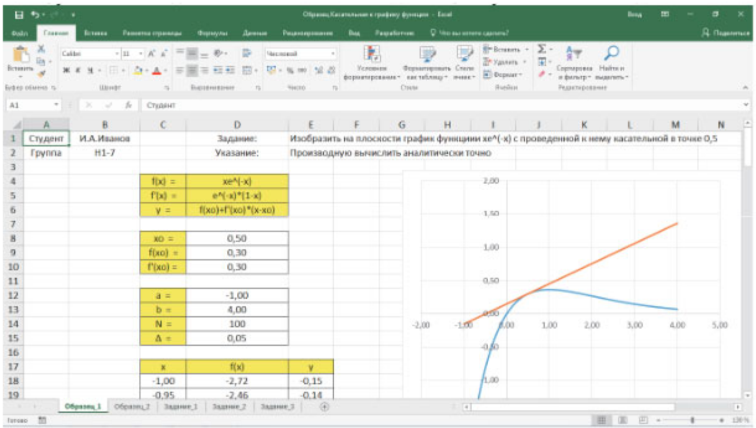
$$y = 0{,}3 + 0{,}3(x - 0{,}5) = 0{,}3x + 0{,}15.$$

Воспользуемся Excel для визуализации смысла касательной.

Задание 1

Построение касательной к графику функции с использованием точного значения производной.

Для этого выберем некоторую окрестность точки $x_0 = 0{,}5$, например, $x \in [-1;4]$, введем в ячейки листа Excel соответствующие значения, по указанным выше формулам вычислим точки на графиках самой функции и ее касательной, вызовем точечную диаграмму с гладкими кривыми и, указав необходимые ссылки на столбцы данных, получим искомый вид.



P.S. Чтобы приблизить рисунок используйте Ctrl + колесико на мышке.

Для детализации действий откройте файл образца в Excel, лист «Образец_1» Образец Касательная к графику функции.xlsx.

Как обычно, желтым фоном подсвечены ячейки с текстовыми пояснениями, которые не вычисляются в Excel, а служат лишь для пояснения запрограммированных далее формул. В первой группе таких «поясняющих» выделенных ячеек C4:D6 мы указали функцию, ее точно вычисленную производную и формулу для вычисления ординаты касательной к графику:

	C	D
4	f(x) =	xe^(-x)
5	f'(x) =	e^(-x)*(1-x)
6	y =	f(xo)+f'(xo)*(x-xo)

Советуем всегда комментировать свои вычисления и раскрашивать такие ячейки для удобства дальнейшего использования.

В следующей группе ячеек C8:D10 указывается значение точки касания x_0 и уже вычисляются значения функции $f(x_0)$ и ее производной $f'(x_0)$ по указанным выше формулам:

	C	D
8	xo =	0,50
9	f(xo) =	0,30
10	f'(xo) =	0,30

или в программном виде:

	C	D
8	xo =	0,50
9	f(xo) =	=D8*EXP(-D8)
10	f'(xo) =	=(1-D8)*EXP(-D8)

(Совершенно случайно значения $f(0,5)$ и $f'(0,5)$ в этом примере в точности совпадают, хотя вычисляются по разным формулам.)

Далее указываем параметры отображения графиков: начало и конец рассматриваемого диапазона $[a,b]$ изменения x, количество N разбиений отрезка для генерации точек графика функции и получившееся приращение аргумента $\Delta = \dfrac{b-a}{N}$:

	C	D
12	a =	-1,00
13	b =	4,00
14	N =	100
15	Δ =	0,05

или в программном виде:

	C	D
12	a =	-1,00
13	b =	4,00
14	N =	100
15	Δ =	=(D13-D12)/D14

Теперь нам остается сгенерировать последовательность значений x, пробегающую весь отрезок от a до b с шагом Δ и вычислить в полученных точках значение функции и касательной (ячейки C18:E118):

	C	D	E
	x	f(x)	y
18	-1,00	-2,72	-0,15
19	-0,95	-2,46	-0,14
...	...	...	...
118	4,00	0,07	1,36

Здесь следует обратить внимание на программирование ячеек x. Первое значение в столбце x, конечно, получается, как ссылка на начало отрезка a, а последующие запрограммированы как ссылка на предыдущее значение x «плюс» шаг Δ:

	C	D	E
	x	f(x)	y
18	=D12	-2,72	-0,15
19	=C18+$D$15	-2,46	-0,14
20	=C19+$D$15	-2,21	-0,12
...	....	...	...

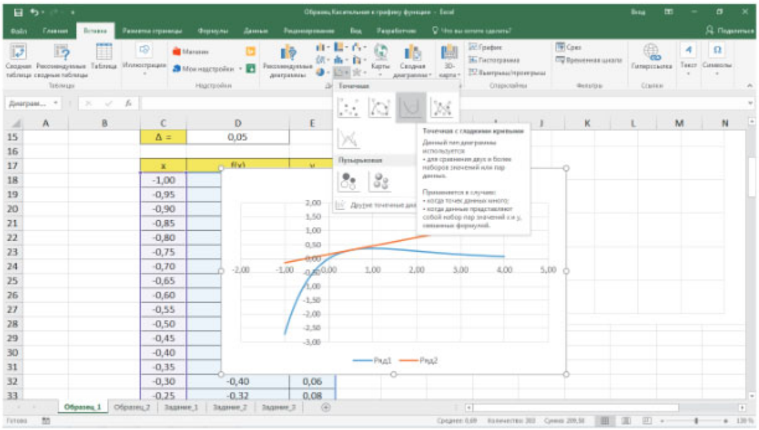
Только не забудьте после ссылки на ячейку D15 (шаг Δ) нажать клавишу *F4* для заморозки значений Δ, чтобы в дальнейшем копирование формул было корректным. Напомним, что для этого нужно растянуть запрограммированную ячейку вниз левой клавишей мыши, указав на специальный крестик, который появится в правом нижнем углу ячейки после наведения на него курсора мыши.

Остальные ячейки значений $f(x)$ и y вычисляются стандартно по указанным в начале формулам:

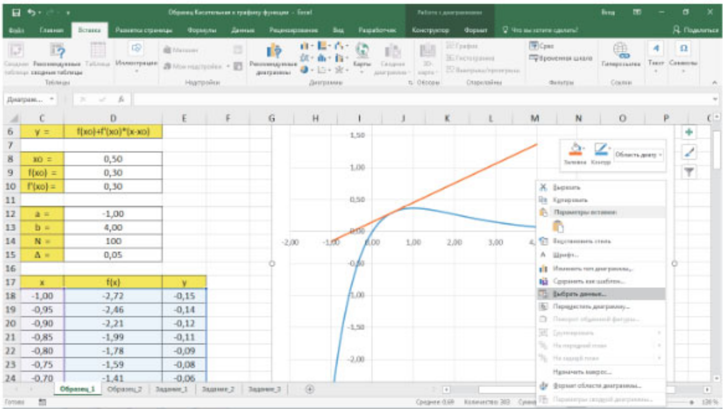
	C	D	E
	x	f(x)	y
18	=D12	=C18*EXP(-C18)	=$D$9+$D$10*(C18-$D$8)
19	=C18+$D$15	=C19*EXP(-C19)	=$D$9+$D$10*(C19-$D$8)
...	....	...	...

И также не забываем с помощью клавиши *F4* фиксировать значения в ячейках $f(x_0)$ и $f'(x_0)$ при вычислении ординаты касательной y.

Остается последний шаг — вызвать соответствующую диаграмму для построения графиков функции и касательной. Для этого выделяем левой клавишей мыши весь числовой диапазон последних трех столбцов данных и выбираем в меню Вставка -> Диаграммы -> Точечные -> Точечная с гладкими кривыми:



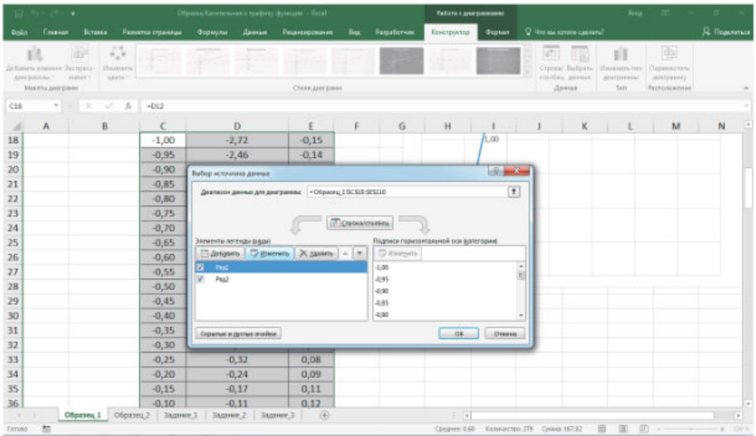
Мы почти у цели. Остается переименовать названия подписей. Это делается следующим образом: выделяем диаграмму с графиками, указав на свободное (пустое, не занятое графиками) место на диаграмме, далее щелкаем правой кнопкой мыши и выбираем пункт «Выбрать данные...»:



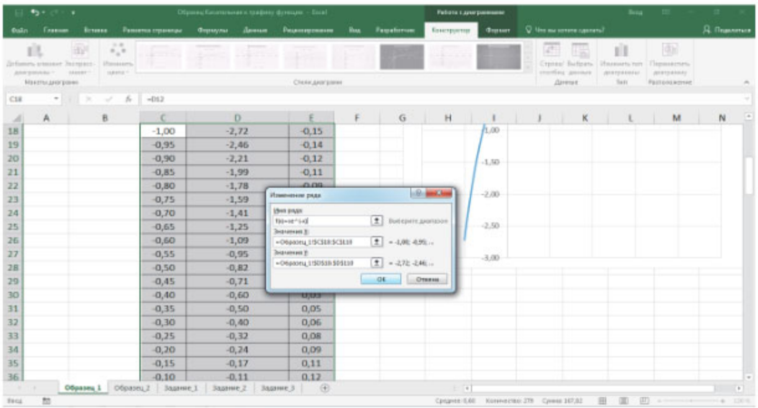
Если промахнуться и курсором мыши случайно указать не на пустое поле диаграммы, а, скажем, на линию сетки или область подписи легенды диаграммы, то по правой клавише мыши выскочит соответственно другое меню.

Обратите внимание также, что по нажатию правого верхнего крестика над диаграммой мы попадаем в меню визуальных настроек диаграммы, где указывается: отображать ли различные текстовые пояснения.

После вызова пункта «Выбрать данные...» получаем диалоговое окно, в котором можем выбирать для изменения, ввода или удаления различные данные:



и редактировать как сами диапазоны данных, так и подписи к ним:



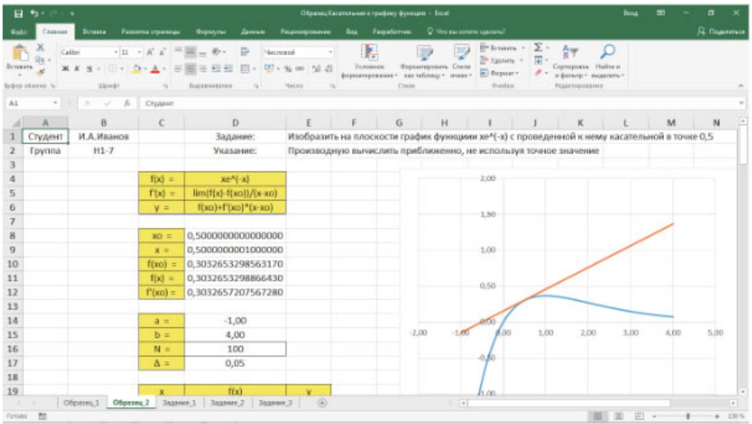
Задание 2

Построение касательной к графику функции с использованием приближенного значения производной.

На практике существуют случаи, когда точное вычисление производной невозможно или неактуально с вычислительной точки зрения. К первому типу ситуаций относятся случаи, когда значение функции не задано аналитически, а информация о значениях самой функции известна до определенного значения аргумента (часто до определенного момента времени), например, когда речь идет о новых процессах, которые эволюционируют в настоящее время. Ко второму случаю неактуальности аналитических расчетов производной относятся громоздкие сложные функции, которые рутинно программировать в борьбе за совершенно микроскопическое увеличение точности.

Откроем файл образца в Excel, лист «Образец_2» Образец Касательная к графику функции.xlsx.

Мы видим практически повтор предыдущих рассуждений с разницей лишь в том, как вычисляется производная функции $f'(x)$:



Здесь нет никакого точного (аналитического) вычисление производной. Вместо этого указано определение производной:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

которое при очень близких друг к другу значениях x и x_0 заменяется на приближенное равенство

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

	C	D
4	f(x) =	xe^(-x)
5	f'(x) ~	(f(x)-f(xo))/(x-xo)
6	y =	f(xo)+f'(xo)*(x-xo)

Таким образом, для того, чтобы в последующих ячейках вычислить значение производной $f'(x_0)$ необходимо задать помимо числа x_0 еще и близкое к нему значение x. Например, пусть $x = x_0 + \underbrace{0,0000000001}_{10\ разрядов}$.

В итоге перепрограммирования вычисления производной функции получим:

	C	D
8	xo =	0,5000000000000000
9	x =	0,5000000001000000
10	f(xo) =	0,3032653298563170
11	f(x) =	0,3032653298866430
12	f'(xo) =	0,3032657207567280

или в Excel-коде:

	C	D
8	xo =	0,5000000000000000
9	x =	=D8+0,0000000001
10	f(xo) =	=D8*EXP(-D8)
11	f(x) =	=D9*EXP(-D9)
12	f'(xo) =	=(D11-D10)/(D9-D8)

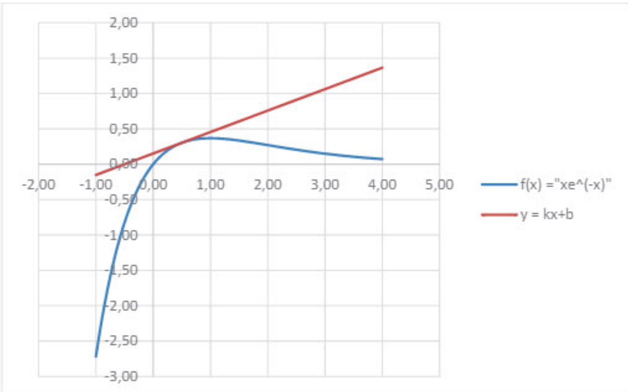
Можем сравнить с точным значением производной в предыдущем задании, указав в форматах ячеек с производными одинаковую точность в 16 знаков (*делается по правой клавише мыши в пункте формат ячеек...*):

Точная $f'(x_0) = 0{,}3032653298563170$

Приближенная $f'(x_0) = 0{,}3032657207567280$

(разница порядка четырех десятимиллионных).

Далее все следует в точности рассмотренному выше примеру. В итоге получаем ничем не отличающуюся картинку:



Замечание. В случаях на практике, когда требуется вычислить приближенно значение производной функции, для которой неизвестны последующие значения (речь идет о прогнозе), вычисление близкого к следует производить по формуле:

$$x = x_0 - \underbrace{0{,}0000000001}_{10\ \text{разрядов}}.$$

Также в заключении отметим, что при использовании приближенных значений производной нужно «посматривать» на гладкость и регулярность функции. В случаях негладкого и/или сингулярного (разрывного, скачкообразного, неограниченного и пр.) поведения функции производную следует вычислять аналитически.

Задания для самостоятельной работы

1. Изобразить на плоскости график функции $x^3 - 3x^2 + x - 8$ с проведенной к нему касательной в точке 1,5. Указание: производную функции вычислить аналитически точно, в качестве окрестности точки 1,5 выбрать отрезок $[-1;4]$.

2. Изобразить на плоскости график функции x^x с проведенной к нему касательной в точке 2. Указание: производную функции вычислить приближенно, в качестве окрестности точки 2 выбрать отрезок $[0,1;3]$.

3. Сколько раз касательная к графику функции $x^2 + 8\sin x - 10$, проведенная в точке 2, пересекает весь ее график?

4. ** Сравнить результаты предыдущих примеров №1–3 при использовании точных и приближенных значений производных функции.

Практикум 7. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ЧЕРЕЗ РАЗЛОЖЕНИЕ ПО ФОРМУЛЕ ТЕЙЛОРА/МАКЛОРЕНА

Введение

Из курса математического анализа известно, что если функция $f(x)$ имеет $(n+1)$ производную в некоторой окрестности точки $x=a$, то в этой (или несколько меньшей) окрестности имеет место формула Тейлора с центром разложения $x=a$:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_{n+1}(x), \quad (1)$$

где $R_{n+1}(x)$ — остаточный член, практически всегда стремящийся к нулю с ростом n.

В частном случае при $a=0$ формула (1) называется формулой Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_{n+1}(x) \qquad (2)$$

Правая часть разложения (2) является многочленом (полиномом) n-ой степени

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n ,$$

который, если отбросить остаточный член, приближает (аппроксимирует) исходную функцию $f(x)$ в окрестности нуля:

$$f(x) \approx P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n . \quad (3)$$

Замечание. Если мы оставим в разложении (1) только слагаемые до первой производной включительно, то фактически получим приближение функции ее касательной, построение которой мы рассматривали в предыдущей части:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) .$$

Пример

Рассмотрим функцию Ее производные в нуле дают следующие результаты:

$$f^{(1)}(x) = \cos(x) \Rightarrow f^{(1)}(0) = 1;$$
$$f^{(2)}(x) = -\sin(x) \Rightarrow f^{(2)}(0) = 0;$$
$$f^{(3)}(x) = -\cos(x) \Rightarrow f^{(3)}(0) = -1;$$
$$f^{(4)}(x) = \sin(x) \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0 .$$

Далее производные повторяются в своих значениях по кругу.

Отсюда следует, что при $x=0$ производные четного порядка равны нулю, а производные нечетного порядка чередуют знак с плюса на минус.

По формуле (3) составим приближенное равенство:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\,!} .$$

Приблизим в окрестности нуля многочленом 1-й степени , т.е. рассмотрим $\sin x \approx x$

Создадим книгу MS Excel «Маклорен», и на отдельном листе (назовем его «Линейная») заполним три столбца. Первый из них — это значения аргумента (скажем, с шагом 0,1 на интервале [-2,2]), второй столбец — это соответствующие значения функции «синус», вычисляемые посредством встроенной функции MS Excel “SIN”, а третий столбец — соответствующие значения тождественной линейной функции $f(x)=x$. Введя формулу в ячейку верхнего ряда, растягиваем значения по столбцу вниз, тем самым быстро заполняя все ячейки столбца (техника «drag and drop», т.е. «потяни и отпусти» — одна из фундаментальных и очень полезных особенностей MS Excel). Выделив все три столбца и применив *ВСТАВКА->ДИАГРАММА->ТОЧЕЧНАЯ С ГЛАДКИМИ КРИВЫМИ*, получим изображение двух графиков в одних и тех же осях: синим цветом $y=sin(x)$ и оранжевым цветом . Видим, что графики сильно различаются, т.е. аппроксимацию назвать хорошей нельзя (рис. 40).

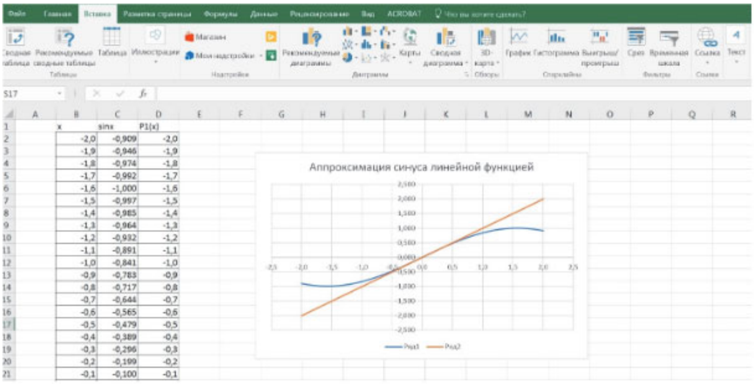


Рис. 40. Аппроксимация синуса линейной функцией

Теперь будем аппроксимировать $\sin x$ в окрестности нуля кубическим многочленом $P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$$

Создав в этом же файле новый лист «Кубическая» и выполнив действия по той же схеме, что и в листе «Линейная», приходим к рис. 41.

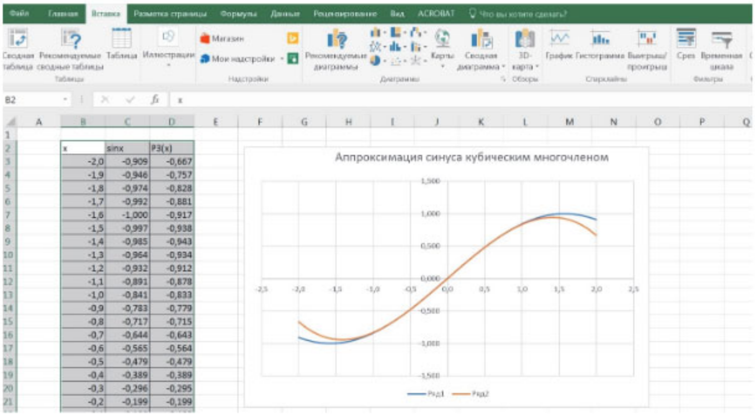


Рис. 41. Аппроксимация синуса кубическим многочленом

Наблюдаем, что аппроксимация теперь значительно лучше, функции заметно разнятся лишь в концах интервала.

Наконец, приблизим $\sin x$ в окрестности нуля многочленом пятой степени $P_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$. Создав новый лист «Пятой степени» и выполнив действия аналогично тому, что делалось в предыдущих листах, приходим к результату, изображенному на рис. 42.

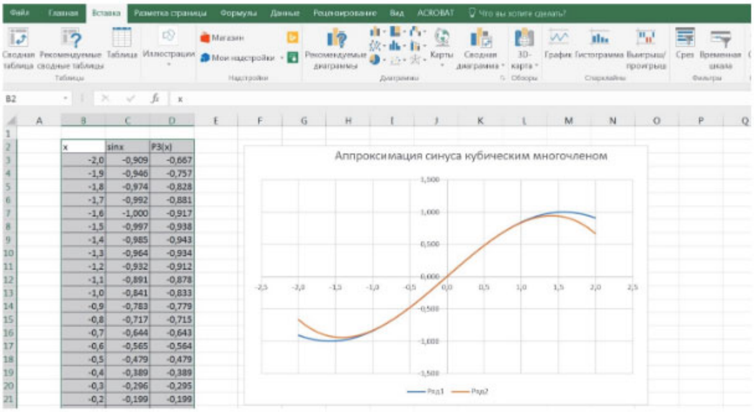


Рис. 42. Аппроксимация синуса многочленом пятой степени

Теперь видим, что аппроксимация — хорошая, в выбранной окрестности нуля функции почти совпадают (едва различаются лишь на концах интервала).

Задания для самостоятельной работы

1. Разложить по формуле Маклорена функцию $f(x)=e^{-x}$. В MS Excel аппроксимировать эту функцию частичными суммами ряда Маклорена — многочленами 1-й, 2-й, 3-й, 4-й и 5-й степени. Рассмотреть интервалы $[-1;1]$ и $[-3;3]$ и шаги 0,1 и 0,03. На каких интервалах и шагах погрешность аппроксимации визуально наблюдается лучше всего?

2. Разложить по формуле Маклорена функцию $f(x)=\ln(1+x)$. В MS Excel аппроксимировать эту функцию частичными суммами ряда Маклорена — многочленами 1-й, 2-й, 3-й, 4-й и 5-й степени. Рассмотреть интервал $[-0,5;0,5]$ и шаги 0,05 и 0,01. Какова область сходимости этого ряда?

3. Разложить по формуле Маклорена функцию $f(x)=\cos(x)$. В MS Excel аппроксимировать эту функцию частичными суммами ряда Маклорена — многочленами

2-й, 4-й, и 6-й степени. Рассмотреть интервал $[-4;4]$ и шаги 0,04 и 0,01. Какова область сходимости этого ряда?

4. Вычислить значение числа e, разложив функцию e^x по формуле Маклорена до 20-го порядка и подставив в нее точку $x = 1$. Сравнить результат с Excel-функцией «EXP» или обычным калькулятором.

6. Построить график синуса на нескольких периодах, например, на отрезке $\left[0;6\pi\right]$. Какую степень многочлена Тейлора $P_n\left(x\right)$ следует взять, чтобы $\sin x$ хорошо приближался на всем выбранном диапазоне $\left[0,6\pi\right]$?

Практикум 8. МОНОТОННОСТЬ И ПОИСК ЛОКАЛЬНЫХ ЭКСТРЕМУМОВ ФУНКЦИЙ (EXCEL)

Введение

Возрастающие, невозрастающие, убывающие и неубывающие функции на множестве D называются монотонными на этом множестве, а возрастающие и убывающие — строго монотонными. Интервалы, в которых функция монотонна, называются интервалами монотонности.

Необходимые условия возрастания (убывания) функции. Если дифференцируемая на интервале $(a;b)$ функция $f(x)$ возрастает (убывает), то $f(x) \geq 0$ $(f(x) \leq 0)$ для любого $x \in (a;b)$.

Достаточные условия возрастания (убывания) функции. Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ для любого $x \in (a;b)$, то эта функция возрастает (убывает) на интервале $(a;b)$.

Пример. Исследовать функцию $f(x) = x^3 - 3x - 4$ на монотонность.

Решение. Функция определена на всей действительной оси: $x \in (-\infty; +\infty)$. Найдем производную функции: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$; $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in (-1; 1)$.

Ответ: функция возрастает на интервалах $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ и убывает на интервале $(-1;1)$.

Точка x_0 из области определения функции $f(x)$ называется точкой минимума (максимума) этой функции, если найдется такая δ-окрестность $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ точки x_0, что для всех $x\neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x)>f(x_0)$ $\left(f(x)<f(x_0)\right)$.

Точки минимума и максимума называются точками экстремума, а значения функции в этих точках называются экстремумами функции.

Понятие экстремума всегда связано с определенной окрестностью точки из области определения функции. Поэтому функция может иметь экстремум лишь во внутренних точках области определения. Если у функции несколько экстремумов, то их называют локальными.

Необходимое условие экстремума. Если дифференцируемая функция $y=f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то ее производная в этой точке равна нулю: $f'(x_0)=0$.

Геометрически равенство $f'(x_0)=0$ означает, что в точке экстремума дифференцируемой функции $y=f(x)$ касательная к ее графику параллельна оси Ox.

Однако обратное неверно, то есть если $f'(x_0)=0$, то это не значит, что x_0 — точка экстремума. Например, для функции $y=x^3$ ее производная $y'=3x^2$ равна нулю при $x=0$, но $x=0$ не точка экстремума (в этом можно убедиться по графику функции).

Существуют функции, которые в точках экстремума не имеют производной. Например, непрерывная функция $y=|x|$ в точке $x=0$ производной не имеет, но точка $x=0$ — точка минимума (также можно убедиться по графику функции).

Таким образом, непрерывная функция может иметь экстремум лишь в точках, где производная функции равна нулю или не существует. Такие точки называются критическими.

Достаточное условие экстремума. Если непрерывная функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой δ-окрестности критической точки x_0 и при переходе через нее (слева направо) производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума; с минуса на плюс, то x_0 — точка минимума.

Исследовать функцию на экстремум означает найти все ее экстремумы. Правило исследования функции на экстремум:

- Найти критические точки функции $y = f(x)$;
- Выбрать из них лишь те, которые являются внутренними точками области определения функции;
- Исследовать знак производной $f(x)$ слева и справа от каждой из выбранных критических точек;
- В соответствии с достаточным условием экстремума выписать точки экстремума (если они есть) и вычислить значения функции в них.

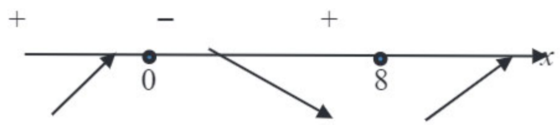
Пример. Найти экстремум функции $y = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x^2}$.

Решение. Очевидно, $D(y) = \boldsymbol{R}$.

Находим производную функции

$$y' = \frac{1}{3} - \frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x}}.$$

Производная не существует при $x_1 = 0$ и равна нулю при $x_2 = 8$. Эти точки разбивают всю область определения на три интервала $(-\infty;0),(0;8),(8;+\infty)$. Отметим знаки производной слева и справа от каждой из критических точек:



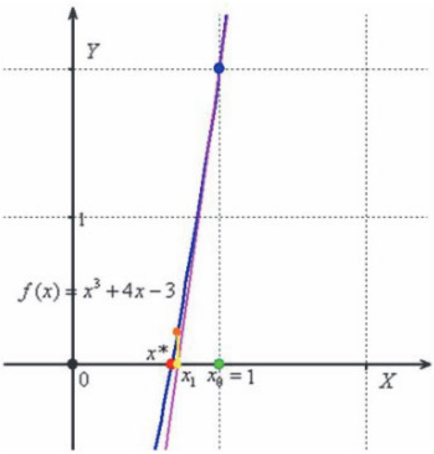
Следовательно, $x_1 = 0$ — точка максимума, $y_{max} = y(0) = 0$ и $x_2 = 8$ — точка минимума, $y_{min} = y(8) = -\frac{4}{3}$.

Иногда бывает удобным использовать другой достаточный признак существования экстремума, основанный на определении знака второй производной.

Второе достаточное условие экстремума. Если в точке x_0 первая производная функции $f(x)$ равна нулю ($f'(x_0)=0$), а вторая производная в точке x_0 существует и отлична от нуля $(f''(x_0)\neq 0)$, то при $f''(x_0)<0$ в точке x_0 функция имеет максимум и минимум — при $f''(x_0)>0$.

Одним из более эффективных способов нахождения приближенного значения корня является метод касательных. Рассмотрим применение этого метода на примере: с помощью графического метода найти промежуток $[a;b]$, на котором находится действительный корень x^* уравнения $x^3+4x-3=0$. Пользуясь методом Ньютона, получить приближенное значение корня с точностью до 0,001.

Краткая геометрическая суть метода состоит в следующем: сначала с помощью специального критерия выбирается один из концов отрезка. Этот конец называют *начальным* приближением корня, в нашем примере: $x_0=1$. Теперь проводим касательную к графику функции $f(x)=x^3+4x-3$ в точке с абсциссой $x_0=1$ (*синяя точка и фиолетовая касательная*):



Данная касательная пересекла ось абсцисс в желтой точке, и обратите внимание, что на первом шаге мы уже почти «попали в корень»! Это будет *первое* приближение корня x_1 . Далее опускаем желтый перпендикуляр к графику функции и «попадаем» в оранжевую точку. Через оранжевую точку снова проводим касательную, которая пересечет ось еще ближе к корню! И так далее. Нетрудно понять, что, используя метод касательных, мы довольно быстро приближаемся к цели, и для достижения точности $\varepsilon = 0{,}001$ потребуется буквально несколько итераций.

Решение. На первом шаге следует отделить корень графически. Это можно сделать путем построения графика $f(x) = x^3 + 4x - 3$.

Итак, искомый корень принадлежит отрезку $[0;1]$ и примерно равен 0,65–0,7.

На втором шаге нужно выбрать *начальное приближение* x_0 корня. Обычно это один из концов отрезка. Начальное приближение должно удовлетворять следующему условию:

$$f(x_0) f''(x_0) > 0 .$$

Найдем первую и вторую производные функции $f(x) = x^3 + 4x - 3$:

$$f'(x) = \left(x^3 + 4x - 3\right)' = 3x^2 + 4$$

$$f''(x) = \left(3x^2 + 4\right)' = 6x$$

В качестве начального приближения выбираем $x_0 = 1$.

На третьем шаге нас ожидает дорога к корню. Каждое последующее приближение корня x_{n+1} рассчитывается на основании предшествующих данных с помощью следующей *рекуррентной* формулы:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Процесс завершается при выполнении условия $\left|\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right| < \varepsilon$, где ε – заранее заданная точность вычислений.

В результате за приближенное значение корня принимается «энное» приближение: $x^* \approx x_n$.

На практике результаты вычислений удобно заносить в таблицу, при этом, чтобы несколько сократить запись, дробь часто обозначают через $h_n = \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$h_n = \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1	2	7	0,28571
1	0,71429	0,22157	5,53061	0,04006
2	0,67422	0,00338	5,36373	0,00063

Сами же вычисления проводим в Excel – это намного удобнее и быстрее.

Выполнение работы

Определение областей возрастания и убывания функции. Исследование функции на локальный экстремум. Критические точки.

Задача 1

Найти точки локальных экстремумов и области возрастания и убывания функции $y = x e^{-x^2}$

Решение:

Производная функции:

$$y' = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = \left(1 - 2x^2\right) e^{-x^2} .$$

$$y' = 0 \ \text{при}\ x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \approx \pm 0{,}707.$$

Построим на листе Excel график функции и ее производной.

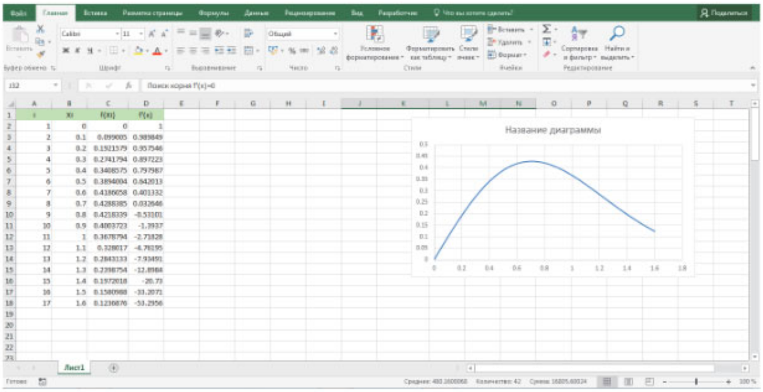


Рис. 43. Построение графика функции.

Из графика видно, что $x = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$ — точка максимума. Т. к., данная функция — нечетная, то $x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0{,}707$ — точка минимума.

Следовательно, интервал возрастания функции $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, интервалы убывания функции $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$.

Ниже рассмотрим два способа более точного определения значений точек экстремума.

1-й способ.

Из приведенного выше рисунка 43 видно, что точка максимума расположена между 0.7 и 0.8. Отметим диапазон B10:D19 и сдвинем его вниз на 10 строк, теперь на освободившемся пространстве в столбце B зададим значения x с шагом 0.01 и вычислим в столбцах C и D значения функции и ее производной. Поступая так же еще необходимое число раз, определим значений точки экстремума с требуемой точностью.

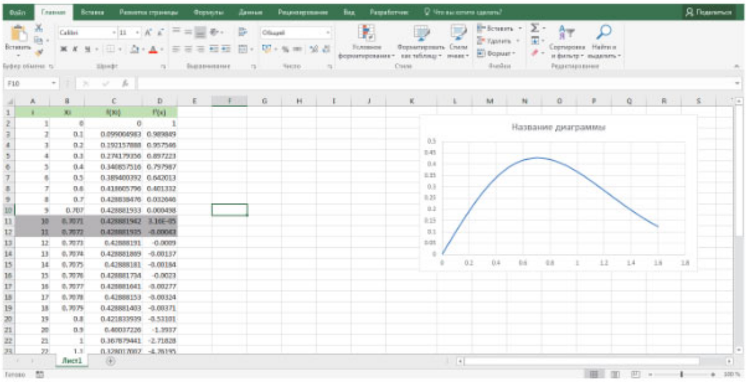


Рис. 44. Определение точек экстремума

2-й способ.

Использование метода Ньютона (метода касательных) решения уравнений позволяет решить такую задачу.

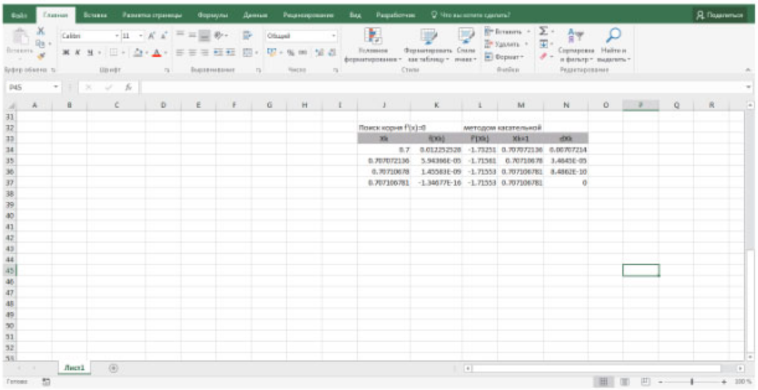


Рис. 45. Метод касательных для определения корня производной

Требуется найти корень производной данной функции $f'(x)=0$, $x=0.7$ — начальное приближение, тогда в результате итерационного процесса находятся последующие приближения по формуле

$$x_{k+1}=x_k-f'(x_k)/\ f''(x_k)$$

Условие окончания процесса $|x_{k+1} - x_k| = 0$ с компьютерной точностью.

В ячейке J34 располагается начальное приближение x_k , в ячейке K34 — вычисленное значение $f'(x_k)$, в ячейке L34 — значение $f''(x_k)$, в ячейке M34 — значение $x_{k+1} = x_k - f'(x_k)/f''(x_k)$, в ячейке N34 — значение $|x_{k+1} - x_k|$, в ячейку J35 копируется значение x_{k+1} для выполнения следующей итерации. Процесс завершается по условию: значение в ячейке N34 равно 0. В данной задаче $x = 0.707106781$.

3-й способ.

Эту задачу можно решить, используя средство Excel «Подбор параметра».

Для этого следует выполнить следующие действия.

1. Расположить в первой ячейке начальное приближенное значение $x = x_0$.

2. Во второй ячейке поместить формулу, вычисляющую значение $f(x_0)$.

3. Набрать: ДАННЫЕ → Анализ «Что если» → Подбор параметра

4. Задать значения аргументов

Установить в ячейке: Адрес второй ячейки

Значение: 0

Изменяя значение ячейки: Адрес первой ячейки.

Рассмотрим использование указанного средства на примере данной задачи.

Требуется найти корень уравнения $(1 - 2x^2)e^{-x^2} = 0$, при условии, что начальное приближение $x = 0.7$.

В ячейку B31 помещаем значение 0,7, в ячейке B32 вычисляем соответствующее значение $(1 - 2x^2)e^{-x^2}$. Затем обращаемся к процедуре «Подбор параметра», как показано выше.

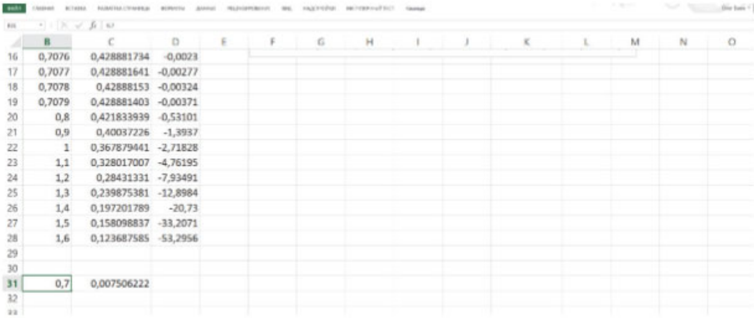
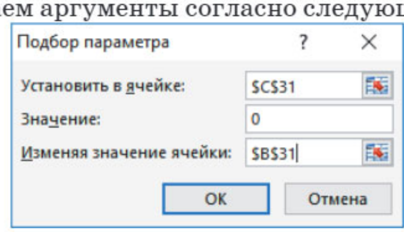


Рис. 46. Метод «Подбор параметров» для определения корня производной

Указываем аргументы согласно следующему кадру:



Результат будет представлен в указанных ячейках как представлено на рис. 47.

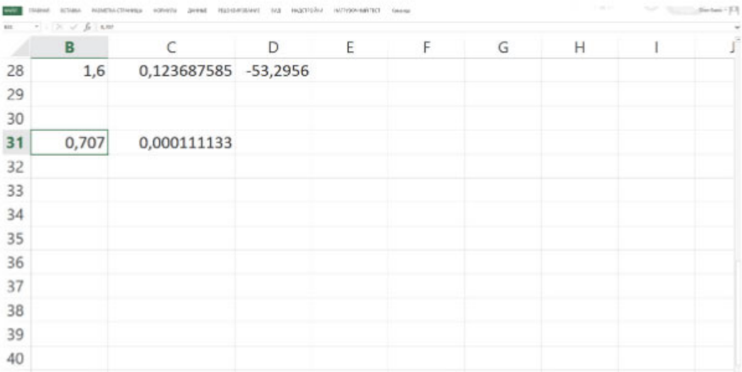


Рис. 47. Результат метода «Подбор параметров»

Следует отметить, что процедура «Подбор параметра» позволяет вычислить подбираемое значение с точностью порядка 0,001. Поэтому, если необходимо получить значение с более высокой точностью, следует использовать метод Ньютона.

Задача 2

Найти точки локальных экстремумов и области возрастания и убывания функции $y = x \ln x$.

Решение:

Для функции $y = x \ln x$ областью определения являются $x > 0$. Вычислим таблицу значений при $x = 0{,}01 + nh$, где $h = 0.05$, $n = 0, 1, 2, \ldots, 32$.

1. Вводим в диапазон ячеек A2:A34 рабочего листа Excel числа $1, 2, \ldots, 33$. В ячейку B2 вводим число 0,01. В ячейку B3 вводим формулу B2+0,05. Копируем формулу до ячейки B34.

2. В ячейку C2 вводим формулу =B2*LN(B2). Копируем формулу до ячейки C34.

3. Выделяем диапазон ячеек B2:C34. Задаем команду ВСТАВКА/ДИАГРАММЫ и выбираем тип диаграммы Точечная, как показано на рисунке.

Построим на листе Excel график функции и ее производной.

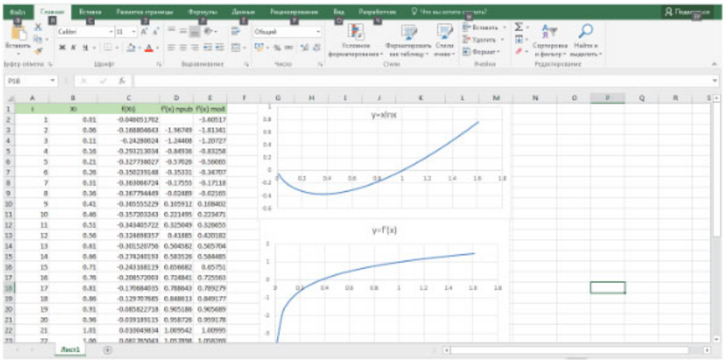


Рис. 48. Построение графика функции и ее производной

Следовательно, интервал возрастания функции $(\frac{1}{e}, +\infty)$, интервал убывания функции $(0; \frac{1}{e})$.

Точка минимума функции $x = 0.367879441$

Задача 3

Найти точки локальных экстремумов и области возрастания и убывания функции $y = \sqrt[3]{x^2}$.

Построим на листе Excel график функции и ее производной.

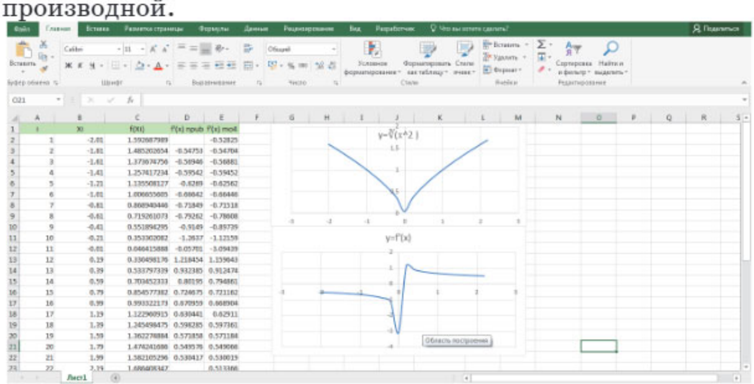


Рис. 49. Построение графика функции и ее производной

Задача 4

Исследование функции $f(x) = |cosx|$ на локальный экстремум.

Найти точки локальных экстремумов и области возрастания и убывания функции $y = |cosx|$.

Решение:

Данная функция четная и периодическая с периодом равным π. Следовательно, ее достаточно исследовать на отрезке длиной, равной половине периода.

Используя определение модуля, можно получить другое представление функции:

$$f(x)=\begin{cases} cosx, при\, cosx \geq 0, \\ -cosx, при\; cosx < 0. \end{cases}$$

Следовательно, производная этой функции определяется следующим образом

$$f'(x)=\begin{cases} -sinx, при\, cosx \geq 0, \\ sinx, при\; cosx < 0, \end{cases}$$

или

$$f'(x) = -sgn(cosx)sinx.$$

Из последней формулы следует, что производная $f'(x)$ обращается в 0 в точках $\pi n, n \in N$. Причем в каждой из указанных точек производная меняет знак с плюса на минус, значит указанные точки являются точками максимума, в которых функция достигает значений равных 1.

Кроме того, в точках $\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n \in N$ производная имеет точки разрыва 1-го рода, в которых ее значение меняется с −1 до 1 (скачки производной), таким образом, в указанных точках функция достигает минимумов, равных 0. Эти точки являются угловыми точками.

Используя Excel, эту задачу можно решить следующим образом.

На листе Excel зададим таблицу значений функции и ее производной на отрезке [*-1.8; 3.20*], содержащем период этой функции. Пусть при этом значения аргумента *x* возрастают с шагом $\Delta = 0.02$. При этом в диапазоне B9:B259 располагаем указанные значения аргумента, в диапазоне C9:C259 вычисляем соответствующие значения функции с помощью формулы ABS(COS(B9)) с последующим продолжением на остальные ячейки диапазона, в диапазоне D9:B259 — соответствующие значения функции $cosx$, в диапазоне E9:E259 — соответствующие значения функции $sinx$, в диапазоне F9:F259 вычисляем соответствующие значения производной функции с помощью формулы

ЕСЛИ(COS(B9)<0, SIN(B9), — SIN(B9)) последующим продолжением на остальные ячейки диапазона. После этого строим графики функции и ее производной (рис. 50).

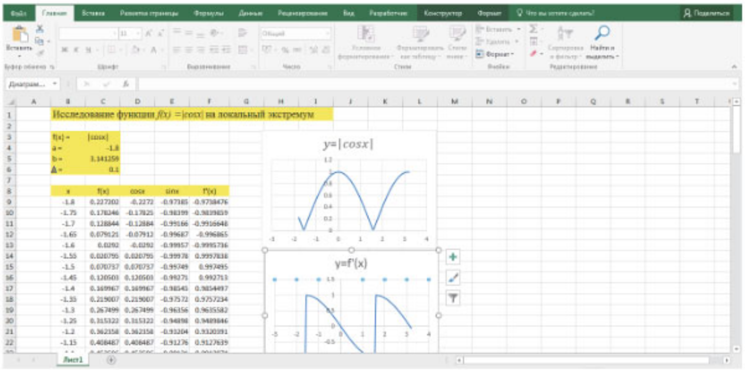
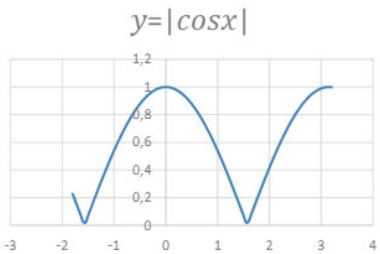


Рис. 50. Построение графиков функции и ее производной

На рис. 51 и 52 изображены графики функции и ее производной. Из графиков видно, что функция непрерывна, но ее производная имеет точки разрыва 1-го рода.



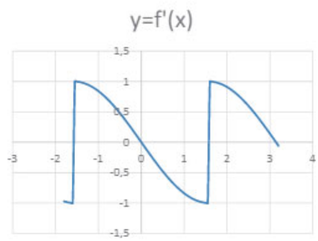


Рис. 51. График функции

Рис. 52. График производной $f'(x) = -sgn(cosx)\sin x$

Анализируя графики и учитывая периодичность функции, делаем вывод о том, что в точках $x = \pi n, n \in N$, функция достигает свои максимальные значения, равные 1, а в точках $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in N$ свои минимальные значения, равные 0. Причем, точки $\frac{\pi}{2}+\pi n, n \in N$ являются угловыми точками графика функции, так как в этих точках производная функции терпит разрыв. Следует обратить внимание на то, что при переходе через все указанные точки производная меняет знак.

Задания для самостоятельной работы

1. Найти точки локальных экстремумов и области возрастания и убывания функции

$$y=\frac{(x+4)(x+2)(x-1)(x-5)}{x^4+16}.$$

2. Найти точки локальных экстремумов и области возрастания и убывания функции $y=x\sqrt{4-x^2}$.

3. Найти точки локальных экстремумов и области возрастания и убывания функции $y=ln\sqrt{1+x^2}$.

Практикум 9.
ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫПУКЛОСТИ ФУНКЦИИ И ПОИСК ЕЕ ТОЧЕК ПЕРЕГИБА

Введение

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется выпуклым вниз на интервале $(a;b)$, если он расположен выше любой ее касательной на этом интервале. График функции $y = f(x)$ называется выпуклым вверх на интервале $(a;b)$, если он расположен ниже любой ее касательной на этом интервале.

Точка графика непрерывной функции $y = f(x)$, отделяющая его части разной выпуклости, называется точкой перегиба.

Признак выпуклости на интервале. Если функция $y = f(x)$ во всех точках интервала $(a;b)$ имеет отрицательную вторую производную, то есть $f''(x) < 0$, то график функции в этом интервале выпуклый вверх. Если же $f''(x) > 0$ во всех точках интервала $(a;b)$, то график — выпуклый вниз.

Достаточное условие существования точек перегиба. Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0, в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка графика функции с абсциссой x_0 есть точка перегиба.

Пример. Исследовать на выпуклость и точки перегиба график функции $y = x^5 - x + 5$.

Решение. Находим производные первого и второго порядка: $y' = 5x^4 - 1$, $y'' = 20x^3$. Вторая производная существует на всей числовой оси. $y'' = 0$ при $x = 0$. $y'' > 0$ при $x > 0$ и $y'' < 0$ при $x < 0$. Следовательно, график функции $y = x^5 - x + 5$ в интервале $(-\infty; 0)$ — выпуклый вверх, в интервале $(0; +\infty)$ — выпуклый вниз. Точка **(0; 5)** есть точка перегиба.

Выполнение работы.

- Определение областей вогнутости и выпуклости функции. Точки перегиба.
- Найти точки перегиба и области вогнутости и выпуклости функции $f(x) = xe^{-x^2}$

Решение:

Найдем первую производную функции:

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = e^{-x^2} \cdot \left(1 - 2x^2\right).$$

Вычислим вторую производную функции:

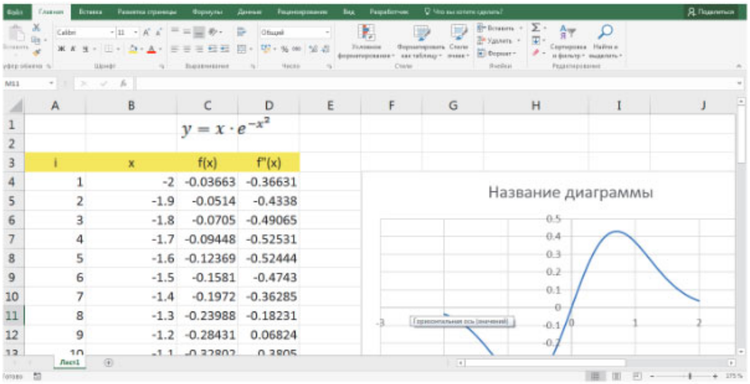
$$f''(x) = \left(e^{-x^2} \cdot \left(1 - 2x^2\right)\right)' = -2x \cdot e^{-x^2} \cdot \left(1 - 2x^2\right) + e^{-x^2} \cdot (-4x) =$$

$$= -2x \cdot \left(3 - 2x^2\right) \cdot e^{-x^2}.$$

Следовательно, $f''(x) = 0$ при $x_1 = 0$ и $x_{2,3} = \pm\sqrt{1.5}$.

Вычислим на листе Excel значения функции $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$ и ее второй производной $f''(x) = -2x \cdot \left(3 - 2x^2\right) \cdot e^{-x^2}$, после чего построим их графики (рис. 54 и 55).

Из графиков видно, что указанные точки являются точками перегиба. Для определения точного значения $x = \sqrt{1.5}$ можно использовать любой из алгоритмов, описанных ранее. На рис. 56 изображен график второй производной в уменьшенном масштабе.



i	x	f(x)	f''(x)
1	-2	-0.03663	-0.36631
2	-1.9	-0.0514	-0.4338
3	-1.8	-0.0705	-0.49065
4	-1.7	-0.09448	-0.52531
5	-1.6	-0.12369	-0.52444
6	-1.5	-0.1581	-0.4743
7	-1.4	-0.1972	-0.36285
8	-1.3	-0.23988	-0.18231
9	-1.2	-0.28431	0.06824

Рис. 53. Исходный лист

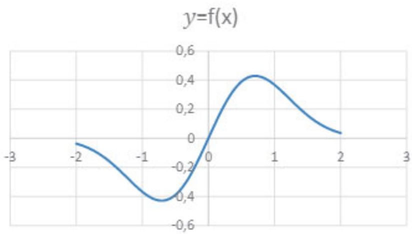


Рис. 54. График функции

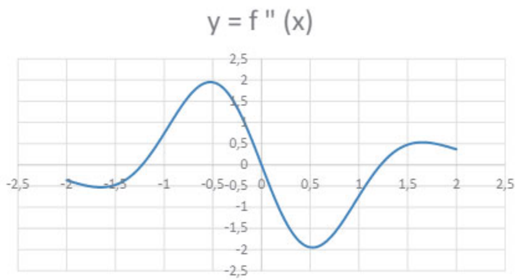


Рис. 55. График второй производной функции

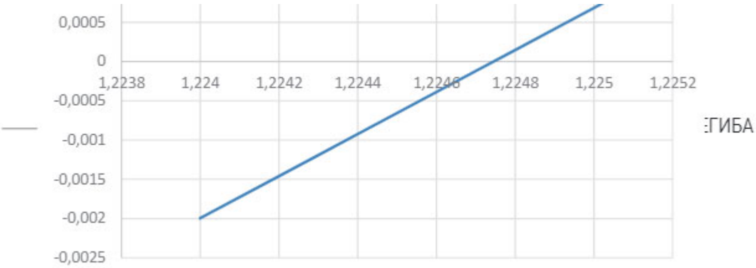
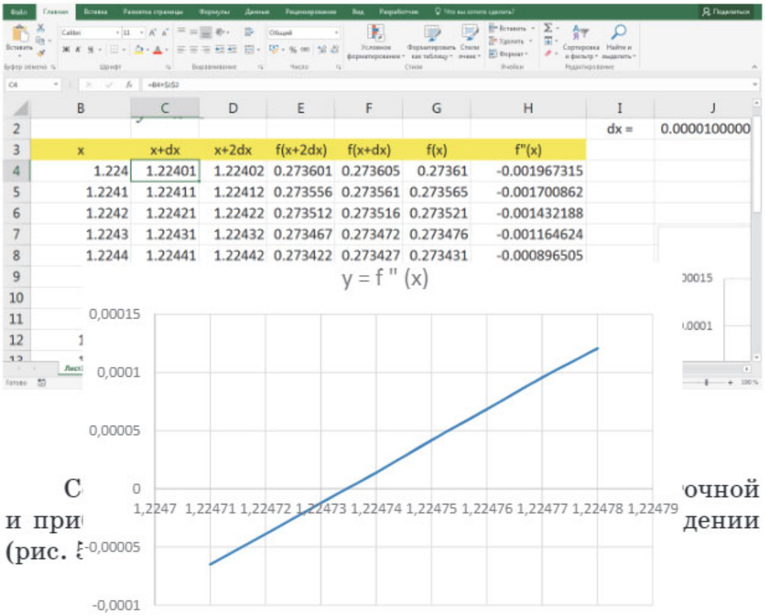


Рис. 56. График второй производной функции

Решая поставленную задачу, можно использовать приближенные формулы для вычисления второй производной функции.



	x	x+dx	x+2dx	f(x+2dx)	f(x+dx)	f(x)	f"(x)		
2								dx =	0.0000100000
4	1.224	1.22401	1.22402	0.273601	0.273605	0.27361	-0.001967315		
5	1.2241	1.22411	1.22412	0.273556	0.273561	0.273565	-0.001700862		
6	1.2242	1.22421	1.22422	0.273512	0.273516	0.273521	-0.001432188		
7	1.2243	1.22431	1.22432	0.273467	0.273472	0.273476	-0.001164624		
8	1.2244	1.22441	1.22442	0.273422	0.273427	0.273431	-0.000896505		

С... очной и при... дении (рис. 5...

Рис. 58. График второй производной функции, вычисленной по приближенной формуле

Задания для самостоятельной работы

1. Найти точки перегиба и области вогнутости и выпуклости функции $y = e^{-x} \cos x$.

2. Найти точки перегиба и области вогнутости и выпуклости функции $y = \sqrt[3]{x+8} - \sqrt[3]{x-1}$.

3. Найти точки перегиба и области вогнутости и выпуклости функции $y = \dfrac{x^2 - x - 20}{x - 2}$.

Практикум 10. ПОЛНОЕ ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ (EXCEL)

Введение

Исследование функции $y = f(x)$ целесообразно вести в определенной последовательности.

1. Найти область определения функции.

2. Найти (если это можно) точки пересечения графика с осями координат.

3. Найти асимптоты графика функции.

4. Найти экстремумы функции и интервалы монотонности.

5. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.

6. На основании проведенного исследования построить график функции. Если график не совсем понятен, то можно дополнительно построить несколько точек графика и выявить другие особенности функции (периодичность, четность). Иногда целесообразно выполнение операций исследования сопровождать постепенным построением графика функции.

Пример. Исследовать функцию $y = \dfrac{x}{1 - x^2}$ и построить ее график.

Решение. 1. Функция не определена при $x=1$ и $x=-1$. Область ее определения состоит из трех интервалов: $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$, а график из трех ветвей.

2. Если $x=0$, то $y=0$. График пересекает оси Ox и Oy в точке (0; 0).

3. Прямые $x=1$ и $x=-1$ являются вертикальными асимптотами. Выясним наличие наклонной асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{1-x^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-x^2}=0.$$

($k=0$ при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$),

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1-x^2}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1-x^2}=0.$$

Следовательно, есть горизонтальная асимптота $y=0$. Прямая $y=0$ является асимптотой при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$.

4. Находим интервалы возрастания и убывания функции. Так как

$$y''=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{1\cdot\left(1-x^2\right)-x\cdot(-2x)}{\left(1-x^2\right)^2}=\frac{x^2+1}{\left(1-x^2\right)^2},$$

то $y''>0$ в области определения, и функция является возрастающей на каждом интервале области определения.

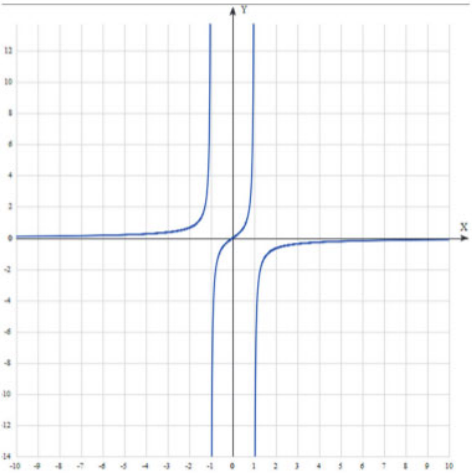
Критическими точками являются точки $x_1=1$ и $x_2=-1$, но они не принадлежат области определения функции. Функция экстремумов не имеет.

Исследуем функцию на выпуклость. Находим вторую производную:

$$y''=\left(\frac{x^2+1}{\left(1-x^2\right)^2},\right)''=\frac{2x\left(1-x^2\right)^2-\left(x^2+1\right)2\left(1-x^2\right)(-2x)}{\left(1-x^2\right)^4}==\frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(1-x^2\right)^3}.$$

Вторая производная равна нулю или не существует в точках $x_1=0,$ и $x_2=-1, x_3=1$, Точка (0; 0) — точка перегиба графика функции. График выпуклый вверх на интервалах (-1; 0) и $(1;+\infty)$; выпуклый вниз на интервалах $(-\infty;-1)$ и (0; 1).

Построим график функции:



Выполнение работы.

Провести полное исследование функции и построить график:

$$f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x-1}.$$

Решение:

Область определения функции $D(f)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$, поскольку формула, с помощью которой задана функция, имеет смысл при всех значениях x кроме точки $x=1$, которая является точкой разрыва 2-го рода функции. Действительно,

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2-2x+2}{x-1}=-\infty;$$

так как числитель в окрестности $x=1$ принимает положительное значение, а знаменатель при стремлении x к 1 слева стремится к нулю, оставаясь отрицательным. Аналогично,

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = +\infty.$$

Таким образом, $x = 1$ — вертикальная асимптота.

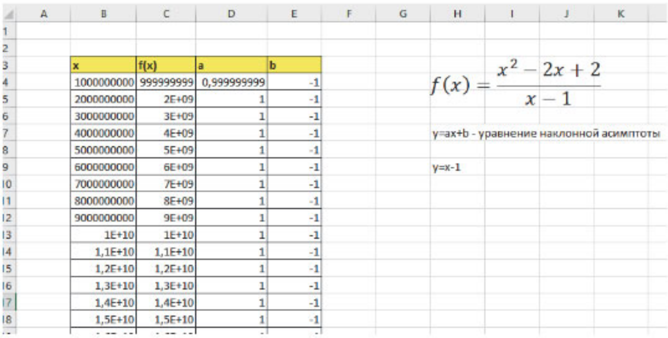
Единственная точка пересечения графика функции с осью Oy: (0; -2). Очевидно, что пересечений с осью Ox нет, так как числитель дроби строго больше нуля.

Исследуем функцию на наличие наклонных асимптот вида $y = ax + b$ с помощью Excel.

В диапазоне B4:B24 разместим значения независимой переменной x от 1000000000 до 20000000000, в диапазоне C4:C24 вычислим соответствующие значения функции $f(x)$, в диапазоне D4:D24 вычислим значения коэффициента $a = \frac{f(x)}{x}$. Как видно из вычислени $a = 1$. В диапазоне E4:E24 вычислим значения коэффициента $b = f(x) - a \cdot x$. Заметим, что при вычислении коэффициента b следует подставлять найденное значение a, иначе ссылка на формулу выдаст не верный результат. То есть, в нашем примере, $b = f(x) - 1 \cdot x = f(x) - x$. Как следует из расчетов $b = -1$. Таким образом, уравнение правой наклонной асимптоты: $y = x - 1$.

Аналогично можно вывести уравнение левой наклонной асимптоты:

$$y = x - 1.$$



	B	C	D	E
3	x	f(x)	a	b
4	1000000000	999999999	0,999999999	-1
5	2000000000	2E+09	1	-1
6	3000000000	3E+09	1	-1
7	4000000000	4E+09	1	-1
8	5000000000	5E+09	1	-1
9	6000000000	6E+09	1	-1
10	7000000000	7E+09	1	-1
11	8000000000	8E+09	1	-1
12	9000000000	9E+09	1	-1
13	1E+10	1E+10	1	-1
14	1,1E+10	1,1E+10	1	-1
15	1,2E+10	1,2E+10	1	-1
16	1,3E+10	1,3E+10	1	-1
17	1,4E+10	1,4E+10	1	-1
18	1,5E+10	1,5E+10	1	-1

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$$

y=ax+b - уравнение наклонной асимптоты

y=x-1

Рис. 59. Нахождение уравнения наклонной асимптоты

Вычислим первую производную функции $y' = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.

Из последней формулы следует, что 1-я производная обращается в ноль в точках $x_1 = 0$; $x_2 = 2$. С помощью Excel выясним имеется ли в этих точках экстремумы функции.

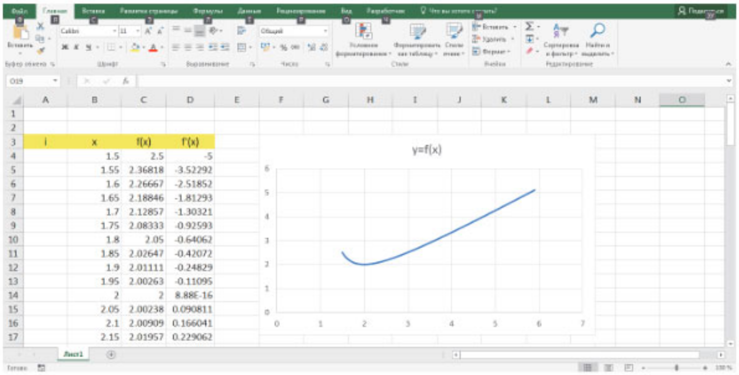


Рис. 60. Построение графика в окрестности критических точек

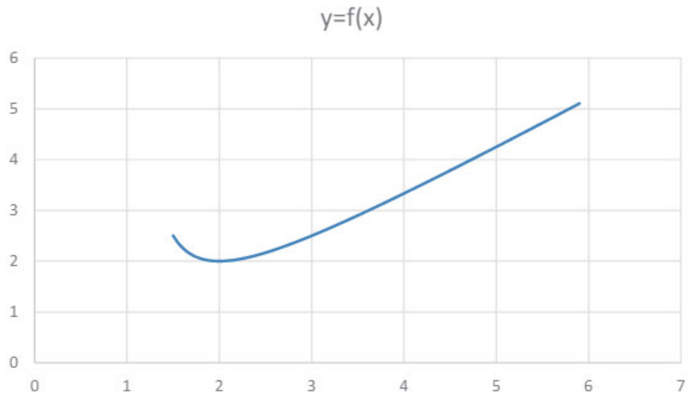


Рис. 61. График функции в окрестности точки экстремума

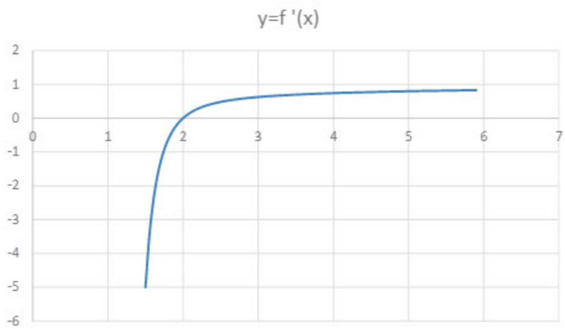
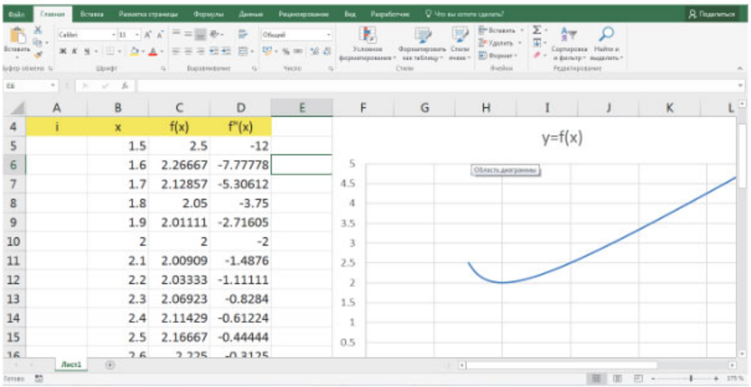


Рис. 62. График производной функции в окрестности точки экстремума

Как видно из приведенных графиков в точке $x_2 = 2$ функция достигает минимума $f(2) = 2$. Аналогично, можно показать, что в точке $x_1 = 0$ функция достигает минимума $f(0) = -2$.

Вычислим вторую производную функции $y'' = \dfrac{2(x-3)}{(x-1)^2}$.

Вторая производная обращается в ноль в точке $x = 3$. С помощью Excel выясним является ли эта точка точкой перегиба функции.



	A	B	C	D	E
4	i	x	f(x)	f''(x)	
5		1.5	2.5	-12	
6		1.6	2.26667	-7.77778	
7		1.7	2.12857	-5.30612	
8		1.8	2.05	-3.75	
9		1.9	2.01111	-2.71605	
10		2	2	-2	
11		2.1	2.00909	-1.4876	
12		2.2	2.03333	-1.11111	
13		2.3	2.06923	-0.8284	
14		2.4	2.11429	-0.61224	
15		2.5	2.16667	-0.44444	
16		2.6	2.225	-0.3125	

Рис. 63. Вычисление точки перегиба

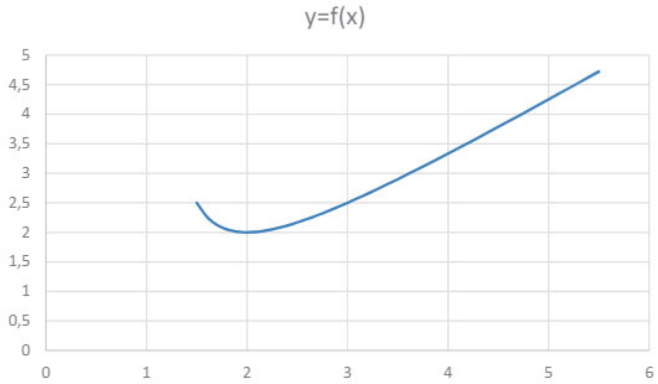


Рис. 64. Построение графика функции в окрестности точки перегиба

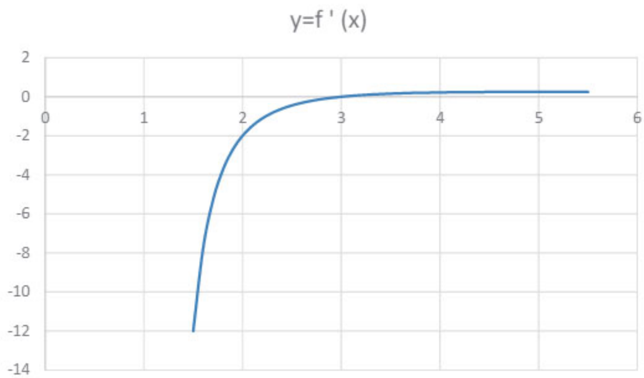


Рис. 65. Построение графика производной функции в окрестности точки перегиба

Как видно из приведенных графиков точка $x = 3$ является точкой перегиба функции.

Очевидно, что график функции «разделен» на две части относительно вертикальной асимптоты $x = 1$. Построим графики «левой» и «правой» части функции.

Рис. 66. Точечный график левой части относительно вертикальной асимптоты

Рис. 67. Точечный график правой части относительно вертикальной асимптоты

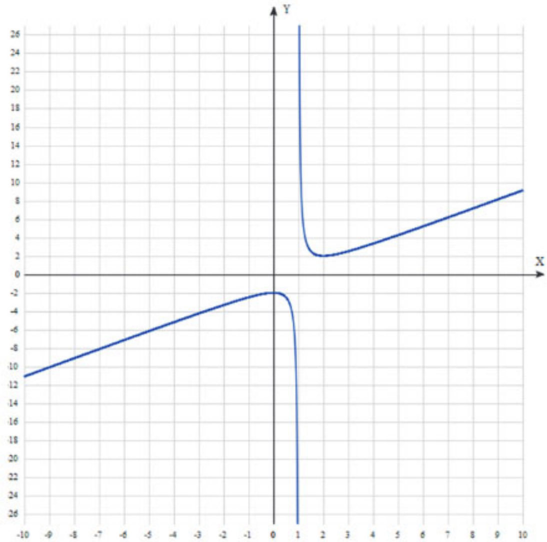


Рис. 68. Общий вид графика функции

Задания для самостоятельной работы

1. Провести полное исследование и построить график функции $y = f(x)$.

$$y = \frac{1}{5}(x+1)^2 \sqrt[3]{x-1}$$

2. Провести полное исследование и построить график функции $y = f(x)$.

$$y = \frac{1}{3}x^2 \sqrt{|x+3|}\ .$$

3. Провести полное исследование и построить график функции $y = f(x)$.

$$y = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x}\, e^{|x-1|}\ .$$

Практикум 11. НАХОЖДЕНИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ ЭКСТРЕМУМОВ ФУНКЦИЙ (EXCEL)

Введение

Локальным экстремумом называют точку пространства исследования, в которой функция имеет наибольшее (наименьшее) значение по сравнению с ее значениями во всех других точках ближайшей окрестности. Часть пространства исследования может содержать много локальных экстремумов и следует сохранять осторожность, чтобы не принять первый из них за решение задачи.

Глобальным экстремумом будем называть точку пространства исследования, в которой функция имеет большее (меньшее) значение по сравнению с любой другой точкой пространства исследования. Таким образом, глобальный экстремум — это оптимальное решение для всего пространства исследования.

Задачу для функции одной переменной можно поставить следующим образом. Пусть значения переменной x заключены в интервале $[a; b]$. Интервал значений переменной x, в котором производится поиск оптимума целевой функции, будем называть интервалом неопределенности. В начале процесса оптимизации этот интервал имеет длину $b-a$. Необходимо определить значения оптимума функции с погрешностью ε, то есть найти в интервале $[a;b]$ точку x, такую что

$f(x-\varepsilon)<f(x)>f(x+\varepsilon)$ — при поиске максимума, или
$f(x-\varepsilon)>f(x)<f(x+\varepsilon)$ — при поиске минимума.

Таким образом, нам необходимо иметь план действий, неизбежно приводящий к определению точки x^* с точностью ε, где бы эта точка не лежала в области поиска. Рассматриваемые в дальнейшем методы и являются такими планами действий по поиску оптимумов функций.

Очевидно, наиболее естественным и простым способом сужения интервала неопределенности для одномерной функции является его деление на несколько равных частей с последующим вычислением значений функции в узлах полученной сетки.

Выполнение работы

Задача

Поиск глобального экстремума функции

Найти глобальный максимум функции $f(x) = 10e^{-0{,}01x^2} \sin x$.

Решение:

Построим на листе Excel график функции. Для этого в диапазоне B7:B107 располагаем значения независимой переменной, в диапазоне C7:C107 вычисляем соответствующие значения функции

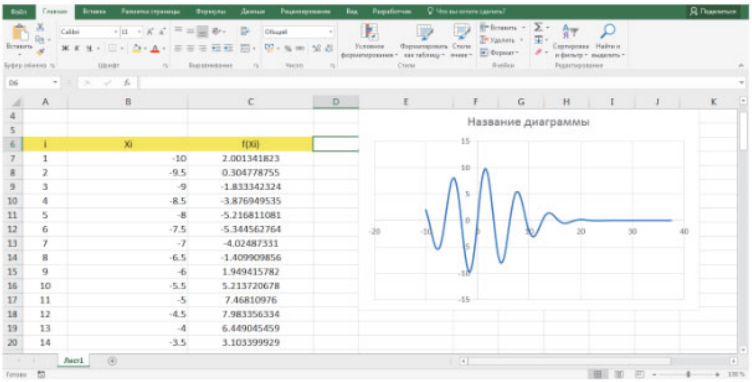
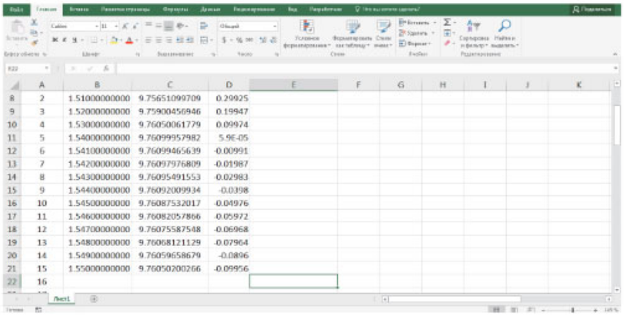


Рис. 69. Визуальное определение глобального экстремума

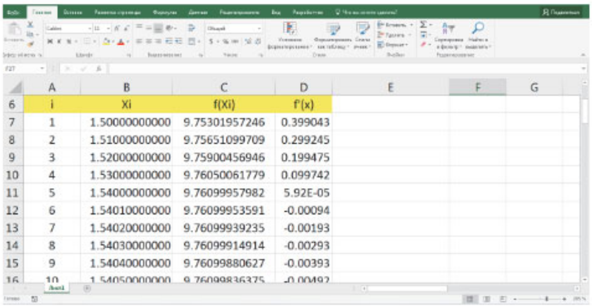
Анализируя график, замечаем, что глобальный максимум расположен в окрестности точки x=1.5. Для более точного определения точки глобального максимума в диапазоне B7:B107 вставляем между 1.5 и 1.6 значения 1.51, 1.52, ..., 1.59. В диапазоне C7:C107 вычисляем соответствующие значения функции. Определяем, что производная обращается в ноль между значениями 1.543 и 1.544 (рис. 2.1.2.) Поступая аналогичным образом необходимое количество раз, можно получить значение точки экстремума с заданной точностью. Указанный процесс последовательных приближений отражен на рисунках с 2.1.2 по 2.1.9. В результате получено значение точки глобального экстремума x_0=1.54000594190.



	A	B	C	D
8	2	1.51000000000	9.75651099709	0.29925
9	3	1.52000000000	9.75900456946	0.19947
10	4	1.53000000000	9.76050061779	0.09974
11	5	1.54000000000	9.76099957982	5.9E-05
12	6	1.54100000000	9.76099465639	-0.00991
13	7	1.54200000000	9.76097976809	-0.01987
14	8	1.54300000000	9.76095491553	-0.02983
15	9	1.54400000000	9.76092009934	-0.0398
16	10	1.54500000000	9.76087532017	-0.04976
17	11	1.54600000000	9.76082057866	-0.05972
18	12	1.54700000000	9.76075587548	-0.06968
19	13	1.54800000000	9.76068121129	-0.07964
20	14	1.54900000000	9.76059658679	-0.0896
21	15	1.55000000000	9.76050200266	-0.09956
22	16			

Рис. 70. Уточнение значения точки глобального экстремума

$(1.540 < x_0 < 1.541)$



	A	B	C	D
6	i	Xi	f(Xi)	f'(x)
7	1	1.50000000000	9.75301957246	0.399043
8	2	1.51000000000	9.75651099709	0.299245
9	3	1.52000000000	9.75900456946	0.199475
10	4	1.53000000000	9.76050061779	0.099742
11	5	1.54000000000	9.76099957982	5.92E-05
12	6	1.54010000000	9.76099953591	-0.00094
13	7	1.54020000000	9.76099939235	-0.00193
14	8	1.54030000000	9.76099914914	-0.00293
15	9	1.54040000000	9.76099880627	-0.00393
16	10	1.54050000000	9.76099836375	-0.00492

Рис. 71. Уточнение значения точки глобального экстремума

$(1.5400 < x_0 < 1.5401)$

	A	B	C	D	E
5					
6	i	Xi	f(Xi)	f'(x)	
7	1	1.50000000000	9.75301957246	0.39904	
8	2	1.51000000000	9.75651099709	0.29925	
9	3	1.52000000000	9.75900456946	0.19947	
10	4	1.53000000000	9.76050061779	0.09974	
11	5	1.54000000000	9.76099957982	5.9E-05	
12	6	1.54001000000	9.76099957991	-4E-05	
13	7	1.54002000000	9.76099957991	0.00014	

Рис. 72. Уточнение значения точки глобального экстремума ($1.54000 < x_0 < 1.54001$).

	A	B	C	D	E	F	G
10	4	1.53000000000	9.76050061779	0.099742			
11	5	1.54000000000	9.76099957982	5.92E-05			
12	6	1.54000100000	9.76099957987	4.92E-05			
13	7	1.54000200000	9.76099957992	3.93E-05			
14	8	1.54000300000	9.76099957995	2.93E-05			
15	9	1.54000400000	9.76099957997	1.94E-05			
16	10	1.54000500000	9.76099957999	9.39E-06			
17	11	1.54000600000	9.76099957999	-5.8E-07			
18	12	1.54000700000	9.76099957999	-1.1E-05			
19	13	1.54000800000	9.76099957997	-2.1E-05			
20	14	1.54000900000	9.76099957995	-3E-05			

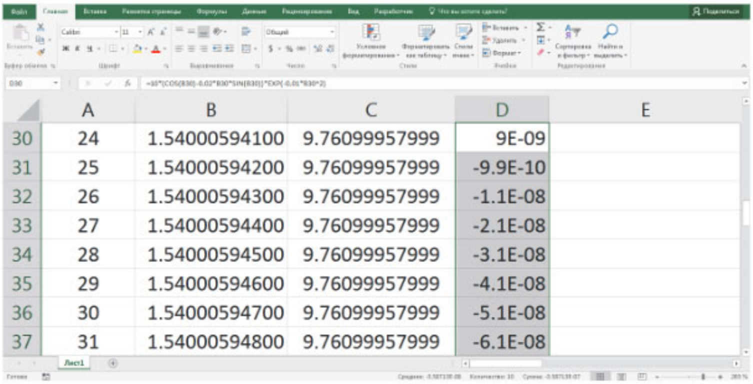
Рис. 73. Уточнение значения точки глобального экстремума ($1.540005 < x_0 < 1.540006$)

	A	B	C	D
22	16	1.54000560000	9.76099957999	3.41E-06
23	17	1.54000570000	9.76099957999	2.41E-06
24	18	1.54000580000	9.76099957999	1.41E-06
25	19	1.54000590000	9.76099957999	4.18E-07
26	20	1.54000600000	9.76099957999	-5.8E-07
27	21			

Рис. 74. Уточнение значения точки глобального экстремума ($1.5400059 < x_0 < 1.5400060$)

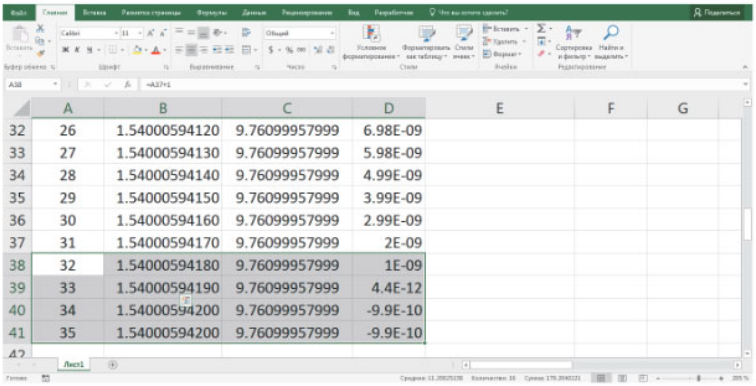
	A	B	C	D	E	F
28	22	1.54000593000	9.76099957999	1.19E-07		
29	23	1.54000594000	9.76099957999	1.89E-08		
30	24	1.54000595000	9.76099957999	-8.1E-08		
31	25	1.54000596000	9.76099957999	-1.8E-07		
32	26	1.54000597000	9.76099957999	-2.8E-07		
33	27	1.54000598000	9.76099957999	-3.8E-07		
34	28	1.54000599000	9.76099957999	-4.8E-07		
35	29	1.54000600000	9.76099957999	-5.8E-07		
36	30					

Рис. 75. Уточнение значения точки глобального экстремума ($1.54000594 < x_0 < 1.54000595$)



	A	B	C	D	E
30	24	1.54000594100	9.76099957999	9E-09	
31	25	1.54000594200	9.76099957999	-9.9E-10	
32	26	1.54000594300	9.76099957999	-1.1E-08	
33	27	1.54000594400	9.76099957999	-2.1E-08	
34	28	1.54000594500	9.76099957999	-3.1E-08	
35	29	1.54000594600	9.76099957999	-4.1E-08	
36	30	1.54000594700	9.76099957999	-5.1E-08	
37	31	1.54000594800	9.76099957999	-6.1E-08	

Рис. 76. Уточнение значения точки глобального экстремума ($1.540005941 < x_0 < 1.540005942$)



	A	B	C	D	E	F	G
32	26	1.54000594120	9.76099957999	6.98E-09			
33	27	1.54000594130	9.76099957999	5.98E-09			
34	28	1.54000594140	9.76099957999	4.99E-09			
35	29	1.54000594150	9.76099957999	3.99E-09			
36	30	1.54000594160	9.76099957999	2.99E-09			
37	31	1.54000594170	9.76099957999	2E-09			
38	32	1.54000594180	9.76099957999	1E-09			
39	33	1.54000594190	9.76099957999	4.4E-12			
40	34	1.54000594200	9.76099957999	-9.9E-10			
41	35	1.54000594200	9.76099957999	-9.9E-10			

Рис. 77. Значение корня x=1.54000594190

Причем, при решении данного примера можно использовать как точные значения производной, которые вычисляются по формуле

$$f'(x) = 10(\cos x - 0{,}02 x \sin x)\exp(-0{,}01x^2),$$

так и приближенные, вычисленные по формуле

$$f'(x_k) \approx (f(x + \Delta x) - f(x)),$$

где $\Delta x = 0.000000001$.

Еще один способ решения данной задачи основан на использовании решения уравнения методом касательных.

Поскольку

$$f'(x)=10(\cos x-0{,}02\cdot x\cdot \sin x)\cdot \exp\left(-0{,}01x^2\right),$$

Уравнение $f'(x)=0$ эквивалентно уравнению

$$\cos x-0{,}02\cdot x\cdot \sin x=0.$$

В качестве начального приближения корня этого уравнения можно взять $x=1.5$ (это значение можно получить из графика, приведенного на рисунке 2.1.1.)

Пусть

$$g(x)=\cos x-0{,}02\cdot x\cdot \sin x,\quad g'(x)=-1.02\sin x-0.02\cos x.$$

Подробное описание алгоритма решения уравнения методом касательных приведено в пособии для семинара № 8. Результаты работы алгоритма приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1

Поиск корня f'(x)=0 методом касательных

Xk	(Xk)	(Xk)	Xk+1	dXk
1.50000000000	0.0408123520696	-1.019567002	1.540029103	0.040029103
1.54002910252	-0.0000236346008	-1.02046476	1.540005942	-2.31606E-05
1.54000594190	-0.0000000000003	-1.020464731	1.540005942	-3.193E-13
1.54000594190	0.0000000000001	1657.377773	1.540005942	0

Из таблицы видно, что значение корня с машинной точностью получено за три итерации.

Задания для самостоятельной работы

1. Найти глобальный экстремум функции

$$f(x)=x^4+5x^2-10x.$$

2. Найти глобальный экстремум функции

$$f(x)=\sqrt[3]{x}e^{|x-2|}.$$

Практикум 12. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЫПЛАТ ПО ВКЛАДУ ПРИ ЗАДАННОМ ГРАФИКЕ ВЛОЖЕНИЙ

Обзор ключевых категорий и положений

Количественный финансовый анализ предполагает использование моделей и методов расчета финансовых показателей. Условно методы финансово-экономических расчетов можно разделить на две части: базовые и прикладные.

К *базовым* методам относятся:

– простые и сложные проценты как основа операций, связанных с наращением или дисконтированием платежей;

– расчет потоков платежей применительно к различным видам финансовых рент.

К *прикладным* методам финансовых расчетов относятся:

– планирование и оценка эффективности финансово-кредитных операций;

– расчет страховых аннуитетов;

– планирование погашения долгосрочной задолженности;

– планирование погашения ипотечных ссуд и потребительских кредитов;

– финансовые расчеты по ценным бумагам;

– лизинговые, факторинговые и форфейтинговые банковские операции;

– планирование и анализ инвестиционных проектов и др.

При проведении любых финансово-экономических расчетов учитывается *принцип временной ценности денег* (*time value of money*), который предполагает, что сумма, полученная сегодня, больше той же суммы, полученной завтра. Из данного принципа следует необходимость учета фактора времени при проведении долгосрочных финансовых операций и некорректность суммирования денежных величин, относящихся к разным периодам времени. Это явление широко известно в финансовом мире и обусловлено рядом причин:

– любая денежная сумма, имеющаяся в наличии, в условиях рынка может быть инвестирована, и через некоторое время принести доход;

– покупательная способность денег даже при небольшой инфляции со временем снижается.

Фактор времени учитывается с помощью методов наращения и дисконтирования, в основу которых положена техника процентных вычислений. С помощью этих методов осуществляется приведение денежных сумм, относящихся к различным временным периодам, к требуемому моменту времени в настоящем или будущем. При этом основой для количественного описания изменения стоимости денежных сумм во времени является теория процентных ставок.

К основным понятиям финансово-экономических расчетов относят:

– *процент* — абсолютная величина дохода от предоставления денег в кредит в любой форме;

– *процентная ставка* — относительная величина дохода за фиксированный интервал времени, измеряемая в процентах или в виде дроби;

– *период начисления* — интервал времени, к которому приурочена процентная ставка;

– *капитализация процентов* — присоединение начисленных процентов к основной сумме;

– *наращение* — процесс увеличения первоначальной суммы в результате начисления процентов;

– *дисконтирование* — процесс приведения стоимости будущей суммы денег к текущему моменту времени (операция, обратная наращению).

Поясним экономический смысл отдельных понятий. Так, процентная ставка используется в качестве измерителя уровня (нормы) доходности производимых операций и определяется как отношение полученной прибыли к величине вложенных средств. Наращение позволяет в результате проведения финансовой операции определить величину, которая будет или может быть получена из первоначальной (текущей) суммы через некоторый промежуток времени. Дисконтирование представляет собой процесс нахождения величины на заданный момент времени по ее известному или предполагаемому значению в будущем.

В финансовых расчетах с процентами могут использоваться разные способы начисления процентов, следовательно, различные виды процентных ставок.

1) В зависимости от базы начисления процентов различают простые и сложные проценты.

Простые проценты используются, как правило, в краткосрочных финансовых операциях, срок проведения которых меньше года. Базой для исчисления процентов за каждый период в этом случае служит исходная сумма сделки.

Сложные проценты применяются в долгосрочных финансовых операциях со сроком проведения более одного года. При этом база для исчисления процентов за период включает в себя как исходную сумму сделки, так и сумму уже накопленных к этому времени процентов.

Наращение и дисконтирование осуществляется по формулам:

по ставке простых процентов	по ставке сложных процентов
$FV = PV(1 + r * n)$	$FV = PV(1 + r)^n$
$PV = FV/(1 + r * n)$	$PV = FV/(1 + r)^n$
где FV(future value) — будущая величина, PV(present value) — текущая сумма, r (interest rate) — ставка процентов, n – число периодов	

2) Исходя из принципов расчета, различают ставку *наращения* (декурсивная ставка) и *учетную* ставку (антисипативная ставка).

3) По постоянству значения процентной ставки в течение действия договора ставки бывают *фиксированные* и *плавающие*.

Проведение практически любой финансовой операции порождает движение денежных средств. Такое движение может характеризоваться возникновением отдельных разовых платежей или множеством распределенных во времени выплат и поступлений, т.е. рассматривается *поток платежей* или *денежный поток (cash flow)*.

Денежный поток — последовательность распределенных во времени платежей. Любая финансовая операция предполагает наличие двух потоков платежей: входящего — поступление (доходы) и исходящего — выплаты (расходы, вложения). В финансовом анализе эти потоки обычно заменяют одним двусторонним потоком платежей, где поступление денег считаются положительными величинами, а выплаты — отрицательными.

Простейший (элементарный) денежный поток состоит из одной выплаты и последующего поступления, либо разового поступления с последующей выплатой, разделенных определенными периодами времени (например, год, квартал, месяц и др.). Примерами финансовых операций с такими потоками платежей являются срочные депозиты, единовременные ссуды, операции с некоторыми видами ценных бумаг и др.

Потоки платежей по периодичности протекания делятся на регулярные и нерегулярные.

Регулярным потоком платежей называются платежи, у которых все выплаты направлены в одну сторону (например, поступления), а интервалы между платежами одинаковы.

Нерегулярным потоком платежей называются платежи, у которых часть выплат являются положительными величинами (поступления), а другая часть — отрицательными величинами (выплаты). Интервалы между платежами в этом случае могут быть не равны друг другу.

Наиболее простым примером регулярного потока платежей является финансовая рента. *Финансовая рента* или *аннуитет* (от annuity — ежегодный) определяется как поток платежей, все члены которого положительны и поступают через одинаковые интервалы времени.

Финансовая рента характеризуется: членом ренты, периодом ренты, сроком ренты и процентной ставкой.

Размер отдельного платежа называют членом ренты.

Интервал времени между двумя последовательными платежами является *периодом ренты*.

Ренты можно классифицировать по различным признакам, например, по количеству выплат члена ренты в течение года различают *годовые* и *n-срочные* (n раз в год) ренты.

По типу капитализации процентов ренты подразделяются на ренты с *ежегодным* начислением, с начислением m раз в год и с *непрерывным* начислением. При этом момент начисления процентов может не совпадать с моментом выплаты по ренте.

По величине членов ренты делятся на *постоянные* (с равными членами) и *переменные*.

По вероятности выплаты отдельного платежа ренты делятся на *верные* и *условные*. Верные ренты подлежат обязательной выплате, например, при погашении кредита. Выплата условной ренты ставится в зависимость от наступления некоторого случайного события, например, страховые выплаты, выплаты пенсий и др.

По количеству членов различают ренты с *конечным* числом членов, ограниченные по срокам, и *вечные*, с бесконечным числом членов.

По срокам начала действия ренты и наступления какого-либо события различают *немедленные* и *отложенные* ренты.

По моменту выплаты платежей ренты подразделяются на обычные и приведенные.

Если платежи осуществляются в конце определенного периода времени (месяца, квартала, года и т.п.), то такие ренты называются *постнумерандо* или обычная рента (ordinary annuity).

Если выплата производится в начале каждого периода, то рента называется *пренумерандо* или приведенная рента (annuity due).

Для вычисления выплат по вкладу используются следующие финансовые функции Excel:

Формат	Назначение
БЗРАСПИС (первичное; план)	*Рассчитывает будущее значение инвестиции после начисления сложных процентов при переменной процентной ставке.*
БС (ставка; кпер; плт; *пс; тип**)	*Вычисляет будущую стоимость инвестиции (вклада) на основе периодических, равных по величине сумм платежей и постоянной процентной ставки.*

* Курсивом набраны необязательные параметры функций.

Практические задания

Вычисления по простым процентам

Задание 1

Постановка задачи.

Определить итоговую величину депозита, если сумма размером 7 000 руб. размещена в банке под 9% годовых сроком на 1 год с начислением процентов в конце срока.

Алгоритм решения задачи.

На листе Excel в ячейку A1 введем название задания «Расчеты по простым процентам»

Создать таблицу исходных данных

	A	B	C	D
1	Расчеты по простым процентам			
2				
3	Депозит	7,000.00 ₽		
4	Процентная ставка, годовая	9%		
5	Срок, лет	1		
6	Будущее значение депозита	7630	=B5*(1+B6*B7)	

В ячейку B6 ввести формулу простых процентов:

= B5*(1+B6*B7)

Вычисление по сложным процентам

Задание 2

Постановка задачи.

Определить итоговую сумму вклада, если сумма размером 2000 руб. размещена в банке под 6% годовых сроком на 7 лет с ежегодовым начислением процентов.

Решите задачу расчета итоговой суммы вклада с использованием формулы сложных процентов двумя способами — вычисляя частичную сумму ряда и непосредственно по формуле.

Алгоритм решения задачи.

На листе Excel ввести исходные данные:

	A	B
1	Задание 2	
2		
3	сумма вклада	2000
4	ставка, %	6%
5	срок, лет	7

Способ 1

Решение с использованием суммы ряда

Ввести данные для расчета суммы ряда:

9	Период	Дисконтирование	Наращенная сумма
10	1		
11	2		
12	3		
13	4		
14	5		
15	6		
16	7		

В графу «Дисконтирование» ввести формулы расчета:

	A	B
1	Задание 2	
2		
3	сумма вклада	2000
4	ставка, %	0.06
5	срок, лет	7
6		
7	Решение	
8	Способ 1	
9	Период	Дисконтирование
10	1	=1+1*$B$4
11	2	=B10+B10*$B$4
12	3	=B11+B11*$B$4
13	4	=B12+B12*$B$4
14	5	=B13+B13*$B$4
15	6	=B14+B14*$B$4
16	7	=B15+B15*$B$4

В графу «Наращенная сумма» ввести формулы расчета:

	A	B	C
1	Задание 2		
2			
3	сумма вклада	2000	
4	ставка, %	0.06	
5	срок, лет	7	
6			
7	Решение		
8	Способ 1		
9	Период	Дисконтирование	Наращенная сумма
10	1	=1+1*$B$4	=$B$3*B10
11	2	=B10+B10*$B$4	=$B$3*B11
12	3	=B11+B11*$B$4	=$B$3*B12
13	4	=B12+B12*$B$4	=$B$3*B13
14	5	=B13+B13*$B$4	=$B$3*B14
15	6	=B14+B14*$B$4	=$B$3*B15
16	7	=B15+B15*$B$4	**=$B$3*B16**

Результат решения:

Решение		
Способ 1		
Период	Дисконтирование	Наращенная сумма
1	1.06	2120
2	1.1236	2247.2
3	1.191016	2382.032
4	1.262477	2524.9539
5	1.338226	2676.4512
6	1.418519	2837.0382
7	1.50363	**3007.2605**

Способ 2

Решение по формуле сложных процентов: БС=ПС*(1+Ставка)^Кпер

В ячейку A22 введем формулу: =B3*(1+B4)^B5

Результат:

	A	B	C
1	Задание 2		
2			
3	сумма вклада	2000	
4	ставка, %	6%	
5	срок, лет	7	
18	Способ 2		
19			
20	БС=ПС*(1+Ставка)^Кпер		
21			
22	3007.260518	=B3*(1+B4)^B5	
23			

Задание 3

Постановка задачи.

В банке размещен депозит в сумме 37000 руб. под 11,5% годовых. Определить размер депозита по истечении 3 лет, если проценты начисляются каждые полгода на размер вклада, выплата процентов не производится.

Алгоритм решения задачи.

Поскольку необходимо рассчитать размер депозита по истечении 3-х лет на основе постоянной процентной ставки, то используем функцию БС (ставка; кпер; плт; пс; тип). Опишем способы задания аргументов данной функции.

В связи с тем, что проценты начисляются каждые полгода, аргумент ставка равен 11,5%/2. Общее число периодов начисления равно 3*2 (аргумент *кпер*). Если решать данную задачу с точки зрения вкладчика, то аргумент пс (начальная стоимость вклада) равный 37 000 руб., задается в виде отрицательной величины (–37 000), поскольку для вкладчика это отток его денежных средств (вложение средств). Если рассматривать решение данной задачи с точки зрения банка, то данный аргумент (пс) должен быть задан в виде положительной величины, т.к. означает поступление средств в банк.

Аргумент *плт* отсутствует, т.к. депозит не пополняется. Аргумент *тип* равен 0, т.к. в подобных операциях проценты начисляются в конце каждого периода (задается по умолчанию). Тогда к концу 3-го года на банковском депозите имеем:
= БС (11,5% /2;3*2;;-37 000) = 51 746,86 руб., с точки зрения вкладчика это доход,
= БС (11,5% /2;3*2;;37 000) = — 51 746,86 руб., с точки зрения банка это расход, т.е. возврат денег банком вкладчику.

На практике, в зависимости от условий финансовой сделки проценты могут начисляться несколько раз в год, например, ежемесячно, ежеквартально и т.д. Если процент начисляется несколько раз в год, то необходимо определение общего числа периодов начисления процентов и ставки процента за период начисления.

В таблице приведены данные для наиболее распространенных методов внутригодового учета процентов.

Расчет данных для различных вариантов начисления процентов:

Метод начисления процентов	Общее число периодов начисления процентов	Процентная ставка за период начисления, %
Ежегодный	N	K
Полугодовой	N*2	K/2
Квартальный	N*4	K/4
Месячный	N*12	K/12
Ежедневный	N*365	K/365

Этот же расчет можно выполнить по формуле (1):

$$Бс = Пс \cdot (1 + Ставка)^{Кпер},$$

где: *Бс* – будущая стоимость (значение) депозита;
Пс – текущая стоимость депозита;
Кпер — общее число периодов начисления процентов;
Ставка — процентная ставка по депозиту за период.

Подставив в формулу числовые данные, получим:

$$Бс = 37000 \cdot (1 + \frac{0,115}{2})^{3 \cdot 2} = 51746,86$$

Примечания

1. При аналитических вычислениях в Excel с помощью функций, связанных с аннуитетом, — БЗРАСПИС, БС, ОБЩДОХОД, ОБЩПЛАТ, ОСПЛТ, ПЛТ, ПРПЛТ, ПС, СТАВКА, ЧИСТВНДОХ, ЧИСТНЗ — используется следующее основное уравнение (2):

$$Пс \cdot (1 + Ставка)^{Кпер} + Плт(1 + Ставка \cdot Тип)\frac{((1 + Ставка)^{Кпер} - 1)}{Ставка} + Бс = 0,$$

в котором наименования параметров Пс, Ставка, Кпер, Плт, Бс соответствуют одноименным встроенным функциям, а параметр Тип определяет обязательность выплаты платежей в начале периода (1) или выплату обычных платежей в конце периода (0).

2. Из уравнения, приведенного выше, могут быть выражены значения бс, пс, ставка, кпер, плт через другие параметры. Эти выражения используются соответствующими функциями Excel.

3. Если ставка равна 0, вместо уравнения (2) используется уравнение:

$$Плт \cdot Кпер + Пс + Бс = 0 \qquad (3)$$

4. Если формула (1) не предусматривает задание денежных потоков, идущих от клиента, со знаком минус, то в формулах (2) и (3) это учтено.

Нахождение решения задачи 1 по формуле (2) дает тот же результат. Иллюстрация решения приведена на рисунке.

	A	B	C	D	E	F
1	**Задача. Вычисление будущей стоимости депозита**					
2						
3	Депозит	Пс	-37000			
4	Периодический платеж	Плт	0			
5	Процентная ставка, годовая		11,50%			
6	Начислений процентов за год		2			
7	Процентная ставка за период	Ставка	5,75%			
8	Срок депозита, лет		3			
9	Общее число периодов	Кпер	6		51 746,86р.	
10	Обязательность платежей	Тип	0			
11	Будущее значение депозита	Бс	51 746,86р.		51 746,86р.	
12						
13						
14						

Расчет с помощью функции БС:
=БС(C7;C9;C4;C3;C10)

Аналитический расчет по формуле (4.1):
=-C3*(1+C7)^C9

Аналитический расчет по формуле (4.2):
=-(C3*(1+C7)^C9+C4*(1+C7)*((1+C7)^C9-1)/C7)

Задание 4

Постановка задачи.

Определить, какая сумма денежных средств накопится на банковском счете, если ежегодно в течение 5 лет вносится 20 тыс. руб. Ставка 17% годовых. Взносы осуществляются в начале каждого года. Выплата процентов не производится.

Алгоритм решения задачи.

Поскольку следует рассчитать будущую стоимость фиксированных периодических выплат на основе постоянной процентной ставки, то воспользуемся функцией БС со следующими аргументами:

= БС (17% ;5;-20000;;1) = 164 136,96 руб.

Результат отображен на рисунке:

	A	B	C
1	Задача.		
2			
3	Периодический платеж	Плт	20,000.00
4	Процентная ставка, годовая		17.00%
5	Начислений процентов за год		1
6	Процентная ставка за период	Ставка	17.00%
7	Срок депозита, лет		5
8	Общее число периодов	Кпер	5
9	Обязательность платежей	Тип	1
10	Будущее значение депозита	БС	164,136.96 ₽

Если бы взносы осуществлялись в конце каждого года, результат был бы:

= БС (17% ;5;-20000) = 140 288 руб.

Результат отображен на рисунке:

Периодический платеж	Плт	20,000.00
Процентная ставка, годовая		17.00%
Начислений процентов за год		1
Процентная ставка за период	Ставка	17.00%
Срок депозита, лет		5
Общее число периодов	Кпер	5
Обязательность платежей	Тип	0
Будущее значение депозита	БС	140,288.00 ₽

В рассмотренной функции не используется аргумент пс, т.к. первоначально на счете денег не было.

Решение задачи может быть найдено с использованием формулы:

$$Бс = Плт \cdot \sum_{i=1}^{Кпер} (1 + Ставка)^i =$$

$$= Плт \cdot (1 + Ставка) + Плт \cdot (1 + Ставка)^2 + \cdots + Плт \cdot (1 + Ставка)^{Кпер}$$

где: *Бс* — будущая стоимость потока фиксированных периодических платежей;

Плт — фиксированная периодическая сумма платежа;

Кпер — общее число периодов выплат;

Ставка — постоянная процентная ставка;

i – номер текущего периода выплаты платежа.

Результат аналитического вычисления:

$$Бс = 20000 \cdot ((1 + 0,17) + (1 + 0,17)^2 + (1 + 0,17)^3 +$$

$$+ (1 + 0,17)^4 + (1 + 0,17)^5) = 164136,96$$

Задание 5

Постановка задачи.

Достаточно ли разместить в банке депозит в сумме 400 000 руб. под 7% годовых для приобретения через 4 года легкового автомобиля стоимостью 600 000 руб.? Банк начисляет проценты на депозит ежемесячно.

Произвести расчеты при разных вариантах процентной ставки и первоначальном взносе.

Алгоритм решения задачи.

Поскольку требуется найти будущее значение суммы депозита через 4 года, для решения поставленной задачи воспользуемся функцией БС. Получим:

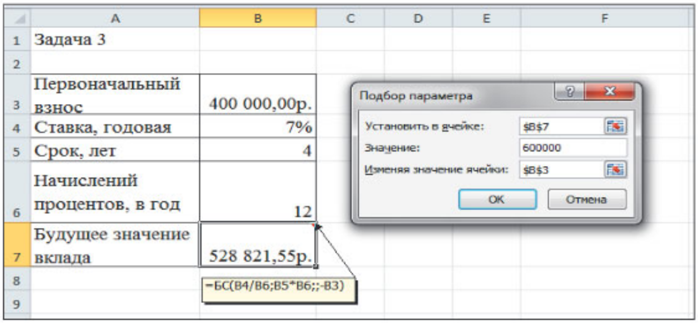
=БС (7%/12;4*12;-400000; 0)= 528 821,55р.

Как видим, найденная сумма недостаточна для совершения покупки. Существует два варианта решения: первоначально положить на счет большую сумму или воспользоваться банком, где предусмотрена большая процентная ставка. Внесение дополнительных платежей рассматривать не будем.

1 вариант

Для определения необходимой суммы исходные данные задачи представим в виде таблицы и воспользуемся средством Подбор параметра из меню *Данные → Анализ «что если»*.

Иллюстрация решения представлена на рисунке.

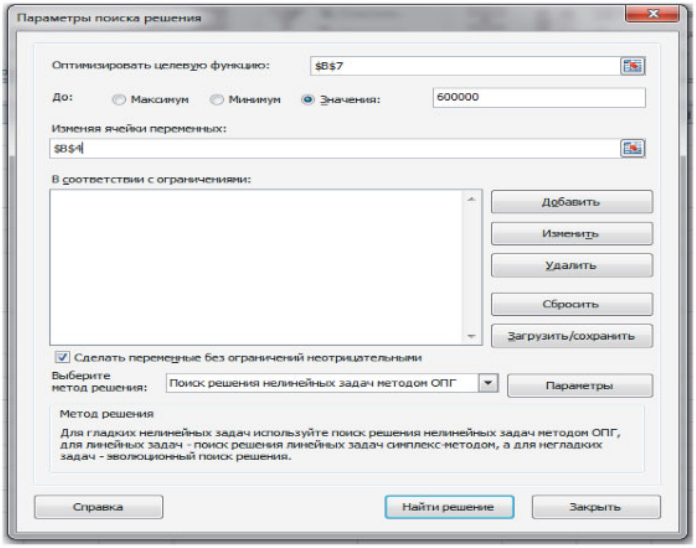


После подтверждения введенных данных в ячейке B7 установится значение 600 000,00р., а в ячейке B3 отобразится результат — 453 839,30р.

2 вариант

Для нахождения нужной процентной ставки можно также применить средство *Подбор параметра*, изменяя ячейку, в которой находится процентная ставка. Однако воспользуемся другим инструментом — *Поиск решения* из меню *Данные*[1]. Для этого в диалоговом окне *Параметры поиска решений* в поле *Оптимизировать целевую функцию* укажем адрес ячейки, содержащей формулу; установим переключатель До значения и введем требуемую сумму (в данном случае 600 000). В поле *Изменяя ячейки переменных* укажем адрес ячейки, в которой содержится процентная ставка. Активизируя кнопку *Параметры*, в открывшемся диалоговом окне *Параметры* установим точность ограничения и число итераций. По кнопке *ОК* возвращаемся в окно *Параметры поиска решений*. Ввод данных подтверждается кнопкой *Найти решение*. В результате выполнения вычислений в ячейке B4 будет получено значение переменной (10%), при которой функция БС принимает значение равное 600 000.

Иллюстрация решения представлена на рисунке.

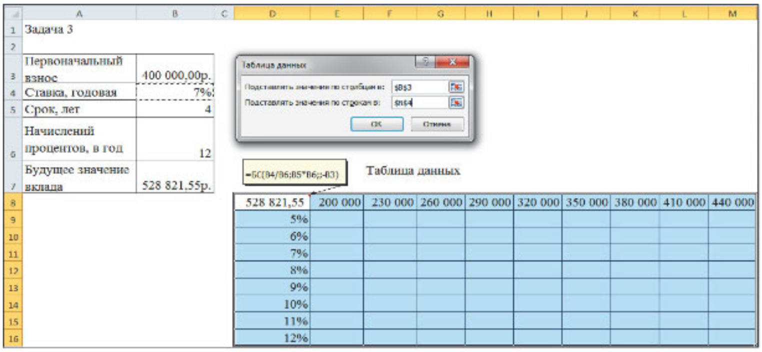


[1] Подбор параметра и Поиск решения используют итерационные методы и позволяют получить результат с заданной точностью.

Для анализа влияния процентной ставки и первоначальной суммы взноса на зависящую от них формулу расчета будущей суммы вклада можно воспользоваться таким инструментом как *Таблицей данных* из меню *Данные → Анализ «что если»*.

В дополнение к исходным данным задачи, наметим контуры будущей таблицы данных: в ячейки D9:D16 введем процентные ставки, в ячейки E8:M8 — первоначальные взносы, в ячейку D8 введем формулу расчета будущего значения единой суммы вклада, ссылаясь на исходные данные задачи. Затем выполним необходимые действия по инициализации средства Таблица данных и внесения в соответствующее поле подстановки по столбцам значения адреса ячейки, содержащей первоначальный взнос, а в поле подстановки по строкам значения адреса ячейки с процентной ставкой. После нажатия ОК в диалоговом окне Таблица данных, таблица заполнится рассчитанными значениями.

Иллюстрация окна Excel после задания параметров для таблицы данных представлена на рисунке.



Результат формирования таблицы данных показан на рисунке.

528 821,55	200 000	230 000	260 000	290 000	320 000	350 000	380 000	410 000	440 000
5%	244179	280806	317433	354060	390687	427313	463940	500567	537194
6%	254098	292213	330327	368442	406557	444671	482786	520901	559015
7%	264411	304072	343734	383396	423057	462719	502380	542042	581704
8%	275133	316403	357673	398943	440213	481483	522753	564023	605293
9%	286281	329223	372165	415108	458050	500992	543934	586876	629818
10%	297871	342551	387232	431913	476593	521274	565955	610635	655316
11%	309920	356408	402895	449383	495871	542359	588847	635335	681823
12%	322445	370812	419179	467546	515912	564279	612646	661013	709379

Из анализа результатов таблицы данных следует, что для получения заданной суммы в 600 000 руб. необходимо положить на депозит либо 440 000 руб. под 8% годовых, либо 380 000 руб. под 12% годовых (требуемые результирующие значения находятся в правом нижнем углу сформированной таблицы данных).

Задание 6

Постановка задачи.

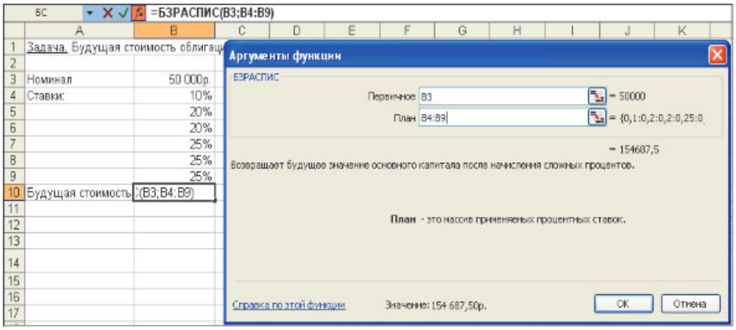
По облигации номиналом 50 000 руб., выпущенной на 6 лет, предусмотрен следующий порядок начисления купона: в первый год — 10%, в следующие два года — 20%, в оставшиеся три года — 25%.

Определить будущую стоимость облигации с учетом переменной процентной ставки.

Алгоритм решения задачи.

Поскольку процентная ставка меняется со временем, но является постоянной на протяжении каждого из периодов одинаковой продолжительности, то для расчета будущего значения инвестиции по сложной процентной ставке следует воспользоваться функцией БЗРАСПИС (первичное; план).

Иллюстрация решения задачи представлена на рисунке.



Результат решения задачи — 154 687,50 р. может быть найден и при явной записи функции БЗРАСПИС. Массив процентных ставок в этом случае следует ввести в фигурных скобках:

=БЗРАСПИС(50 000; {0,1; 0,2; 0,2; 0,25; 0,25; 0,25}) = 154687,50

Для вычислений будущей стоимости функция БЗРАСПИС использует следующую формулу:

$$Бзраспис = Пс \cdot (1 + Ставка_1) \cdot (1 + Ставка_2) \cdot \ldots \cdot (1 + Ставка_{Кпер})$$

где: *Бзраспис* — будущая стоимость инвестиции при переменной процентной ставке;

Пс — текущая стоимость инвестиции;

Кпер — общее число периодов;

$Ставка_i$ — процентная ставка в i-й период.

Расчеты по указанной формуле дают тот же результат:

$$Бзраспис = 50000 \cdot (1+0,1) \cdot (1+0,2) \cdot (1+0,2) \cdot (1+0,25) \cdot (1+ \\ +0,25) \cdot (1+0,25) = 154687,50$$

Задания для самостоятельной работы

1. В банке размещен двухлетний депозит в сумме 30 тыс. руб. под 12% годовых. Начисление процентов производится ежеквартально. Определить величину депозита в конце срока размещения.

2. Существует два варианта размещения 50 тыс. руб. в банке в течение трех лет: в начале каждого года под 19% годовых или в конце каждого года под 27% годовых. Определить наиболее предпочтительный вариант.

3. Два клиента банка в течение нескольких лет вносят одинаковые фиксированные денежные суммы под 14% годовых. Один клиент делает взнос в начале каждого квартала, другой — в конце каждого месяца. Определить размеры накопленных клиентами к концу пятого года сумм, если общая сумма взносов каждого из них за год равнялась 12 тыс. руб.

4. Определить итоговую величину депозита, если сумма размером 7 тыс. руб. размещена в банке под 11% годовых сроком на 27 месяцев с ежеквартальным начислением процентов.

5. В начале каждого месяца на депозитный счет в банке под 13,5% годовых вносится 1 тыс. руб. Определить накопленную за 3 года сумму вклада.

6. Существует два варианта размещения денежных средств в банке: 3-х месячный депозит под 15% годовых или 6-месячный депозит под 17% годовых. Как выгоднее вкладывать деньги на полгода: дважды на 3 месяца или один раз на 6 месяцев?

7. Рассчитать будущую стоимость облигации номиналом 100 тыс. руб., выпущенной на 4 года, если предусмотрен следующий порядок начисления купона: в первый год — 12,5%, в следующие два года — 14%, в последний год — 17% годовых.

8. Корпорация планирует ежеквартально в течение 8-ми лет делать отчисления по 2 000 руб. для создания фонда выкупа своих облигаций. Средства размещаются на депозит в банке под 10% годовых. Выплата процентов не осуществляется. Какая сумма будет накоплена к концу срока сделки? Выплата процентов не осуществляется.

9. Если Вы занимаете 30 000 рублей на два года под 8% годовых, то сколько всего денег Вы должны возвратить?

10. Если начальный баланс на счете 6 000 рублей и ежемесячный взнос 500 рублей (в конце каждого месяца), то сколько можно накопить за три года при ставке 0,75% в месяц? Проценты выплачиваются только в конце срока.

Литература

Гобарева Я.Л., Городецкая О.Ю., Золотарюк А.В. Бизнес-аналитика средствами Excel: учеб. пособие. — М.: ИНФРА-М, 2017.

Практикум 13. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЕЖЕМЕСЯЧНЫХ ВЫПЛАТ ПО КРЕДИТУ ПРИ ЗАДАННЫХ УСЛОВИЯХ

Расчет периодических платежей, связанных с погашением займов

Среди финансовых функций Excel выделяются функции, связанные с периодическими выплатами:

Формат	Назначение
ПЛТ (ставка; кпер; пс; бс; тип)	Вычисляет сумму периодического платежа для аннуитета на основе постоянства сумм платежей и постоянства процентной ставки.
ОСПЛТ (ставка; период; кпер; пс; бс; тип)	Возвращает величину платежа в погашение основной суммы по инвестиции за данный период на основе постоянства периодических платежей и постоянства процентной ставки.
ПРПЛТ (ставка; период; кпер; пс; бс; тип)	Возвращает сумму платежей процентов по инвестиции за данный период на основе постоянства сумм периодических платежей и постоянства процентной ставки.

Формат	Назначение
ОБЩДОХОД (ставка; кол_пер; нз; нач_период; кон_период; тип)	Возвращает кумулятивную (нарастающим итогом) сумму основных выплат по займу между двумя периодами.
ОБЩПЛАТ (ставка; кол_пер; нз; нач_период; кон_период; тип)	Возвращает кумулятивную (нарастающим итогом) величину процентов в промежутке между двумя периодами выплат.

Практические задания

Задание 1

Постановка задачи.

Клиенту банка необходимо накопить на депозите 200 тыс. руб. за 2 года. Клиент обязуется вносить в начале каждого месяца постоянную сумму. Ставка по депозиту 9% годовых. Какой должна быть эта сумма?

Алгоритм решения задачи.

Для определения ежемесячных выплат применяется функция ПЛТ с аргументами: Ставка = 9%/12 (ставка процента за месяц); Кпер = 2*12 = 24 (общее число месяцев начисления процентов); Бс = 200 (будущая стоимость депозита); Тип = 1, так как депозиты пренумерандо.

Тогда величина ежемесячных выплат равна:

= ПЛТ (9%/12; 24; ; 200; 1) = –7,58 тыс. руб.

Результат со знаком «минус», так как 7,58 тыс. руб. клиент ежемесячно вносит в банк.

Иллюстрация решения задачи приведена на рисунке 1.

Выплаты, определяемые функцией ПЛТ, включают основные платежи и платежи по процентам. Расчет выполняется по формуле (1):

$$Плт = -\left(\frac{(Бс + Пс \cdot (1 + Ставка)^{Кпер}) \cdot Ставка}{(1 + Ставка \cdot Тип) \cdot ((1 + Ставка)^{Кпер} - 1)}\right) \qquad (1)$$

Расчет задачи по формуле (1) дает тот же результат:

$$Плт = -\left(\frac{200000 \cdot 0{,}0075}{(1 + 0{,}0075) \cdot ((1 + 0{,}0075)^{24} - 1)}\right) =$$

$$= \frac{-1500}{1{,}0075 \cdot 0{,}1964135} = -7\,580{,}10 \text{ руб.}$$

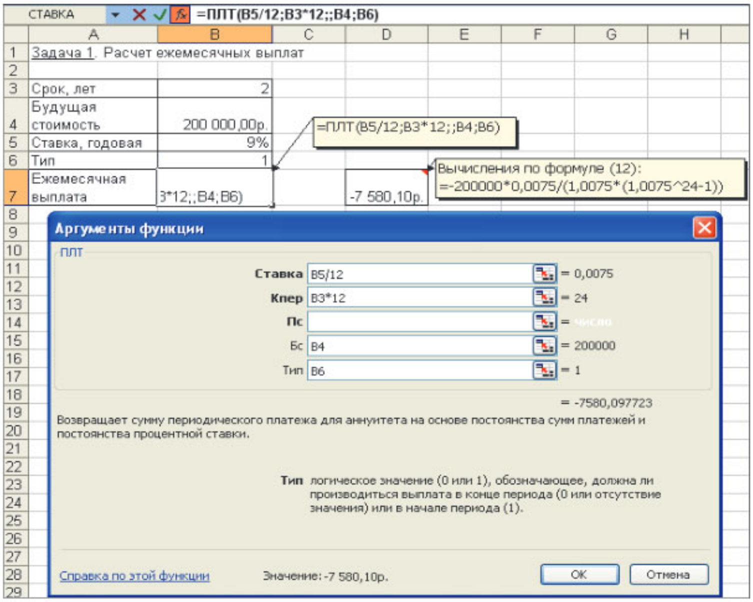


Рис. 78. Иллюстрация применения функции ПЛТ

Задание 2

Постановка задачи.

Банком предоставлен кредит физическому лицу в сумме 5000 руб. под 6% годовых на срок 6 месяцев. Определить ежемесячные платежи (по основному долгу и процентам) клиента. Платежи осуществляются в конце месяца.

Алгоритм решения задачи.

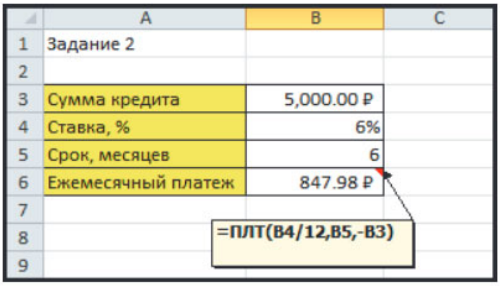
Для определения ежемесячных платежей клиента воспользуемся функцией ПЛТ, а также выполним расчет по формуле (1):

$$= \text{ПЛТ}\,(6\%/12;\ 6;\ \text{-}5000) = 847{,}98 \text{ руб.}$$

$$Плт = -\left(\frac{5000 \cdot (1+0{,}005)^6 \cdot 0{,}005}{(1+0{,}005)^6 - 1}\right) =$$

$$= \frac{-25 \cdot 1{,}030378}{1{,}005 \cdot 0{,}030378} = 847{,}98 \text{ руб.}$$

Иллюстрация решения задачи приведена на рисунке 2.



	A	B	C
1	Задание 2		
2			
3	Сумма кредита	5,000.00 ₽	
4	Ставка, %	6%	
5	Срок, месяцев	6	
6	Ежемесячный платеж	847.98 ₽	
7			
8			
9			

Рис. 79. Иллюстрация применения функции ПЛТ для решения задачи 2

Отметим, что для банка выданный кредит — это отрицательная величина, а рассчитанные ежемесячные поступления от клиента — положительная величина.

Задание 3

Постановка задачи.

Определить платежи по процентам за первый месяц по кредиту в 100 000 руб., выданному на три года по ставке 10% годовых.

Алгоритм решения задачи.

Для определения платежа по процентам за первый месяц заданного периода применим функцию ПРПЛТ со следующими аргументами: *Ставка* = 10%/12 (процентная ставка за месяц); *Период* = 1 (месяц); *Кпер* = 3*12 = 36 (месяцев), *Пс* = 100 000 (величина займа). Тогда платежи по процентам за первый месяц составят:

= ПРПЛТ (10%/12; 1; 36; 100000) = –833,33 руб.

Знак «минус» означает, что платеж по процентам необходимо внести.

Иллюстрация решения задачи приведена на рисунке 3.

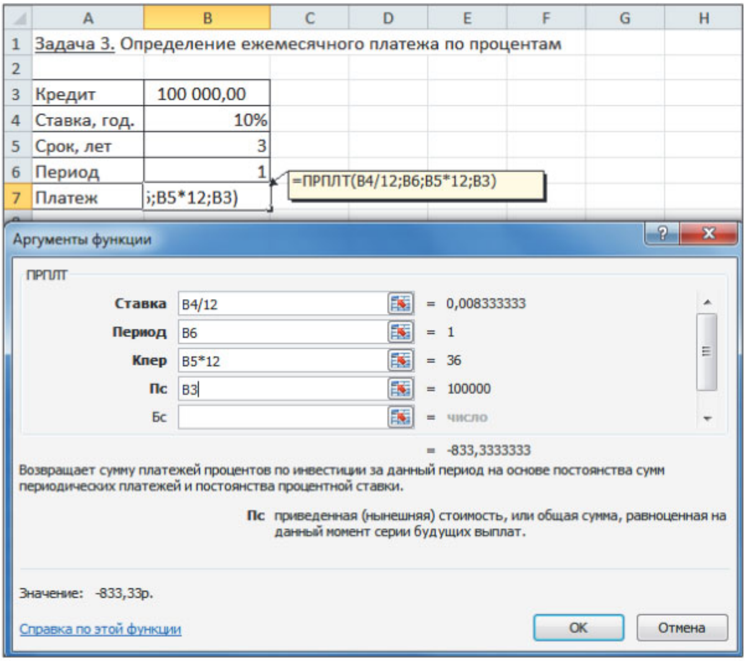


Рис. 80. Фрагмент окна с использованием функции ПРПЛТ

Задание 4

Постановка задачи.

Клиент ежегодно в течение 5 лет вносил деньги на депозит в банке и накопил 40 000 руб. Проценты реинвестируются.

Определить, какой доход получил клиент банка за последний год, если годовая ставка составила 13,5%.

Алгоритм решения задачи.

Доход за последний пятый год представляет собой сумму процентов, начисленных на накопленную сумму вложений.

Для расчета воспользуемся функцией ПРПЛТ:

= ПРПЛТ(13,5%; 5; 5; ; 40000) = 4030,77 руб.

Заметим, что при решении данной задачи значения аргументов функции ПРПЛТ Пс и Тип не указываются (считаются равными 0).

Иллюстрация решения задачи приведена на рис. 81.

	A	B	C
1	Задача.		
2			
3	Будущая стоимость	40,000.00 ₽	
4	Ставка, год.	13.50%	
5	Срок, лет	5	
6	Период	5	
7	Доход по % за 5-й год	**4,030.77 ₽**	
8			
9		=ПРПЛТ(B4,B6,B5,,B3)	
10			

Рис. 81. Фрагмент окна с использованием функции ПРПЛТ для решения задачи 4

Задание 5

Постановка задачи.

Определить значение основного платежа для первого месяца кредита в сумме 60 000 руб., выданного на два года по ставке 12% годовых. Проценты реинвестируются.

Алгоритм решения задачи.

Сумма основного платежа по кредиту вычисляется с помощью функции ОСПЛТ:

= ОСПЛТ (12% /12; 1; 24; 60000) = –2 224,41руб.

Иллюстрация решения показана на рис. 82.

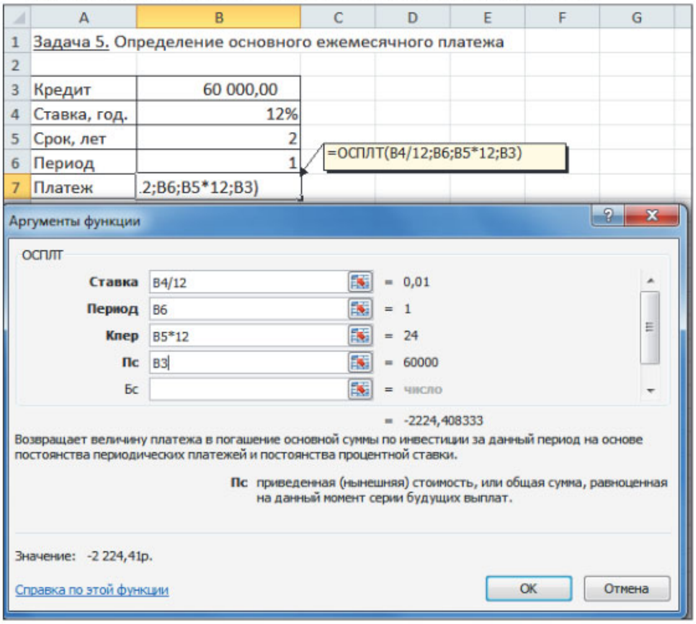


Рис. 82. Фрагмент окна с использованием функции ОСПЛТ

Знак «минус» в результате означает, что сумму основного долга по займу необходимо внести.

Отметим, что сумма выплаты по процентам, вычисляемая с помощью функции ПРПЛТ, и сумма основной выплаты за период, рассчитанная с помощью функции ОСПЛТ, равны полной величине выплаты, вычисляемой с помощью функции ПЛТ.

Например, для ранее приведенной задачи 2 ежемесячная выплата клиента составляет:

= ПЛТ (6% /12; 6; -5000) = 847,98 руб.

Размер основного платежа:

= ОСПЛТ (6% /12; 1; 6; -5000) = 822,98 руб.

Размер платежа по процентам:

= ПРПЛТ (6% /12; 1; 6; -5000) = 25,00 руб.

Задание 6

Постановка задачи.

Банк предоставил кредит компании в размере 500 тыс. долларов сроком на 10 лет под 10,5% годовых; проценты начисляются ежемесячно.

Определить сумму выплат по процентам за первый месяц и за третий год периода.

Алгоритм решения задачи.

Для вычисления суммы платежей по процентам за требуемые смежные периоды воспользуемся функцией ОБЩПЛАТ (рис. 6).

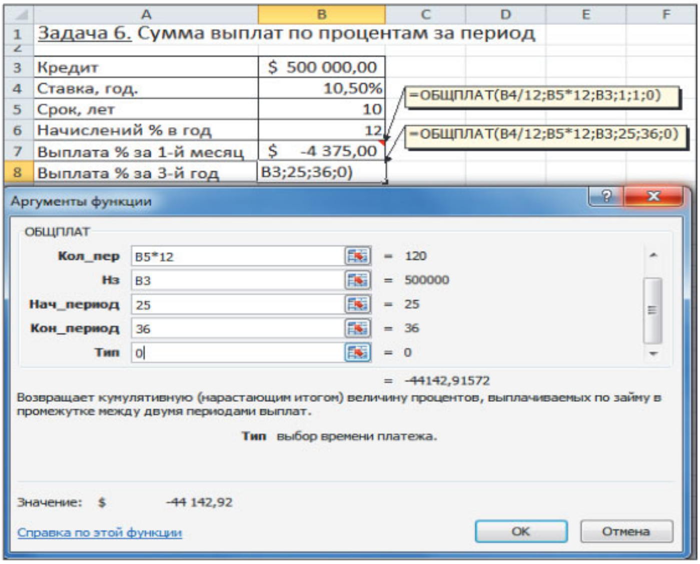


Рис. 83. Фрагмент окна с использованием функции ОБЩПЛАТ

Аргументы функции: *Кол_пер* = 10*12 = 120 месяцев (общее число выплат); *Ставка* = 10,5%/12 (процентная ставка за месяц); *Нз* = 500 000 (кредит); *Тип* = 0; для выплаты процентов за 1-й месяц *Нач_период* = 1 и *Кон_период* = 1, для выплаты процентов за 3-й год *Нач_период* = 25 и *Кон_период* = 36.

Выплата за первый месяц составит:

= ОБЩПЛАТ(10,5%/12; 120; 500; 1; 1; 0) = –4 375 долл.

Сумма выплат по процентам за третий год периода составит:

= ОБЩПЛАТ (10,5%/12; 120; 500; 25; 36; 0) =
= –44 142, 92 долл.

Задание 7

Постановка задачи.

Кредит в сумме 1 млн. руб. выдан сроком на 3 года по ставке 13% годовых; проценты начисляются ежеквартально. Определить величину основных выплат по кредиту за второй год.

Алгоритм решения задачи.

Предположим, что кредит погашается равными платежами в конце каждого расчетного периода. Тогда для расчета суммы основных выплат за второй год применим функцию ОБЩДОХОД. Аргументы функции: *Кол_пер* = 3*4 = 12 кварталов (общее число расчетных периодов); *Ставка* = 13%/4 (процентная ставка за расчетный период — квартал); *Нз* = 1000000; *Нач_период* = 5 и *Кон_период* = 8 (второй год платежа по кредиту — это период с 5 по 8 квартал); *Тип* = 0.

= ОБЩДОХОД (13%/4; 12; 1000000; 5; 8; 0) =
= –331522,23 руб.

Иллюстрация решения задачи представлена на рис. 84.

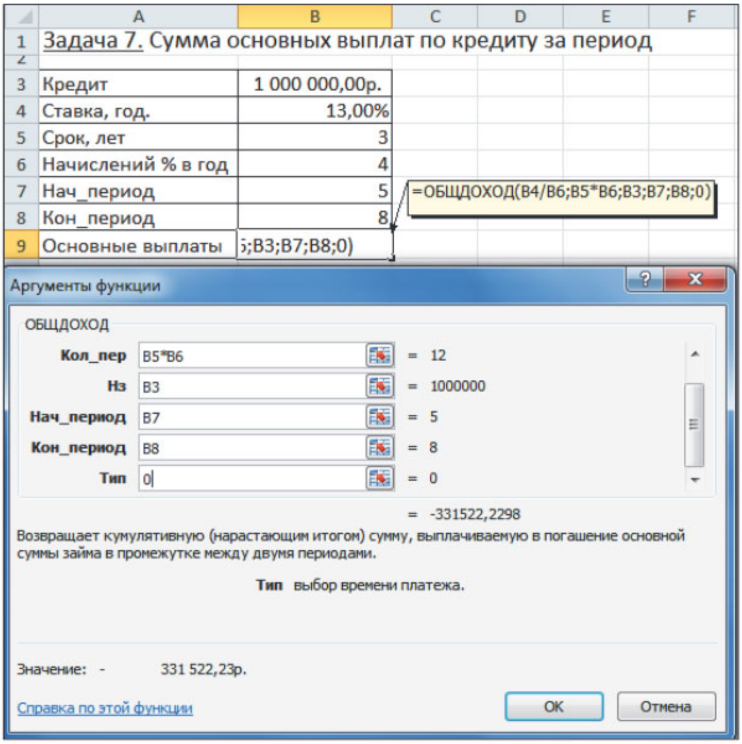


Рис. 84. Фрагмент окна с использованием функции ОБЩДОХОД

Задание 8

Постановка задачи.

Банком выдан кредит в 500 тыс. руб. сроком на 3 года по ставке 10% годовых. Дата выдачи кредита 15 сентября 2017 г. Кредит должен быть погашен равными долями, выплачиваемыми в конце каждого месяца. Разработать план погашения кредита, представив его в виде таблицы с графами: Номер периода, Дата платежа, Баланс на конец периода, Основной долг, Проценты, Накопленный долг, Накопленный процент.

Алгоритм решения задачи.

Для решения данной задачи воспользуемся инструментом автоматизации заполнения документа. Для этого введем *исходные данные* задачи в ячейки электронной таблицы (например, в диапазон B4:B8 введем соответственно числовые значения величины кредита, его срока, действующей процентной ставки, а также количества начислений процентов в год, дата выдачи кредита). Определим структуру таблицы плана погашения кредита (пусть наименования столбцов плана занесем в диапазон D3:J3). Расчет числовых значений выполним с помощью финансовых функций Excel, а также воспользуемся такими широко употребляемыми функциями, как ЕСЛИ и И.

Пусть в ячейку I2 внесем формулу расчета фиксированного периодического платежа: =ЕСЛИ(B4<>»»;ПЛТ(B6/B7;B5*B7;-B4;;0);»»). Такая запись формулы обеспечит появление результата только в случае задания размера кредита.

Далее начнем формирование собственно таблицы — плана погашения кредита. Начнем со столбца Номер периода. Для появления 1-го номера периода в ячейку D4 введем формулу: =ЕСЛИ(И(B4<>»»;B5<>»»;B6<>»»;B7<>»»;B8<>»»; 1;»»). С целью обеспечения последующего появления номеров периода введем в ячейку D5 формулу: =ЕСЛИ(D4<$B$5*$B$7;D4+1;»»).

Для получения возможности автозаполнения (копирования) формул, введенных для первого периода плана, на другие периоды, воспользуемся функцией ЕСЛИ и соответствующими финансовыми функциями, в которых укажем абсолютные ссылки на исходные данные. С этой целью в ячейки диапазона E4:J4 введем соответственно формулы:

=ЕСЛИ(D4<>»»;ДАТАМЕС($B$8;D4);»»)

=ЕСЛИ(D4<>»»;$B$4-I4;»»)

=ЕСЛИ(D4<>»»;ОСПЛТ($B$6/$B$7;D4;$B$5*$B$7;-$B$4;;0);»»)

=ЕСЛИ(D4<>»»;ПРПЛТ($B$6/$B$7;D4;$B$5*$B$7;-$B$4;;0);»»)
=ЕСЛИ(D4<>»»;-ОБЩДОХОД($B$6/$B$7;$B$5*$B$7;$B$4;$D$4;D4;0);»»)
=ЕСЛИ(D4<>»»;-ОБЩПЛАТ($B$6/$B$7;$B$5*$B$7;$B$4;$D$4;D4;0);»»)

После выполнения указанных действий план погашения кредита будет выглядеть так, как показано на рисунке 8. Для лучшего понимания ячейки с формулами иллюстрированы примечаниями.

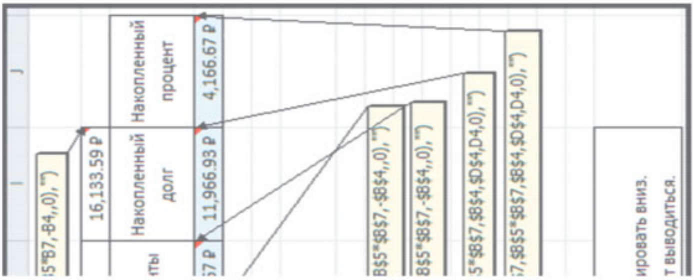
Дальнейшие действия являются абсолютно простыми. Следует скопировать вниз на весь столбец (необязательно по числу записей в плане погашения кредита) содержимое ячеек D5, E4, F4, G4, H4 и I4 J4.

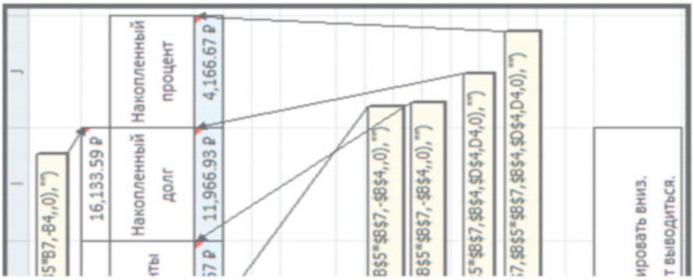
Отметим, что в ячейки E4:J4 можно ввести более простые формулы, составляющие только значение 2-го аргумента функции ЕСЛИ:

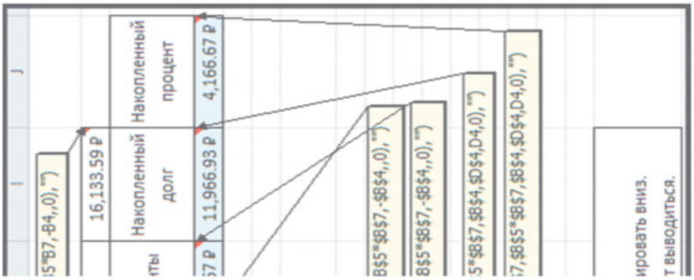
=ДАТАМЕС($B$8;D4)
=$B$4-I4
=ОСПЛТ($B$6/$B$7;D4;$B$5*$B$7;-$B$4;;0)
=ПРПЛТ($B$6/$B$7;D4;$B$5*$B$7;-$B$4;;0)
=-ОБЩДОХОД($B$6/$B$7;$B$5*$B$7;$B$4;$D$4;D4;0)
=-ОБЩПЛАТ($B$6/$B$7;$B$5*$B$7;$B$4;$D$4;D4;0)

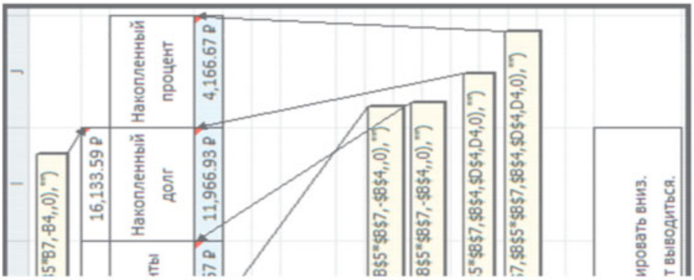
Однако в этом случае на разработчика возлагается задача самостоятельного отслеживания числа записей в плане погашения кредита во избежание появления сообщений об ошибке при указании «лишних» записей.

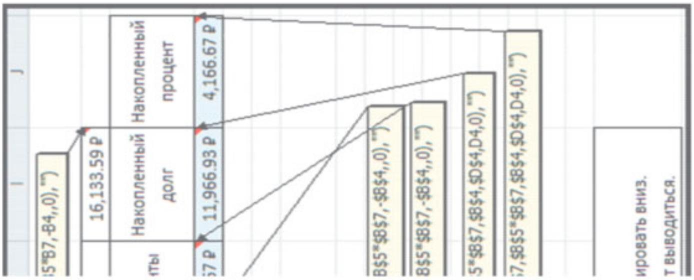
План погашения кредита будет полностью сформирован (рис. 85).

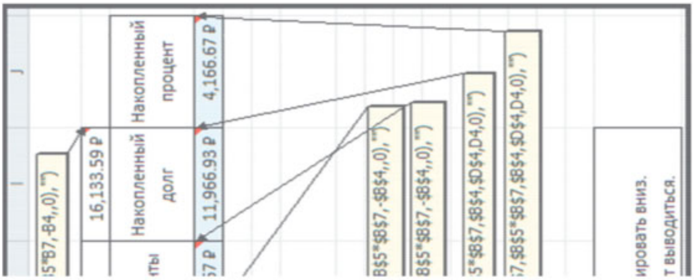

J
I
Накопленный процент
4,166.67 ₽
Накопленный долг
11,966.93 ₽
16,133.59 ₽
ировать вниз.
т выводиться.

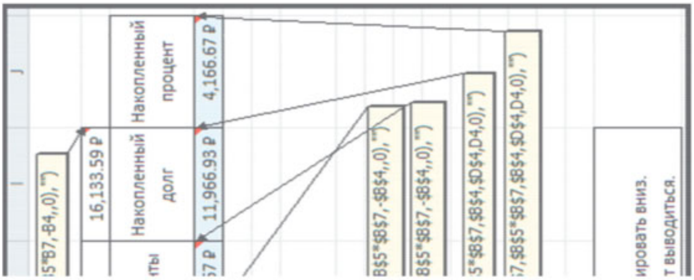

J
I
Накопленный процент
4,166.67 ₽
Накопленный долг
11,966.93 ₽
16,133.59 ₽

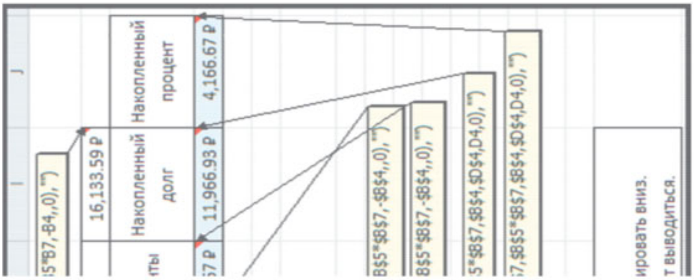

Накопленный процент
4,166.67 ₽
Накопленный долг
11,966.93 ₽
16,133.59 ₽

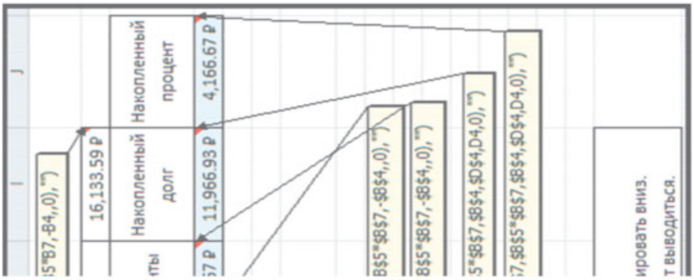

Накопленный процент
4,166.67 ₽
Накопленный долг
11,966.93 ₽
16,133.59 ₽

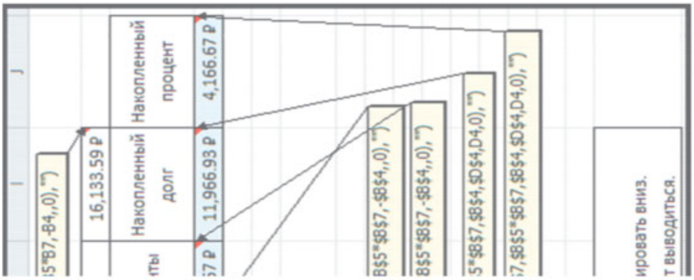

J
I
Накопленный процент
4,166.67 ₽
Накопленный долг
11,966.93 ₽
16,133.59 ₽

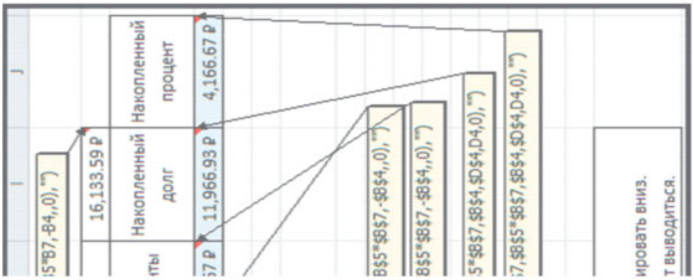

Накопленный процент
4,166.67 ₽
Накопленный долг
11,966.93 ₽
16,133.59 ₽

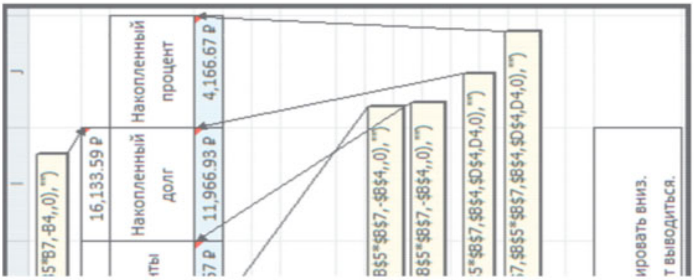

J
I
Накопленный процент
4,166.67 ₽
Накопленный долг
11,966.93 ₽
16,133.59 ₽
ировать вниз.
т выводиться.

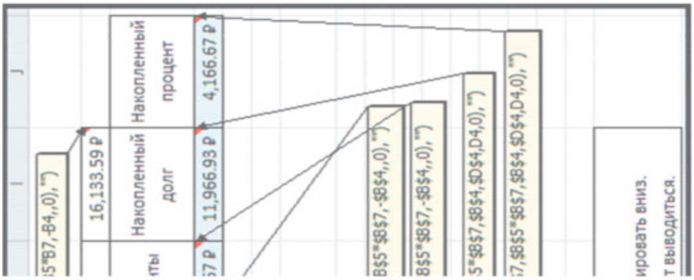

J
I
Накопленный процент
Накопленный долг
16,133.59 ₽
4,166.67 ₽
11,966.93 ₽

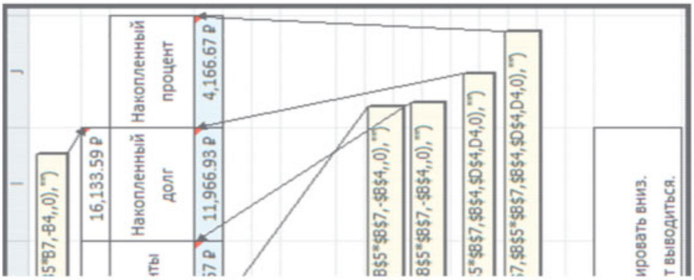

Накопленный процент
4,166.67 ₽
Накопленный долг
11,966.93 ₽
16,133.59 ₽

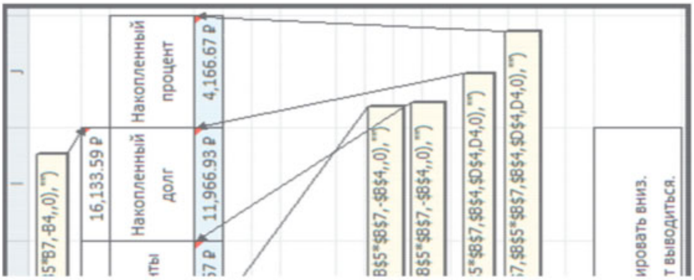

Накопленный процент
4,166.67 ₽
Накопленный долг
11,966.93 ₽
16,133.59 ₽

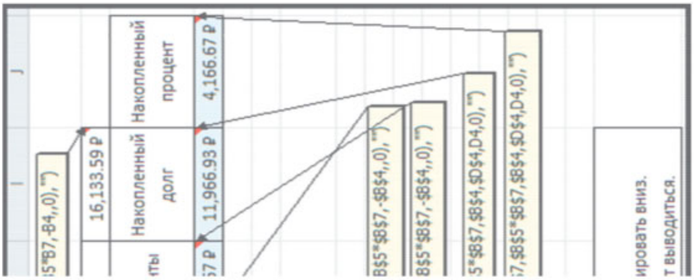

J
I
Накопленный процент
4,166.67 ₽
Накопленный долг
11,966.93 ₽
16,133.59 ₽

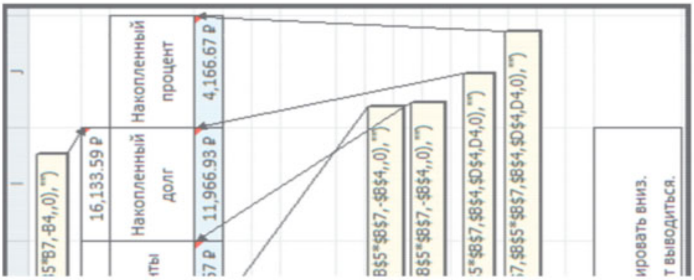

Накопленный процент
4,166.67 ₽
Накопленный долг
11,966.93 ₽
16,133.59 ₽

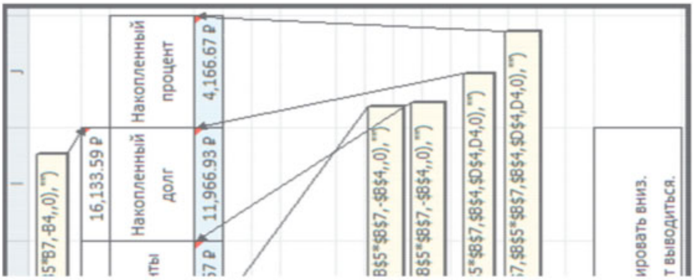

J
I
Накопленный процент
4,166.67 ₽
Накопленный долг
11,966.93 ₽
16,133.59 ₽

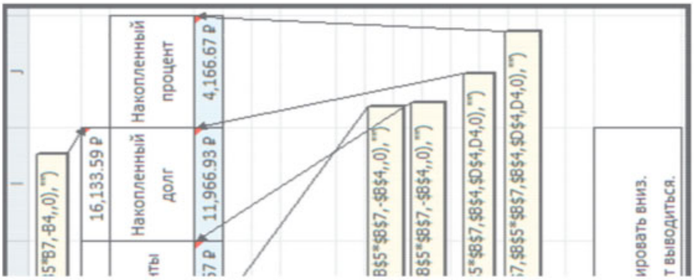

Накопленный процент
4,166.67 ₽
Накопленный долг
11,966.93 ₽
16,133.59 ₽

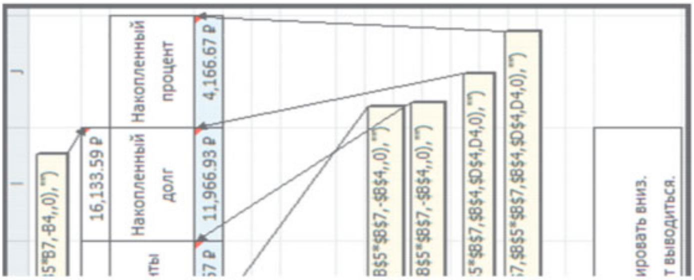

Накопленный процент
4,166.67 ₽
Накопленный долг
11,966.93 ₽
16,133.59 ₽

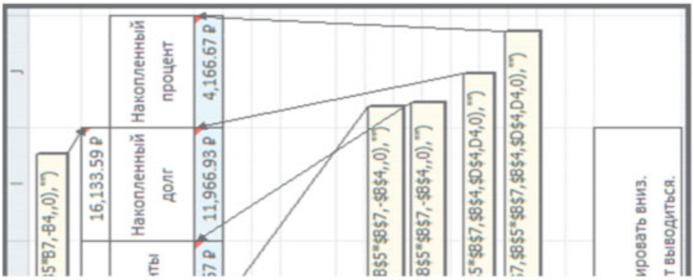

Накопленный процент
4,166.67 ₽
Накопленный долг
11,966.93 ₽
16,133.59 ₽

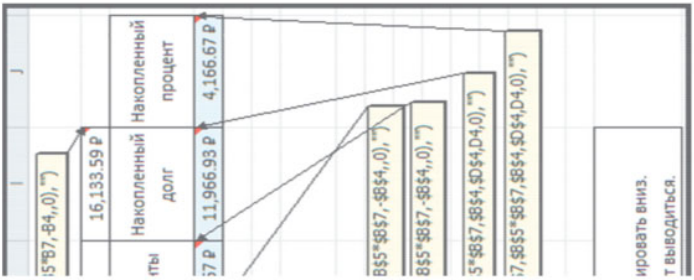

Накопленный процент
4,166.67 ₽
Накопленный долг
11,966.93 ₽
16,133.59 ₽

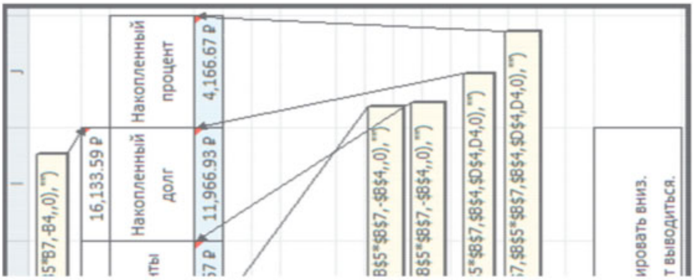

Накопленный процент
4,166.67 ₽
Накопленный долг
11,966.93 ₽
16,133.59 ₽

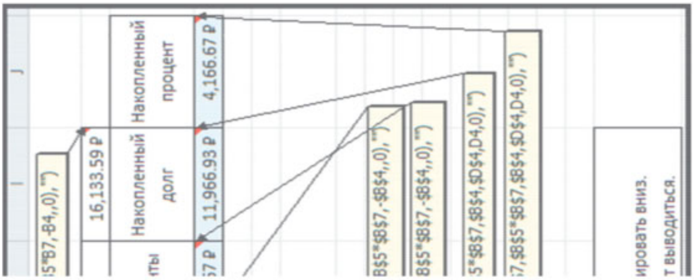

Накопленный процент
4,166.67 ₽
Накопленный долг
11,966.93 ₽
16,133.59 ₽

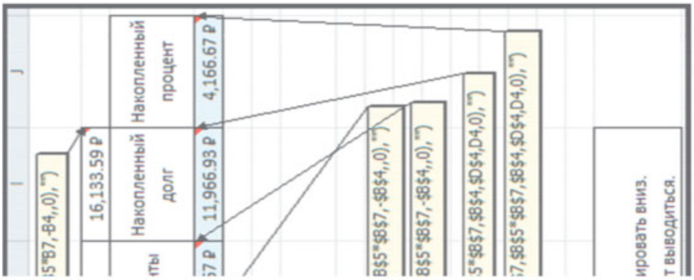

J
I
Накопленный процент
4,166.67 ₽
Накопленный долг
11,966.93 ₽
16,133.59 ₽

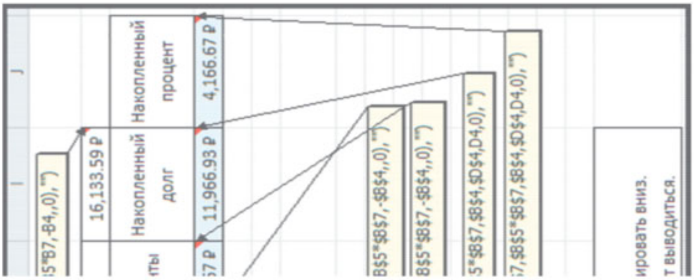

Накопленный процент
4,166.67 ₽
Накопленный долг
11,966.93 ₽
16,133.59 ₽

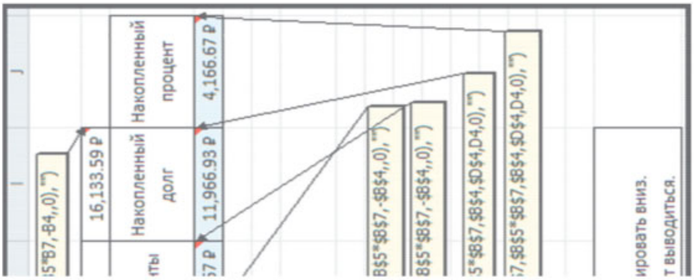

J
I
Накопленный процент
4,166.67 ₽
Накопленный долг
11,966.93 ₽
16,133.59 ₽

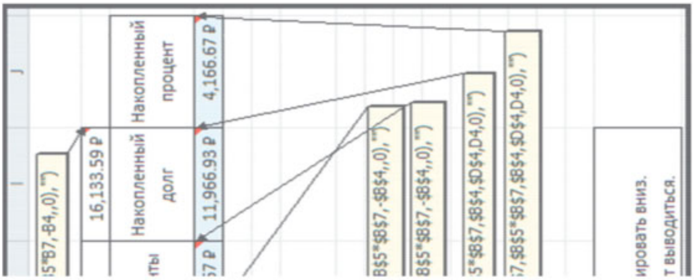

Накопленный процент
4,166.67 ₽
Накопленный долг
11,966.93 ₽
16,133.59 ₽

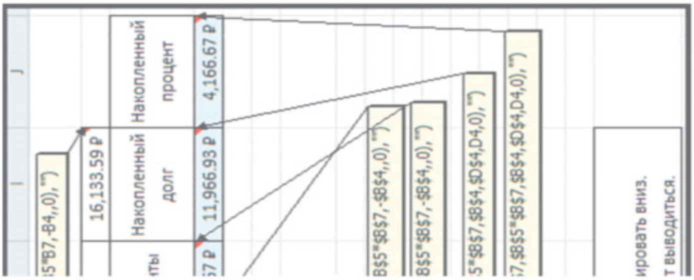

Накопленный процент
4,166.67 ₽
Накопленный долг
11,966.93 ₽
16,133.59 ₽

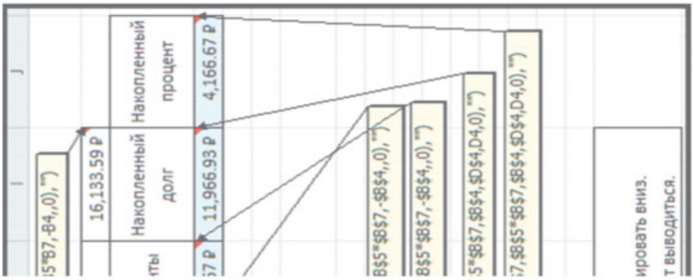

Накопленный процент
4,166.67 ₽
Накопленный долг
11,966.93 ₽
16,133.59 ₽

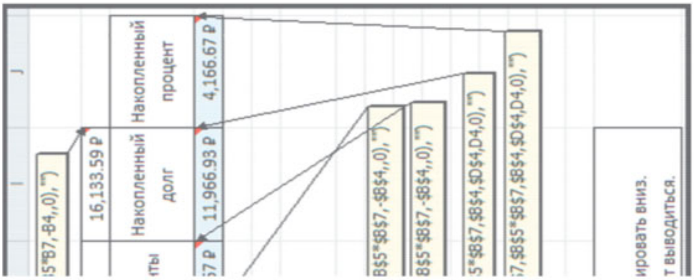

Накопленный процент
4,166.67 ₽
Накопленный долг
11,966.93 ₽
16,133.59 ₽

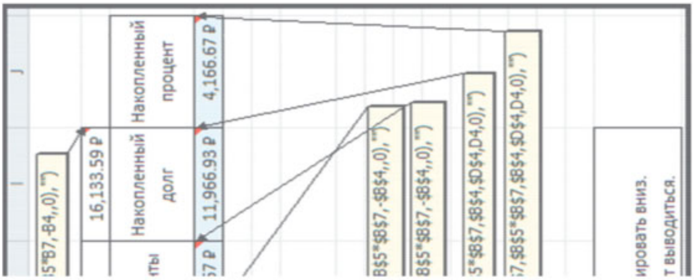

Накопленный процент
4,166.67 ₽
Накопленный долг
11,966.93 ₽
16,133.59 ₽

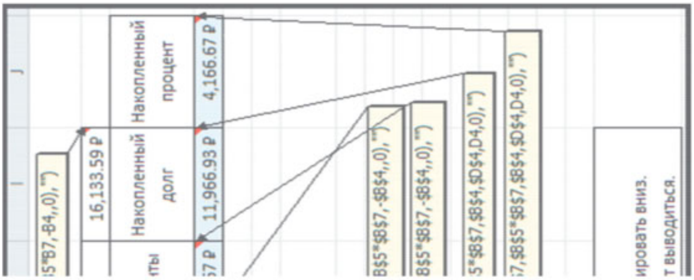

J
I
Накопленный процент
4,166.67 ₽
Накопленный долг
11,966.93 ₽
16,133.59 ₽
ировать вниз.
т выводиться.

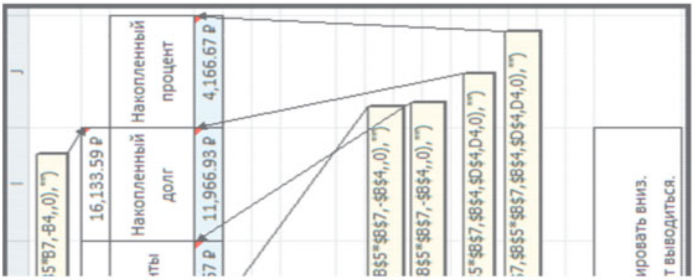

Накопленный процент
4,166.67 ₽
Накопленный долг
11,966.93 ₽
16,133.59 ₽

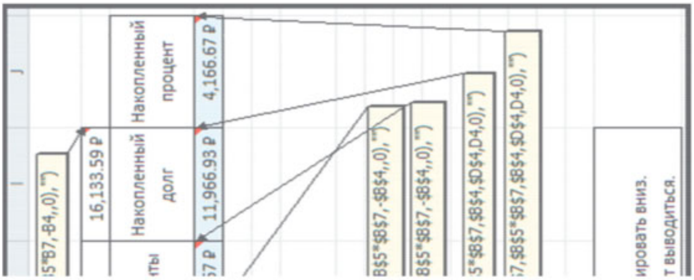

J
I
Накопленный процент
4,166.67 ₽
Накопленный долг
11,966.93 ₽
16,133.59 ₽

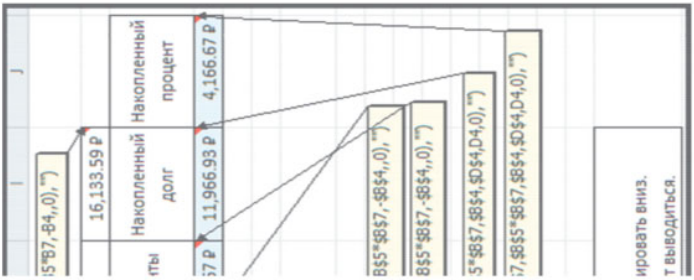

Накопленный процент
4,166.67 ₽
Накопленный долг
11,966.93 ₽
16,133.59 ₽

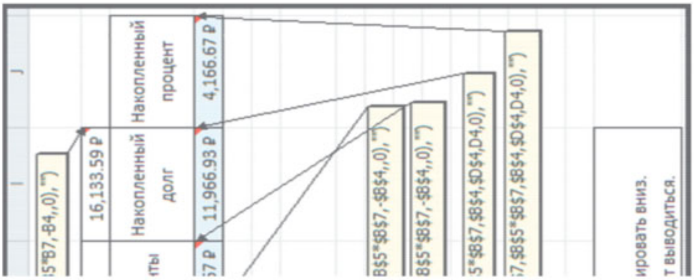

Накопленный процент
4,166.67 ₽
Накопленный долг
11,966.93 ₽
16,133.59 ₽

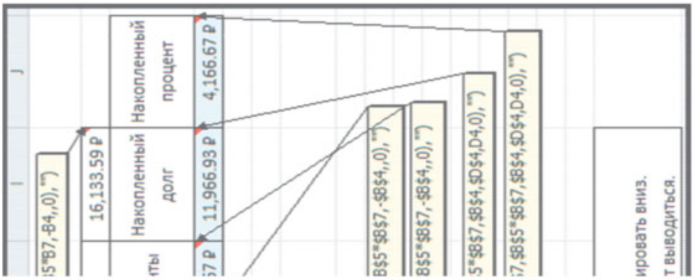

Накопленный процент
4,166.67 ₽
Накопленный долг
11,966.93 ₽
16,133.59 ₽

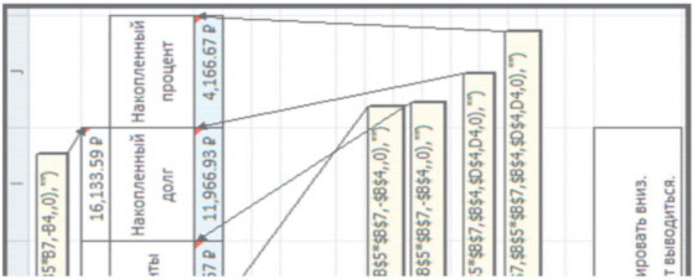

Накопленный процент
4,166.67 ₽
Накопленный долг
11,966.93 ₽
16,133.59 ₽

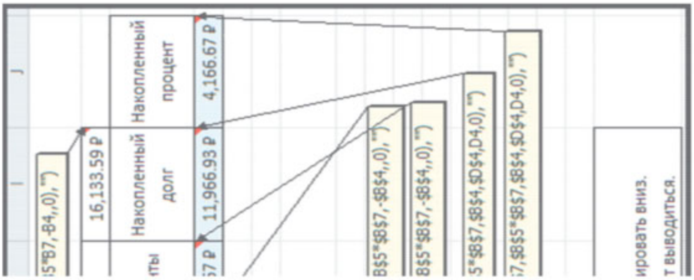

J
I
Накопленный процент
4,166.67 ₽
Накопленный долг
11,966.93 ₽
16,133.59 ₽




Накопленный процент
4,166.67 ₽
Накопленный долг
11,966.93 ₽
16,133.59 ₽


J
I
Накопленный процент
4,166.67 ₽
Накопленный долг
11,966.93 ₽
16,133.59 ₽
$B$7,-B4,,0),"")
$B$5*$B$7,-$B$4,,0),"")
$B$5*$B$7,-$B$4,,0),"")
5*$B$7,$B$4,$D$4,D4,0),"")
7,$B$5*$B$7,$B$4,$D$4,D4,0),"")
ировать вниз.
т выводиться.


J
I
Накопленный процент
4,166.67 ₽
Накопленный долг
11,966.93 ₽
16,133.59 ₽
ировать вниз.
т выводиться.


Накопленный процент
4,166.67 ₽
Накопленный долг
11,966.93 ₽
16,133.59 ₽