А. Ф. БЕРМАНТ и Л. А. ЛЮСТЕРНИК

ТРИГОНОМЕТРИЯ

ДЛЯ СРЕДНИХ ШКОЛ

УЧПЕДГИЗ — 1950

А. Ф. БЕРМАНТ и Л. А. ЛЮСТЕРНИК

ТРИГОНОМЕТРИЯ

ИЗДАНИЕ 3-е,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ

*Утверждено
Министерством просвещения РСФСР
в качестве пробного учебника
для средней школы*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
МОСКВА — 1950

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Второе издание книги, вышедшее в свет в 1947 г. (и её перевод на грузинский язык), подвергалось неоднократным обсуждениям в различных научно-педагогических учреждениях. Мы имели возможность познакомиться с результатами этих обсуждений, с замечаниями преподавателей об опыте работы по учебнику, а также с рецензиями и отзывами, появившимися в печати и полученными Учпедгизом. Весь этот материал был нами учтён при переработке книги к третьему изданию.

Внимательный читатель легко обнаружит главные изменения, внесённые нами. Скажем здесь только, что весь текст был тщательно отредактирован, проверен и исправлен, причём наиболее серьёзной переработке подверглась вторая глава (введена простейшая векторная терминология и перераспределены первые вводные части главы геометрического содержания), доказательства некоторых теорем и предложений упрощены, изложение вопроса о тригонометрических уравнениях несколько расширено.

В той работе над книгой, которую нам пришлось проделать при подготовке её к настоящему изданию, мы пользовались советами и замечаниями многих лиц. Мы выражаем им всем свою искреннюю благодарность. Особой признательностью мы обязаны И. А. Гибшу, К. Н. Сикорскому, Б. А. Кордемскому, Н. Н. Николаевой и С. А. Пономарёву.

Одновременно Учпедгиз выпускает задачник по тригонометрии, специально приспособленный к этому учебнику, составленный Р. И. Позойским.

Авторы

Москва, 25 декабря 1949 г.

Глава первая

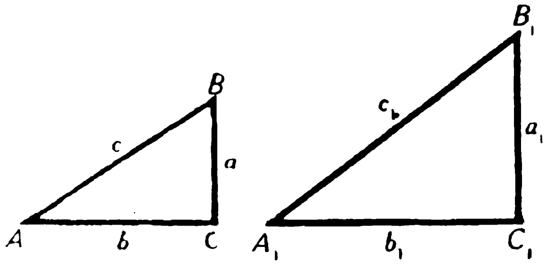
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОСТРОГО УГЛА

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Подобные прямоугольные треугольники. Рассмотрим два прямоугольных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ (углы C и C_1 — прямые), у которых острые углы A и A_1 равны (черт. 1). Такие треугольники подобны и их сходственные стороны пропорциональны, т. е.

$$\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1};\quad \frac{a}{c}=\frac{a_1}{c_1};\quad \frac{b}{c}=\frac{b_1}{c_1}. \tag{1}$$

(Здесь буквами a, b, c обозначены длины сторон треугольника ABC, лежащих соответственно против углов A, B, C, а буквами a_1, b_1, c_1 — длины сходственных сторон треугольника $A_1B_1C_1$.)



Черт. 1.

Катет, лежащий против данного острого угла A (катет a в треугольнике ABC и a_1 — в треугольнике $A_1B_1C_1$), обычно называется противолежащим, а другой катет (соответственно b и b_1) — прилежащим к этому углу.

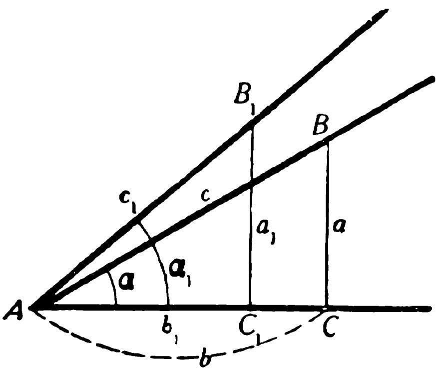
Предположим теперь, что отношения сторон треугольника ABC нам известны. Пусть, например, отношение стороны BC к стороне AC равно числу k, т. е. $\frac{a}{b}=k$. Тогда, в силу формулы (1): $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a}{b}=k$, и отсюда мы можем вычислить, например, катет a_1 треугольника $A_1B_1C_1$, если известен катет b_1:

$a_1=kb_1$. Затем легко определить и гипотенузу c_1, хотя бы на основании теоремы Пифагора.

Мы видим, что, зная длину одной стороны прямоугольного треугольника, имеющего данный острый угол, можно вычислить длины всех его сторон, если известны отношения сторон *какого-нибудь* прямоугольного треугольника с таким же острым углом.

Пример. В так называемом египетском[1]) треугольнике катеты равны 3 и 4, а гипотенуза 5 единицам длины. Острые углы египетского треугольника равны приблизительно 36°50′ и 53°10′. Если в каком-нибудь другом прямоугольном треугольнике острый угол равен 53°10′, а противолежащий этому углу катет равен, например, 12,3 единицы длины, то две другие стороны этого треугольника могут быть сейчас же найдены. Прилежащий катет равен $12{,}3\cdot\frac{3}{4}=9{,}225$ единицы длины, а гипотенуза $12{,}3\cdot\frac{5}{4}=15{,}375$ единицы длины.

§ 2. Отношения сторон прямоугольного треугольника. Возьмём острый угол α и из произвольной точки B одной его стороны опустим перпендикуляр на другую сторону. Длины сторон полученного треугольника ABC обозначим буквами a, b, c (черт. 2).



Черт. 2.

Из трёх величин a, b и c можно образовать шесть отношений:

$$\frac{a}{c},\ \frac{b}{c},\ \frac{a}{b},\ \frac{b}{a},\ \frac{c}{a},\ \frac{c}{b}, \tag{2}$$

значения которых *не зависят* от длины сторон треугольника ABC (см. § 1), т. е. не зависят от выбора точки B на стороне AB.

Но значения этих отношений *зависят* от величины угла α. В самом деле, если изменить величину угла α (например, заменив сторону AB стороной AB_1), то изменят свои значения и отношения (2), так как новый треугольник AB_1C_1 не будет подобен треугольнику ABC.

Мы приходим к выводу, что определённой величины острому углу α соответствуют совершенно определённые значения отношений сторон прямоугольного треугольника, имеющего такой же острый угол. При этом острым углам разной величины соответствуют различные значения этих отношений.

---

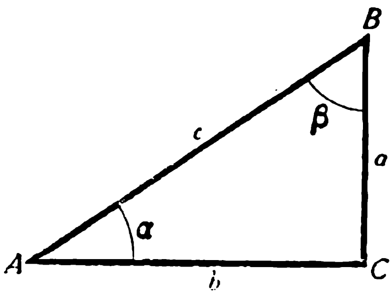
[1]) Треугольник со сторонами 3, 4, и 5 называется египетским потому, что ещё древним египтянам было известно, что такой треугольник прямоугольный.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТРИГОНОМЕТРИИ ДЛЯ ОСТРЫХ УГЛОВ

§ 3. Синус острого угла. Каждое из отношений (2), рассмотренных в § 2, имеет особое название и обозначение. Отношение $\frac{a}{c}$ (черт. 3) носит название *синуса* угла α (sinus угла α) и обозначается так: $\sin\alpha$;

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}. \tag{3}$$

Определение. *Синусом острого угла называется отношение противолежащего катета к гипотенузе в прямоугольном треугольнике с данным острым углом.*



Черт. 3.

Из равенства (3) находим:

$$a = c\sin\alpha, \quad c = \frac{a}{\sin\alpha}, \tag{4}$$

или словами:

катет прямоугольного треугольника равен гипотенузе, умноженной на синус противолежащего катету угла;

гипотенуза прямоугольного треугольника равна катету, делённому на синус противолежащего катету угла.

Значениями синуса острого угла могут быть только положительные числа, меньшие единицы. В самом деле, так как катет меньше гипотенузы ($a < c$), то $\frac{a}{c} < 1$, т. е. $\sin\alpha < 1$.

Если гипотенуза прямоугольного треугольника равна единице измерения, $AB = 1$ (черт. 3), то значение $\sin\alpha$ численно равно длине катета BC:

$$\sin\alpha = a.$$

Примеры. Для некоторых углов уже сейчас нетрудно найти значения их синусов.

1) Пусть $A = 30°$, тогда $\sin 30° = \frac{1}{2}$.

В самом деле, как известно из геометрии, катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы, т. е. $a=\frac{1}{2}c$, тогда

$$\sin 30^\circ=\frac{a}{c}=\frac{\frac{1}{2}c}{c}=\frac{1}{2}. \qquad (5)$$

2) Чтобы найти $\sin 60^\circ$, нужно, по определению синуса, из того же треугольника взять отношение $\frac{b}{c}$ ($B=60^\circ$). Так как $c=2a$ и $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{4a^2-a^2}=a\sqrt{3}$, то

$$\sin 60^\circ=\frac{b}{c}=\frac{a\sqrt{3}}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad (6)$$

3) Если $A=45^\circ$, то $b=a$ и $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2a^2}=a\sqrt{2}$. Значит,

$$\sin 45^\circ=\frac{a}{c}=\frac{a}{a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad (7)$$

§ 4. Косинус острого угла. Рассмотрим теперь отношение $\frac{b}{c}$ (черт. 3). Это отношение носит название *косинуса угла* α (cosinus угла α) и обозначается так: $\cos\alpha$;

$$\cos\alpha=\frac{b}{c}. \qquad (8)$$

Косинусом острого угла называется отношение прилежащего катета к гипотенузе в прямоугольном треугольнике с данным острым углом.

Из равенства (8) находим:

$$b=c\cdot\cos\alpha,\ c=\frac{b}{\cos\alpha} \qquad (9)$$

или словами:

катет прямоугольного треугольника равен гипотенузе, умноженной на косинус прилежащего к катету угла;

гипотенуза прямоугольного треугольника равна катету, делённому на косинус прилежащего к катету угла.

Значениями косинуса острого угла могут быть только положительные числа, меньшие единицы.

Если гипотенузу прямоугольного треугольника взять равной единице длины, $AB=1$, то значение $\cos\alpha$ численно равно длине катета AC:

$$\cos\alpha=b.$$

§ 5. Синус и косинус дополнительных углов. В прямоугольном треугольнике ABC (черт. 3) отношение $\frac{b}{c}$ выражает косинус угла α, а также синус угла β. Поэтому

$$\cos\alpha = \sin\beta.$$

Но так как в прямоугольном треугольнике $\beta = 90° - \alpha$, то можно записать:

$$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha). \tag{10}$$

Аналогично, рассматривая отношение $\frac{a}{c}$ сторон того же треугольника, получим:

$$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha). \tag{11}$$

Два острых угла, сумма которых равна прямому углу, называются дополнительными углами. Например, дополнительными углами являются: углы в 20 и 70°, углы в 35 и 55° и т. д. Формулы (10) и (11) показывают, что *синус (или косинус) острого угла равен косинусу (или синусу) дополнительного угла.*

Пример. Пользуясь формулой (10), легко определить значения косинуса для углов в 30°, 45° и 60°. Именно (см. § 3):

$$\cos 30° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 45° = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos 60° = \sin 30° = \frac{1}{2}. \tag{12}$$

§ 6. Тангенс и котангенс острого угла. Обратимся к третьему и четвёртому из отношений (2). Отношение $\frac{a}{b}$ (черт. 3) называется тангенсом угла α (tangens угла α) и обозначается так: $\operatorname{tg}\alpha$;

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}. \tag{13}$$

Отношение $\frac{b}{a}$ называется *котангенсом угла* α (cotangens угла α) и обозначается так: $\operatorname{ctg}\alpha$;

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}. \tag{14}$$

Определения. *Тангенсом острого угла называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету в прямоугольном треугольнике с данным острым углом;*

котангенсом острого угла называется отношение прилежащего катета к противолежащему катету в прямоугольном треугольнике с данным острым углом.

В отличие от синуса и косинуса *значения тангенса и котангенса острого угла могут быть любыми положительными числами.*

Покажем это, например, для тангенса. Зададим по произволу положительное число p и возьмём прямоугольный треугольник, у которого один катет равен 1, а другой p. Ясно, что тангенс угла, противолежащего последнему катету, и будет равен как раз числу p.

Замечание. Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса не зависят от размеров прямоугольного треугольника, взятого для их определения, а также от избранной единицы длины.

Следует запомнить, что символы sin, cos, tg, ctg, стоящие перед обозначением угла, сами по себе никакой величины не выражают. $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ нужно рассматривать как единые нерасчленяемые символы, обозначающие определённые числа для каждого угла α.

Из равенства (13) и (14) находим:

$$a = b\cdot\operatorname{tg}\alpha,\quad b = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}. \tag{15}$$

$$a = \frac{b}{\operatorname{ctg}\alpha},\quad b = a\cdot\operatorname{ctg}\alpha. \tag{16}$$

Эти формулы словами можно выразить так:

катет прямоугольного треугольника равен другому катету, умноженному на тангенс угла, противолежащего первому катету, или делённому на тангенс угла, прилежащего к первому катету (первые две формулы);

катет прямоугольного треугольника равен другому катету, делённому на котангенс угла, противолежащего первому катету, или умноженному на котангенс угла, прилежащего к первому катету (вторые две формулы).

Так как $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, а $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$, то

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \quad\text{и}\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}. \tag{17}$$

Значения тангенса и котангенса одного и того же острого угла обратны друг другу.

Из определений тангенса и котангенса следует, что, с одной стороны, $\frac{a}{b}$ есть $\operatorname{tg}\alpha$, а с другой стороны, $\frac{a}{b}$ есть $\operatorname{ctg}\beta$, где $\beta = 90° - \alpha$.

Следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}(90° - \alpha). \tag{18}$$

Точно так же

$$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}(90° - \alpha). \tag{19}$$

Примеры. Из прямоугольного треугольника с углом $\alpha = 30°$ имеем:

$$\operatorname{tg} 30° = \operatorname{ctg} 60° = \frac{a}{b} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \tag{20}$$

Если $\alpha = 45°$, то $a = b$, и

$$\operatorname{tg} 45° = \operatorname{ctg} 45° = \frac{a}{a} = 1. \tag{21}$$

Для $\alpha = 60°$ получаем:

$$\operatorname{tg} 60° = \operatorname{ctg} 30° = \frac{1}{\operatorname{tg} 30°} = \sqrt{3}. \tag{22}$$

Результаты, полученные в примерах §§ 3, 4, 5 и 6, сведём в одну таблицу, легко запоминаемую:

	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

§ 7. Секанс и косеканс острого угла. Последним двум отношениям (2): $\frac{c}{a}$ и $\frac{c}{b}$ сторон прямоугольного треугольника также дают иногда особые названия. Первое из них называют *косекансом угла* α (cosecans угла α) и обозначают так: $\operatorname{cosec}\alpha$;

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a}. \qquad (23)$$

Второе отношение называют *секансом угла* α (secans угла α) и обозначают так: $\sec\alpha$;

$$\sec\alpha = \frac{c}{b}. \qquad (24)$$

Определения. *Косекансом острого угла называется отношение гипотенузы к противолежащему катету в прямоугольном треугольнике с данным острым углом;*

секансом острого угла называется отношение гипотенузы к прилежащему катету в прямоугольном треугольнике с данным острым углом.

В последующем косеканс и секанс мы рассматривать не будем, так как они очень просто выражаются через синус и косинус:

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \text{ и } \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \qquad (25)$$

как это прямо видно из определений.

Предоставляем читателю самому убедиться в справедливости формул:

$$\operatorname{cosec}\alpha = \sec(90^\circ - \alpha) \text{ и } \sec\alpha = \operatorname{cosec}(90^\circ - \alpha). \qquad (26)$$

§ 8. Тригонометрические функции острого угла. Изучая различные вопросы математики, физики и других наук, мы замечаем, что некоторые из рассматриваемых величин сохраняют одно и то же значение, другие же свои значения изменяют.

Так, например, наблюдая свободное падение тела в пустоте, убеждаемся, что расстояние, пройденное телом, и его скорость изменяются, а ускорение остаётся неизменным $\left(\text{равным } 981\ \frac{см}{сек^2}\right)$.

Величину, которая в данном вопросе сохраняет одно и то же численное значение, называют постоянной;

величину, которая в данном вопросе принимает различные численные значения, называют переменной.

В нашем примере ускорение — величина постоянная, а расстояние и скорость — величины переменные.

Переменные величины чаще всего изменяются не совсем произвольно, а в известной зависимости друг от друга: если одной из них придавать значения по нашему усмотрению, то вторая принимает не произвольные значения, а согласованные со значениями первой величины.

Например, если указать расстояние, пройденное свободно падающим телом до некоторого момента времени, то скорость тела в этот момент имеет уже вполне определённое значение, соответствующее пройденному телом расстоянию.

Та из переменных, значения которой выбираются произвольно, называется *независимой переменной*, или *аргументом.* Переменная же, значения которой определяются по значениям независимой переменной (аргумента), называется *зависимой переменной*, или *функцией.*

В нашем примере расстояние, проходимое падающим телом, и скорость тела находятся между собой в функциональной зависимости; если расстояние принять за независимую переменную, то скорость будет функцией[1]. С изменением пройденного расстояния меняется и скорость тела, причём так, что каждому значению расстояния соответствует определённое значение скорости.

Определение. *Функцией называется переменная величина, изменяющаяся в зависимости от изменения другой переменной величины (независимой переменной, аргумента), причём так, что каждому значению независимой переменной соответствуют строго определённые значения функции.*

Применим это определение к величинам $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\sec\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$. Мы теперь знаем, что каждая из них имеет строго определённое значение для каждого данного острого угла α, причём с изменением угла α изменяются и значения этих величин. Таким образом, эти величины являются *функциями угла.*

Говорят, что $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\sec\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$ суть *тригонометрические функции острого угла* α, *который служит их аргументом.*

Значениями тригонометрических функций являются отвлечённые числа.

Функции синус и косинус, тангенс и котангенс, секанс и косеканс называются *сходственными* друг другу функциями. Значение любой из этих функций для острого угла равно значению сходственной ей функции для дополнительного угла (см. (10), (11), (18), (19), (26)).

---

[1]) Можно, наоборот, считать скорость независимой переменной, тогда проходимое расстояние будет функцией.

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЗНАЧЕНИЯМИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО УГЛА

§ 9. Основные формулы. Значения тригонометрических функций одного и того же острого угла определённым образом связаны друг с другом; по значению одной из тригонометрических функций можно вычислить значения всех остальных тригонометрических функций того же угла.

Из треугольника ABC (черт. 3) по теореме Пифагора имеем:

$$a^2+b^2=c^2.$$

Деля все члены этого равенства на c^2, получим:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1,$$

или

$$(\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2=1.$$

Для обозначения степени тригонометрической функции показатель степени обычно записывают вверху, справа от последней буквы знака этой функции. Например, $(\sin\alpha)^k$ обозначают так: $\sin^k\alpha$.

Найденное нами равенство можно переписать так:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1. \tag{27}$$

Сумма квадратов синуса и косинуса одного и того же острого угла равна единице.

Пример. Зная, что $\sin 30°=\frac{1}{2}$, нетрудно найти $\cos 30°$. Из формулы (27) следует, что $\cos^2 30°=1-\sin^2 30°$, отсюда

$$\cos 30°=\sqrt{1-\sin^2 30°}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=$$
$$=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ср. § 5).

Так как $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}$, то, деля числитель и знаменатель правой части этого равенства на c, получим:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}},$$

или

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \tag{28}$$

Тангенс острого угла равен частному от деления синуса этого угла на его косинус.

Пример. Для $\alpha=30^\circ$ имеем (ср. § 6):

$$\operatorname{tg}30^\circ=\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Далее:

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{b}{a}=\frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}},$$

или:

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{29}$$

Котангенс острого угла равен частному от деления косинуса этого угла на его синус.

Пример. Для $\alpha=30^\circ$ находим (ср. § 6): $\operatorname{ctg}30^\circ=\frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ}=$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}.$$

Формулы (27), (28), (29) называются *основными формулами*.

Из формул (28) и (29) видим, что (ср. § 6)

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1, \tag{30}$$

т. е. что

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha};\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}. \tag{30}$$

§ 10. Вычисление значений тригонометрических функций острого угла по значению одной из них. С помощью основных формул можно выразить значения всех тригонометрических функций острого угла через какую-нибудь одну из этих функций.

Через $\sin\alpha$ другие тригонометрические функции угла α выразятся так:

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha};\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}. \tag{31}$$

Через $\cos\alpha$ они выразятся так:

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha},\qquad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}. \tag{32}$$

Теперь выразим все тригонометрические функции угла α через $\operatorname{tg}\alpha$. Имеем (формулы 30): $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$. Далее, выразим $\cos\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$. По формуле (32) имеем:

$$\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}-1,$$

откуда

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha+1$$

и

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+1}}. \tag{33}$$

Наконец, в силу формулы (28) находим:

$$\sin\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+1}}. \tag{34}$$

Аналогично, из формул (31) и (29) получаем:

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha+1}}, \tag{35}$$

$$\cos\alpha=\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha+1}}. \tag{36}$$

Перед квадратными радикалами во всех выведенных формулах берётся знак $+$, так как значения всех тригонометрических функций острого угла — числа положительные.

Пример. Пусть известно, что $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}4$. Найдём значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

По формуле (33) имеем:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+2{,}4^2}} = \frac{1}{2{,}6} = \frac{5}{13},$$

далее: $\sin\alpha = \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{13}\cdot 2{,}4 = \frac{12}{13}$.

и наконец: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{2{,}4} = \frac{5}{12}$.

Итак, *значение одной из тригонометрических функций острого угла вполне определяет значения всех остальных тригонометрических функций того же угла.*

§ 11. Тригонометрические тождества. *Тригонометрическим тождеством для острых углов называется равенство, содержащее тригонометрические функции острого угла, остающееся справедливым, каков бы ни был этот острый угол.*

Три основные формулы (27), (28) и (29) являются тригонометрическими тождествами: они справедливы для любого острого угла α. Тождествами являются также и равенства (30)—(36).

Из одного тригонометрического тождества можно получить с помощью алгебраических преобразований другие тригонометрические тождества. Таким путём выведены, например, тождества (30) — (36) из тождеств (27) — (29).

О тождествах говорят, что они *зависимы друг от друга*, если некоторые из них можно вывести из других. В таком случае говорят также, что одни из них являются *следствиями* других.

Из трёх основных формул (27) — (29) можно образовать сколько угодно формул, являющихся их следствиями. Но сами *основные формулы не зависят друг от друга* — нельзя одну из них вывести из двух остальных. Основные формулы получаются независимо одна от другой, на основании определений тригонометрических функций.

Три независимых тождества, связывающих тригонометрические функции (тождества (27) — (29)), позволяют по значению одной из них найти значения остальных, как это мы фактически и проделали в предыдущем параграфе[1]).

---

[1]) Мы, как уже было упомянуто, рассматриваем лишь $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$. $\operatorname{Sec}\alpha$ и $\operatorname{cosec}\alpha$ мы не рассматриваем и о них здесь не говорим.

Не следует думать, что тождества (27) — (29) являются единственной возможной тройкой независимых друг от друга тождеств, связывающих тригонометрические функции одного и того же угла. Но тождества (27) — (29) образуют самую простую и наиболее удобную из таких троек. Поэтому они и считаются *основными формулами.*

Иногда требуется установить, является ли данное равенство тригонометрическим тождеством. Такую задачу называют *задачей на доказательство тождества.* Чтобы её решить, нужно посредством тождественных алгебраических преобразований и основных формул (27) — (29) привести заданное равенство или к очевидному тождеству, или к одной из основных формул (27) —(29). Возможен и обратный путь: исходя из какого-нибудь известного тождества, с помощью тождественных алгебраических преобразований и основных формул прийти к данному равенству.

Пример. Доказать тождество:

$$\sin^3\alpha\,(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^3\alpha\,(1+\operatorname{tg}\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha.$$

Заменим в левой части $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ их выражениями по формулам (28) и (29). Получим:

$$\sin^3\alpha\left(1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)+\cos^3\alpha\left(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)=\sin^3\alpha\left(\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)+$$
$$+\cos^3\alpha\left(\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha}\right)=\sin^2\alpha\,(\sin\alpha+\cos\alpha)+\cos^2\alpha\,(\sin\alpha+\cos\alpha)=$$
$$=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\,(\sin\alpha+\cos\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha.$$

Последнее преобразование выполнено с помощью формулы (27). Следовательно:

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sin\alpha+\cos\alpha.$$

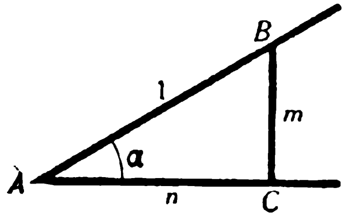
Этим доказано, что взятое равенство есть тождество, т. е. что оно справедливо при любом остром угле.

Бывают случаи, когда ставится задача об *упрощении данного тригонометрического выражения.* Эта задача состоит в том, чтобы, применяя тождественные алгебраические преобразования и известные тригонометрические тождества, преобразовать данное выражение в другое, ему тождественно равное и имеющее более простой вид.

Как показано выше (см. пример), тригонометрическому выражению $\sin^3\alpha\,(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^3\alpha\,(1+\operatorname{tg}\alpha)$ можно придать более простой вид: $\sin\alpha+\cos\alpha$.

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 12. Определение значений тригонометрических функций с помощью построений. Опираясь на определения тригонометрических функций острого угла, легко найти их значения для данного острого угла при помощи построений и измерений отрезков.

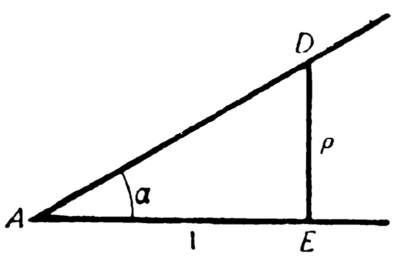


Черт. 4.

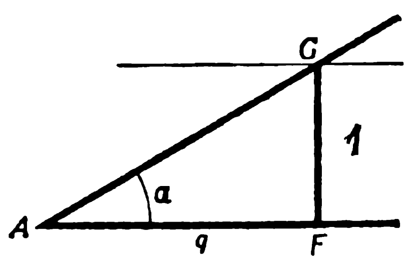
Синус и косинус. При помощи транспортира начертим заданный угол α ($\angle CAB$ на черт. 4) и отложим от вершины A на одной из его сторон отрезок AB, равный единице длины. Из точки B опустим перпендикуляр на другую сторону. Остаётся измерить катеты полученного прямоугольного треугольника ABC (§§ 3 и 4). Если длина катета, противолежащего углу α, равна m единиц, а длина прилежащего катета равна n единиц, то числа m и n будут соответственно значениями синуса и косинуса угла:

$$\sin\alpha = m \text{ и } \cos\alpha = n.$$

Тангенс. Восставим перпендикуляр ED к одной стороне угла α на расстоянии AE от вершины, равном единице длины (черт. 5). Измерим отрезок ED этого перпендикуляра, отсе-



Черт. 5.



Черт. 6.

каемый сторонами угла. Если длина отрезка ED равна p единиц, то число p и будет значением тангенса угла α:

$$\operatorname{tg}\alpha = p.$$

Котангенс. На расстоянии, равном единице длины, от стороны AF данного угла α (черт. 6) проведём прямую, параллельную стороне AF. Она пересечёт другую сторону в некоторой точке G. Опустим из точки G перпендикуляр GF на первую сторону; на первой стороне угла он отсечёт отрезок AF.

Если длина отрезка AF равна q, то число q и будет значением котангенса угла α:

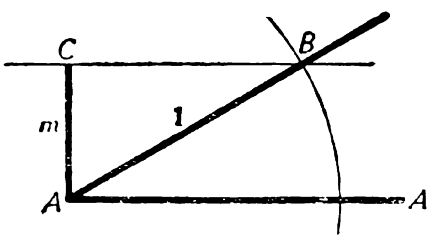
$$\operatorname{ctg} \alpha = q.$$

Чем аккуратнее выполнено построение, чем точнее измерены длины отрезков, тем точнее получится искомое значение тригонометрической функции.

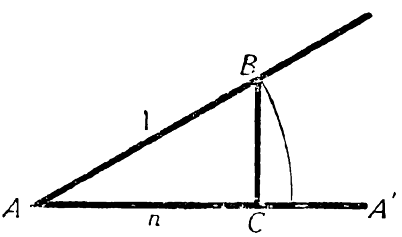
§ 13. Построение и вычисление угла по данному значению тригонометрической функции. Поставим задачу, обратную только что рассмотренной: по заданному значению тригонометрической функции *острого* угла α при помощи геометрических построений и измерений найти этот угол. Вспомним предварительно, что значение синуса и косинуса острого угла не могут быть произвольными. Эти значения должны быть положительными и меньшими единицы (§§ 3 и 4).

Синус. Пусть известно, что $\sin \alpha = m \, (0 < m < 1)$. *Требуется найти угол α.*

Приняв начальную точку A какой-нибудь полупрямой AA' за центр (черт. 7), опишем дугу окружности, радиус которой



Черт. 7.



Черт. 8.

равен единице длины. Затем проведём прямую, параллельную взятой полупрямой, на расстоянии m единиц от неё. Эта прямая пересечёт дугу окружности в точке B. Угол BAA' и будет искомым. В самом деле, синус угла BAA', как это видно из самого построения, равен числу m.

Величину построенного угла BAA' можно измерить с помощью транспортира.

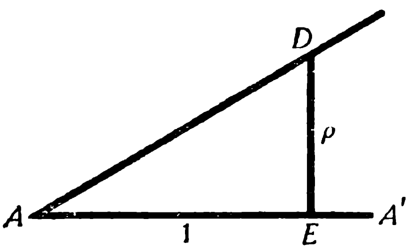
Косинус. Пусть дано $\cos \alpha = n \, (0 < n < 1)$. *Требуется найти угол α.*

Приняв начальную точку A какой-нибудь полупрямой AA' за центр (черт. 8), опишем дугу окружности, радиус которой равен единице длины. Затем проведём прямую CB, перпендикулярную к полупрямой AA', на расстоянии AC, равном n единиц от точки A. Эта прямая пересечёт дугу окружности в некоторой точке B. Угол BAA' и будет искомым.

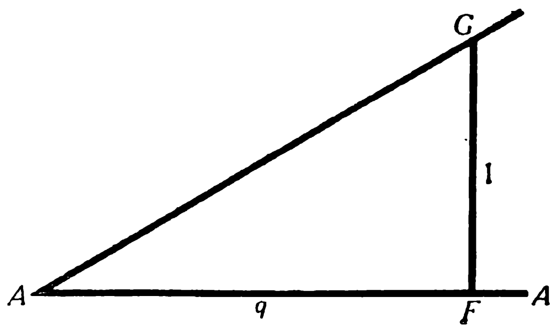
В самом деле, как видно из самого построения, косинус угла BAA' равен числу n; кроме того, очевидно, не существует никакого другого острого угла, косинус которого был бы равен n.

Тангенс. Пусть дано $\operatorname{tg}\alpha = p$ *(p может быть каким угодно положительным числом). Найти угол α.*

На полупрямой AA' от её начальной точки A отложим отрезок AE (черт. 9), равный единице длины, и в точке E



Черт. 9.



Черт. 10.

восставим перпендикуляр к полупрямой AA'. На этом перпендикуляре от точки E отложим отрезок $ED = p$. Угол DAE — искомый.

Действительно, тангенс угла DAE, как видно из построения, равен числу p. Кроме того, нет никакого другого острого угла, тангенс которого был бы равен тому же числу p.

Котангенс. *Пусть дано* $\operatorname{ctg}\alpha = q$ *(q может быть каким угодно положительным числом). Найти угол α.*

На полупрямой AA' от её начальной точки A отложим отрезок $AF = q$ (черт. 10). В точке F к полупрямой AA' восставим перпендикуляр и на нём от точки F отложим отрезок FG, равный единице длины. Угол GAF — искомый.

В самом деле, котангенс этого угла равен числу q, причём такое значение котангенса не может иметь никакой другой острый угол.

Из построений этого и предыдущего параграфов ясно, что не только каждому острому углу соответствуют определённые значения тригонометрических функций, но и обратно, *каждому значению любой тригонометрической функции* (если, конечно, все они положительные и значения синуса и косинуса меньше единицы) *соответствует единственный острый угол* (ср. § 2).

§ 14. Составление таблицы тригонометрических функций. Для решения многих задач необходимо иметь значения тригонометрических функций данного острого угла. Было бы крайне затруднительно всякий раз вычислять тем или иным способом значения встретившихся тригонометрических функций. Гораздо удобнее заранее, раз и навсегда, составить справочную таблицу, в которой были бы указаны значения всех тригонометрических функций для различных углов, и затем пользоваться ею во всех подходящих случаях.

Существует много способов для вычисления как угодно точных значений тригонометрических функций и составления таблиц; о некоторых из этих способов будет рассказано в главе IV (§§ 64 и 72). Пока же мы знаем только один способ — вычисление значений тригонометрических функций с помощью геометрических построений и измерений (§ 12). Несмотря на всё своё несовершенство, этот способ при очень тщательном выполнении чертежей и измерений может дать значения тригонометрических функций с тремя верными десятичными знаками, а большая точность для практических целей часто и не требуется.

Приводим таблицу значений тригонометрических функций для всех острых углов, выражающихся целым числом градусов (таблица через 1°). Значения даны с точностью до 0,001 (см. стр. 26).

Заметим теперь, что для составления полной таблицы достаточно непосредственно найти значения лишь одной тригонометрической функции и только для углов, не превышающих 45°. Зная эти значения, по формулам (10) — (11), (17) — (19) и (27) — (36) можно вычислить значения всех тригонометрических функций острых углов как меньших, так и бóльших 45°.

Например, если известны значения синуса острых углов, не превышающих 45°, то можно написать по формуле (10) значения косинуса острых углов, превышающих 45°. После этого остаётся по значению одной тригонометрической функции каждого из рассматриваемых углов найти значения всех остальных тригонометрических функций.

Однако чтобы избежать добавочных вычислений, в таблице указываются значения всех тригонометрических функций для острых углов как меньших, так и бóльших 45°. Таблицу при этом можно сделать не очень громоздкой, если учесть, что значения сходственных функций дополнительных углов равны между собой. Это обстоятельство использовано при составлении нашей таблицы. Для того чтобы найти в ней значение тригонометрической функции угла, меньшего 45°, нужно взять число, находящееся на пересечении строки, в которой слева указано данное число градусов, и столбца, в котором сверху указано наименование искомой функции.

Пример. $\operatorname{tg} 37^\circ = 0{,}754$ (см. табл. на стр. 26).

Если же отыскивают значение тригонометрической функции угла, большего 45°, то нужно взять число, находящееся на пересечении строки, в которой *справа* указано данное число градусов, и столбца, внизу которого указано наименование искомой функции.

Пример. $\cos 81^\circ = 0{,}156$.

Таблица даёт возможность решать и обратную задачу — по значению одной из тригонометрических функций находить угол. Для этого среди чисел второго и пятого столбцов, если дано значение синуса или косинуса, или третьего и четвёртого столбцов, если дано значение тангенса или котангенса, разыскиваем число, равное данному. Тогда число градусов, указанное в строке, в которой находится заданное значение тригонометрической функции, показывает величину искомого угла. Число градусов нужно брать с *левой* стороны, если наименование заданной функции помещено *вверху* столбца, и с *правой* стороны, если наименование помещено *внизу* столбца.

Пример. $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}649, \quad \alpha = 33^\circ.$
$\sin \alpha = 0{,}743, \quad \alpha = 48^\circ.$

По нашей таблице нельзя найти значение тригонометрической функции, если угол выражается не целым числом градусов. По ней нельзя найти также угол, если данного значения тригонометрической функции в таблице нет.

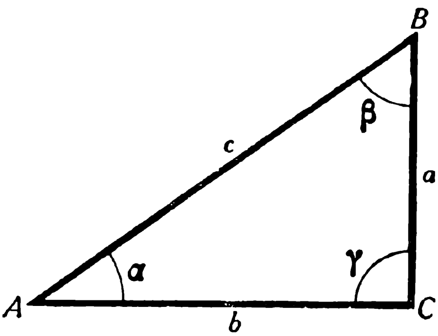
На практике нередко заменяют данное значение угла (или тригонометрической функции) ближайшим к нему значением, имеющимся в таблице. При этом будет получаться хотя и приближённое значение искомой тригонометрической функции (или угла), но иногда достаточное для целей задачи.

РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

§ 15. Постановка вопроса. Каждый треугольник имеет 6 основных элементов: 3 угла и 3 стороны. *Вычисление всех основных элементов треугольника по заданным некоторым элементам его называется решением треугольника.* Ограничимся пока прямоугольными треугольниками.

Из геометрии известно, что по двум основным элементам прямоугольного треугольника можно построить самый треугольник. При этом по крайней мере один из данных элементов должен быть линейным (т. е. стороной), так как одинаковые углы могут быть и у неравных (но подобных друг другу) прямоугольных треугольников. Поэтому для решения прямоугольного треугольника нужно задать два его элемента, из которых по крайней мере один линейный.

В §§ 3—5 из определений тригонометрических функций острого угла выводятся зависимости между сторонами прямоугольного треугольника и тригонометрическими функциями его углов. Решение прямоугольных треугольников основано на этих зависимостях и таблице значений тригонометрических функций.



Черт. 11.

Косоугольный треугольник можно разбить на два прямоугольных и таким образом свести решение косоугольного треугольника к решению двух прямоугольных треугольников. Однако дальше, в главе V, будет установлена зависимость между сторонами и углами косоугольного треугольника и изложены другие способы решения косоугольных треугольников.

При решении прямоугольных треугольников могут встретиться два случая: 1) даны сторона и острый угол; 2) даны две стороны. Рассмотрим их отдельно.

В дальнейшем мы будем пользоваться следующими обозначениями. В треугольнике ABC (черт. 11) угол при вершине A будем всегда обозначать через α; угол при вершине B — через β; угол при вершине C — через γ; сторону, противолежащую углу α, — через a; сторону, противолежащую углу β, — через b; сторону, противолежащую углу γ, — через c. Эти же буквы указывают величины соответствующих углов и сторон треугольника.

В прямоугольном треугольнике прямым углом будем считать угол γ. Значит, $\gamma = 90°$, $\alpha + \beta = 90°$, a и b — катеты, c — гипотенуза.

§ 16. Решение прямоугольного треугольника по стороне и острому углу. Здесь также могут представиться два случая: 1) *дан острый угол и катет;* 2) *дан острый угол и гипотенуза.*

1. *Дано:* α и a; *требуется найти:* β, b, c.

Второй острый угол находим сразу: $\beta = 90° - \alpha$.

Для вычисления b можно воспользоваться формулой (16):

$$b = a \operatorname{ctg} \alpha \ (= a \operatorname{tg} \beta),$$

а для вычисления c — формулой (4) или (9):

$$c = \frac{a}{\sin \alpha}\left(= \frac{a}{\cos \beta}\right), \text{ или } c = \frac{b}{\cos \alpha}\left(= \frac{b}{\sin \beta}\right).$$

Проверить правильность подсчётов можно при помощи теоремы Пифагора; достаточно убедиться, что полученные числа b и c удовлетворяют равенству:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Пример. Пусть $\alpha = 27°$, $a = 7{,}20$.

Имеем:

$$\beta = 90° - 27° = 63°,$$

$$b = 7{,}20 \cdot \operatorname{tg} 63° = 7{,}20 \cdot 1{,}963 = 14{,}1;$$

$$c = \frac{7{,}20}{\sin 27°} = \frac{7{,}20}{0{,}454} = 15{,}9.$$

Проверка:

$$7{,}2^2 + 14{,}1^2 \approx 251, \qquad 15{,}9^2 \approx 253.$$

Небольшое расхождение объясняется неточностью значений тригонометрических функций в таблице и производившимся округлением.

2. *Дано:* α и c; *требуется найти:* β, a, b.

Угол β находим сразу:

$$\beta = 90° - \alpha.$$

Для вычисления a и b воспользуемся формулами (4) и (9)

$$a = c \sin \alpha \ (= c \cos \beta),$$

$$b = c \cos \alpha \ (= c \sin \beta).$$

Проверка результата производится, как и в первом случае, с помощью теоремы Пифагора.

Пример. $\alpha = 71°$, $c = 11{,}2$.

Имеем:

$$\beta = 90° - 71° = 19°.$$

$$a = 11{,}2 \cdot \sin 71° = 11{,}2 \cdot 0{,}946 \approx 10{,}6,$$

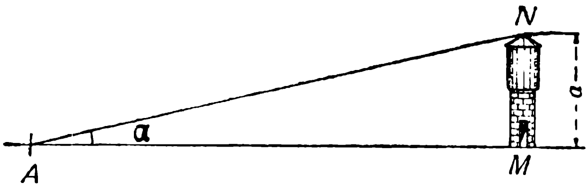
$$b = 11{,}2 \cdot \cos 71° = 11{,}2 \cdot 0{,}326 \approx 3{,}65.$$

Проверка:

$$a^2 + b^2 = 125{,}7, \ c^2 = 125{,}4.$$

Заметим, что в этих двух случаях таблица тригонометрических функций использовалась *в прямом назначении*. Из неё брались значения тригонометрических функций, соответствующие данному углу.

Рассмотрим одну практическую задачу. Пусть из пункта A (черт. 12) видно строение, находящееся в пункте M, высота которого известна (например, водонапорная башня при железнодорожной станции). Допустим далее, что расстояние AM не может быть измерено непосредственно (например, в пункте M находится неприятель). Но с помощью тригонометрии легко узнаем расстояние AM. Достаточно измерить (теодолитом или другим угломерным инструментом) угол к горизонту, под которым виден из A верхний конец строения, чтобы вычислить искомую длину.



Черт. 12.

Если угол оказался равным α, то

$$AM = a \operatorname{ctg} \alpha.$$

Пусть $a = 11$ *м* и $\alpha = 1°02'$. Считая приближённо, что $\alpha = 1°$, получим:

$$AM = 11 \text{ м} \cdot 57{,}290 \approx 630 \text{ м}.$$

Подобные вычисления часто употребляются в артиллерии, так как знание расстояния до цели необходимо для правильной наводки орудия.

§ 17. Решение прямоугольного треугольника по двум сторонам. Здесь также возможны два случая: 1) *даны два катета;* 2) *даны катет и гипотенуза.*

1. *Дано:* a *и* b; *требуется найти:* α, β, c.

Имеем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b},$$

и по таблице находим угол, тангенс которого равен $\frac{a}{b}$; Далее:

$$\beta = 90° - \alpha,$$

$$c = \frac{a}{\sin \alpha}, \text{ или } c = \frac{b}{\cos \beta}.$$

Для контроля можно воспользоваться теоремой Пифагора:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Пример. Пусть $a=1{,}5$; $b=0{,}7$.
Находим:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1{,}5}{0{,}7}\approx 2{,}14,$$

значит,

$$\alpha\approx 65^\circ,\ \beta\approx 25^\circ,$$
$$c=\frac{1{,}5}{\sin 65^\circ}=\frac{1{,}5}{0{,}906}=1{,}65.$$
$$1{,}5^2+0{,}7^2=2{,}74,$$
$$1{,}65^2\approx 2{,}72.$$

2. *Дано: a и c; требуется найти: α, β, b.*
Имеем:

$$\sin\alpha=\frac{a}{c};$$

по таблице находим угол, синус которого равен $\frac{a}{c}$.

Далее:

$$\beta=90^\circ-\alpha,$$
$$b=c\sin\beta.$$

Для контроля можно взять формулу:

$$b=a\operatorname{tg}\beta.$$

Пример. $a=1{,}54$; $c=2{,}1$.
Находим:

$$\sin\alpha=\frac{1{,}54}{2{,}1}\approx 0{,}73,$$

и тогда

$$\alpha\approx 47^\circ,\ \beta\approx 43^\circ;\ b=2{,}1\sin 43^\circ=2{,}1\cdot 0{,}682\approx 1{,}43.$$

Проверка:

$$b=a\operatorname{tg}\beta=1{,}54\cdot 0{,}933\approx 1{,}44.$$

В последних двух случаях решения прямоугольных треугольников таблица тригонометрических функций использовалась *в обратном назначении* — из неё брались значения углов, соответствующие данным значениям тригонометрических функций.

Пример. Определим углы египетского треугольника, упомянутого в § 1. В нём $a=3$, $b=4$; следовательно:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}=\frac{3}{4}=0{,}75.$$

По таблицам находим: $\alpha\approx 37^\circ$, $\beta\approx 53^\circ$.
По более точным таблицам: $\alpha=36^\circ52'18''$; $\beta=53^\circ7'42''$.

Таблица значений тригонометрических функций

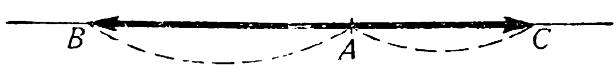
°	sin	tg	ctg	cos	°
1	0,017	0,017	57,290	0,9999	89
2	0,035	0,035	28,636	0,9994	88
3	0,052	0,052	19,081	0,9986	87
4	0,070	0,070	14,301	0,998	86
5	0,087	0,087	11,430	0,996	85
6	0,105	0,105	9,514	0,995	84
7	0,122	0,123	8,144	0,993	83
8	0,139	0,141	7,115	0,990	82
9	0,156	0,158	6,314	0,988	81
10	0,174	0,176	5,671	0,945	80
11	0,191	0,194	5,185	0,982	79
12	0,208	0,213	4,705	0,978	78
13	0,225	0,231	4,331	0,974	77
14	0,242	0,249	4,011	0,970	76
15	0,259	0,268	3,732	0,966	75
16	0,276	0,287	3,487	0,961	74
17	0,292	0,306	3,271	0,956	73
18	0,309	0,325	3,078	0,951	72
19	0,326	0,344	2,904	0,946	71
20	0,342	0,364	2,747	0,940	70
21	0,358	0,384	2,605	0,934	69
22	0,375	0,404	2,475	0,927	68
23	0,391	0,424	2,356	0,921	67
24	0,407	0,445	2,246	0,914	66
25	0,423	0,466	2,145	0,906	65
26	0,438	0,488	2,050	0,899	64
27	0,454	0,510	1,963	0,891	63
28	0,469	0,532	1,881	0,883	62
29	0,485	0,554	1,804	0,875	61
30	0,500	0,577	1,732	0,866	60
31	0,515	0,601	1,664	0,857	59
32	0,530	0,625	1,600	0,848	58
33	0,545	0,649	1,540	0,839	57
34	0,559	0,675	1,483	0,829	56
35	0,574	0,700	1,428	0,819	55
36	0,588	0,727	1,376	0,809	54
37	0,602	0,754	1,327	0,799	53
38	0,616	0,781	1,280	0,788	52
39	0,629	0,810	1,235	0,777	51
40	0,643	0,839	1,192	0,766	50
41	0,656	0,869	1,150	0,755	49
42	0,669	0,900	1,111	0,743	48
43	0,682	0,933	1,072	0,731	47
44	0,695	0,966	1,036	0,719	46
45	0,707	1,000	1,000	0,707	45
°	cos	ctg	tg	sin	°

Глава вторая

ПРОИЗВОЛЬНЫЕ УГЛЫ И ИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

ВЕКТОРЫ И ИХ ПРОЕКЦИИ

§ 18. Положительные и отрицательные отрезки на оси. На любой прямой (и на любом отрезке прямой) можно различать два противоположных направления. Например, на горизонтальной прямой можно различать направление вправо и направление влево; на вертикальной прямой — направления вверх и вниз.



Черт. 13.

Прямая, на которой указано одно из двух возможных направлений и выбрана единица длины (масштаб), *называется осью.*

На чертежах направление обозначается соответствующей стрелкой.

На прямолинейном отрезке направление определяется указанием его начала и *его конца,* причём направлением отрезка считается направление от начала к концу.

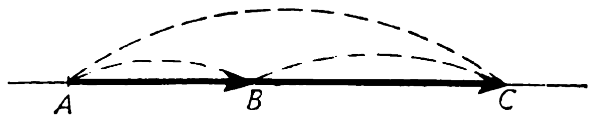
Отрезок с началом в точке A и с концом в точке B будем обозначать через AB.

Отрезок AB оси называется положительным, если его направление совпадает с направлением оси; он называется отрицательным, если его направление противоположно направлению оси. На чертеже 13 отрезок AC положительный, отрезок AB отрицательный.

Положительный отрезок оси измеряется положительным числом, выражающим длину отрезка; отрицательный отрезок оси измеряется отрицательным числом, абсолютная *величина которого выражает длину отрезка.* Это алгебраическое число, измеряющее отрезок оси, называется **алгебраической величиной отрезка.**

Отрезки AB и BA измеряются числами, равными по абсолютной величине и противоположными по знаку.

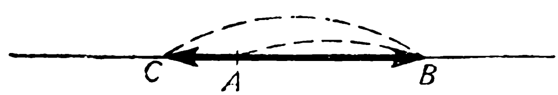
Точку можно рассматривать как отрезок, начало которого совпадает с концом. Его алгебраической величиной служит число нуль.



Черт. 14.

Равенство $AB = a$ обозначает: „алгебраическая величина отрезка AB равна a“ (a — положительное или отрицательное число, или нуль); равенство $|AB| = c$ обозначает: „длина отрезка AB равна c“ (c — положительное число или нуль). Очевидно $c = |a|$.

Суммой отрезков AB и BC (черт. 14 и 15), *у которых конец первого отрезка служит началом второго, называется*



Черт. 15.

отрезок AC, началом которого служит начало первого отрезка, а концом — конец второго. Он измеряется алгебраической суммой чисел, измеряющих данные отрезки.

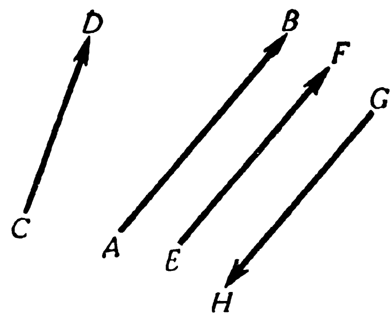
Если на оси взяты отрезки B_1B_2, B_2B_3, ..., $B_{n-1}B_n$ так, что конец каждого отрезка служит началом следующего отрезка, то суммой этих отрезков называют отрезок B_1B_n, началом которого служит начало первого отрезка и концом — конец последнего.

§ 19. Векторы. *Прямолинейный отрезок AB, имеющий направление* (от начала A к концу B), *называется вектором* и обозначается так: $\overline{AB}$.

Многие физические величины изображаются векторами. Примерами таких величин являются: скорость, ускорение, сила и т. п. Они называются векторными величинами. Длина отрезка AB называется длиной (или модулем) вектора $\overline{AB}$ и обозначается через $|\overline{AB}|$.

Два не параллельных вектора имеют разные направления (черт. 16, $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$). Два вектора, параллельных или расположенных на одной прямой, могут иметь *одинаковые* направления (черт. 16, $\overline{AB}$ и $\overline{EF}$) или неодинаковые (черт. 16, $\overline{AB}$ и $\overline{GH}$); в последнем случае говорят, что векторы имеют *противоположные* направления.

Векторы называются равными, если они имеют одинаковые направления и равные длины.

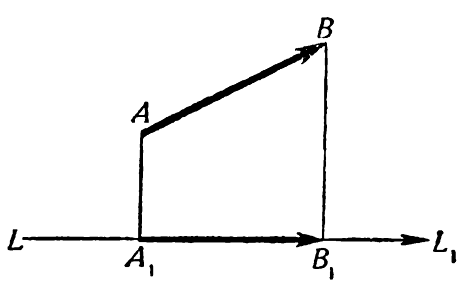


Черт. 16.

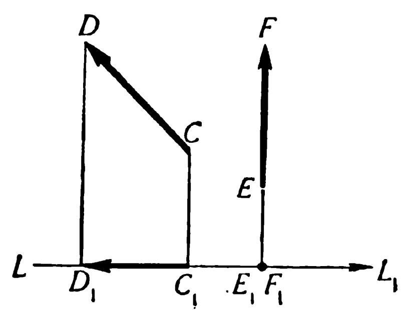
§ 20. Проекции вектора. *Проекцией точки на прямую называется основание перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую.*

Проекцией вектора $\overline{AB}$ *на ось* LL_1 *называется отрезок* A_1B_1 *этой оси, начало* A_1 *и конец* B_1 *которого являются соответственно проекциями начала* A *и конца* B *вектора* $\overline{AB}$ (черт. 17).

Алгебраическая величина проекции есть положительное число, если направление проекции совпадает с направлением оси (проекция A_1B_1 вектора $\overline{AB}$ на черт. 17), *и отрицательное число, если направление проекции противоположно направлению оси* (проекция C_1D_1 вектора $\overline{CD}$ на черт. 18).



Черт. 17.



Черт. 18.

Если вектор перпендикулярен к оси, то его проекция есть точка и поэтому алгебраическая величина проекции равна нулю (проекция E_1F_1 вектора $\overline{EF}$ на черт. 18).

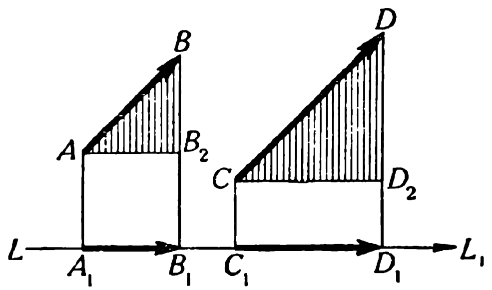
В дальнейшем, если нет опасности смешения понятий, будем для краткости вместо слов алгебраическая величина проекции говорить просто проекция.

§ 21. Теорема. *Проекции одинаково направлённых векторов на одну и ту же ось, не перпендикулярную им, пропорциональны длинам векторов.*

Обозначим через c и c_1 длины одинаково направленных векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ (черт. 19), а через a и a_1 — их проекции (A_1B_1 и C_1D_1). Требуется доказать, что

$$\frac{a}{c} = \frac{a_1}{c_1}. \tag{37}$$

Опустим из точки A (черт. 19) перпендикуляр AB_2 на BB_1 и из точки C перпендикуляр CD_2 на DD_1. Ясно, что длина отрезка AB_2 равна длине A_1B_1, т. е. $|A_1B_1|$; аналогично длина отрезка CD_2 равна $|C_1D_1|$. Из подобия прямоугольных треугольников ABB_2 и CDD_2 следует:



Черт. 19.

$$\frac{|A_1B_1|}{c} = \frac{|C_1D_1|}{c_1}. \tag{38}$$

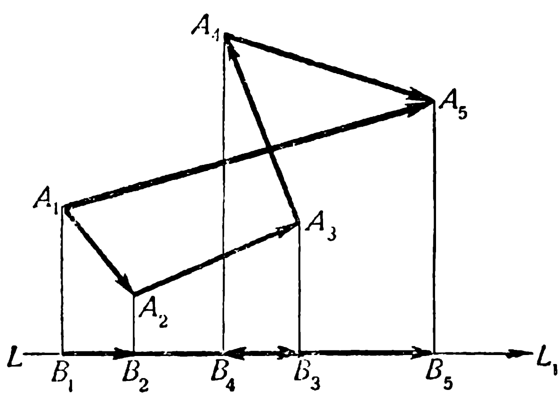
Проекции A_1B_1 и C_1D_1 имеют на оси LL_1 одинаковое направление. Поэтому или обе они положительные, или обе они отрицательные. В первом случае $a = |A_1B_1|$, $a_1 = |C_1D_1|$, и пропорция (38) совпадает с пропорцией (37).

Во втором случае $a = -|A_1B_1|$, $a_1 = -|C_1D_1|$, и пропорция (37) получится из пропорции (38) умножением обеих частей на -1.

Значит, теорема доказана.

Следствие. *Равные векторы имеют равные проекции.*

§ 22. Теорема о замыкающем. Пусть дана ломаная $A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n$ (на черт. 20 для определённости взято $n = 5$), составленная из векторов $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n}$.



Черт. 20.

Эти векторы называются *составляющими* ломаной, а вектор $\overline{A_1A_n}$ — *замыкающим* (иначе он называется *суммой* векторов). Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Проекция замыкающего вектора равна сумме проекций составляющих векторов на ту же ось.*

Обозначим через B_1, B_2, B_3, ..., B_{n-1}, B_n проекции вершин A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1}, A_n ломаной на некоторую ось LL_1. Проекциями составляющих вектор являются отрезки B_1B_2, B_2B_3, ..., $B_{n-1}B_n$ оси LL_1. По правилу сложения отрезков оси (§ 21) сумма отрезков $B_1B_2+B_2B_3+ +\ldots+B_{n-1}B_n$ есть отрезок B_1B_n. Но B_1B_n есть проекция замыкающего вектора $\overline{A_1A_n}$ (на черт. 20 B_1B_5 — проекция замыкающего вектора $\overline{A_1A_5}$). Следовательно, алгебраическая величина проекции замыкающего вектора равна сумме алгебраических величин проекций составляющих векторов, ч. т. д.

В формулировке этой теоремы термин „проекция" можно понимать в геометрическом смысле как „отрезок" оси и в алгебраическом смысле как „алгебраическую величину отрезка".

ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ УГЛА

§ 23. Начальная и конечная стороны угла. В предыдущих параграфах мы рассматривали прямолинейные отрезки, у которых указаны начальная и конечная точки. Аналогично мы будем различать у углов *начальную* и *конечную* стороны. Через AOB мы будем обозначать угол с начальной стороной OA и конечной OB. Такой угол мы считаем образованным вращением начальной стороны от исходного положения OA до конечного положения OB.

На плоскости возможны вращения в двух противоположных направлениях — в направлении против движения часовой стрелки и в направлении по движению часовой стрелки. В ближайших параграфах мы будем рассматривать вращения только в одном направлении — против движения часовой стрелки.

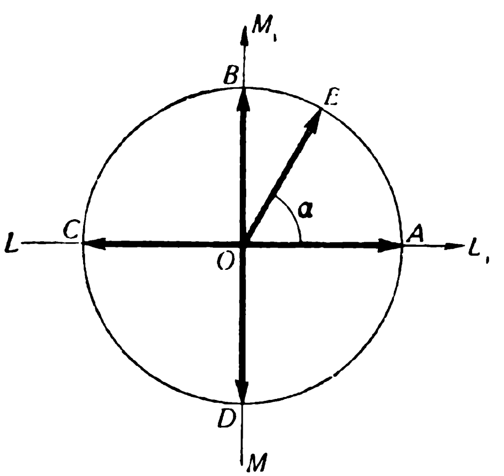
Условимся, говоря об угле α между вектором и осью, всегда считать начальную сторону угла направленной по оси (в её положительном направлении). Иначе говоря, угол α между вектором и осью отсчитывается от оси.

§ 24. Четверти. Проведём на плоскости ось LL_1 и выберем на ней точку O. Будем рассматривать углы, образованные вращением вектора $\overline{OE}$ вокруг точки O. Начальным положением этого вектора будем считать его положение $\overline{OA}$ на оси LL_1, причём, направление OA совпадает с направлением оси (черт. 21). Угол $AOE=\alpha$ отсчитывается от оси LL_1.

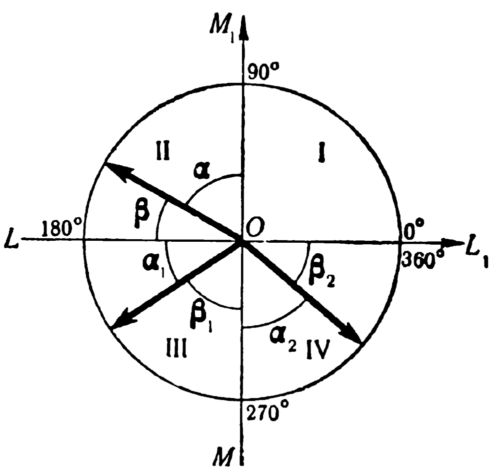
При вращении вектора $\overline{OE}$ вокруг точки O его конец E описывает окружность с центром в точке O.

Проведём через точку O вторую ось MM_1 под углом в 90° к первой оси LL_1. Обычно на чертежах ось LL_1 (от которой отсчитываются углы) изображается горизонтальной, направленной слева направо. Вторая ось MM_1 изображается вертикальной, направленной снизу вверх (черт. 21).

Обе оси делят круг с центром в точке O на 4 четверти: первая четверть AOB, вторая BOC, третья COD и четвёртая DOA. Если конечная сторона OE угла AOE расположена в первой, второй, третьей или четвёртой четверти, то угол



Черт. 21.



Черт. 22.

AOE называется, соответственно, углом первой, второй, третьей или четвёртой четверти (черт. 22).

Углы первой четверти — острые — заключены между 0° и 90°, углы второй четверти — тупые — заключены между 90° и 180°. Углы третьей четверти — между 180° и 270°, четвёртой четверти — между 270° и 360°.

Углы второй четверти можно представить в виде $90° + \alpha$ или $180° - \beta$, где α и β — острые углы; углы третьей четверти — в виде $180° + \alpha_1$, или $270° - \beta_1$, где α_1 и β_1 — острые углы; углы четвёртой четверти $270° + \alpha_2$ или $360° - \beta_2$, где α_2 и β_2 — острые углы.

Если вектор описывает угол AOE, равный α угловых градусов, его конец описывает дугу $\smile{AE}$ окружности, равную α дуговым градусам. Точку A считают начальной, точку E — конечной точкой этой дуги (черт. 21).

Угол, равный 0° (нулевой угол), имеет совпадающие стороны. Соответствующая ему дуга в 0° (нулевая дуга) имеет совпадающие начальную и конечную точки.

§ 25. Углы и дуги, большие 360°. Рассмотрим круговое вращение, например, вращение ключа, охватывающего гайку, вращение ручки ворота, вращение пропеллера и т. п. Естественно измерять это вращение углом между начальным и конечным положением ключа, ручки, пропеллера и т. п. С помощью тех углов, которые мы до сих пор рассматривали, можно измерять лишь вращения, меньшие полного оборота (360°). Между тем часто приходится иметь дело с вращениями, большими полного оборота. Таким образом, понятие угла нуждается в обобщении — необходимо ввести углы, бóльшие полного оборота (бóльшие 360°).

Рассмотрим угол α, меньший 360° ($0 \leqslant \alpha < 360°$), с начальной стороной OA и конечной OE. Пусть вектор, вращаясь от положения $\overline{OA}$, сначала сделает n полных оборотов, а затем опишем угол α (или наоборот). Очевидно, он попадёт в положение вектора $\overline{OE}$. В таком случае говорят, что вектор описал угол, равный $n \cdot 360° + \alpha$. Существует бесконечное множество углов β с начальной стороной $\overline{OA}$ и конечной стороной $\overline{OE}$. Они выражаются формулой:

$$\beta = n \cdot 360° + \alpha, \tag{39}$$

где n — любое целое число, положительное или нуль, $0 \leqslant \alpha < 360°$.

В технике углы измеряются иногда в частях полного оборота. Если лопасть винта сделает $7\frac{1}{4}$ полных оборотов, то это значит, что она сначала, сделав 7 полных оборотов, вернулась в исходное положение, а затем повернулась на прямой угол ($\frac{1}{4}$ полного оборота). Угол $7\frac{1}{4}$ оборотов, описанный лопастью, в градусной мере равен $7 \cdot 360° + 90° = 2610°$.

Когда вектор описывает угол $\beta = n \cdot 360° + \alpha$, его конец описывает дугу, равную целому числу n полных окружностей и дуге α. Существует бесконечное множество дуг, имеющих данное начало A и данный конец E. Они также выражаются формулой (39).

Пример. *Какое время показывают стрелки часов в моменты их совмещения?*

В 0 часов обе стрелки совпадают; за промежуток времени в t часов минутная стрелка опишет угол, равный $t \cdot 360°$, а часовая — угол $t \cdot 30°$. Чтобы положения стрелок в t часов совпадали, разность этих углов $t \cdot 330°$ должна быть равна $n \cdot 360°$, где n — целое число:

$$330\,t = n\,360, \qquad t = \frac{360}{330}\,n = 1\,\frac{1}{11}\,n.$$

Полагая $n = 1, 2, \ldots, 10$, получим, что стрелки совпадут в $1\frac{1}{11}$ часа, т. е. в 1 час $5\frac{5}{11}$ мин.; в $2\frac{2}{11}$ часа, т. е. в 2 часа $10\frac{10}{11}$ мин. и т. д., наконец, в $10\frac{10}{11}$ часа, т. е. в 10 часов $54\frac{4}{11}$ мин.

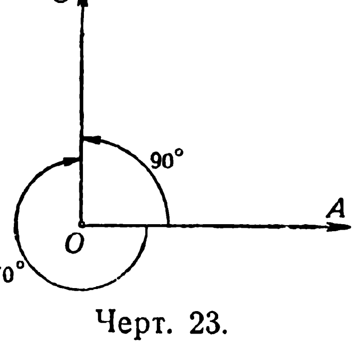
§ 26. Отрицательные углы и дуги. Суммы углов и дуг. До сих пор мы допускали вращение только в одном направлении — против движения часовой стрелки. Такое вращение назовём *положительным*. Сейчас мы будем допускать также и вращение по движению часовой стрелки — такое вращение назовём *отрицательным*. Угол, описанный при положительном вращении, назовём *положительным* углом, при отрицательном вращении — *отрицательным* углом.

Пример. Обычно положительное вращение ключа закрывает замок, а отрицательное — открывает его.

Дуга окружности, описанная концом вектора при его положительном вращении, называется *положительной* дугой, при его отрицательном вращении — *отрицательной дугой*.

Человек движется по положительной дуге окружности, если центр окружности находится по левую сторону от него; по отрицательной дуге, если центр находится по правую сторону от него.

Положительный угол или дуга измеряется положительным числом, выражающим величину угла или дуги. Отрицательный угол или дуга измеряется отрицательным числом, абсолютная величина которого выражает величину угла или дуги.



Черт. 23.

Пример. На чертеже 23 мы видим два угла AOB с начальной стороной OA и конечной стороной OB: один — положительный, равен 90°, другой — отрицательный, равен — 270°.

Суммой двух углов AOB и BOC, у которых конечная сторона первого угла служит начальной стороной второго, есть угол AOC, начальной стороной которого служит начальная сто-

рона первого угла, а конечной стороной — конечная сторона второго.

Суммой дуг AB и BC одной и той же окружности, у которых конечная точка первой дуги служит начальной точкой второй, называется дуга AC той же окружности, начальной точкой которой служит начальная точка первой дуги, а конечной точкой — конечная точка второй (черт. 24). Сумма углов или дуг измеряется алгебраической суммой чисел, измеряющих эти углы или дуги.

Пример. На чертеже 25

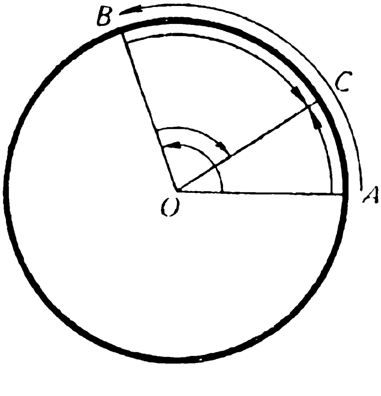
$$\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC,$$

причём $\angle AOB = 90°$. Если обозначить $\angle AOC$ через α, $\angle BOC$ через β, то $\alpha = 90° + \beta$, $\beta = \alpha - 90°$. Например, при $\alpha = 60°$, $\beta = -30°$.

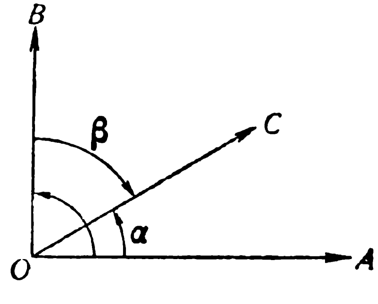
Как нам известно, любой положительный угол β можно представить в виде

$$\beta = n \cdot 360° + \alpha, \tag{39}$$

где n — целое число положительное или нуль, $0° \leqslant \alpha < 360°$. Точно так же и любой отрицательный угол β можно представить той же формулой (39), только n будет в этом случае отрицательным числом



Черт. 24.



Черт. 25.

Пример. $-1000°$ заключено между $-3 \cdot 360° = -1080°$, и $-2 \cdot 360° = -720°$. Поэтому мы можем взять $n = -3$: $-1000° = -3 \cdot 360° + 80°$ ($n = -3$, $\alpha = 80°$).

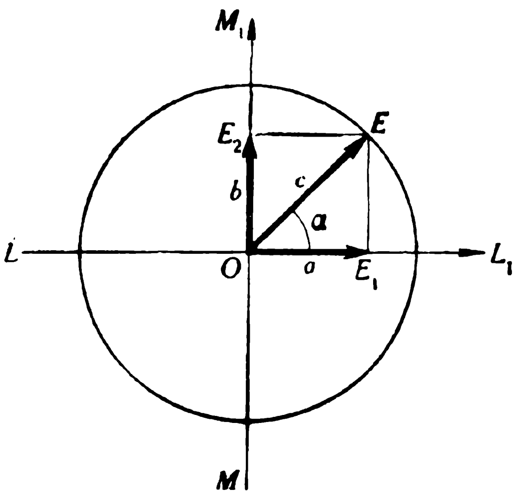
Аналогично: $-270° = -1 \cdot 360° + 90°$ ($n = -1$, $\alpha = 90°$).

Таким образом, формулой (39) можно пользоваться во всех случаях. В этой формуле n может быть произвольным целым числом: $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, а $0 \leqslant \alpha < 360°$.

Заметим, что все углы, определяемые по формуле (39) при различных n, но одном и том же α, имеют общие начальную и конечную стороны. В силу этого построение любого угла β сводится к построению соответствующего положительного или нулевого угла α, меньшего 360°.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЛЮБОГО УГЛА И ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА

§ 27. Новое определение тригонометрических функций острого угла. Определение тригонометрических функций острого угла как отношений сторон прямоугольного треугольника (см. гл. I) не распространяется непосредственно на произвольные углы. Поэтому мы дадим сейчас несколько иное определение тригонометрических функций острого угла, которое легко распространяется на любые углы.



Черт. 26.

Рассмотрим попрежнему на плоскости две оси: ось LL_1 (горизонтальная ось на черт. 26) и ось MM_1, образующую с LL_1 угол 90° (вертикальная ось на черт. 26).

Пусть вектор $\overline{OE}$ длины c образует угол $AOE = \alpha$ с осью LL_1. Обозначим через a его проекцию OE_1 на ось LL_1, а через b — его проекцию OE_2 на ось MM_1. Для краткости будем называть ось LL_1 (от которой отсчитываются углы) первой осью, ось MM_1 — второй осью, а числа a и b — соответственно первой и второй проекциями вектора $\overline{OE}$.

Если α — положительный острый угол (черт. 26), направления проекций OE_1 и OE_2 совпадают с направлениями соответственных осей. a и b — числа положительные, равные длинам отрезков OE_1 и OE_2.

В прямоугольном треугольнике OE_1E гипотенуза $OE = c$; катет $OE_1 = a$; катет $E_1E = OE_2 = b$.

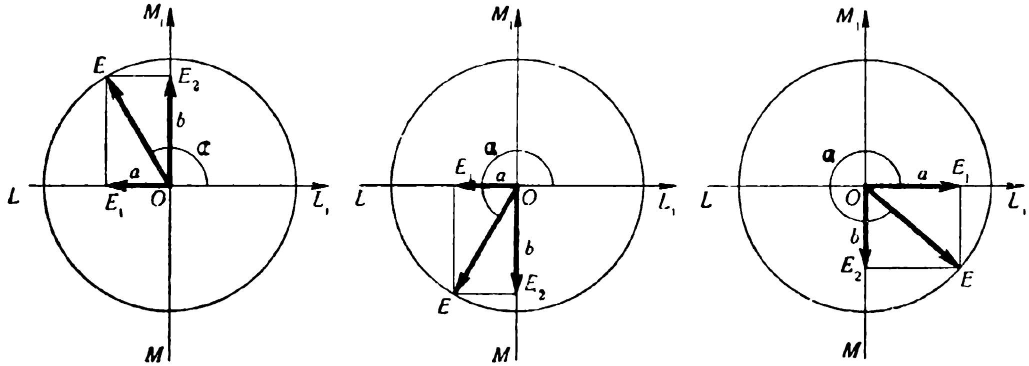
Из этого прямоугольного треугольника имеем:

$$\sin\alpha = \frac{b}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{a}{c}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{a}{b}. \qquad (40)$$

Можно определить тригонометрические функции острого угла с помощью равенств (40). Это определение распространим сейчас на любые углы.

§ 28. Определение тригонометрических функций любого угла.

Пусть теперь α — произвольный угол, положительный, отрицательный или нулевой. Рассмотрим вектор $\overline{OE}$ длины c, образующий угол α с первой осью LL_1. Его первую и вторую проекции попрежнему обозначим через a и b (черт. 27).



Черт. 27.

Определения.

Синусом угла α называется отношение второй проекции вектора, образующего угол α с первой осью, к длине вектора:

$$\sin\alpha = \frac{b}{c}. \tag{41}$$

Косинусом угла α называется отношение первой проекции вектора, образующего угол α с первой осью, к длине вектора:

$$\cos\alpha = \frac{a}{c}. \tag{42}$$

Тангенсом угла α называется отношение второй проекции вектора, образующего угол α с первой осью, к его первой проекции:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}. \tag{43}$$

Котангенсом угла α называется отношение первой проекции вектора, образующего угол α с первой осью, к его второй проекции:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{a}{b}. \tag{44}$$

Вполне аналогично:

Секансом угла α называется отношение длины вектора к первой проекции вектора, образующего угол α с первой осью:

$$\sec \alpha = \frac{c}{a}.$$

Косекансом угла α называется отношение длины вектора ко второй проекции вектора, образующего угол α с первой осью:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{c}{b}.$$

Покажем теперь, что отношения $\frac{b}{c}$, $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{a}$, $\frac{a}{b}$, определяющие тригонометрические функции угла α, не зависят от длины вектора $\overline{OE}$; они зависят только от угла α между этим вектором и первой осью.

Рассмотрим наряду с вектором $\overline{OE}$ длины c вектор $\overline{OF}$ длины c_1, образующий тот же угол α с первой осью; обозначим через a_1 и b_1 первую и вторую проекции вектора $\overline{OF}$. В силу теоремы § 21, проекции b и b_1 векторов $|\overline{OE}|$ и $\overline{OF}$ пропорциональны их длинам:

$$\frac{b}{c} = \frac{b_1}{c_1}. \quad \text{Аналогично,} \quad \frac{a}{c} = \frac{a_1}{c_1}.$$

Почленным делением двух предыдущих равенств мы получаем:

$$\frac{b}{a} = \frac{b_1}{a_1}, \quad \frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}.$$

Эти равенства показывают, что значения $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ действительно не зависят от длины взятого вектора.

Если первая проекция оказывается равной нулю ($a = 0$), то тангенса угла α не существует. В самом деле, в этом случае дробь $\frac{b}{a}$, определяющая $\operatorname{tg} \alpha$, не имеет смысла.

Если вторая проекция оказывается равной нулю ($b = 0$), то по аналогичной причине не существует котангенса.

Пример. Найдём тригонометрические функции угла $\alpha = -45°$. Если $\angle AOE = -45°$, то первая проекция OE_1 вектора $\overline{OE}$ положительная, вторая — отрицательная (она направлена вниз на черт. 28). Обозначим длину вектора $\overline{OE}$ через c, тогда:

$$a = \frac{c\sqrt{2}}{2}, \quad b = -\frac{c\sqrt{2}}{2}.$$

Находим: $\sin(-45^\circ)=\frac{b}{c}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(-45^\circ)=\frac{a}{c}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

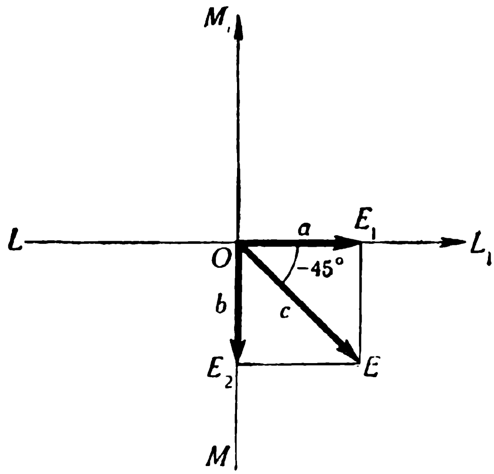
$$\operatorname{tg}(-45^\circ)=\frac{b}{a}=-1,\quad \operatorname{ctg}(-45^\circ)=\frac{a}{b}=-1.$$

Как мы знаем, существует бесконечное множество углов β с начальной стороной OA и конечной OE. Они выражаются формулой:

$$\beta=n\cdot 360^\circ+\alpha,$$
$$n=0,\ \pm 1,\ \pm\ldots .$$

Все эти углы имеют одинаковые синусы и одинаковые косинусы, равные отношениям соответственных проекций одного и того же вектора $\overline{OE}$ к его длине:

$$\begin{aligned}\sin(n\cdot 360^\circ+\alpha)&=\sin\alpha,\\ \cos(n\cdot 360^\circ+\alpha)&=\cos\alpha.\end{aligned}\qquad(45)$$



Черт. 28.

То же самое относится к тангенсу и котангенсу:

$$\operatorname{tg}(n\cdot 360^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha,\quad \operatorname{ctg}(n\cdot 360^\circ+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha.\qquad(45)$$

§ 29. Проекции вектора на оси. Из формул (41) и (42), определяющих синус и косинус, следует:

$$b=c\sin\alpha,\qquad(46)$$

$$a=c\cos\alpha.\qquad(47)$$

Формулы (46), (47) определяют по длине (c) вектора $\overline{AC}$ и его углу α с первой осью его первую и вторую проекции a и b.

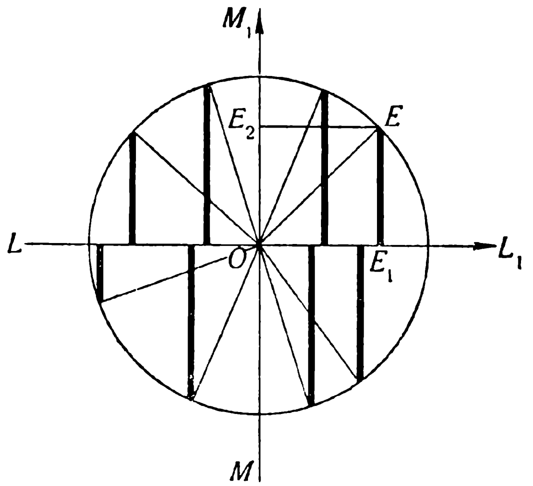
Заметим, что формулы (46 и 47) справедливы для любого вектора, а не только такого, начало которого совпадает с точкой O пересечения осей. Действительно, каждый вектор можно заменить *равным* ему вектором с началом в точке O, не изменив угла α с первой осью, длины c, а значит (§ 21), и проекций a и b.

Особенно важна формула (47), которая называется *формулой проекций*. Сформулируем её словесно:

Проекция вектора на ось равна длине вектора, умноженной на косинус угла вектора с осью.

§ 30. Геометрическое построение синуса и косинуса. Пусть теперь вектор $\overline{OE}$ есть *единичный* вектор, т. е. его длина в выбранном масштабе равна 1, $c=1$. Формулы (41) и (42) примут вид:

$$\sin\alpha = b; \quad \cos\alpha = a. \tag{48}$$



Черт. 29.

Значения синуса и косинуса равны соответственно второй и первой проекциям единичного вектора, образующего угол α с первой осью.

По определению тангенса и котангенса имеем:

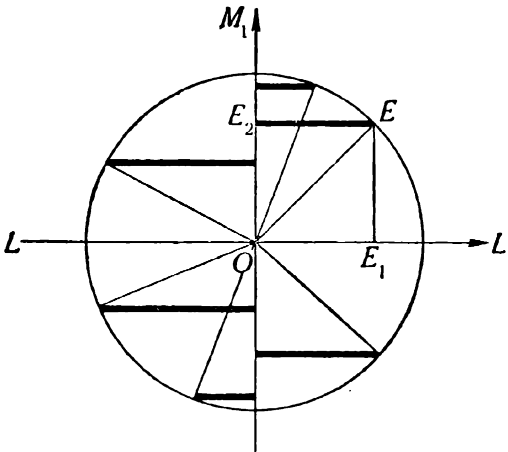
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \tag{28}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{29}$$

Формулы (28) и (29), выведенные в главе I для острого угла α, оказываются справедливыми для произвольного угла α.

Определять значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ построением и измерением особенно удобно на основании формул (48).

Построим (черт. 29) обе оси: первую — горизонтальную и вторую — вертикальную; отложим единичным вектор $\overline{OE}$ под любым углом α к горизонтальной оси; проведём его проекции OE_2 и OE_1 на вертикальную и горизонтальную оси. Длины отрезков OE_2 и OE_1 (при выбранной единице длины) равны соответственно абсолютным величинам $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ($|\sin\alpha|$, $|\cos\alpha|$). Знаки же $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ определяются направлениями этих отрезков.



Черт. 30.

$\sin\alpha$ есть число *положительное* или *отрицательное*, в зависимости от того, направлен ли отрезок OE_2 *снизу вверх* или *сверху вниз от точки O.*

Когда рассматривают несколько углов, то вместо отрезка OE_2 для наглядности можно брать отрезок E_1E (см. черт. 29).

$\cos\alpha$ есть число *положительное* или *отрицательное* в зависимости от того, направлен ли отрезок OE_1 *слева направо* или *справа налево от точки O.*

Точно так же можно брать вместо отрезка OE_1 отрезок E_2E (черт. 30).

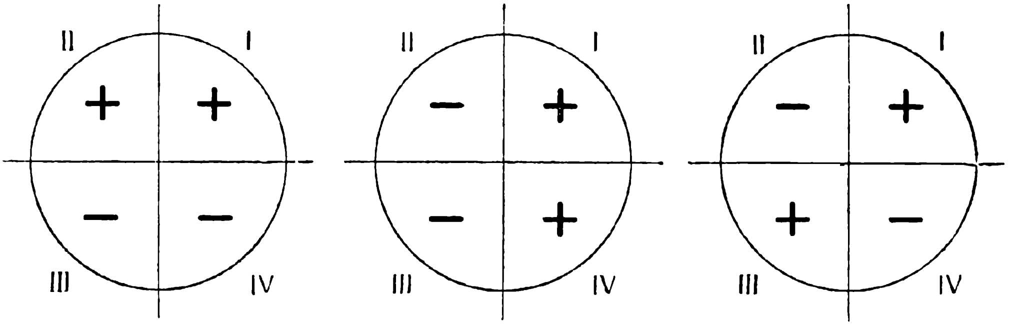
§ 31. Знаки тригонометрических функций. Сейчас мы на основе предыдущего приведём „правило знаков" тригонометрических функций для углов, заключённых между 0° и 360°. Сохраним обозначения предыдущего параграфа. Для краткости говорят: „тригонометрическая функция в первой, второй, третьей, четвёртой четверти" вместо „тригонометрическая функция для углов в первой, второй, третьей, четвёртой четверти".

Знак синуса. *Синус положителен в первой и второй четверти, отрицателен в третьей и четвёртой четверти.*

В самом деле, проекция OE_2 вектора $\overline{OE}$ в первой и второй четверти направлена снизу вверх (черт. 27 или 29), а в третьей и четвёртой четверти — сверху вниз.

Знак косинуса. *Косинус положителен в первой и четвёртой четверти, отрицателен во второй и третьей четверти.*

В самом деле проекция OE_1 вектора $\overline{OE}$ в первой и четвёртой четверти направлена слева направо, а во второй и в третьей четверти — справа налево (черт. 27 или 30).



Знаки тангенса и котангенса. *Тангенс и котангенс положительны в первой и третьей четверти, отрицательны во второй и четвёртой четверти.*

В самом деле, в силу формул $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ и $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, тангенс и котангенс положительны, если синус и косинус имеют *одинаковые* знаки, т. е. в первой и третьей четверти; они отрицательны, если синус и косинус имеют *разные* знаки, т. е. во второй и четвёртой четверти.

Приведённая на стр. 41 схема показывает знаки тригонометрических функций в разных четвертях.

§ 32. Значения тригонометрических функций некоторых углов. Определим теперь тригонометрические функции для углов $\alpha = 0°$, $90°$, $180°$, $270°$. Мы сохраняем обозначения § 29.

Угол $0°$. Если $\alpha = 0°$, вектор $\overline{OE}$ совпадает с $\overline{OA}$ (черт. 31). Его проекция на вторую ось есть нулевой отрезок $b = 0$; его проекция на первую ось есть отрезок OA, $a = 1$. Следовательно:

$$\sin 0° = 0, \ \cos 0° = 1; \ \operatorname{tg} 0° = \frac{0}{1} = 0.$$

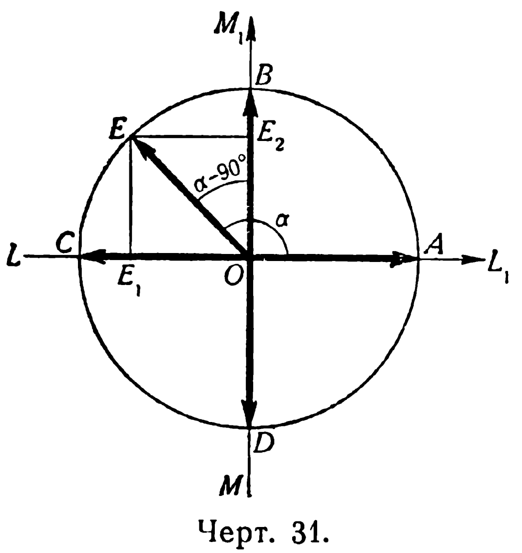
Котангенс угла $0°$ не существует (так как $b = 0$).

Угол $90°$. Если $\alpha = 90°$, вектор $|\overline{OE}|$ совпадает с $|\overline{OB}|$ (черт. 31). Его проекция на вторую ось есть отрезок OB, $b = 1$, его проекция на первую ось есть нулевой отрезок, $a = 0$. Следовательно:

$$\sin 90° = 1, \quad \cos 90° = 0,$$

$$\operatorname{ctg} 90° = \frac{0}{1} = 0.$$

Тангенса угла $90°$ не существует.



Черт. 31.

Угол $180°$. Если $\alpha = 180°$, вектор $\overline{OE}$ совпадает с $\overline{OC}$ (черт. 31), его проекция на вторую ось есть нулевой отрезок, $b = 0$; его проекция на первую ось есть отрезок OC, $a = -1$. Следовательно:

$$\sin 180° = 0, \quad \cos 180° = -1, \quad \operatorname{tg} 180° = \frac{0}{-1} = 0.$$

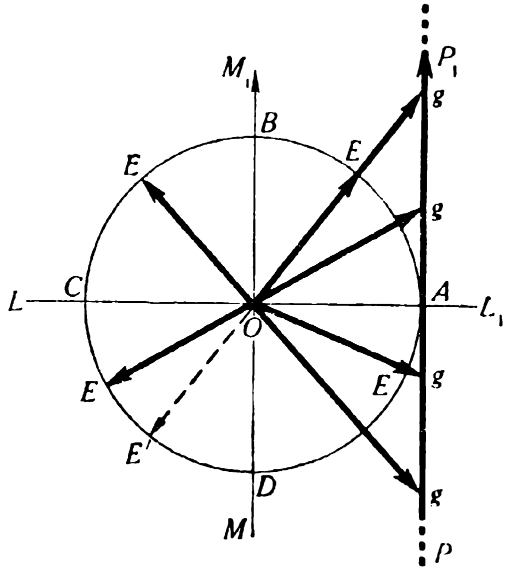
Котангенса угла $180°$ не существует.

Угол $270°$. Если $\alpha = 270°$, вектор $\overline{OE}$ совпадает с $\overline{OD}$ (черт. 31). Его проекция на вторую ось есть отрезок OD, $b = -1$; его проекция на первую ось есть нулевой отрезок,

$\alpha = 0$. Следовательно: $\sin 270° = -1$, $\cos 270° = 0$, $\operatorname{ctg} 270° = \frac{0}{-1} = 0$. Тангенса угла 270° не существует.

§ 33. Геометрическое построение тангенса и котангенса. Значения тангенса и котангенса можно также получать путём геометрического построения и измерения.

Через точку A первой (горизонтальной оси) (черт. 32) приведём вертикальную ось PP_1, направленную снизу вверх. Эта ось касается в точке A единичной окружности с центром в точке O. Пусть вектор $\overline{OE}$ образует угол α с первой осью. Продолжим прямую, на которой расположен вектор $\overline{OE}$, до пересечения её в точке G с осью PP_1. Докажем, что *алгебраическая величина d отрезка Ag оси PP_1 равна значению* $\operatorname{tg}\alpha$ ($d = \operatorname{tg}\alpha$).



Черт. 32.

Рассмотрим отдельно два случая.

Случай 1. Вектор $\overline{OE}$ расположен в первой или четвёртой четверти (черт. 32). Векторы $\overline{OE}$ и $\overline{Og}$ имеют одинаковое направление и поэтому образуют один и тот же угол α с первой осью. Первая проекция вектора $\overline{Og}$ равна: $\overline{OA} = 1$; вторая проекция вектора $\overline{Og}$ равна: $Ag = d$. По определению тангенса:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{d}{1} = d.$$

Случай 2. Вектор $\overline{OE}$ расположен во второй или третьей четверти (черт. 32). Одинаковое направление с вектором $\overline{OE}$ имеет теперь вектор $\overline{gO}$. Первая проекция вектора $\overline{gO}$ равна: $AO = -OA = -1$; вторая проекция вектора $\overline{gO}$ равна: $gA = -Ag = -d$. По определению тангенса:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-d}{-1} = d.$$

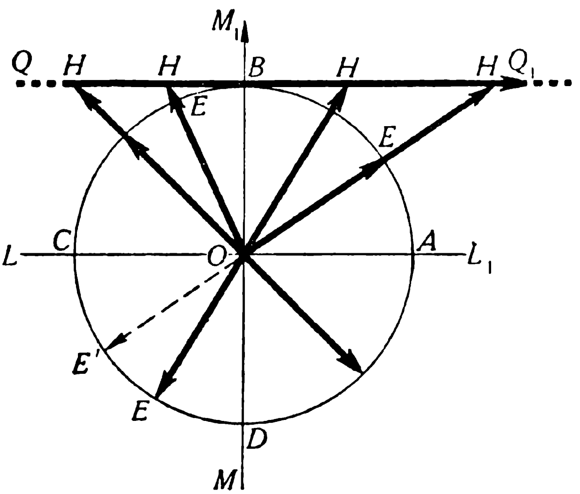
Итак, наше предложение доказано в обоих случаях.

Особо отметим случаи, когда $\alpha = 90°$ и $\alpha = 270°$. В этих случаях вектор $\overline{OE}$ параллелен оси PP_1 и прямая, на которой он лежит, не пересекает эту ось (точки g не существует). Это и является геометрической иллюстрацией того, что $\operatorname{tg} 90°$ и $\operatorname{tg} 270°$ не существует.

Из изложенного построения тангенса мы замечаем, что тангенсы углов, отличающихся друг от друга на $180°$, равны между собой:

$$\operatorname{tg}(180° + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha. \tag{49}$$

Действительно, векторы $\overline{OE}$ и $\overline{OE'}$, образующие с первой осью наши углы (черт. 32), лежат на одной прямой и поэтому им соответствует одна и та же точка g, а значит, и одно и то же значение $\operatorname{tg} \alpha$.



Черт. 33.

Аналогично производится построение котангенса произвольного угла, но вместо оси PP_1 берётся горизонтальная ось QQ_1 (черт. 33), касательная к единичной окружности в точке B и направленная слева направо.

Продолжим прямую, на которой расположен вектор $\overline{OE}$, образующий угол α с осью LL_1 до пересечения в точке H с осью QQ_1.

Так же, как и в случае тангенса, читатель докажет, что *алгебраическая величина d_1 отрезка BH оси QQ_1 равна* $\operatorname{ctg} \alpha$:

$$d_1 = \operatorname{ctg} \alpha.$$

Здесь также геометрически наглядно видно, что $\operatorname{ctg} 0°$ и $\operatorname{ctg} 180°$ не существуют.

Для котангенса, подобно тангенсу, имеет место формула:

$$\operatorname{ctg}(180° + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha. \tag{50}$$

Эту формулу можно вывести геометрически, как и формулу (49), или же как следствие последней ввиду того, что котангенс есть величина, обратная тангенсу.

Из доказанных свойств тангенса и котангенса вытекают следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}(n\cdot 180^\circ + \alpha) &= \operatorname{tg}\alpha, \\ \operatorname{ctg}(n\cdot 180^\circ + \alpha) &= \operatorname{ctg}\alpha, \end{aligned}\right\} \qquad (51)$$

где n — любое целое число: $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm n \ldots$. В самом деле, раз углы, отличающиеся на один полуоборот (180°), имеют одинаковые тангенс и котангенс, то углы, отличающиеся на любое целое число n полуоборотов, также имеют одинаковые тангенс и котангенс.

Из этих формул вытекают формулы (45) § 28, потому что целое число оборотов есть также целое число (а именно — удвоенное) полуоборотов.

§ 34. Некоторые примеры отыскания углов по значению тригонометрической функции. В главе I мы решали задачу отыскания острого угла по заданному значению его тригонометрической функции. Теперь естественно поставить задачу отыскания *всех* углов, для которых тригонометрическая функция принимает одно и то же заданное значение. Откладывая полное решение этой задачи до главы VII, мы здесь разберём два нужных нам для дальнейшего примера.

1. Определим все углы α, для которых $\cos\alpha = 1$, т. е. первая проекция OE_1 вектора $\overline{OE}$ (черт. 31) равна 1. Значит, OE_1 совпадает с отрезком OA. Угол $\alpha = \angle AOE$ имеет совпадающие стороны и поэтому он равен целому числу n полных оборотов:

$$\alpha = n\cdot 360^\circ,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

2. Определим все углы α, для которых $\operatorname{tg}\alpha = 0$. Из геометрического построения тангенса (черт. 32) следует, что если $\operatorname{tg}\alpha = 0$, то отрезок Ag есть нулевой отрезок и точка g совпадает с точкой A. Вектор $\overline{OE}$ при этом совпадает с вектором $\overline{OA}$ или вектором $\overline{OC}$. Значит, угол $\alpha = \angle AOE$ равен целому числу n полуоборотов:

$$\alpha = n\cdot 180^\circ,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Аналогично нетрудно определить и все углы α, для которых $\sin\alpha = 0$, $\sin\alpha = 1$, $\cos\alpha = 0$, $\operatorname{ctg}\alpha = 0$. Мы это предоставляем читателю.

НЕКОТОРЫЕ ВАЖНЕЙШИЕ ФОРМУЛЫ

§ 35. Основные формулы. Основные соотношения между значениями тригонометрических функций угла α, выведенные нами в § 9 для случая острого угла, остаются верными и для любого угла α. Докажем это.

Пусть $\overline{OE}$ — единичный вектор, образующий угол α с первой осью (черт. 27), OE_1 и OE_2 — его первая и вторая проекции. Имеем: $|\overline{OE}|=1$, $|E_1E|=|\sin\alpha|$, $|OE_1|=|\cos\alpha|$. По теореме Пифагора, из треугольника OEE_1 получаем:

$$|\sin\alpha|^2+|\cos\alpha|^2=1.$$

При возвышении в квадрат знак абсолютной величины можно опустить:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1. \tag{27}$$

Первая основная формула доказана.

Справедливость второй и третьей основных формул

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad (28),(29)$$

уже установлена выше (§ 30).

Из основных формул для произвольных углов α вытекают все формулы, доказанные в первой главе для острых углов. Например:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}, \quad \operatorname{tg}^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}, \quad \cos^2\alpha=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

и т. д.

С помощью этих формул можно определять значения всех тригонометрических функций произвольного угла, если известно значение одной из них для этого угла. При этом значения некоторых тригонометрических функций выражаются через значения других иррационально — с помощью квадратных корней. В случае острого угла α тригонометрические функции всегда положительны, поэтому мы брали квадратные корни только со знаком „плюс"; в случае же произвольного угла перед корнем может стоять тот или другой из двух знаков, в зависимости от величины угла. Поэтому записывают:

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha},\\ \sin\alpha&=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}.\end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Если угол α известен, то тем самым известны и знаки $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, и перед квадратным корнем выбирается соответствующий знак. Например, $\cos\alpha$ отрицателен во второй четверти и поэтому, если $90° < \alpha < 180°$, то $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha}$.

Пример. $\sin 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Найти $\cos 135°$, $\operatorname{tg} 135°$, $\operatorname{ctg} 135°$.

Угол в 135° есть угол второй четверти, где косинус отрицательный. Следовательно:

$$\cos 135° = -\sqrt{1-\sin^2 135°} = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

и дальше:

$$\operatorname{tg} 135° = \frac{\sin 135°}{\cos 135°} = -1; \quad \operatorname{ctg} 135° = \frac{1}{\operatorname{tg} 135°} = -1.$$

§ 36. Замечание о тригонометрических тождествах. В § 11 определялись тригонометрические тождества как равенства, в которые входят тригонометрические функции острого угла α и верные для любого острого угла α. Теперь естественно определить тригонометрическое тождество как равенство, в которое входят тригонометрические функции произвольного угла α и которое справедливо для любого (не только острого) угла α.

Разумеется, при этом не принимаются в расчёт те значения угла α, для которых хотя бы одна из входящих в равенство функций не существует. Например, равенство $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$ есть тригонометрическое тождество, так как оно справедливо для всех углов α, за исключением тех, для которых тангенс или котангенс не существует (0°, 90°, 180°, 270° ...).

Основные формулы представляют примеры тригонометрических тождеств (не только в старом, но и в новом смысле слова). Поэтому все тригонометрические тождества, выведенные из основных формул, остаются тригонометрическими тождествами и в новом смысле (т. е. они верны для произвольных углов).

Примерами таких тригонометрических тождеств могут служить:

$$\cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^4\alpha = 1,$$
$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

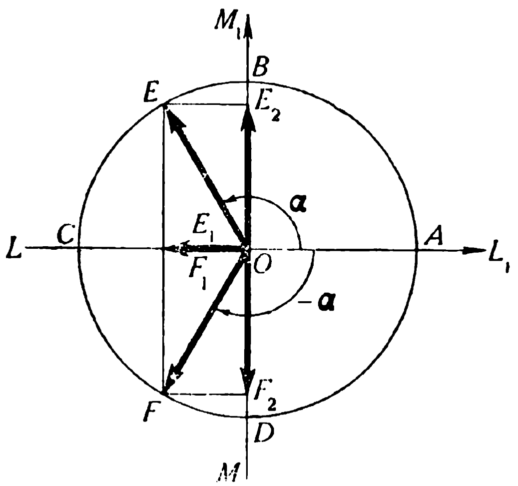
При извлечении корней надо иметь в виду, что тригонометрические функции произвольного угла могут иметь разные знаки (как это имело место в формулах (52)).

Например:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt[4]{1-\sin^4\alpha-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha},$$

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\pm\sqrt{1+2\sin\alpha\cos\alpha}.$$

§ 37. Изменение знака угла. Если дуга AE единичной окружности измеряется числом α, то симметричная с ней относительно первой оси дуга AF (черт. 34) измеряется числом $-\alpha$ (обе дуги имеют равную величину, но противоположные направления). Соответствующие этим дугам центральные углы AOE и AOF измеряются теми же числами (α и $-\alpha$). Векторы $\overline{OE}$ и $\overline{OF}$, образующие с первой осью углы α и $-\alpha$, симметричны относительно этой оси. Первые проекции этих векторов совпадают: $OE_1=OF_1$. По определению косинуса, эти проекции равны соответственно $\cos\alpha$ и $\cos(-\alpha)$, откуда следует, что



Черт. 34.

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha. \tag{53}$$

Вторые же проекции OE_2 и OF_2 векторов $\overline{OE}$ и $\overline{OF}$, равные по абсолютной величине, противоположны по знаку. По определению синуса, эти проекции равны соответственно $\sin\alpha$ и $\sin(-\alpha)$. Следовательно,

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha. \tag{54}$$

Далее:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}(-\alpha)&=\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha;\\ \operatorname{ctg}(-\alpha)&=\frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Итак, *при перемене знака угла значение косинуса не меняется, а значения синуса, тангенса и котангенса меняют только свой знак.*

Формулы (53) — (55) позволяют выразить значения тригонометрических функций отрицательных углов через значения тригонометрических функций положительных углов.

Примеры.

$$\cos(-45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \sin(-45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg}(-45^\circ) = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1; \quad \operatorname{ctg}(-45^\circ) = -\operatorname{ctg} 45^\circ = -1.$$

Углы $AOE = \alpha$ и $AOF = -\alpha$ имеют, в отличие от других тригонометрических функций, равные *косинусы*. При вычислении косинуса угла с данными сторонами мы можем не интересоваться тем, какая из них считается начальной. Поэтому говорят: „косинус угла между векторами или осями“, не отмечая начальной стороны.

§ 38. Обобщение формул для тригонометрических функций дополнительных углов. Мы докажем справедливость для любых углов α формул:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha, \tag{10}$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha, \tag{11}$$

выведенных нами в главе I для острых углов α.

Пусть единичный вектор $\overline{OE}$ (черт. 31) образует производный угол α с первой осью LL_1. Тогда со второй осью MM_1 он образует угол $\beta = \alpha - 90^\circ$ (см. черт. 31).

По определению синуса, проекция OE_2 вектора $\overline{OE}$ на вторую ось равна:

$$OE_2 = \sin\alpha.$$

С другой стороны, по формуле проекций (47), вектор $\overline{OE}$ имеет на ось MM_1 проекцию OE_2, равную произведению $|\overline{OE}| = 1$ на косинус угла β, т. е.

$$OE_2 = 1 \cdot \cos(\alpha - 90^\circ) = \cos(90^\circ - \alpha)$$

(косинус не меняется от перемены знака угла).

Из сравнения двух полученных равенств вытекает справедливость формулы (11):

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

для произвольного угла α.

Если в формуле (11) вместо угла α взять угол $90^\circ - \alpha$, то дополнительным к нему углом будет α, поэтому из формулы (11) вытекает формула (10):

$$\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha).$$

§ 39. Приведение к углу, меньшему 360°. Сейчас мы обратимся к задаче приведения тригонометрических функций к острому углу, т. е. к задаче выражения тригонометрических функций любого угла через тригонометрические функции острого угла. Эта задача очень важна, например, потому, что она позволяет ограничиться таблицей тригонометрических функций только острых углов.

Заметим, что на основании выведенных формул (45) мы можем сразу привести тригонометрические функции любого угла к тригонометрическим функциям положительного угла, меньшего 360°. В самом деле, любой угол β можно представить так:

$$\beta = n \cdot 360^\circ + \alpha,$$

где $0 \leqslant \alpha < 360^\circ$, $n = 0, \pm 1, \pm, \ldots$.

Формулы же (45) дают:

$$\sin\beta = \sin\alpha, \quad \cos\beta = \cos\alpha, \quad \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha, \quad \operatorname{ctg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Пример. $750^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 30^\circ$, откуда

$$\sin 750^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 750^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 750^\circ = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{ctg} 750^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}.$$

Что же касается специально тангенса и котангенса, то их на основании формул (51) § 33 можно сразу привести и к углу, меньшему 180°.

Пример.

$$\operatorname{tg} 585^\circ = \operatorname{tg}(3 \cdot 180^\circ + 45^\circ) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1.$$

$$\operatorname{ctg} 585^\circ = \operatorname{ctg}(3 \cdot 180^\circ + 45^\circ) = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1.$$

§ 40. Формулы приведения. *Формулами приведения называются формулы, выражающие тригонометрические функции углов* $90^\circ \pm \alpha$, $180^\circ \pm \alpha$, $270^\circ \pm \alpha$, $360^\circ - \alpha$ *через тригонометрические функции угла* α.

Углы $180^\circ \pm \alpha$, $360^\circ - \alpha$ можно считать образованными откладыванием угла α от первой (обычно горизонтальной) оси. Углы $90^\circ \pm \alpha$, $270^\circ \pm \alpha$ — откладыванием угла α от второй (обычно вертикальной) оси.

Мы уже вывели для *произвольных* углов α формулы:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha, \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha. \qquad (A)$$

Заменим в этих формулах α на $-\alpha$ и, значит, $90^\circ - \alpha$ на $90^\circ + \alpha$. Мы получаем:

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha, \qquad (B)$$
$$\cos(90^\circ + \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha. \qquad (C)$$

Так как α — произвольный угол, то, заменяя здесь α на $90^\circ + \alpha$, а, значит, $90^\circ + \alpha$ на $180^\circ + \alpha$, находим следующую пару формул:

$$\sin(180^\circ + \alpha) = \sin[90^\circ + (90^\circ + \alpha)] = \cos(90^\circ + \alpha) = \\ = -\sin\alpha. \qquad (B_1)$$
$$\cos(180^\circ + \alpha) = \cos[90^\circ + (90^\circ + \alpha)] = \\ = -\sin(90^\circ + \alpha) = -\cos\alpha. \qquad (C_1)$$

Далее,

$$\sin(270^\circ + \alpha) = \sin[90^\circ + (180^\circ + \alpha)] = \\ = \cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha. \qquad (B_2)$$
$$\cos(270^\circ + \alpha) = \cos[90^\circ + (180^\circ + \alpha)] = \\ = -\sin(180^\circ + \alpha) = \sin\alpha. \qquad (C_2)$$

Из четырёх последних формул, справедливых для любого α, заменой α на $-\alpha$ получаем следующие 4 формулы:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha. \qquad (B_3)$$
$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha, \qquad (C_3)$$
$$\sin(270^\circ - \alpha) = -\cos\alpha, \qquad (B_4)$$
$$\cos(270^\circ - \alpha) = -\sin\alpha. \qquad (C_4)$$

Наконец, поскольку значения одноимённых тригонометрических функций углов, отличающихся на 360°, равны между собой, получаем:

$$\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin\alpha. \qquad (B_5)$$
$$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos\alpha. \qquad (C_5)$$

Так же, как формулы (B_1), (C_1), (B_2), (C_2) получены последовательно из формул (B) и (C), последние 6 формул можно получить из формул (A) и (B) и (C) последовательным добавлением 90° к углу $90^\circ - \alpha$; например:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin[90^\circ + (90^\circ - \alpha)] = \\ = \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha,$$
$$\cos(270^\circ - \alpha) = \cos[90^\circ + (180^\circ - \alpha)] = \\ = -\sin(180^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$$

и т. п.

Теперь мы можем легко вывести формулы приведения для тангенса и котангенса.

$$\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha)=\frac{\sin(90^\circ-\alpha)}{\cos(90^\circ-\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha)=\frac{\sin(90^\circ+\alpha)}{\cos(90^\circ+\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)=\frac{\sin(180^\circ-\alpha)}{\cos(180^\circ-\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha.$$

$$\operatorname{ctg}(90^\circ-\alpha)=\frac{\cos(90^\circ-\alpha)}{\sin(90^\circ-\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$$

$$\operatorname{ctg}(90^\circ+\alpha)=\frac{\cos(90^\circ+\alpha)}{\sin(90^\circ+\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha.$$

$$\operatorname{ctg}(180^\circ-\alpha)=\frac{\cos(180^\circ-\alpha)}{\sin(180^\circ-\alpha)}=\frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

Нет нужды указывать остальные формулы приведения для тангенса и котангенса, поскольку значения этих функций не меняются от прибавления к аргументу 180°.

Полученные *формулы приведения* строятся по одному правилу, поэтому нет необходимости запоминать каждую из них в отдельности. В следующем параграфе будет дано это правило.

§ 41. Общее правило для формул приведения. Внимательно просмотрев все формулы приведения, можно заметить следующее.

В левой части каждой формулы приведения стоит „приводимая“ функция, т. е. тригонометрическая функция угла $\beta=90^\circ\pm\alpha$, $180^\circ\pm\alpha$, $270^\circ\pm\alpha$, $360^\circ-\alpha$. В правой части формулы стоит *одноимённая* или *сходственная* функция угла α, снабжённая знаком $+$ или $-$ (знак $+$ обыкновенно опускается).

Для углов $\beta=180^\circ\pm\alpha$, $360^\circ-\alpha$, образованных откладыванием угла α от первой (горизонтальной) оси, в правой части стоит *одноимённая* функция. Для углов $\beta=90^\circ\pm\alpha$, $270^\circ\pm\alpha$, образованных откладыванием угла α от второй (вертикальной) оси, стоит *сходственная* функция.

Остаётся указать лишь знак, который нужно брать перед функцией в правой части формул приведения. Формулы приведения, верные для всех углов α, верны, в частности, и для острых углов α. Но если угол α острый, то угол β есть угол вполне определённой четверти, что сразу определяет знак приводимой функции. Этот знак ставится перед функцией в правой части формулы.

Примеры. Составим формулы приведения для: 1) $\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha)$, 2) $\cos(360^\circ - \alpha)$.

1) Угол $(90^\circ + \alpha)$ образован откладыванием угла α от второй *(вертикальной)* оси; поэтому в правой части формулы приведения должна быть сходственная функция, т. е. $\operatorname{ctg}\alpha$ со знаком $+$ или $-$. Если угол α — острый, то угол $90^\circ + \alpha$ есть угол второй четверти и, значит, его тангенс отрицателен; следовательно:

$$\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

2) Угол $360^\circ - \alpha$ образован откладыванием угла α от первой (горизонтальной) оси; поэтому в правой части формулы приведения должна быть одноимённая функция, т. е. $\cos\alpha$ со знаком $+$ или $-$. Если угол α острый, то угол $360^\circ - \alpha$ есть угол четвёртой четверти, в которой косинус положителен, следовательно,

$$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos\alpha.$$

§ 42. Приведение к острому углу. Как мы сейчас увидим, формулы приведения позволяют выразить тригонометрические функции произвольного угла через тригонометрические функции *острого* угла (или, как говорят, привести к тригонометрическим функциям острого угла). В самом деле, тригонометрические функции произвольного угла β можно привести к тригонометрическим функциям положительного угла β_1, меньшего 360° (§ 39). Далее, всякий угол β_1 можно представить или так: $90^\circ + \alpha$, $180^\circ - \alpha$ (вторая четверть), или так: $180^\circ + \alpha$, $270^\circ - \alpha$ (третья четверть), или так: $270^\circ + \alpha$, $360^\circ - \alpha$ (четвёртая четверть), где α — острый угол. Наконец, с помощью формул приведения можно выразить тригонометрические функции угла β_1 через тригонометрические функции острого угла α. Таким образом, тригонометрические функции угла β будут приведены к функциям острого угла α.

Это даёт возможность при помощи таблицы значений тригонометрических функций острых углов вычислять значения тригонометрических функций любых углов.

Примеры.

$$1)\quad \sin 870^\circ = \sin(2\cdot 360^\circ + 150^\circ) = \sin 150^\circ = \\ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

$$2)\quad \cos 1180^\circ = \cos(3\cdot 360^\circ + 100^\circ) = \cos 100^\circ = \\ = \cos(90^\circ + 10^\circ) = -\sin 10^\circ.$$

По таблице находим: $\sin 10^\circ = 0{,}174$. Значит, $\cos 1180^\circ = -0{,}174$.

Для вычисления значений тригонометрических функций любого угла β можно рекомендовать следующий порядок действий:

1) Если угол β отрицательный, выразим значения тригонометрической функции угла β через её значение положительного угла $\beta_1 = -\beta$.

Пример. $\sin(-1000°) = -\sin 1000°$.

2) Если угол β_1 больше 360°, приведём тригонометрическую функцию угла β_1 к тригонометрической функции угла β_2, меньшего 360°.

Пример. $-\sin 1000° = -\sin(2 \cdot 360° + 280°) = -\sin 280°$.

3) Если угол β_2 больше 90°, приведём тригонометрическую функцию угла β_2 к тригонометрической функции острого угла.

Пример. $-\sin 280° = -\sin(270° + 10°) = \cos 10°$.

4) Тригонометрическую функцию полученного острого угла находим по таблице натуральных тригонометрических функций.

Пример. $\cos 10° = 0{,}985$.

В приведённом примере ход вычислений запишется в виде равенств:

$$\sin(-1000°) = -\sin 1000° = -\sin(2 \cdot 360° + 280°) =$$
$$= -\sin 280° = -\sin(270° + 10°) = \cos 10° = 0{,}985.$$

Глава третья

ИЗУЧЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТА

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТА

§ 43. Радианное измерение дуг и углов. До сих пор мы пользовались градусной мерой дуг углов, в которой за единицу измерения дуги (угла) принимается $\frac{1}{360}$ часть окружности $\left(\frac{1}{360}\text{ часть полного оборота}\right)$. Такая единица измерения практически удобна, но с теоретической точки зрения является случайной. В теоретических рассуждениях почти всегда принимается другая единица измерения, более естественно связанная с геометрическими свойствами измеряемых объектов.

Определение. *В радианной системе измерения единицей дуги окружности служит дуга, длина которой равна радиусу окружности.* Такая дуга называется *радианом. Радианной мерой* данной дуги называется число радианов, заключённых в этой дуге. Это значит, что радианная мера α дуги равна отношению её длины l к радиусу R окружности: $\alpha = \frac{l}{R}$.

Радианная мера дуги, соответствующей некоторому центральному углу, не зависит от радиуса окружности. Чтобы убедиться в этом, предварительно заметим, что длина полной окружности равна $2\pi R$, где R — длина радиуса, а длина дуги, составляющей k полных окружностей, равна $k \cdot 2\pi R$ (здесь k может быть любым числом как меньше, так и больше единицы).

Возьмём теперь две дуги разных радиусов R_1 и R_2, соответствующие одному и тому же центральному углу, составляющему k полных оборотов. Длина этих дуг l_1 и l_2 будет соответственно:

$$l_1 = k2\pi R_1, \quad l_2 = k2\pi R_2.$$

Разделив первое равенство на второе, найдём:

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{k2\pi R_1}{k2\pi R_2}=\frac{R_1}{R_2},$$

откуда

$$\frac{l_1}{R_1}=\frac{l_2}{R_2}.$$

Отношение слева есть радианная мера первой дуги, а отношение справа — радианная мера второй дуги. Как видно, они равны друг другу; это мы и хотели показать.

Обозначим через α эту радианную меру дуги:

$$\alpha=\frac{l}{R}.$$

Отсюда следует:

$$l=\alpha R, \tag{56}$$

или словами: *длина дуги равна длине радиуса, умноженной на радианную меру дуги;* для дуги единичной окружности ($R=1$) ещё проще; *длина дуги равна её радианной мере.* Вот это обстоятельство и делает особенно удобной радианную систему измерения.

Радианная мера полной окружности (360°) равна $\frac{2\pi R}{R}=$ $=2\pi=6{,}28\ldots$ радиана; радианная мера полуокружности (180°) равна $\frac{\pi R}{R}=\pi=3{,}14\ldots$ радиана; для четверти окружности (90°) она равна $\frac{\pi}{2}=1{,}57\ldots$ радиана и т. д.

Определение. *Радианная мера угла равна радианной мере такой дуги, для которой этот угол является центральным.*

Единицей при радианном измерении углов служит, следовательно, центральный угол, соответствующий дуге в один радиан. Такой угол также называется *радианом* (его можно было бы называть *угловым радианом* в отличие от дуги в один радиан — *дугового радиана*). При измерении углов и дуг радианами наименование единицы измерения — радиана — обычно опускают. Говорят, например: „прямой угол равен $\frac{\pi}{2}$“, вместо: „прямой угол равен $\frac{\pi}{2}$ радиана“; „угол равен 1,4“, вместо: „угол равен 1,4 радиана“.

Легко перейти от радианной меры к градусной и обратно.

Так как $\pi = 3,14\ldots$ радиана соответствует $180°$, то

$$1 \text{ радиан} = \frac{180}{\pi} \text{ градуса} = \frac{180}{3,14\ldots} \text{ градуса} \approx 57°17'44,8'',$$

$$1 \text{ градус} = \frac{\pi}{180} \text{ радиана} \approx 0,017 \text{ радиана},$$

$$a \text{ радианов} = \frac{180 \cdot a}{\pi} \text{ градусов} \approx a \cdot 57°17'44,8'',$$

$$\beta \text{ градусов} = \frac{\pi\beta}{180} \text{ радиана} \approx 0,017 \cdot \beta \text{ радиана}.$$

Следует запомнить радианную меру следующих углов: $30° = \frac{\pi}{6}$ (радиана), $45° = \frac{\pi}{4}$ (радиана), $60° = \frac{\pi}{3}$ (радиана), $90° = \frac{\pi}{2}$ (радиана), $180° = \pi$ (радиана), $270° = \frac{3\pi}{2}$ (радиана), $360° = 2\pi$ (радиана).

Аргумент тригонометрических функций (угол или дугу) можно теперь рассматривать заданным в радианной мере.

Например: $\sin\frac{1}{2}$ рад. $= \sin\frac{1}{2} = \sin 28°38'52,4''$.

§ 44. Определение тригонометрических функций числового аргумента. Одна и та же математическая функция может выражать зависимости между разными физическими величинами. Например, квадратичная функция $y = x^2$ определяет зависимость между площадью квадрата y и длиной его стороны x. Значит, x выражает длину, а y — площадь. Название функции $y = x^2$ „квадратичная" указывает на её связь с задачей измерения площади квадрата. Однако квадратичная функция появляется и в иных случаях, когда она выражает зависимость не между длиной и площадью, а между другими величинами. Например, расстояние y, проходимое свободно падающим телом в пустоте, является квадратичной функцией $\left(\text{с коэфициентом } \frac{g}{2}\right)$ времени падения x. Вот эта функция: $y = \frac{g}{2} x^2$. Поэтому в математике рассматривают квадратичную функцию как функцию числовой переменной величины x, которая может выражать различные физические величины.

Дело обстоит так же и с тригонометрическими функциями. Сначала они определяются как функции угла, а затем им придаётся более широкий смысл функций числового аргумента.

Многие вопросы математики, физики и других наук приводят к тригонометрическим функциям, аргументы которых выражают различные физические величины (длину, время, температуру и т. п.).

Пусть дано число x. Что понимается под значением, например, синуса x ($\sin x$)? За значение $\sin x$, где x некоторое число, принимают значение синуса угла в x радианов.

Пример. $\sin 2{,}705 = \sin 2{,}705$ рад. Так как $2{,}705$ рад $\approx 155°$, то $\sin 2{,}705 \approx \sin 155° = \sin 25° \approx 0{,}423$ (см. таблицу на стр. 26).

Аналогично определяются функции числового аргумента x: $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

Определение. *Тригонометрические функции числового аргумента x — это одноимённые тригонометрические функции угла в x радианов.*

§ 45. Задание функций. Задать или определить функцию — это значит указать способ, с помощью которого по каждому значению аргумента можно найти соответствующее ему значение функции. В математике рассматриваются преимущественно такие функциональные зависимости, которые задаются при помощи математических действий.

В качестве примеров возьмём формулы:

$$y = \sqrt{x}, \quad y = \frac{3x^2 - 2x + 1}{3 - x}, \quad y = \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}.$$

Они устанавливают (каждая свою особую) функциональную зависимость между переменными x и y.

Возьмём теперь формулу: $y = \sin x$. Она даёт нам правило, руководствуясь которым находим по одному числу (x) другое число ($\sin x$.) Следовательно, символ sin имеет тот же характер, как и обозначения алгебраических действий (возведения в степень, извлечения корня и т. п.); он обозначает, как одно число преобразуется в другое. Символ sin служит обозначением новой операции над *числами*, которую называют тригонометрической операцией. То же самое, что сказано здесь о символе sin, можно повторить и о символах других тригонометрических операций: cos, tg, ctg.

Если при некотором значении аргумента функция имеет определённое численное значение, то говорят, что функция определена при этом значении аргумента. Функции $\sin x$ и $\cos x$ определены для любых значений x, $\operatorname{tg} x$ — для любых значений x, кроме $x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, а $\operatorname{ctg} x$ — кроме $x = n\pi$ (где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), так как при этих значениях x $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$, как мы знаем, не существуют.

Численное значение функции, соответствующее данному значению независимой переменной, называется *частным значением* функции при данном значении независимой переменной.

Например, частным значением функции $y = x^2$ при $x = 3$ будет $y = 9$, частным значением функции $y = \sin x$ при $x = \frac{\pi}{3}$ будет $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и т. д.

В § 14 мы привели таблицу частных значений тригонометрических функций острых углов, выраженных в градусах.

Дадим теперь таблицу значений тригонометрических функций числового аргумента x (с точностью до 0,0001) для значений x, заключённых между $x = 0$ и $x = 1{,}57...$, взятых через 0,1.

x	Соответств. число градусов	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$
0,0	0,00	0,0000	1,0000	0,000
0,1	5,44	0,0998	0,9950	0,1003
0,2	11,28	0,1987	0,9801	0,2027
0,3	17,11	0,2955	0,9553	0,3093
0,4	22,55	0,3894	0,9211	0,4228
0,5	28,39	0,4794	0,8776	0,5463
0,6	34,23	0,5646	0,8253	0,6841
0,7	40,06	0,6442	0,7648	0,8423
0,8	45,50	0,7171	0,6967	1,0296
0,9	51,34	0,7833	0,6216	1,2602
1,0	57,18	0,8415	0,5403	1,5574
1,1	63,02	0,8912	0,4536	1,9648
1,2	68,45	0,9320	0,3624	2,5722
1,3	74,29	0,9636	0,2675	3,6021
1,4	80,13	0,9854	0,1700	5,7979
1,5	85,57	0,9975	0,0707	14,1014
1,57	89,95	1,0000	0,0008	1255,766

Эта таблица позволяет в некоторой мере судить о ходе изменения тригонометрических функций в связи с изменением аргумента. Читатель, например, обратит внимание на быстрое возрастание $\operatorname{tg} x$ при приближении x к $\frac{\pi}{2} = 1{,}5707...$

§ 46. Периодичность тригонометрических функций. Характерным свойством тригонометрических функций является их периодичность. Это свойство состоит в том, что значения, принимаемые тригонометрическими функциями, повторяются в одном и том же порядке через одинаковые промежутки значения аргументов. Обратимся к точному выяснению понятия периодичности тригонометрических функций. Дадим прежде всего определение периодической функции вообще и её периода.

Определения. *Функция называется периодической, если существует число, прибавление которого к произвольному значению аргумента не меняет значения функции.*

Периодом функции называется наименьшее положительное число, прибавление которого к любому значению аргумента не меняет значения функции[1]).

Мы видели, что значения функций синус и косинус для углов, отличающихся на целое число n полных оборотов ($2\pi n$ в радианной мере), совпадают между собой; аналогично, значения функций тангенс и котангенс для углов, отличающихся на целое число n полуоборотов (πn в радианной мере), совпадают между собой. Мы имеем:

$$\sin(x+2\pi n)=\sin x, \quad \cos(x+2\pi n)=\cos x, \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{45}$$

$$\operatorname{tg}(x+\pi n)=\operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg}(x+\pi n)=\operatorname{ctg} x, \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{51}$$

здесь x — совершенно произвольное число.

Эти равенства показывают, что тригонометрические функции являются периодическими. Найдём их периоды.

Теорема. *Период функций* $\sin x$ *и* $\cos x$ *равен* 2π, *а период функций* $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ *равен* π.

Из формул (45) видно, что числа вида $2n\pi$ обладают тем свойством, что от их прибавления к произвольному значению аргумента значения функций $\sin x$ и $\cos x$ не меняются. Покажем, что других чисел, обладающих этим свойством, не существует. В самом деле, пусть таким свойством для $\sin x$ обладает число h, т. е.

$$\sin(x+h)=\sin x,$$

при любом x. Значит, в частности, это равенство справедливо при $x=\frac{\pi}{2}$, т. е.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1;$$

[1]) Иногда всякое число такого рода называют периодом функции, а наименьшее положительное из них — **основным периодом**.

по формуле (B) § 40, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right)=\cos h$, откуда

$$\cos h=1.$$

Но косинус может равняться 1, как это мы видели (§ 34), лишь при $h=2n\pi$.

Пусть теперь

$$\cos(x+h)=\cos x$$

при любом x. Тогда

$$\cos h=\cos 0=1,$$

и снова заключаем, что $h=2n\pi$.

Наименьшим положительным числом среди всех чисел вида $2n\pi$ есть число 2π; значит оно и является периодом $\sin x$ и $\cos x$, ч. т. д.

Аналогично доказывается и вторая часть теоремы. Обозначим через h число, обладающее тем свойством, что от прибавления его к любому значению аргумента $\operatorname{tg} x$ не меняется, т. е. что

$$\operatorname{tg}(x+h)=\operatorname{tg} x.$$

Значит, в частности, при $x=0$ должно быть

$$\operatorname{tg} h=\operatorname{tg} 0=0,$$

а это может быть тогда, и только тогда, когда $h=n\pi$. Далее, если $\operatorname{ctg} x$ не меняется от прибавления к x некоторого числа h_1, то не меняется и $\operatorname{tg} x=\frac{1}{\operatorname{ctg} x}$, и следовательно, как только что было доказано,

$$h_1=n\pi.$$

Наименьшим положительным числом среди всех чисел вида $n\pi$ есть число π; значит, оно и является периодом $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$, ч. т. д.

Можно указать и другие числа, прибавление которых к аргументу не меняет *некоторых* значений, например, синуса; прибавление такого числа к одному значению аргумента не меняет значения синуса, прибавление к другому — меняет. Такие числа не являются периодами функции.

Пример. $\sin 0=\sin\pi=0$, но уже $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)=\sin\frac{3}{2}\pi=-1$, в то время как $\sin\frac{\pi}{2}=1$, следовательно, π не есть период функции $\sin x$.

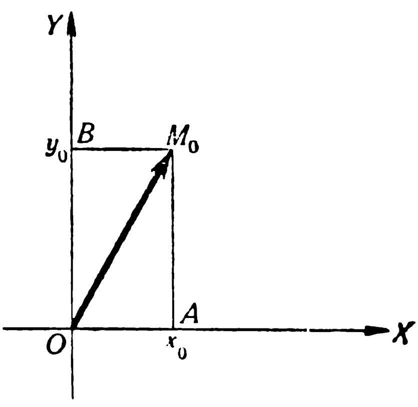
Изучение тригонометрических функций благодаря их периодичности сводится к изучению этих функций при условии, что аргумент изменяется в границах одного периода. Так, для функций $\sin x$ и $\cos x$ достаточно рассмотреть изменение аргумента от 0 до 2π. Что касается функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$, то по тем же соображениям достаточно рассмотреть изменение аргумента от 0 до π.

Тригонометрические функции находят себе применение во всех тех вопросах, где приходится иметь дело с периодическими явлениями, т. е. такими, которые повторяются в одном и том же порядке через определённые промежутки некоторого аргумента (чаще всего времени). В §§ 55—56 мы рассмотрим приложения тригонометрических функций к описанию простейших периодических явлений, так называемых гармонических колебаний.

ГРАФИК ФУНКЦИИ

§ 47. Понятие графика функции. Существует простой способ для наглядного представления заданной функциональной зависимости.

Возьмём две взаимно перпендикулярные оси OX и OY (черт. 35). За ось OX на чертеже обычно принимают горизонтальную ось, направленную слева направо — она называется *осью иксов* или *осью абсцисс*; ось OY — вертикальная — направлена снизу вверх, она называется *осью игреков* или *осью ординат*. Точка O пересечения осей OX и OY называется *началом координат*. Будем откладывать в избранном масштабе значения независимой переменной x на оси OX, а соответствующие значения y — в том же или другом масштабе на оси OY. В соответствии с указанными направлениями на осях положительные числа по оси OX изображаются отрезками, отложенными вправо от точки O, отрицательные числа — влево от неё; а по оси OY положительные числа изображаются отрезками, отложенными вверх, отрицательные — вниз от точки O.

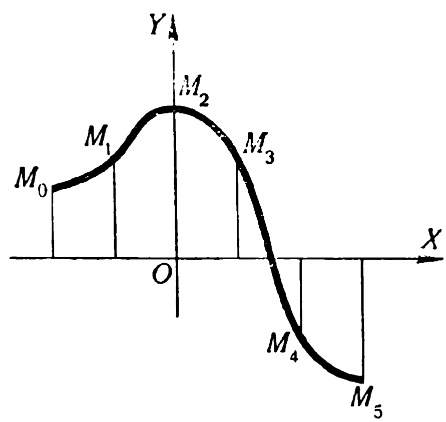


Черт. 35.

Пусть задана функция y независимой переменной x. Дадим x какое-нибудь значение x_0 и изобразим число x_0 отрезком на оси OX (черт. 35). Соответствующее значение функции y_0 изобразим отрезком на оси OY. Из концов полученных отрезков OA и OB проведём прямые, параллельные осям OX и OY; точка их пересечения M_0 изобразит совместные значения независимой переменной и функции. В самом деле, расстояние точки M_0 (взятое с соответствующим знаком) от оси OY является значением аргумента (x_0), а её же расстояние от оси OX (также взятое со знаком) является значением функции (y_0), соответствующим значению x_0.

Числа x_0 и y_0, определяющие положение точки M_0, называются её *координатами*; при этом число x_0 называется *абсциссой* точки M_0, а y_0 — её ординатой[1]); записываем это так: $M_0(x_0y_0)$, на первом месте обычно указывается абсцисса, а на втором — ордината точки. Вся система осей OX и OY с принятыми на них направлениями и масштабами называется системой координат.

Вместо откладывания ординаты по оси OY можно восставить перпендикуляр AM_0 в точке A к оси OX, длина которого равна абсолютной величине y_0; его направление выбираем вверх от оси OX, если $y_0 > 0$, и вниз от неё, если $y_0 < 0$.



Черт. 36.

Допустим теперь, что нам удалось построить точки, изображающие совместные значения независимой переменной и функции для всех возможных значений независимой переменной. Тогда точки M, отмеченные на плоскости, образуют, вообще говоря, некоторую кривую линию (черт. 36), которая называется *графиком* рассматриваемой функции. В действительности обычно невозможно построить все точки графика. Но чем больше точек построено, тем более точным будет график, полученный проведением через эти точки сплошной линии.

График является геометрическим образом функциональной зависимости. Имея график функции, мы можем наглядно представить себе частные значения функции, наглядно сравнивать эти значения между собой; наконец, мы

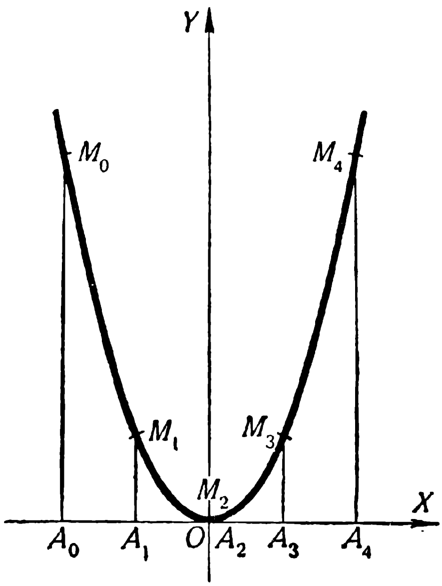
---

[1]) Абсцисса и ордината точки M_0 суть проекции вектора OM_0 на оси OX и OY (черт. 35).

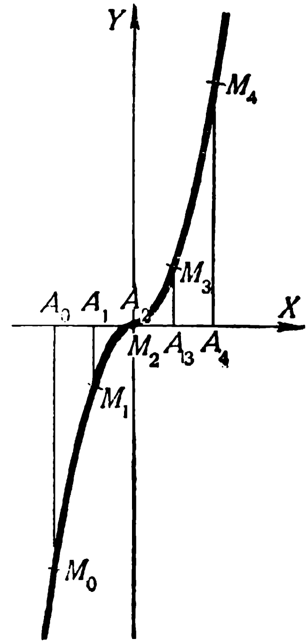
можем отчётливо видеть, как изменяется функция с изменением независимой переменной, наблюдая за изменением ординаты точки графика при возрастании её абсциссы.

§ 48. Примеры. Чётность и нечётность функции. Возьмём для иллюстрации сказанного функцию $y = x^2$. Её графиком служит кривая, называемая *параболой* и расположенная так, как указано на чертеже 37.

По графику ясно, например, что когда точка A на оси x-ов передвигается слева направо (значение независимой переменной возрастает), то функция, будучи всегда положитель-



Черт. 37.



Черт. 38.

ной (график целиком лежит над осью x-ов), сначала убывает (при $x < 0$), делается равной нулю (при $x = 0$), а затем постоянно возрастает (при $x > 0$).

Функция $y = x^2$ не меняет своего значения при замене x на $-x$. Графически это свойство функции проявляется в том, что график функции оказывается симметричным относительно оси OY. Прямая, параллельная оси OX, или не пересекает график, или пересекает его в точках (в двух в нашем случае), находящихся на одинаковых расстояниях от оси OY.

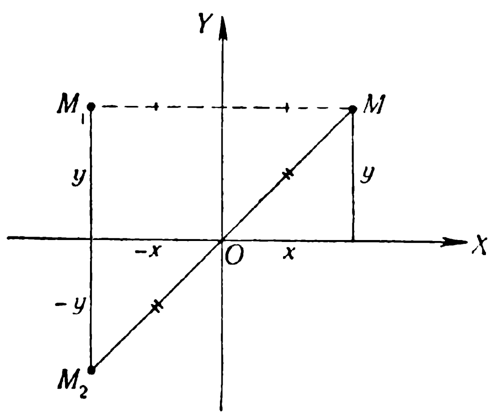
В качестве второго примера рассмотрим функцию $y = x^3$. Её график, так же как и график функции $y = x^2$, легко построить по точкам, изображающим совместные значения x и y. Ордината каждой точки графика равна кубу её абсциссы. Необходимые вычисления (возведение чисел в куб) не представляют особых трудностей. Проведя через построенные точки сплошную линию, мы получим кривую, называемую *кубической параболой* (черт. 38).

По графику видно, что функция $y=x^3$ с возрастанием x всегда возрастает. Она отрицательна при $x<0$, равна нулю при $x=0$ и положительна при $x>0$.

При замене x на $-x$ значения функции $y=x^3$ по абсолютной величине не изменяются и меняют только свой знак. Это свойство функции проявляется в том, что её график оказывается кривой, симметричной относительно начала координат O (точки пересечения осей). Прямая, проходящая через точку O, пересекает график или только в точке O, или же и в точках, отличных от O и находящихся на одинаковых расстояниях от точки O.

Определения. *Функция, не меняющая своего значения при изменении знака аргумента (каково бы ни было его значение), называется чётной функцией.*

Функция, меняющая только свой знак при изменении знака аргумента (каково бы ни было его значение), называется нечётной функцией.



Черт. 39.

Примером чётной функции может служить функция $y=x^2$; примером нечётной — функция $y=x^3$.

График чётной функции всегда симметричен относительно оси OY; график нечётной функции всегда симметричен относительно начала координат.

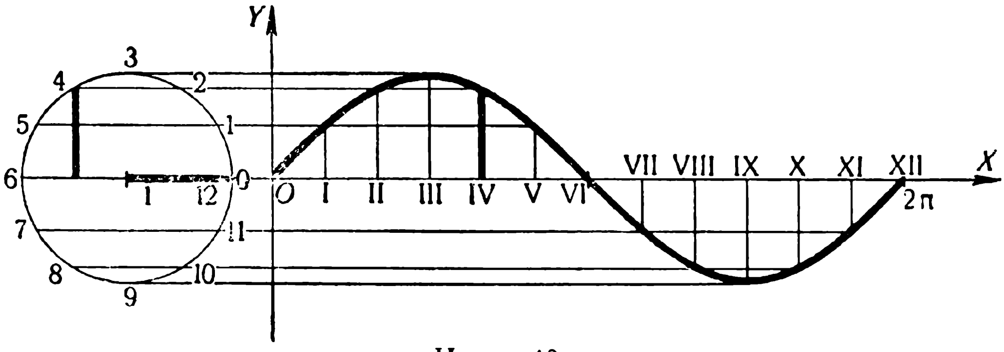
Для доказательства этого предложения возьмём какую-нибудь точку M с координатами (x, y), принадлежащую графику функции. Пусть функция чётная; тогда её значение y не изменится, если взять $-x$ вместо x; поэтому, раз точка $M(x, y)$ принадлежит графику функции, то ему принадлежит и точка $M_1(-x, y)$, а эта точка, как легко видеть по чертежу 39, симметрична с данной точкой M относительно оси OY. Пусть теперь функция нечётная; тогда, если взять $-x$ вместо x, у её значения y изменится только знак; поэтому, раз точка $M(x, y)$ принадлежит графику функции, то ему принадлежит и точка $M_2(-x, -y)$, а эта точка, как легко видеть также по чертежу 39, симметрична с данной точкой M относительно начала координат. Так как точка M была взята произвольно, то этим наше предложение доказано.

Следует иметь в виду, что функция может быть ни чётной, ни нечётной. Например, такими функциями являются: $1+x$; $\sin x+\cos x$ и т. п.

ГРАФИКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 49. График функции $\sin x$. График функции $y=\sin x$ можно, конечно, вычертить по общему правилу: пользуясь таблицей значений $\sin x$, построить точки, изображающие совместные значения аргумента и функции, и затем провести через эти точки сплошную линию.

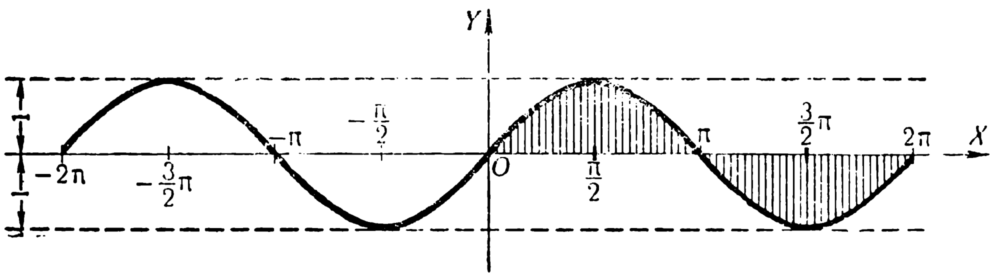
Есть другой весьма простой геометрический способ построения точек, принадлежащих графику функции $y=\sin x$. Этот способ прямо вытекает из определения синуса.



Черт. 40.

Возьмём две взаимно перпендикулярные оси OX и OY и условимся масштабы по осям x-ов и y-ов брать одинаковыми. Построим единичный круг с центром в какой-нибудь точке оси OX (черт. 40). Разделим окружность на некоторое число равных частей (на чертеже взято 12 частей) и пронумеруем точки деления последовательно, как показано на чертеже, цифрами 0, 1, 2, ..., 12. Затем разделим отрезок оси x-ов от 0 до 2π на такое же число равных частей (на 12) и пронумеруем точки деления слева направо числами 0, I, II, ... XII. Тогда точки на оси x-ов и на окружности, обозначенные одинаковыми номерами, соответствуют друг другу в том смысле, что отрезок ON оси OX изображает число, равное числу радианов, заключённых в дуге ON окружности. Например, отрезок оси от 0 до точки IV на оси OX изображает число $\frac{2}{3}\pi$; дуга окружности от 0 до точки 4 равна как раз $\frac{2}{3}\pi$ радиана.

Отсюда видно, что значение функции $y = \sin x$, когда аргумент равен длине отрезка от 0 до точки IV оси, совпадает со значением синуса дуги, заключённой между точками окружности 0 и 4. Синус дуги единичной окружности, как мы знаем, изображается перпендикуляром, опущенным из конечной точки дуги на горизонтальный диаметр. Легко теперь понять, что точка графика, соответствующая точке IV на оси x-ов, получается в пересечении прямой, проведённой через точку 4 окружности параллельно оси OX, с перпендикуляром, восставленным к оси OX в точке IV. Таким способом можно отметить столько точек, принадлежащих графику функции $y = \sin x$, сколько точек деления было взято на отрезке от 0 до 2π.



Черт. 41.

Соединив найденные точки сплошной линией, мы получим ту часть графика функции, которая соответствует изменению независимой переменной от 0 до 2π. Чем больше взято число частей, на которые разделена окружность, тем точнее будет график.

Можно получить другие части графика, повторив описанное построение для отрезков от 2π до 4π, от 4π до 6π и т. д. Но в этом нет необходимости. В самом деле, так как $\sin x$ — периодическая функция с периодом, равным 2π, то можно заранее знать, что, например, отрезку от 2π до 4π будет соответствовать в точности такая же кривая, какая соответствует отрезку от 0 до 2π. Поэтому достаточно уже вычерченную часть графика последовательно передвинуть на 2π, на 4π, на 6π и т. д. вправо и влево, чтобы построить весь график функции. (Практически такое передвижение осуществляется с помощью лекала.)

Кривая линия, являющаяся графиком $\sin x$, изображена на чертеже 41; эта кривая называется *синусоидой*. Весь график функции $y=\sin x$ заключён в полосе, ограниченной двумя прямыми, параллельными оси OX и находящимися по обе стороны от неё на расстояниях, равных 1.

В предыдущей главе (§ 37) было установлено:

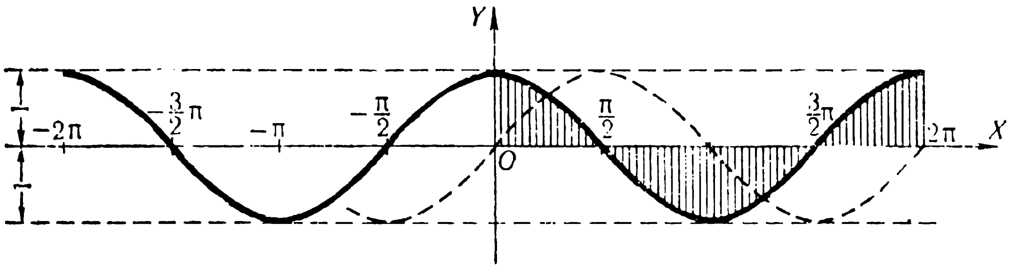
$$\sin(-x) = -\sin(x) \tag{54}$$

при всяком x, т. е. функция $y=\sin x$ нечётная и её график должен быть симметричен относительно точки пересечения осей (§ 48). Это хорошо видно на чертеже 41.

§ 50. График функции $\cos x$. График функции $y=\cos x$ нетрудно получить, имея график функции $\sin x$. При любом x имеем:

$$\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

(§ 40). Следовательно, вместо значения косинуса можно взять значение синуса, увеличив аргумент на $\frac{\pi}{2}$. Значит, графиком



Черт. 42.

функции $y=\cos x$ служит та же синусоида, но передвинутая на $\frac{\pi}{2}$ налево (черт. 42). В таком положении синусоида иногда называется *косинусоидой* (так как при этом она является графиком $\cos x$).

Построить косинусоиду можно легко и по точкам тем же способом, каким была построена синусоида, только нумерацию (0, 1, 2, 3, ...) точек деления окружности нужно начинать с верхнего конца вертикального диаметра.

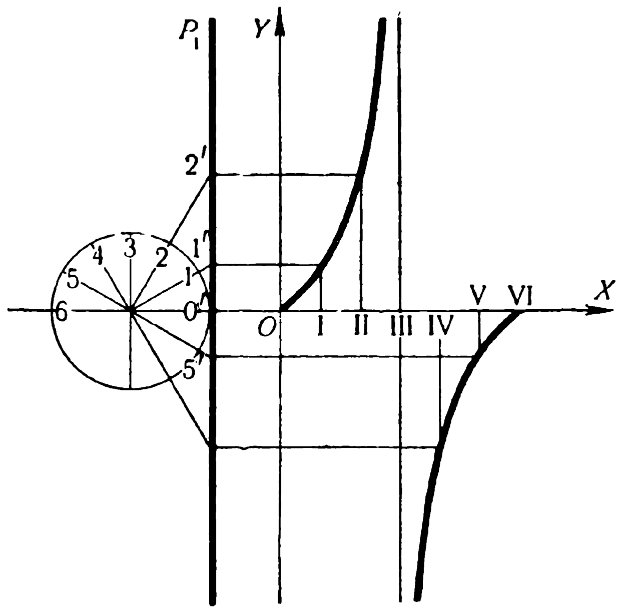
В предыдущей главе (§ 37) было установлено:

$$\cos(-x) = \cos x \tag{53}$$

при всяком x, т. е. функция $y=\cos x$ чётная и её график должен быть симметричен относительно оси y-ов (§ 48). Это хорошо видно на чертеже 42.

§ 51. График функции $\operatorname{tg} x$. Посредством приёма, подобного тому, который употреблялся для построения синусоиды, можно вычертить график функции $y = \operatorname{tg} x$. Но так как период этой функции равен π, то можно ограничиться нахождением точек графика, соответствующих отрезку от 0 до π на оси x-ов, и, следовательно, рассматривать дуги в пределах одной полуокружности.

Разделим на одинаковое число равных частей единичную полуокружность с центром на оси OX и отрезок этой оси от 0 до π. На чертеже 43 взято 6 частей. Точки деления перенумеруем по порядку, как показано на чертеже.



Черт. 43.

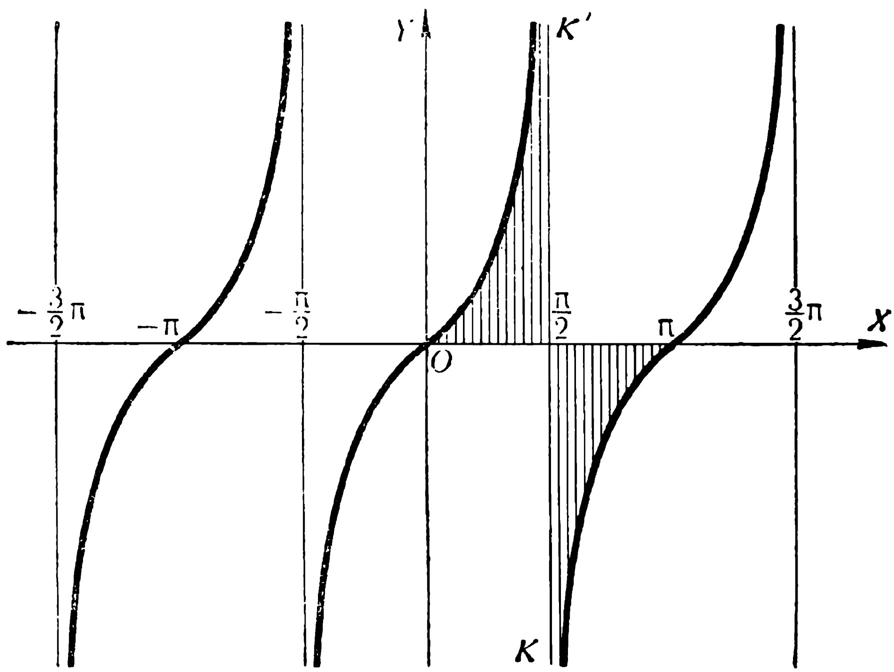
Для того чтобы найти точку графика, соответствующую, например, точке деления II на оси x-ов, нужно из точки II восставить перпендикуляр к оси OX, по длине и направлению равный тангенсу дуги $0'2$ полуокружности. Но, как известно, тангенс дуги $0'2$ изображается отрезком оси P_1P (касательной) от точки 0 до точки пересечения оси с продолжением радиуса окружности, проведённого через конечную точку 2 дуги. Итак, алгебраическая величина отрезка $0'2'$ равна тангенсу дуги 02; подобным образом алгебраическая величина отрезка $0'5'$ равна тангенсу дуги 05 окружности.

Перенесём эти отрезки параллельно так, чтобы их начальные точки попали соответственно в точки II и V оси; тогда концы отрезков будут точками графика функции $y = \operatorname{tg} x$, соответствующими точкам II и V оси x-ов.

Затем таким же образом получим точки графика, соответствующие другим точкам деления отрезка от 0 до π на оси x-ов. Заметим, что на графике нет точки, соответствующей точке 3 $\left(x = \frac{\pi}{2}\right)$. Действительно, тангенс дуги $0'3$ $\left(\text{дуги, равной } \frac{\pi}{2}\right)$ не существует (радиус, проходящий через точку 3, параллелен касательной P_1P и его продолжение не пересекает P_1P).

Соединив построенные точки сплошной линией, получим ту часть графика, которая соответствует изменению независимой переменной от 0 до π. Чем больше число частей, на которые была разделена полуокружность, тем больше точек графика мы получим и тем точнее будет график.

Аналогично тому, как вся синусоида может быть построена по её части, соответствующей отрезку от 0 до 2π на оси x-ов, так и весь график функций $y = \operatorname{tg} x$ может быть по-



Черт. 44.

строен по его части, соответствующей отрезку от 0 до π на оси x-ов. В самом деле, так как $\operatorname{tg} x$ — периодическая функция с периодом, равным π, то отрезкам оси x-ов от 0 до 2π, от 2π до 3π и т. д., а также отрезкам от $-\pi$ до 0, от -2π до $-\pi$ и т. д. соответствуют кривые линии в точности такие же, какая соответствует отрезку от 0 до π. Поэтому достаточно уже вычерченную часть графика последовательно передвинуть на π, на 2π, на 3π и т. д. вправо и влево, чтобы построить весь график функции $y = \operatorname{tg} x$.

Кривая, являющаяся графиком функции $\operatorname{tg} x$, изображена на чертеже 44; эта кривая называется *тангенсоидой*. Как видим, тангенсоида образована из совершенно одинаковых и одинаково расположенных отдельных ветвей, заключённых в параллельных полосах шириной в π $\left(\text{в полосах от } -\frac{\pi}{2}\right.$ до $\frac{\pi}{2}$, от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3}{2}\pi$ и т. д.$\left.\right)$.

Функция $y = \operatorname{tg} x$ нечётная, так как

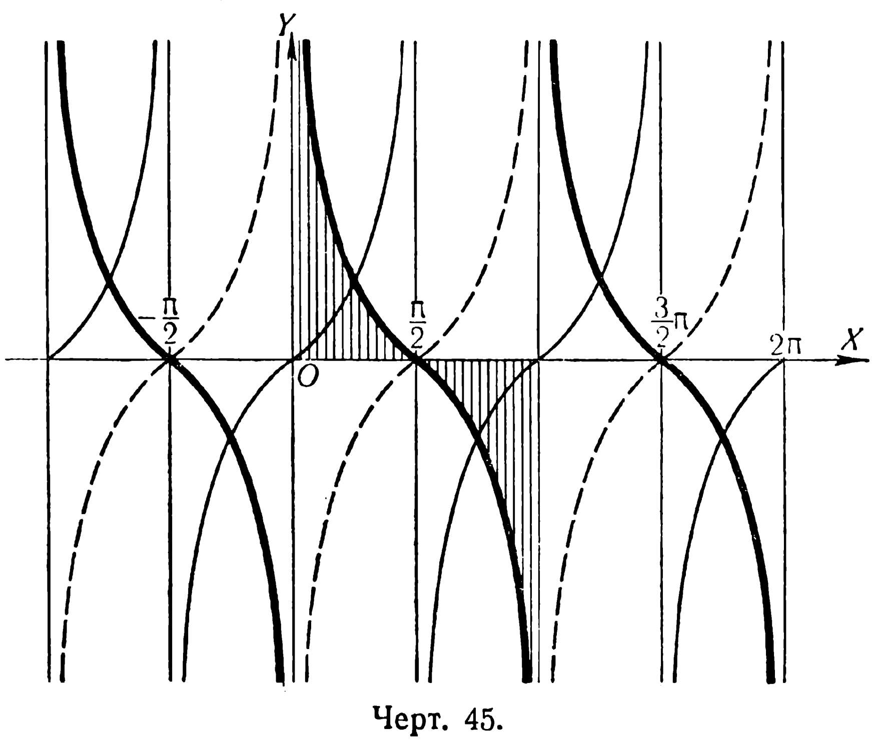
$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x. \qquad (54)$$

Её график симметричен относительно точки пересечения осей. На чертеже 44 отчётливо видна эта симметрия.

§ 52. График функции $\operatorname{ctg} x$. График функции $y = \operatorname{ctg} x$ мы получим из графика функции $\operatorname{tg} x$. При любом x имеем:

$$\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

(§ 40). Следовательно, значением котангенса может служить взятое с обратным знаком значение тангенса от аргумента, на $\frac{\pi}{2}$ большего, чем аргумент котангенса. Другими словами, ординату точки графика $\operatorname{ctg} x$, соответствующую какой-нибудь абсциссе x, можно найти так: отметить точку графика $\operatorname{tg} x$, соответствующую точке оси x-ов, лежащей на $\frac{\pi}{2}$ правее x, а затем взять ординату точки, симметричной с ней относительно оси x-ов. (Если нужная точка графика $\operatorname{tg} x$ находится



Черт. 45.

над осью x-ов, то искомая точка графика $\operatorname{ctg} x$ будет под осью и обратно.)

Поэтому весь график функции $\operatorname{ctg} x$ получается из графика функции $\operatorname{tg} x$ сдвигом его влево — вдоль оси x-ов — на $\frac{\pi}{2}$ и последующего отражения (перевёртывания) относительно оси OX.

На чертеже 45 изображена тонкой линией тангенсоида; пунктирной линией — тангенсоида, сдвинутая влево — вдоль оси x-ов — на $\frac{\pi}{2}$; жирной линией — график функции $\operatorname{ctg} x$. Последняя кривая называется *котангенсоидой*; она образована из совершенно одинаковых и одинаково расположенных отдельных ветвей, заключённых в полосах шириной в π, ограниченных прямыми, параллельными оси OY (в полосах от $x = -\pi$ до $x = 0$, от $x = 0$ до $x = \pi$ и т. д.).

Точкам $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$ и т. д. на оси OX, а также точкам $x = -\pi$, $x = -2\pi$ и т. д. не соответствуют никакие точки графика $\operatorname{ctg} x$. Это объясняется тем, что не существует котангенсов дуг в 0, 2π и т. д. радианов.

Функция $y = \operatorname{ctg} x$ — нечётная, так как

$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x. \qquad (55)$$

Её график симметричен относительно точки пересечения осей, как это и видно на чертеже 45.

ХОД ИЗМЕНЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 53. Ход изменения $\sin x$ и $\cos x$. Обратимся к исследованию изменения тригонометрических функций при изменении независимой переменной. При этом будем предполагать, что независимая переменная непрерывно возрастает. Начнём с функции $y = \sin x$.

Ход изменения $\sin x$ можно изучать или по таблице её значений, или на основании самого определения синуса. Но гораздо нагляднее рассмотреть ход изменения функции $y = \sin x$ по её графику.

Пусть x возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Точка на оси x-ов (см. черт. 41), соответствующая абсциссе x, передвигается слева направо от точки 0 до точки, отмеченной числом $\frac{\pi}{2}$ (в круге это соответствует возрастанию угла от 0° до 90°). По графику (см. черт. 41) видно, что при этом функция возрастает от 0 до 1 (ордината точки графика, будучи положительной, увеличивается от 0 до 1).

При возрастании x от $\frac{\pi}{2}$ до π (в круге это соответствует возрастанию угла от 90° до 180°) $\sin x$ убывает от 1 до 0 (ордината точки графика, будучи положительной, уменьшается от 1 до 0).

С дальнейшим передвижением по оси x-ов вправо от точки, отмеченной числом π, до точки, отмеченной числом $\frac{3}{2}\pi$, ордината точки графика, будучи отрицательной, увеличивается по абсолютной величине и, значит, функция $\sin x$ при возрастании x от π до $\frac{3}{2}\pi$ (в круге угол возрастает от 180° до 270°) убывает от 0 до -1.

Наконец, если x возрастает от $\frac{3}{2}\pi$ до 2π (угол в круге возрастает от 270° до 360°), $\sin x$ возрастает от -1 до 0 (ордината точки графика, будучи отрицательной, уменьшается по абсолютной величине).

Достаточно изучить поведение $\sin x$ при изменении x лишь в интервале одного периода (мы взяли интервал от 0 до 2π), ибо при любом изменении x функция $\sin x$ повторяет через период свой ход изменения в указанном интервале (от 0 до 2π).

Ниже приведена таблица, в которой указаны особенности в изменении функции $y = \sin x$. По графику функции $y = \cos x$ (см. черт. 42) таким же образом, как и для $y = \sin x$, выясним характер изменения $\cos x$, когда x изменяется от 0 до 2π. Предоставляем читателю самостоятельно разобрать этот вопрос во всех деталях.

Вот окончательная таблица.

x	0 (0°)	I четверть	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	II четверть	π (180°)	III четверть	$\frac{3}{2}\pi$ (270°)	IV четверть	2π (360°)
$\sin x$	0	↗ возрастает	1	↘ убывает	0	↘ убывает	-1	↗ возрастает	0

x	0 (0°)	I четверть	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	II четверть	π (180°)	III четверть	$\frac{3}{2}\pi$ (270°)	IV четверть	2π (360°)
$\cos x$	1	↘ убывает	0	↘ убывает	-1	↗ возрастает	0	↗ возрастает	1

Функции $\sin x$ и $\cos x$ могут изменяться только в границах от -1 до $+1$.

§ 54. Ход изменения $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$. Поведение функции $y=\operatorname{tg} x$ достаточно выяснить лишь при изменении x от 0 до π, так как период $\operatorname{tg} x$ равен π.

По графику (черт. 44) мы видим, что когда x возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg} x$ *неограниченно возрастает*, начиная от 0. По мере приближения x к $\frac{\pi}{2}$ значения $\operatorname{tg} x$ становятся всё больше и больше и могут превзойти любое, как угодно большое, положительное число. Кривая на участке от 0 до точки, отмеченной числом $\frac{\pi}{2}$, круто поднимается вверх, стремясь коснуться прямой $K'K$, параллельной оси OY, но нигде её не касается (как говорят, асимптотически приближается к прямой $K'K$).

Итак, *если x приближается к $\frac{\pi}{2}$ возрастая (угол, возрастая, приближается к* 90°), *то тангенс неограниченно возрастает, будучи положительным.*

Пусть далее x возрастает от $\frac{\pi}{2}$ до $-\pi$. График показывает, что $\operatorname{tg} x$ при этом снова возрастает, переходя от как угодно больших по абсолютной величине отрицательных значений к меньшим по абсолютной величине отрицательным значениям и, наконец, к нулю. Если заставить x приближаться к $\frac{\pi}{2}$ убывая, то тангенс, очевидно, может сделаться меньше (в алгебраическом смысле) любого как угодно большого по абсолютной величине отрицательного числа.

Итак, *если x приближается к $\frac{\pi}{2}$ убывая (угол, уменьшаясь, приближается к* 90°), *то тангенс, будучи отрицательным, неограниченно убывает.*

Условно говорят, что $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ равен бесконечности, и пишут:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}=\infty.$$

Эту запись и её словесное выражение следует понимать только в том смысле, что если x неограниченно приближается к $\frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg} x$ по абсолютной величине неограниченно возрастает (при x возрастающем — будучи положительным, при x убывающем — будучи отрицательным). Знак ∞ не обозначает какого-нибудь числа и, как уже упоминалось, значения тангенса при $x=\frac{\pi}{2}$ (или при $x=90^\circ$) не существует (§ 32).

Функция $y=\operatorname{tg} x$ в интервале от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ возрастает. Так как этот интервал является полным периодом функции $y=\operatorname{tg} x$, то $\operatorname{tg} x$ возрастает и во всех других интервалах. Это постоянное возрастание нарушается только при значениях аргумента $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$ и т. п., так как для этих значений тангенс не существует, и здесь он перескакивает от как угодно больших положительных значений к как угодно большим по абсолютной величине, но отрицательным значениям.

Приведём таблицу, характеризующую изменение функции $y=\operatorname{tg} x$ при изменении x от 0 до 2π.

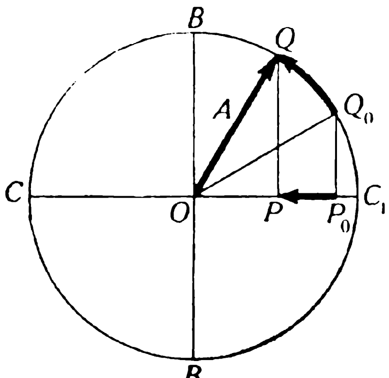
x	0 (0°)	I четверть	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	II четверть	π (180°)	III четверть	$\frac{3}{2}\pi$ (270°)	IV четверть	2π (360°)
$\operatorname{tg} x$	0	↗ возрастает	не существует	↗ возрастает	0	↗ возрастает	не существует	↗ возрастает	0

Функция $y=\operatorname{ctg} x$ в противоположность $\operatorname{tg} x$ является функцией убывающей для значений аргумента, заключённых между 0 и π, π и 2π, 2π и 3π и т. д. Это постоянное убывание нарушается только тогда, когда x, возрастая, переходит через значение 0, π, 2π и т. д.; здесь котангенс перескакивает от как угодно больших по абсолютной величине отрицательных значений к как угодно большим положительным значениям (черт. 45). Предоставляя читателю самостоятельно разобрать вопрос о поведении $\operatorname{ctg} x$ во всех деталях, приведём окончательную таблицу.

x	0 (0°)	I четверть	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	II четверть	π (180°)	III четверть	$\frac{3}{2}\pi$ (270°)	IV четверть	2π (360°)
$\operatorname{ctg} x$	не существует	↘ убывает	0	↘ убывает	не существует	↘ убывает	0	↘ убывает	не существует

Функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ могут принять любое значение, если подходящим образом выбрать значение независимой переменной.

§ 55. Простые гармонические колебания. Рассмотрим равномерное движение точки по окружности радиуса A (черт. 46). Пусть точка начинает двигаться из точки Q_0 окружности в направлении, противоположном движению часовой стрелки, со скоростью n оборотов в секунду (иначе говоря, в секунду точка пробегает n полных окружностей; n может и не быть целым числом). Радианная мера дуги, пробегаемой точкой в 1 секунду, выражается, очевидно, числом $2\pi n$.



Черт. 46.

Пусть через t секунд движущаяся точка попадает в точку Q окружности. Обозначим через P проекцию точки Q на диаметр CC' и поставим перед собой задачу выяснить, как передвигается точка P вдоль CC' при указанном движении точки по окружности.

Обозначим через s расстояние точки P от центра окружности:

$$s = OP$$

(это расстояние считается, как обычно, положительным, если P лежит справа от 0, и отрицательным, если P лежит слева от 0).

Обозначим, далее, дугу C_1Q_0 через α. Дуга C_1Q равна дуге C_1Q_0, сложенной с дугой Q_0Q, описанной точкой за t секунд. Но если за 1 секунду движущаяся точка проходит дугу в $2\pi n$ радианов, то за t секунд она опишет дугу в $2\pi nt$ радианов. Итак,

$$\smile C_1Q = \smile C_1Q_0 + \smile Q_0Q = \alpha + 2\pi nt,$$

или

$$\angle POQ = 2\pi nt + \alpha.$$

Следовательно,

$$s = OP = OQ \cos \angle POQ = A \cos(2\pi nt + \alpha) = \\ = A \sin\left(2\pi nt + \alpha + \frac{\pi}{2}\right),$$

или

$$s = A \sin(\omega t + \varphi_0), \qquad (57)$$

где

$$\omega = 2\pi n, \quad \varphi_0 = \alpha + \frac{\pi}{2}.$$

Полученная формула даёт возможность указать положение точки P в любой момент времени. Мы видим, что расстояние s точки P от середины отрезка CC' изменяется в зависимости от изменения времени t по определённому закону, выраженному формулой (57), по так называемому синусоидальному закону.

Движение точки P вдоль CC' состоит в следующем: из исходной точки P_0 точка P движется влево до конца диаметра C_1C, затем передвигается в обратном направлении до второго конца диаметра C_1; после этого снова движется влево до точки C и т. д. Говорят, что она совершает *простые гармонические колебания* вдоль отрезка CC'.

Каждая из величин, входящих в соотношение

$$s = A \sin(\omega t + \varphi_0), \tag{57}$$

имеет особый физический смысл и особое наименование.

Постоянная величина A называется *амплитудой* колебания. Она даёт наибольшее отклонение точки от середины отрезка CC' [действительно, $\sin(\omega t + \varphi_0)$ по абсолютной величине не может превзойти 1 и, значит, абсолютная величина s не может быть больше A]. Число A показывает размах колебания.

Переменную величину $\varphi = \omega t + \varphi_0$ называют *переменной фазой колебания*, а значение φ при $t = 0$ (в начальный момент), т. е. φ_0, называют *начальной фазой*. Величина

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{58}$$

называется *периодом колебания* [это есть период функции $s = A\sin(\omega t + \varphi_0)$]. При увеличении t (времени) на T значение s не изменяется:

$$A \sin[\omega(t + T) + \varphi_0] = A \sin(\omega t + \omega T + \varphi_0) =$$
$$= A \sin(\omega t + \varphi_0 + 2\pi) = A \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Период колебания T есть тот промежуток времени, в течение которого подвижная точка из начального положения проходит до конца C диаметра, затем в обратном направлении от C до другого конца C_1 диаметра и, наконец, от C_1 возвращается опять в точку Q_0; в течение периода T подвижная точка совершает, как говорят, одно полное колебание.

Величина, обратная периоду колебания

$$\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}, \tag{59}$$

называется *частотой колебания*. Она показывает, сколько полных колебаний совершает точка в единицу времени (в 1 секунду).

В нашем примере частота колебания проекции P точки на отрезок CC_1 равна n:

$$\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{2\pi n}{2\pi}=n.$$

Действительно, из условий задачи ясно, что колеблющаяся точка P проходит n раз в секунду через каждую точку отрезка CC_1 при движении слева направо (и n раз при движении справа налево).

Иногда частотой называют величину ω. Она показывает, сколько полных колебаний совершает точка P в течение 2π единиц времени (секунд).

Заметим, наконец, что движение проекции точки Q на какой-нибудь другой диаметр окружности будет также простым гармоническим колебанием с теми же амплитудой и периодом (а следовательно, и частотой), но с другой начальной фазой. Предоставляем читателю доказать это.

§ 56. График простого гармонического колебания. Обратим внимание на то, что аргументом тригонометрической функции (синуса), определяющей закон простого гармонического колебания $s=A\sin\varphi$, является величина φ, зависящая не от угла (дуги), как это чаще всего встречается в геометрических приложениях тригонометрии, а от времени.

Для того чтобы ясно представить себе зависимость положения точки от времени в простом гармоническом колебании, построим график функции:

$$s=A\sin(\omega t+\varphi_0)=A\sin\varphi. \tag{60}$$

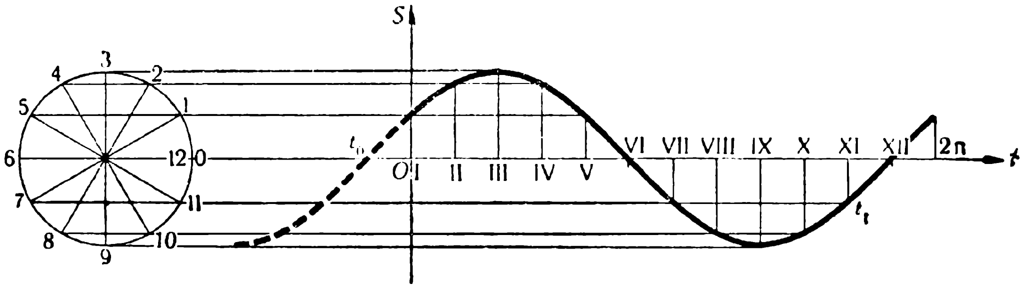
Горизонтальную ось примем за ось значений независимой переменной t, а вертикальную — за ось значений функции s (черт. 47).

Значение этой функции при каком-нибудь значении t равно значению синуса от аргумента $\varphi=\omega t+\varphi_0$, умноженному на число A. Поэтому если разместить на оси t значения переменной фазы φ, то для построения графика можно будет употребить тот геометрический приём, который был использован при построении обыкновенной синусоиды.

Прежде всего отметим на оси t те значения t_0 и t_1, для которых фаза равна 0 и 2π:

$$t_0 = -\frac{\varphi_0}{\omega} \quad \text{и} \quad t_1 = \frac{2\pi - \varphi_0}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega} - \frac{\varphi_0}{\omega} = t_0 + T.$$

Отрезок оси между точками t_0 и t_1 разделим на некоторое число n равных частей (на черт. 47 взято 12 частей) и обозначим точки деления последовательными целыми числами от 0 до XII. Возьмём, далее, окружность радиуса A с центром в какой-нибудь точке оси t. Разделим её также на n равных частей и перенумеруем точки деления в направлении, противоположном движению часовой стрелки, начиная от точки O.



Черт. 47.

Точки пересечения прямых, параллельных осям и проходящих через точки на оси t и на окружности, отмеченных одинаковыми номерами, принадлежат искомому графику. Проведя через найденные точки сплошную линию, получим ту часть графика функции $s = A \sin(\omega t + \varphi_0)$, которая соответствует изменению независимой переменной в пределах одного периода от t_0 до t_1 ($t_1 = t_0 + T$). Передвигая затем эту часть вправо и влево на T, на $2T$, на $3T$ и т. д., вычертим весь график.

Полученная кривая называется *деформированной синусоидой.*

Точки пересечения *деформированной синусоиды* с осью определяют те значения t, при которых колеблющаяся точка проходит через середину отрезка (так как при этих значениях t функция $s = 0$). Наибольшее расстояние точки графика от оси t равно амплитуде колебания.

Глава четвёртая

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

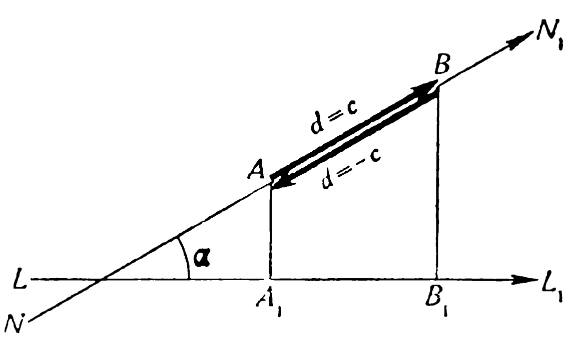
ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ И ВЫЧИТАНИЯ

§ 57. Дополнение к формуле проекций. Для вывода основной формулы этой главы необходимо дополнить формулу проекций. Эта формула

$$a = c \cos \alpha$$

даёт проекцию a вектора на ось по его длине c и углу α вектора с осью. Нам же придётся находить проекцию a на ось вектора, расположенного на другой оси, по его *алгебраической величине* d, как отрезка оси, и по углу α между осями. Мы докажем формулу:

$$a = d \cos \alpha, \qquad (61)$$



Черт. 48.

проекция отрезка оси на другую ось равна алгебраической величине отрезка, умноженной на косинус угла между осями.

Для доказательства рассмотрим проекции на данную ось LL_1 различных отрезков оси NN_1, образующей угол α с осью LL_1 (черт. 48).

Пусть дан положительный отрезок AB оси NN_1. Его алгебраическая величина d совпадает с его длиной c: $d = c$. Этот отрезок, рассматриваемый как вектор — $\overline{AB}$, образует угол α с осью LL_1. Его проекция A_1B_1 на эту ось по формуле проекций равна:

$$A_1B_1 = c \cos \alpha.$$

Здесь $A_1B_1 = a$, $c = d$, и формула (61) доказана.

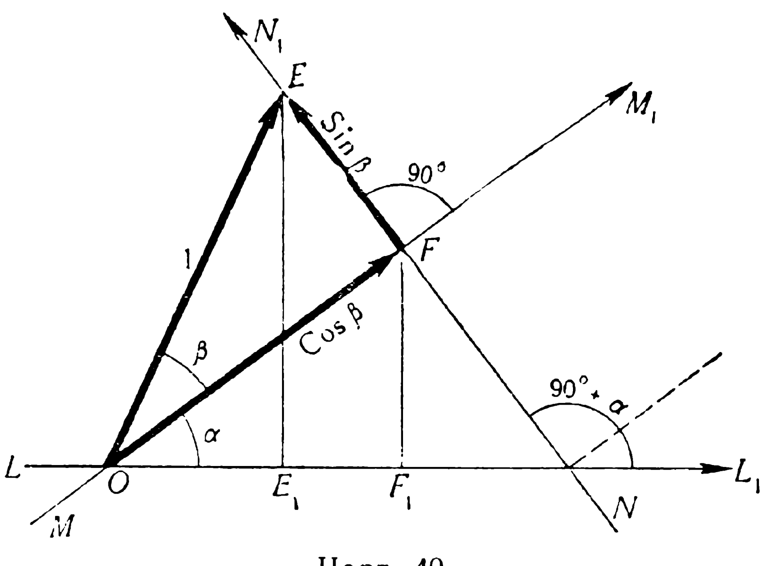
Пусть теперь дан отрицательный отрезок BA той же оси NN_1. Этот отрезок, рассматриваемый как вектор $\overline{BA}$, очевидно, имеет проекцию B_1A_1 на ось LL_1, отличающуюся от проекции A_1B_1 вектора $\overline{AB}$ лишь знаком. Следовательно,

$$B_1A_1 = -A_1B_1 = -c\cos\alpha.$$

Но в данном случае $d = -c$ и $a = B_1A_1$. Поэтому мы снова приходим к доказываемой формуле:

$$a = d\cos\alpha.$$

§ 58. Формулы сложения и вычитания для косинуса. В этой главе выведем ряд формул, которые позволят по из-



Черт. 49.

вестным значениям тригонометрических функций для одних значений аргумента вычислять значения этих функций для других значений аргумента. В основе всего дальнейшего лежат так называемые *формулы сложения*, выражающие значения тригонометрических функций суммы двух аргументов через значения тригонометрических функций аргументов-слагаемых.

Докажем следующую основную в тригонометрии формулу:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta, \tag{62}$$

формулу сложения для косинуса.

Проведём (черт. 49) через точку O оси LL_1 ось MM_1 под углом α к этой оси и единичный вектор $\overline{OE}$, образующий угол β с осью MM_1, а значит угол $(\alpha+\beta)$ с осью LL_1. Проведём третью ось NN_1, образующую угол $\frac{\pi}{2}(90^\circ)$ с осью MM_1 так, чтобы она проходила через конец E единичного вектора. Ось NN_1 образует угол $\frac{\pi}{2}+\alpha$ с осью LL_1. Обозначим через F точку пересечения осей MM_1 и NN_1.

Тогда отрезок OF оси MM_1 равен $\cos\beta$, отрезок FE оси NN_1 равен $\sin\beta$. Вектор $\overline{OE}$ можно считать замыкающей ломаной, составленной из векторов $\overline{OF}$ и $\overline{FE}$. Найдём проекции этих трёх векторов на ось LL_1.

Проекция OE_1 единичного вектора $\overline{OE}$ на ось LL_1, с которой она образует угол $(\alpha+\beta)$, равна:

$$OE_1=\cos(\alpha+\beta). \tag{63}$$

Проекцию OF_1 на ось LL_1 вектора $\overline{OF}$, рассматриваемого как отрезок OF оси MM_1, найдём по формуле предыдущего параграфа. Здесь алгебраическая величина d отрезка OF, на оси MM_1, равна: $d=\cos\beta$, угол между осями LL_1 и MM_1 равен α. Отсюда:

$$OF_1=d\cos\alpha=\cos\alpha\cos\beta. \tag{64}$$

Аналогично найдём проекцию F_1E_1 на ось LL_1 вектора $\overline{FE}$. Алгебраическая величина d_1 отрезка FE оси NN_1 равна $\sin\beta$, угол между осями LL_1 и NN_1 равен $\frac{\pi}{2}+\alpha$. Отсюда:

$$F_1E_1=d_1\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\beta\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right).$$

Но так как $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$, то

$$F_1E_1=-\sin\alpha\sin\beta. \tag{65}$$

Но OE_1 как проекция замыкающего вектора равна сумме проекций $OF_1+F_1E_1$ составляющих векторов

$$OE_1=OF_1+F_1E_1.$$

Подставляя сюда значения этих проекций из формул (63) — (65), приходим к доказываемой формуле:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta. \tag{62}$$

Эта формула справедлива для любых значениий аргументов α и β, так как теоремы о проекциях, на которые опиралось доказательство, были доказаны для любых углов.

Заменив в этой формуле β на $-\beta$, получим *формулу вычитания для косинуса:*

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)=$$
$$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta. \qquad (66)$$

§ 59. Формулы сложения и вычитания для синуса. Из формулы (66) легко вывести *формулу сложения для синуса*:

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos[90^\circ-(\alpha+\beta)]=\cos[(90^\circ-\alpha)-\beta]=$$
$$=\cos(90^\circ-\alpha)\cos\beta+\sin(90^\circ-\alpha)\sin\beta=$$
$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

Итак,

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta. \qquad (67)$$

Формулу (67) можно получить геометрически, подобно формуле (62), если за ось проекций взять ось, образующую 90° с осью LL_1.

Заменяя в формуле (67) β на $-\beta$, получим:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta. \qquad (68)$$

Это *формула вычитания для синуса.*

Формулы (67), (68) верны для любых значений α и β.

Примеры.

1) $\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ=$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1);$$

2) $\sin(\pi+\alpha)=\sin\pi\cdot\sin\alpha+\cos\pi\cdot\cos\alpha=0\cdot\sin\alpha-1\cdot\cos\alpha=-\cos\alpha.$

Все выведенные раньше формулы приведения являются частным случаем формул сложения.

§ 60. Формулы сложения и вычитания для тангенса. Из формулы (67) и (62) следует формула сложения для тангенса. Именно:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$$

Предположим, что и $\cos\alpha$, и $\cos\beta$ отличны от нуля. Разделив числитель и знаменатель дроби, стоящей в правой части, на $\cos\alpha\cos\beta$, получим:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=$$
$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Приходим к *формуле сложения для тангенса:*

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \tag{69}$$

Если же $\cos\alpha=0$ или $\cos\beta=0$, то не существует $\operatorname{tg}\alpha$ или $\operatorname{tg}\beta$.

Таким образом, формула (69) справедлива для всех значений аргументов, за исключением тех, для которых не существует хотя бы одна из функций, входящих в формулу.

Заменив в формуле (69) β на $-\beta$, получим *формулу вычитания для тангенса:*

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \tag{70}$$

Пример.

$$\operatorname{tg}15^\circ=\operatorname{tg}(60^\circ-45^\circ)=\frac{\operatorname{tg}60^\circ-\operatorname{tg}45^\circ}{1+\operatorname{tg}60^\circ\operatorname{tg}45^\circ}=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}.$$

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ДВОЙНОГО И ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТОВ

§ 61. Тригонометрические функции двойного аргумента. Рассмотрим частный случай формул сложения, когда аргументы — слагаемые — равны между собой. Положив в формулах (67), (62), (69) $\beta=\alpha$, получим:

$$\sin 2\alpha=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha, \tag{71}$$

$$\cos 2\alpha=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha, \tag{72}$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha}=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}. \tag{73}$$

Формулы (71) — (73) выражают тригонометрические функции двойного аргумента 2α через тригонометрические функции аргумента α.

Последовательное применение теорем сложения позволяет выразить тригонометрические функции аргументов 3α, 4α, 5α и вообще любого аргумента $n\alpha$, кратного α, через тригонометрические функции аргумента α.

Примеры.

$$\sin 3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha=$$
$$=2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha+(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\sin\alpha=3\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin^3\alpha;$$
$$\cos 3\alpha=\cos(2\alpha+\alpha)=\cos 2\alpha\cos\alpha-\sin 2\alpha\sin\alpha=$$
$$=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\cos\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha=\cos^3\alpha-3\sin^2\alpha\cos\alpha.$$

Из сказанного следует, что по значениям тригонометрических функций, например, для 1°, можно при помощи формул сложения найти значения тригонометрических функций для всех углов, выраженных целым числом градусов.

§ 62. Тригонометрические функции половинного аргумента. Воспользуемся формулами (71) и (72) предыдущего параграфа для того, чтобы выразить тригонометрические функции половинного аргумента $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ через тригонометрические функции целого аргумента (α). Заменив в формулах (71) и (72) аргумент α на $\frac{\alpha}{2}$ и, следовательно, 2α на α и переставив правые и левые части этих тождеств, получим:

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha, \tag{74}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=\cos\alpha. \tag{75}$$

Добавим ещё основное соотношение:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}=1. \tag{76}$$

Почленное сложение тождеств (75) и (76) даёт:

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha. \tag{77}$$

Почленное вычитание тождества (75) из тождества (76) даёт:

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha. \tag{78}$$

Из тождеств (77) и (78) имеем:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \tag{79}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}. \tag{80}$$

Наконец, почленное деление тождества (74) на тождество (77) приводит к тождеству:

$$\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha};$$

значит,

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}. \tag{81}$$

Аналогично почленным делением тождества (78) на тождество (74) находим:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{82}$$

а если почленно разделить тождество (80) на тождество (79), то получим:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}. \tag{83}$$

В формулах (79), (80) и (83) значения $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ определяются с помощью извлечения квадратного корня. Знак перед корнем ставится в зависимости от четверти, в какой находится угол $\frac{\alpha}{2}$; необходимость выбора знака делает формулу (83) менее удобной для определения $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, чем формулы (81) и (82).

Пример.

$$\sin 45^\circ=+\sqrt{\frac{1-\cos 90^\circ}{2}}=+\sqrt{\frac{1-0}{2}}=+\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin 225^\circ=-\sqrt{\frac{1-\cos 450^\circ}{2}}=-\sqrt{\frac{1-0}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

§ 63. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента. Вспоминая основные формулы, связывающие между собой тригонометрические функции одного аргумента ($\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$), мы видим, что через любую из них все остальные выражаются иррационально (т. е. с помощью извлечения корней); единственным исключением является выражение $\operatorname{tg}\alpha$ через $\operatorname{ctg}\alpha$ и наоборот.

Заслуживает внимания то, что все тригонометрические функции аргумента α выражаются через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ рационально, т. е. без извлечения корней, а с помощью одних только четырёх арифметических действий.

В самом деле, заменяя в формуле (73) α на $\frac{\alpha}{2}$, получаем:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

отсюда

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}};$$

Вывести формулу для $\sin\alpha$ можно так:

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

(потому что $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$);

аналогично находим формулу для $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(1-\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right)=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Формулы для $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ можно также получить из формул для $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ почленным их делением.

Выведенные формулы дают нам рациональные выражения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Обозначая $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ через t, получим:

$$\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{2t}{1-t^2},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-t^2}{2t}. \tag{84}$$

§ 64. Составление таблицы тригонометрических функций. Пользуясь формулами (74) — (83), по значениям тригонометрических функций для некоторого значения аргумента α, можно найти последовательно значения этих функций для аргументов $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha}{4}$, $\frac{\alpha}{8}$ и т. д.

П р и м е р. $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}8660\ldots$

Далее получаем последовательно:

$$\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}} \approx \sqrt{\frac{1+0{,}866}{2}} \approx 0{,}966,$$

$$\sin 7{,}5^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 15^\circ}{2}} \approx \sqrt{\frac{1-0{,}966}{2}} \approx 0{,}130.$$

Остановившись, например, на значениях $\sin 7{,}5^\circ$ и $\cos 7{,}5^\circ$, можно с помощью формул сложения и вычитания составить таблицу синусов и косинусов для всех углов, кратных $7{,}5^\circ$. Приведём эту таблицу (с точностью до 0,01).

угол	0°	7,5°	15°	22,5°	30°	37,5°	45°
синус	0	0,13	0,26	0,38	0,50	0,61	0,71
косинус	1	0,99	0,96	0,92	0,87	0,79	0,71

С помощью этой таблицы можно найти с точностью до 0,1 синус и косинус любого угла. Например, значение $\sin 26^\circ$ не приведено в таблице, но $\sin 26^\circ$ заключён между $\sin 22{,}5^\circ \approx 0{,}38$ и $\sin 30^\circ = 0{,}5$. Поэтому с точностью до 0,1, $\sin 26^\circ \approx 0{,}4$.

Для построения более точной таблицы мы должны были бы продолжать вычисление косинуса и синуса для углов, получаемых дальнейшим последовательным делением на 2:

$$3\frac{3^\circ}{4},\quad 1\frac{7^\circ}{8},\quad \frac{15^\circ}{16},\quad \frac{15^\circ}{32}\qquad \text{и т. д.,}$$

и соответственно строить таблицы кратных им углов. Таблицы для углов, кратных $\frac{15^\circ}{32}$, дадут значения тригонометрических функций с точностью до 0,01 и т. д.

Путём последовательного деления углов пополам можно, очевидно, построить таблицу, которая даёт значения тригонометрических функций с любой степенью точности.

Итак, формулы для тригонометрических функций половинного аргумента вместе с формулами сложения позволяют определить значения тригонометрических функций для любого значения аргумента. Но формулы тригонометрических функций половинного угла в свою очередь были выведены на основе формул сложения.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СУММУ И ОБРАТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 65. Формулы для произведений синусов и косинусов. Выведем формулы, выражающие произведения тригонометрических функций различных аргументов через суммы функций.

Почленным сложением и вычитанием формул

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

получим:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta,$$
$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta.$$

Аналогично из формул

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

путём почленного сложения и вычитания получим:

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta.$$

Переставив правые и левые части этих формул и разделив их почленно на 2, приходим к тождествам:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right], \qquad (85)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right], \qquad (86)$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]. \qquad (87)$$

Формулы (85)—(87) выражают произведения синусов и косинусов через суммы синусов и косинусов. Эти формулы облегчают вычисления при пользовании натуральными таблицами тригонометрических функций, позволяя умножение косинусов и синусов заменять сложением.

§ 66. Приведение к виду, удобному для логарифмирования. При пользовании таблицами логарифмов полезны бывают преобразования сумм тригонометрических функций в их произведения, т. е. преобразования, обратные рассмотренным в § 65.

Обозначим:

$$\alpha+\beta=x, \quad \alpha-\beta=y.$$

Тогда

$$\alpha=\frac{x+y}{2}, \qquad \beta=\frac{x-y}{2}.$$

Формулы (85) — (87) примут вид:

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \tag{88}$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}, \tag{89}$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \tag{90}$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}=$$

$$=2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2} \tag{91}$$

$\left(\text{потому что } \sin\frac{x-y}{2}=-\sin\frac{y-x}{2}\right)$.

Тождества (88) — (91) обычно формулируют так[1]):

Сумма синусов равна удвоенному произведению синуса полусуммы на косинус полуразности.

Разность синусов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы на синус полуразности.

Сумма косинусов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы на косинус полуразности.

Разность косинуса равна удвоенному произведению синуса полусуммы на синус обратной полуразности (обратной разностью чисел a и b мы называем $b-a$).

Найдём аналогичные выражения для суммы тангенсов:

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin y}{\cos y}=\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y}.$$

Так как числитель в правой части равен $\sin(x+y)$, то

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}. \tag{92}$$

---

[1]) Приводимые в тексте формулировки являются удобным для запоминания кратким выражением более точных формулировок, например: сумма синусов двух аргументов равна удвоенному произведению синуса полусуммы этих аргументов на косинус их полуразности и т. п.

Подобным же образом найдём:

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}. \tag{93}$$

Преобразования суммы тригонометрических функций в их произведения, определённые формулами (88) — (93), называются *приведением к виду, удобному для логарифмирования.*

Если нужно, например, найти: $\lg(\sin 67° + \sin 13°)$, то по формуле (88) имеем:

$$\lg(\sin 67° + \sin 13°) = \lg\left(2 \sin\frac{67° + 13°}{2} \cos\frac{67° - 13°}{2}\right) =$$
$$= \lg(2 \sin 40° \cos 27°) = \lg 2 + \lg \sin 40° + \lg \cos 27°.$$

§ 67. Преобразования с помощью вспомогательного аргумента. Познакомимся с особым приёмом преобразования тригонометрических выражений — введением вспомогательного аргумента. Этот приём заключается в том, что некоторые числа рассматриваются как значения тригонометрических функций вспомогательного аргумента φ.

В качестве примера преобразования такого рода рассмотрим преобразование выражения

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha$$

к виду, удобному для логарифмирования. Мы подберём такой аргумент φ и такой положительный множитель ρ, чтобы было

$$\rho \cos \varphi = a, \quad \rho \sin \varphi = b.$$

Для подбора таких ρ и φ возведём обе части каждого из последних равенств в квадрат и сложим их после этого почленно. Получим:

$$\rho^2 (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = a^2 + b^2,$$

или $\rho^2 = a^2 + b^2$, откуда находим:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Значит,

$$\cos \varphi = \frac{a}{\rho} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \sin \varphi = \frac{b}{\rho} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Из этих равенств можно найти вспомогательный аргумент φ. Следовательно,

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = \rho \cos \varphi \sin \alpha + \rho \sin \varphi \cos \alpha =$$
$$= \rho (\sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi) = \rho \sin(\alpha + \varphi).$$

Пример. Пусть задано выражение $3\sin\alpha + 4\cos\alpha$.

Имеем:

$$\rho = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5; \quad \sin\varphi = \frac{3}{5} = 0{,}600; \quad \cos\varphi = \frac{4}{5} = 0{,}800.$$

Из таблиц находим, что $\varphi = 36°54' = 0{,}643$ радиана. Поэтому

$$3\sin\alpha + 4\cos\alpha = \rho\sin(\alpha + \varphi) = \rho\sin(\alpha + 0{,}643).$$

§ 68. Сложение простых гармонических колебаний. Рассмотрим в качестве приложения следующую задачу.

Точка подвержена одновременному действию двух сил, каждая из которых вызывает простое гармоническое колебание точки вдоль одной и той же прямой: узнать, как будет двигаться точка в результате совместного действия этих сил.

Пусть одна сила вызывает колебание по закону:

$$s_1 = A_1\sin(\omega_1 t + \varphi_1),$$

а другая — по закону:

$$s_2 = A_2\sin(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Здесь A_1, ω_1, φ_1 — амплитуда, частота и начальная фаза первого простого гармонического колебания, а A_2, ω_2, φ_2 — амплитуда, частота и начальная фаза второго простого гармонического колебания.

Ясно, что в результате действия двух указанных сил точка будет двигаться по той же прямой. Расстояния s_1 и s_2 отсчитываются от некоторой точки O прямой, по которой происходит движение точки.

Будем обозначать через s то отклонение движущейся точки от O, которое получается при одновременном действии обеих сил. Для того чтобы найти результирующее отклонение s движущейся точки от неподвижной точки O, нужно, очевидно, сложить отклонения s_1 и s_2:

$$s = s_1 + s_2 = A_1\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\sin(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Это соотношение устанавливает зависимость между отклонением точки s и временем t.

При различных частотах „складываемых" колебаний ($\omega_1 \neq \omega_2$) движение точки, происходящее по такому закону, может быть весьма сложным (даже непериодическим). Ограничимся рассмотрением только простейшего случая, когда частоты „складываемых" колебаний одинаковы ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$). Тогда движение точки оказывается снова *простым гармоническим колебанием* с той же частотой. Докажем это и найдём амплитуду и начальную фазу результирующего колебания.

Имеем:

$$s = A_1\sin(\omega t + \varphi_1) + A_2\sin(\omega t + \varphi_2) = A_1\sin\omega t\cdot\cos\varphi_1 + \\ + A_1\cos\omega t\cdot\sin\varphi_1 + A_2\sin\omega t\cdot\cos\varphi_2 + A_2\cos\omega t\cdot\sin\varphi_2,$$

или

$$s = (A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)\sin\omega t + (A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)\cos\omega t.$$

Введём обозначения:

$$a = A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2; \quad b = A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2.$$

Получим:

$$s = a \sin \omega t + b \cos \omega t.$$

Это выражение с помощью вспомогательного угла φ можно представить (см. § 67) в виде:

$$s = A \sin (\omega t + \varphi),$$

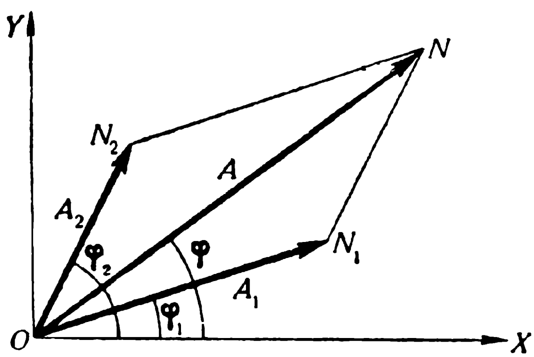
где

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{A}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{A}. \tag{94}$$

Итак, точка описывает *простое гармоническое колебание той же частоты* ω, с амплитудой A и начальной фазой φ.

Приведём простой геометрический способ определения A и φ.

Из точки O (черт. 50) проведём два вектора $\overline{ON_1}$ и $\overline{ON_2}$, по длине равных соответственно A_1 и A_2 и образующих с осью OX углы φ_1 и φ_2. Пусть вектор $\overline{ON}$ совпадает с диагональю параллелограма ON_1NN_2, построенного на $\overline{ON_1}$ и $\overline{ON_2}$, как на сторонах. Докажем, что длина $\overline{ON}$ равна A, а угол $\overline{ON}$ с осью OX есть φ.



Черт. 50.

Проекции вектора $\overline{ON_1}$ на оси OX и OY (см. черт. 50) равны $A_1 \cos \varphi_1$ и $A_1 \sin \varphi_1$, а соответственные проекции вектора $\overline{ON_2} = \overline{N_1N}$ равны $A_2 \cos \varphi_2$ и $A_2 \sin \varphi_2$.

Вектор $\overline{ON}$ есть замыкающий ломаной ON_1N; $\overline{ON_1}$ и $\overline{N_1N}$ — её составляющие. По теореме о замыкающем проекция $\overline{ON}$ на ось OX равна $A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 = a$, проекция $\overline{ON}$ на ось OY равна $A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2 = b$. Длина диагонали ON равна $\sqrt{a^2 + b^2}$, что в силу формулы (94) равно A; косинус и синус угла XON равны:

$$\frac{a}{A} \text{ и } \frac{b}{A}; \text{ следовательно, по той же формуле } \angle XON = \varphi.$$

Итак, длина $\overline{ON}$ равна амплитуде A, а угол его с осью OX равен начальной фазе φ.

Из этого геометрического способа определения A и φ наглядно видна зависимость амплитуды простого гармонического колебания, получающегося в результате сложения двух простых гармонических колебаний равных частот (периодов) от начальных фаз этих колебаний. Наибольшего значения амплитуда A (при заданных A_1 и A_2) достигает при совпадении начальных фаз ($\varphi_1 = \varphi_2$); тогда $A = A_1 + A_2$. Если же начальные фазы отличаются на π, то A достигает наименьшего значения, равного разности между амплитудами „слагаемых“ колебаний, в частности, если $A_1 = A_2$ и в то же время начальные фазы отличаются на π, то амплитуда A равна нулю и точка остаётся в покое (т. е. два действующих колебания в этом случае как бы уничтожают друг друга).

Такая зависимость амплитуды результирующего колебания от амплитуд и начальных фаз „слагаемых" колебаний играет большую роль в физике и наблюдается, например, в явлениях интерференции звука или света, где амплитуда колебания обусловливает силу звука или света.

ПРИБЛИЖЁННЫЕ РАВЕНСТВА ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 69. Общие замечания. Наряду с тождествами, связывающими значения тригонометрических функций разных аргументов, при различных вычислениях и построении таблиц играют большую роль неравенства и приближённые равенства, связывающие значения тригонометрических функций с значениями их аргументов.

Приближёнными равенствами пользуются в разнообразных областях науки и жизни. Говорят, например: „Население Москвы в 1937 г. равнялось приближённо 3 600 000 человек"; „число π равно приближённо 3,14" и т. п. Для обозначения приближённого равенства употребляется знак $\approx$.

Формула

$$A \approx B$$

обозначает: A приближённо равно B, или A является приближённым значением B. Ошибкой приближённого равенства $A \approx B$ называется абсолютная величина разности $|B - A|$ или, иначе, разность между бо́льшим из чисел A и B и меньшим. Например, в приближённом равенстве

$$0{,}999 \approx 1$$

ошибка равна 0,001.

Источники приближённых равенств различны. Нередко нам вовсе не нужно знать точное значение некоторой величины, а лишь то или иное её приближённое значение. При измерениях длины, площади, веса и тому подобных величин неизбежны ошибки, и поэтому получаются лишь приближённые значения этих величин.

Если число A заключено между своими приближёнными значениями B и $C\,(B < A < C)$, то B называется приближённым значением числа A *с недостатком*, а C — приближённым значением числа A *с избытком*. Ошибки приближённых равенств

$$A \approx B, \quad A \approx C$$

(т. е. разности $A - B$ и $C - A$) меньше $C - B$.

Пример 1. Так как $3,14 < \pi < 3,15$, то 3,14 и 3,15 являются приближёнными значениями числа π соответственно с недостатком и с избытком, причём ошибки приближённых равенств

$$\pi \approx 3,14 \text{ и } \pi \approx 3,15$$

меньше 0,01.

Пример 2. При отыскании значения $\sin 27°35'$ по таблице § 17 мы будем исходить из неравенств:

$$\sin 27° < \sin 27°35' < \sin 28°.$$

Взяв из таблицы $\sin 27° = 0,454$ и $\sin 28° = 0,469$, получим:

$$0,454 < \sin 27°35' < 0,469.$$

Ошибка в приближённых равенствах

$$\sin 27°35' \approx 0,454, \ \sin 27°35' \approx 0,469 \text{ меньше } 0,015.$$

Приближённое равенство, в котором ошибка меньше некоторого положительного числа δ, называется равенством *с точностью* до δ. Например, таблица на стр. 26 даёт значения тригонометрических функций некоторых углов с точностью до 0,001.

Иногда знак приближённого равенства $\approx$ заменяется знаком равенства $=$, чем подчёркивается, что точность является приемлемой. Особенно часто такая замена обозначений равенства производится, когда приближённое значение выражено десятичным числом; при этом разряд последнего десятичного знака указывает точность равенства. Например, если нас удовлетворит точность до 0,01, то мы пишем: $\pi = 3,14$, хотя известно, что это не точное, а приближённое равенство; его ошибка не превосходит единицы последнего разряда, т. е. 0,01. Аналогично мы писали выше: $\sin 27° = 0,454$; $\sin 28° = 0,469$. Эти равенства также приближённые, но с точностью уже до 0,001.

§ 70. Основные неравенства. Мы сейчас выведем несколько неравенств между значениями тригонометрических функций и аргумента. Во всём дальнейшем будем полагать x, заключённым между 0 и $\frac{\pi}{2}$ (x — радианная мера острого угла).

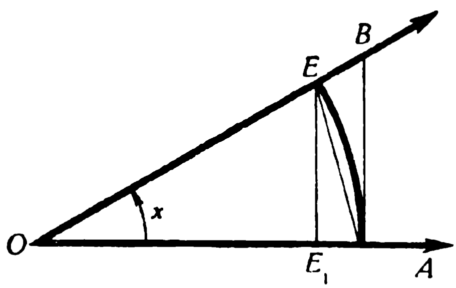
НЕРАВЕНСТВА 1.

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x; \tag{95}$$

радианная мера острого угла заключена между его синусом и тангенсом.

Для доказательства проведём в единичной окружности радиусы OA и OE, образующие между собой острый угол

AOE, радианная мера которого равна x (черт. 51). Дуга AE той же окружности имеет длину, равную x. Проведём перпендикуляр EE_1 из точки E на радиус OA и отрезок AB касательной к нашей окружности в точке A до точки B её пересечения с продолжением радиуса OE. Длины отрезков E_1E и AB равны соответственно $\sin x$ и $\operatorname{tg} x$.



Черт. 51.

Сравним площади трёх фигур: треугольника OAE, сектора S, ограниченного радиусами OA, OE и дугой AE, и треугольника OAB. Имеем, очевидно, неравенства:

пл. $OAE <$ пл. сектора $S <$ пл. OAE. Найдём эти площади:

$$\text{пл. } OAE = \frac{1}{2} OA \cdot E_1E = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{1}{2} \sin x.$$

Площадь сектора S равна половине произведения дуги AE на длину радиуса:

$$\text{пл. } S = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 1 = \frac{1}{2} x.$$

$$\text{пл. } OAB = \frac{1}{2} OA \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x,$$

или

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x,$$

ч. т. д.

§ 71. Дополнительные неравенства. Опираясь на основные неравенства (95), можно доказать ряд весьма полезных неравенств и приближённых равенств.

НЕРАВЕНСТВА 2.

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1. \tag{96}$$

Правое неравенство очевидно (косинус острого угла меньше 1). Далее, так как

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2},$$

то

$$\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}.$$

В силу неравенств (95):

$$\sin\frac{x}{2} < \frac{x}{2},$$

поэтому $\sin^2\frac{x}{2} < \frac{x^2}{4}$

и

$$\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} > 1 - 2\frac{x^2}{4} = 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Неравенства (96) доказаны.

НЕРАВЕНСТВА 3.

$$x - \frac{x^3}{4} < \sin x < x. \qquad (97)$$

Правое неравенство содержится в неравенствах (95). Для доказательства левого неравенства воспользуемся тождеством:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cos^2\frac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2} =$$
$$= 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\left(1 - \sin^2\frac{x}{2}\right).$$

Из неравенства (95) следует:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} > \frac{x}{2}; \ \sin^2\frac{x}{2} < \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4} \ \text{или} \ 1 - \sin^2\frac{x}{2} > 1 - \frac{x^2}{4},$$

откуда

$$\sin x = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\left(1 - \sin^2\frac{x}{2}\right) > 2\cdot\frac{x}{2}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) = x - \frac{x^3}{4}.$$

Неравенства (97) показывают, что ошибка в приближённом равенстве

$$\sin x \approx x$$

меньше $\frac{x^3}{4}$. $\Big($Более сложными вычислениями можно доказать, что эта ошибка меньше $\frac{x^3}{6}$, т. е. доказать более точные неравенства: $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x.\Big)$

П р и м е р. Ошибка в приближённом равенстве

$$\sin 0{,}1 \approx 0{,}1$$

меньше $\frac{0{,}001}{4} = 0{,}00025$.

$$1-\frac{x^2}{2}<\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{16}. \tag{98}$$

Эти неравенства уточняют неравенства (96). Левое из неравенств (98) заключено в неравенствах (96). Докажем правое неравенство. Преобразуем выражение $\cos x-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)$:

$$\cos x-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}-(1-\cos x)=$$

$$=\frac{x^2}{2}-2\sin^2\frac{x}{2}=2\left(\frac{x^2}{4}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=2\left(\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right). \tag{99}$$

Но

$$\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}<\frac{x}{2}+\frac{x}{2}=x,$$

и в силу неравенств (97):

$$\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}<\frac{1}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^3=\frac{x^3}{32}.$$

Поэтому правая часть равенства (99) меньше, чем $2\cdot x\cdot\frac{x^3}{32}=\frac{x^4}{16}$. Итак:

$$\cos x-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)<\frac{x^4}{16}.$$

Отсюда следует правое из неравенств (98)

$$\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{16}.$$

Неравенства (98) показывают, что ошибка в приближённом равенстве

$$\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2}$$

меньше $\frac{x^4}{16}$. $\left(\text{Можно доказать, что она меньше, чем } \frac{x^4}{24}.\right)$

Пример. Ошибка в приближённом равенстве

$$\cos 0{,}3\approx 1-\frac{0{,}3^2}{2}=1-0{,}045=0{,}955$$

меньше $\frac{0{,}3^4}{16}=\frac{0{,}0081}{16}$, т. е. во всяком случае меньше 0,001. Поэтому с точностью до 0,001 можно положить:

$$\cos 0{,}3=0{,}955.$$

§ 72. Применение приближённых равенств к составлению таблиц. Приближёнными равенствами

$$\sin x \approx x, \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

очень удобно пользоваться при составлении таблиц. (Для дальнейших вычислений полезно заметить, что $\pi^2 < 10$, $\pi^3 < 32$, $\pi^4 < 100$.)

Приближённое равенство

$$\sin x \approx x$$

при $x \leqslant \frac{\pi}{20}$ даёт ошибку (см. § 71 — неравенства 3), меньшую чем: $\frac{x^3}{4} \leqslant \frac{\pi^3}{4 \cdot 20^3} < \frac{32}{32000} = 0{,}001$. Поэтому с точностью до 0,001 имеем:

$$\sin 9^\circ = \sin \frac{\pi}{20} \approx \frac{\pi}{20} = 0{,}156,$$

$$\sin 8^\circ = \sin \frac{2\pi}{45} \approx \frac{2\pi}{45} = 0{,}139,$$

$$\sin 7^\circ = \sin \frac{7\pi}{180} \approx \frac{7\pi}{180} = 0{,}122,$$

$$\sin 6^\circ = \sin \frac{\pi}{30} \approx \frac{\pi}{30} = 0{,}105$$

и т. д.

Мы получаем сразу значения синусов углов до 9°, помещённые в нашей таблице (стр. 26). Теорема сложения позволяет получить остальную часть таблицы. Если же $x \leqslant \frac{\pi}{45}$, то $\frac{x^3}{4} < \frac{\pi^3}{4 \cdot 45^3} < \frac{32}{4 \cdot 45^3} = \frac{8}{91125} < 0{,}0001$.

Поэтому с помощью того же приближённого равенства получим с точностью уже до 0,0001:

$$\sin 4^\circ = \sin \frac{\pi}{45} \approx \frac{\pi}{45} = 0{,}0698,$$

$$\sin 3^\circ = \sin \frac{\pi}{60} \approx \frac{\pi}{60} = 0{,}0523.$$

Аналогично при $x \leqslant \frac{\pi}{100}$ имеем $\frac{x^3}{4} \leqslant \frac{\pi^3}{4 \cdot 100^3} < \frac{32}{4 \cdot 100^3} < 0{,}00001$.

Поэтому с точностью до 0,00001 находим:

$$\sin 1^\circ = \sin \frac{\pi}{180} \approx \frac{\pi}{180} = 0{,}01728.$$

Более точным является приближённое равенство

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2},$$

так как его ошибка меньше $\frac{x^4}{16}$. Например, при $x \leqslant \frac{\pi}{10}$ имеем:

$$\frac{x^4}{16} \leqslant \frac{\pi^4}{16 \cdot 10^4} < \frac{100}{16 \cdot 10^4} < 0{,}001.$$

Поэтому с точностью до 0,001:

$$\cos 18^\circ = \cos\frac{\pi}{10} \approx 1 - \frac{\pi^2}{2 \cdot 10^2} = 1 - \frac{9{,}87}{200} = 1 - 0{,}049 = 0{,}951,$$

$$\cos 15^\circ = \cos\frac{\pi}{12} \approx 1 - \frac{\pi^2}{2 \cdot 12^2} = 1 - \frac{\pi^2}{288} = 1 - \frac{9{,}87}{288} = 1 - 0{,}034 = 0{,}966$$

и т. д.

Пользуясь этим приближённым равенством, можно получить значения косинуса для углов до 18° включительно с той же точностью (до 0,001), с какой по формуле $\sin x \approx x$ мы получали значения синуса только для углов до 9°. Что касается углов до 9°, то при $x \leqslant \frac{\pi}{20}$ имеем:

$$\frac{x}{16} < \frac{\pi^4}{16 \cdot 20^4} < \frac{100}{256 \cdot 10^4} < 0{,}0001.$$

Поэтому с точностью до 0,0001 находим:

$$\cos 9^\circ = \cos\frac{\pi}{20} \approx 1 - \frac{\pi^2}{2 \cdot 400} = 1 - \frac{9{,}871}{800} = 1 - 0{,}0123 = 0{,}9877$$

и т. д.

В главе I мы находили геометрическим путём значения тригонометрических функций и строили их таблицу (§ 14). Это был весьма несовершенный способ, так как он давал значения тригонометрических функций с большими ошибками. В § 64 настоящей главы мы показали, как можно строить таблицы тригонометрических функций, опираясь на формулы половинного угла и формулу сложения. Этот способ теоретически позволяет вычислять значения тригонометрических функций со сколь угодно большой точностью, но практически мало пригоден, так как приводит к весьма громоздким вычислениям. Наиболее совершенным из приведённых способов построения таблиц является последний, только что изложенный способ, основанный на использовании приближённых формул вместе с формулами сложения. Пользуясь им, можно построить, например, таблицу, данную в книжке Брадиса [1]).

ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

§ 73. Формула Муавра. Теоремы сложения тесно связаны с законами умножения комплексных чисел.

Комплексное число $a + ib$ можно изобразить точкой на плоскости. Возьмём на плоскости систему координат XOY. Точка M с координатами a и b изображает число $a + ib$ (черт. 52).

---

[1]) В. Брадис, Четырёхзначные математические таблицы для средней школы, Учпедгиз.

Положительное число

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

(длина вектора $\overline{OM}$) называется *модулем* числа $a + ib$.

Угол φ (выраженный в радианной мере), который вектор $\overline{OM}$ образует с осью OX, называется *аргументом* числа $a + ib$. Очевидно:

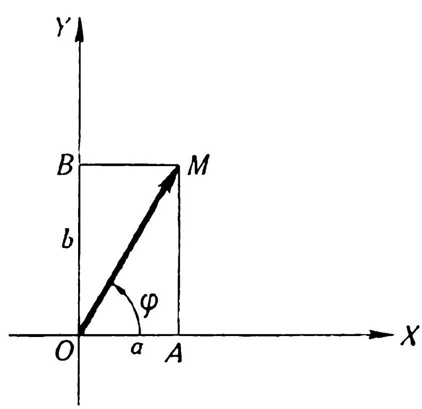
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}.$$

Пример. Модуль числа $4 + 3i$ равен $\sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$, а его аргумент равен 0,643 радиана $\approx 36°50'$, ибо $\operatorname{tg} 36°50' = 0{,}75$.

Аргумент комплексного числа $a + ib$ определяется неоднозначно. Если φ есть аргумент числа $a + ib$, то наряду с ним аргументами этого числа будут также все числа вида $\varphi + 2\pi n$, при любом целом n.

Так как отрезки $OA = a$ и $OB = b$ суть проекции вектора $\overline{OM}$ на оси OX и OY, то (§ 29)

$$a = \rho \cos \varphi, \quad b = \rho \sin \varphi.$$



Черт. 52.

Отсюда

$$a + ib = \rho \cos \varphi + i\rho \sin \varphi = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi). \qquad (100)$$

Мы получили так называемую *тригонометрическую форму* комплексного числа $a + ib$.

Комплексные числа умножаются по правилу умножения двучленов, при этом i^2 заменяется через -1. Именно:

$$(a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd =$$
$$= (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Если комплексные сомножители даны в тригонометрической форме, то:

$$[\rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)] [\rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)] =$$
$$= \rho\rho_1 [(\cos \varphi \cos \varphi_1 - \sin \varphi \sin \varphi_1) + i (\cos \varphi \sin \varphi_1 + \sin \varphi \cos \varphi_1)].$$

В силу формул (62) и (67) получаем:

$$[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)][\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)] = \\ = \rho\rho_1[\cos(\varphi+\varphi_1) + i\sin(\varphi+\varphi_1)]. \qquad (101)$$

Формула (101) показывает, что *при умножении комплексных чисел модули их перемножаются, а аргументы складываются.*

В частности, из формулы (101) следует (при $\varphi_1=\varphi$, $\rho_1=\rho$):

$$[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^2 = \rho^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi);$$

$$[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^3 = [\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^2\cdot[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)] = \\ = [\rho^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)]\cdot[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)] = \\ = \rho^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi),$$

и т. д. Вообще:

$$[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

При возвышении комплексного числа в n-ую степень модуль его возвышается в ту же степень, а аргумент умножается на n.

Полагая $\rho=1$, приходим к равенству:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \qquad (102)$$

которое носит название *формулы Муавра.*

§ 74. Формулы для $\sin n\varphi$ и $\cos n\varphi$. Покажем сейчас одно применение формулы Муавра. Разложим выражение $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$ по правилу бинома Ньютона. При этом степени i надо считать равными:

$$i^1=i,\ i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1,\ i^5=i,\ i^6=-1$$

и т. д.

Из формулы Муавра следует:

$$\cos n\varphi + i\sin n\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos^n\varphi + \\ + C_n^1 i\sin\varphi\cos^{n-1}\varphi + C_n^2(i\sin\varphi)^2\cos^{n-2}\varphi + \\ + C_n^3(i\sin\varphi)^3\cdot\cos^{n-3}\varphi + C_n^4(i\sin\varphi)^4\cos^{n-4}\varphi + \\ + C_n^5(i\sin\varphi)^5\cos^{n-5}\varphi + \ldots = \\ = (\cos^n\varphi - C_n^2\sin\varphi^2\cos^{n-2}\varphi + C_n^4\sin^4\varphi\cos^{n-4}\varphi\ldots) + \\ + i(C_n^1\sin\varphi\cos^{n-1}\varphi - C_n^3\sin^3\varphi\cos^{n-3}\varphi + C_n^5\sin^5\varphi\cos^{n-5}\varphi + \ldots).$$

Здесь

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}, \qquad C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}, \ldots$$

биноминальные коэфициенты.

Два комплексных выражения равны, если равны отдельно их действительные и мнимые части. Поэтому

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - C_n^2 \sin^2 \cos^{n-2}\varphi + C_n^4 \sin^4\varphi \cos^{n-4}\varphi - \ldots,$$

$$\sin n\varphi = C'_n \sin\varphi \cos^{n-1}\varphi - C_n^3 \sin^3\varphi \cos^{n-3}\varphi +$$
$$+ C_n^5 \sin^5\varphi \cos^{n-5}\varphi - \ldots$$

Итак, мы представили $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ в виде многочленов n-ой степени, расположенных по степеням $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

Примеры. При $n=3$ имеем: $\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^3$. Отсюда:

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\sin^2\varphi\cos\varphi,$$
$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi.$$

Аналогично при $n=4$ имеем:

$$\cos 4\varphi = \cos^4\varphi - 6\sin^2\varphi\cos^2\varphi + \sin^4\varphi,$$
$$\sin 4\varphi = 4\sin\varphi\cos^3\varphi - 4\sin^3\varphi\cos\varphi.$$

Глава пятая

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ТРЕУГОЛЬНИКА

ОСНОВНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА

§ 75. Постановка вопроса. Задача о решении треугольника состоит в том, чтобы по известным элементам треугольника найти при помощи вычислений другие, неизвестные его элементы (§ 15). Конечно, решить треугольник можно только тогда, когда известные элементы треугольника вполне его определяют. Например, треугольник можно решить, если известны длины трёх его сторон, так как три стороны определяют единственный треугольник. Но треугольник нельзя решить, если даны величины трёх его углов, потому что три угла определяют бесконечно много треугольников, подобных между собой.

Обычно различают *основные* элементы треугольника (стороны и углы) и *неосновные* его элементы (высота, биссектриса, медиана, периметр, площадь, радиусы вписанного и описанного кругов и т. д.). Из геометрии известно, что три основных элемента (из которых по крайней мере один линейный, т. е. сторона) определяют, вообще говоря, единственный треугольник; в этом случае треугольник можно решить. Как выполняется решение треугольника, будет показано в следующей главе.

Случаи, когда даны неосновные элементы треугольника, не будем рассматривать и ограничимся лишь установлением зависимостей между некоторыми из них.

Решение прямоугольных треугольников мы изучили в первой главе. Число основных элементов, достаточных для определения прямоугольного треугольника, сводилось к двум (из которых по крайней мере один линейный), что значительно облегчало задачу. Её решение было основано на знании значений тригонометрических функций острых углов и зависимостей между элементами прямоугольного треугольника.

Аналогично решение произвольных треугольников основывается на знании значений тригонометрических функций любых углов (впрочем, здесь встречаются лишь углы, не превосходящие 180°) и зависимостей между элементами треугольника.

В настоящей главе мы только выведем эти зависимости, а в следующей главе на примерах покажем приёмы практического использования их для решения треугольников.

§ 76. Зависимость между углами треугольника. Одной из трёх зависимостей между основными элементами треугольника является зависимость между его углами. Именно: сумма углов треугольника всегда равна $\pi\,(180^\circ)$:

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi\,(=180^\circ). \tag{103}$$

Благодаря этой зависимости между углами, тригонометрические функции углов треугольника также оказываются связанными между собой. Например:

$$\sin\alpha=\sin[\pi-(\beta+\gamma)]=\sin(\beta+\gamma),$$
$$\cos\alpha=\cos[\pi-(\beta+\gamma)]=-\cos(\beta+\gamma)$$

и т. д.

Из того, что

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}\,(90^\circ),$$

следует:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)\right]=\cos\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right),$$
$$\cos\frac{\alpha}{2}=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)\right]=\sin\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)$$

и т. д.

§ 77. Теорема синусов. *Во всяком треугольнике стороны относятся между собой, как синусы противолежащих углов,* т. е.

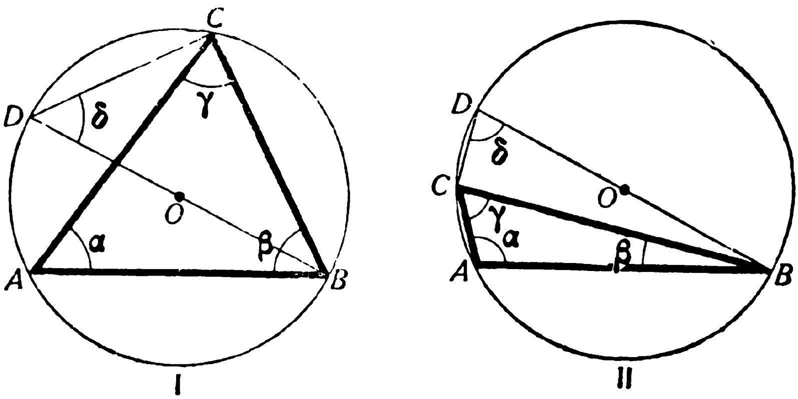
$$\frac{a}{c}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma};\quad \frac{b}{c}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma};\quad \frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}. \tag{104}$$

Переставляя члены этих пропорций, получим:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}. \tag{105}$$

Таким образом, теорему синусов можно высказать и так: *во всяком треугольнике стороны пропорциональны синусам противолежащих углов.*

Доказательство. Рассмотрим угол α треугольника ABC. Опишем около треугольника окружность и из вершины B проведём диаметр BD этой окружности (черт. 53). В зависимости от того, будет ли угол α острый или тупой, мы будем иметь первый или второй случай, изображённые на чертеже 53.



Черт. 53.

Точку D пересечения BD с окружностью соединим с вершиной C. Получаем прямоугольный треугольник BCD. Поэтому

$$\frac{a}{\sin\delta} = 2R,$$

где δ — угол при вершине D. В первом случае $\delta = \alpha$, так как оба угла α и δ опираются на дугу CB, и, следовательно, $\sin\delta = \sin\alpha$. Во втором случае $\delta + \alpha = \pi$, так как δ и α — противоположные углы четырёхугольника, вписанного в окружность, и, значит, опять $\sin\delta = \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$. Следовательно,

$$\frac{a}{\sin\delta} = \frac{a}{\sin\alpha} = 2R.$$

Таким же образом докажем, что

$$\frac{b}{\sin\beta} = 2R \quad \text{и} \quad \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Итак,

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R. \tag{106}$$

Отсюда видим, что общее значение отношений (105) **равно диаметру окружности, описанной около треугольника.**

Тем самым установлена справедливость равенств (105), а переставляя в них члены отношений, получаем равенства (104). Теорема доказана.

На основании равенств (106) получаем:

$$a = 2R\sin\alpha, \quad b = 2R\sin\beta, \quad c = 2R\sin\gamma,$$

т. е. *сторона треугольника равна диаметру описанной окружности, умноженному на синус противолежащего угла.*

Зависимость (103) между углами треугольника и какие-либо два из соотношений (104) образуют систему трёх уравнений, с помощью которой можно находить три элемента треугольника по трём другим заданным, т. е. решить треугольник.

Пример. Дано: $a = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$, $c = 2$, $\gamma = 60^\circ$.

По теореме синусов имеем:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{\frac{2}{3}}}{2}.$$

Отсюда

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}\sin 60^\circ = \sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

и, значит,

$$\alpha = 45^\circ; \ \beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 75^\circ.$$

Далее из равенства

$$\frac{b}{2\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

находим:

$$b = \sqrt{\frac{2}{3}}(\sqrt{3}+1).$$

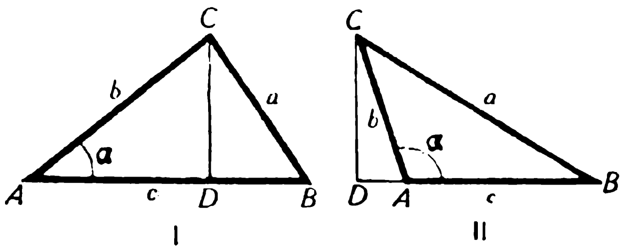
Заметим, что если один из углов треугольника прямой (например, $\gamma = 90^\circ$), то из равенств (105) получаются известные зависимости между элементами прямоугольного треугольника:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin 90^\circ} = c,$$

т. е.

$$a = c\sin\alpha \quad \text{и} \quad b = c\sin\beta.$$

§ 78. Теорема косинусов. *Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними* (т. е. на косинус угла, противолежащего определяемой стороне).



Черт. 54.

Теорема косинусов формулируется одинаково, каков бы ни был угол, противолежащий определяемой стороне (острый, прямой, тупой). Она объединяет три геометрические теоремы — теорему Пифагора, теорему о квадрате стороны, лежащей против острого угла, и теорему о квадрате стороны, лежащей против тупого угла треугольника.

Основываясь на этих геометрических теоремах, докажем теорему косинусов.

В случае острого угла α (черт. 54, I) имеем:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot AD,$$

но $AD = b\cos\alpha$; следовательно,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \qquad (107_1)$$

В случае тупого угла α (черт. 54, II) имеем:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2c \cdot AD,$$

но

$$AD = b\cos(\pi - \alpha) = -b\cos\alpha,$$

и снова получаем то же равенство (107):

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2c(-b\cos\alpha) = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Аналогично:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \qquad (107_2)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \qquad (107_3)$$

Теорема косинусов доставляет нам другую систему зависимостей между основными элементами треугольника. С её помощью решаются треугольники в подходящих случаях.

Заметим, что любые две из формул (107) могут быть получены из третьей путём циклической перестановки букв, т. е. путём замены буквы a буквой b, b — буквой c и c — буквой a; одновременно с ними аналогично переставляются буквы α, β, γ.

Пример. Дано $a=2\sqrt{\frac{2}{3}}$, $b=\sqrt{\frac{2}{3}}(\sqrt{3}+1)$, $c=2$ (ср. пример предыдущего параграфа).

По теореме косинусов:

$$\frac{8}{3}=\frac{4}{3}(2+\sqrt{3})+4-4\sqrt{\frac{2}{3}}(\sqrt{3}+1)\cos\alpha,$$

откуда

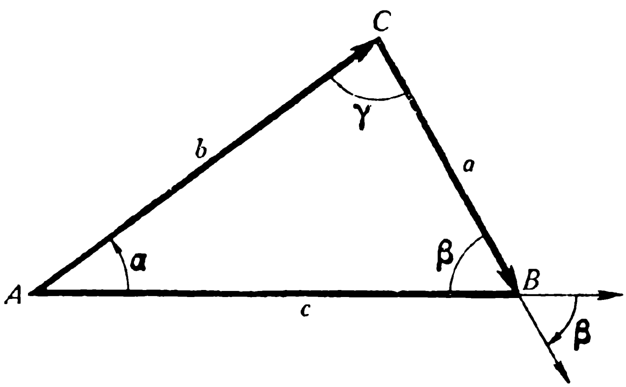
$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

и, значит,

$$\alpha=45^\circ.$$

Угол β можно найти также по теореме косинусов.

§ 79. Вывод основных зависимостей между элементами треугольника из одной системы. Можно указать такую простую систему зависимостей между основными элементами треугольника, из которой с помощью преобразований без труда получается и теорема синусов, и теорема косинусов.



Черт. 55.

Эта система выводится очень легко и вполне общим образом[1]).

Возьмём какой-нибудь треугольник ABC (черт. 55). Каждую его сторону можно рассматривать как вектор, замыкающий ломаную, образованную двумя другими сторонами. Например, сторона AB есть вектор, замыкающий ломаную ACB.

Проектируя замыкающий и составляющие векторы на вектор $\overline{AB}$, как на ось проекции, будем иметь (по формуле (47)):

$$\text{проекция } \overline{AB}=c,$$
$$\text{проекция } \overline{AC}=b\cos\alpha,$$
$$\text{проекция } \overline{CB}=a\cos\beta.$$

[1]) То есть один вывод будет годиться для любых случаев.

Но проекция замыкающего равна сумме проекций составляющих (§ 22) и, поэтому

$$c = b \cos \alpha + a \cos \beta. \qquad (108_1)$$

Точно так же:

$$b = a \cos \gamma + c \cos \alpha; \qquad (108_2)$$

$$a = b \cos \gamma + c \cos \beta. \qquad (108_3)$$

Три равенства (108) устанавливают связь между шестью основными элементами треугольника.

Так как теорема о проекциях верна при любых углах α, β и γ, то равенства (108), полученные на её основе, справедливы для всякого треугольника (остроугольного, прямоугольного, тупоугольного).

Любые два из равенств (108) получаются из третьего циклической перестановкой букв a, b, c и α, β, γ.

Если присоединить к этим соотношениям равенство $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то с его помощью одно из соотношений может быть выведено из двух других.

Пусть, например, даны равенства (103), (108_2) и (108_3). Выведем из их равенство (108_1).

Умножим равенство (108_3) на $\sin \alpha$, равенство (108_2) на $\sin \beta$ и сложим полученные равенства:

$$a \sin \alpha + b \sin \beta = b \cos \gamma \sin \alpha + c \cos \beta \sin \alpha + a \cos \gamma \sin \beta + c \cos \alpha \sin \beta,$$

отсюда:

$$c (\cos \beta \sin \alpha + \cos \alpha \sin \beta) = a (\sin \alpha - \cos \gamma \sin \beta) + b (\sin \beta - \cos \gamma \sin \alpha).$$

Заметив, что коэфициентом при c служит синус суммы

$$\cos \beta \sin \alpha + \cos \alpha \sin \beta = \sin (\alpha + \beta),$$

и, воспользовавшись зависимостями между тригонометрическими функциями углов треугольника [§ 76, следствия формулы (103)]

$$\sin \alpha = \sin (\beta + \gamma),$$
$$\sin \beta = \sin (\alpha + \gamma),$$

найдём:

$$c \sin (\alpha + \beta) = a [\sin (\beta + \gamma) - \cos \gamma \sin \beta] + b [\sin (\alpha + \gamma) - \cos \gamma \sin \alpha].$$

Далее мы имеем:

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \gamma,$$

$$\sin (\beta + \gamma) - \cos \gamma \sin \beta = \sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma - \cos \gamma \sin \beta = $$
$$= \cos \beta \sin \gamma,$$

$$\sin (\alpha + \gamma) - \cos \gamma \sin \alpha = \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma - \cos \gamma \sin \alpha =$$
$$= \cos \alpha \sin \gamma.$$

Следовательно:

$$c \sin \gamma = a \cos \beta \sin \gamma + b \cos \alpha \sin \gamma.$$

Отсюда, сокращая на $\sin \gamma$, что можно сделать, так как $\sin \gamma \neq 0$, получаем искомое равенство (108_1):

$$c = a \cos \beta + b \cos \alpha.$$

Три равенства: $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ и два любых из (108), образуют систему трёх уравнений, с помощью которой можно решать треугольник по трём данным основным элементам.

Пример. Пусть дано: $\alpha = 45°$, $\beta = 75°$, $c = 2$. (Ср. примеры в двух предыдущих параграфах.)

Имеем: $\gamma = 180° - (45° + 75°) = 60°$ и

$$a = b \cos 60° + 2 \cos 75° = b \cdot \frac{1}{2} + 2 \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1) = \frac{b + \sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$

$$b = a \cos 60° + 2 \cos 45° = a \cdot \frac{1}{2} + 2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a + \sqrt{2}}{2}.$$

Из этой системы двух уравнений находим a и b:

$$a = 2 \sqrt{\frac{2}{3}}, \qquad b = \sqrt{\frac{2}{3}} (\sqrt{3} + 1).$$

Из системы равенств (108) алгебраическими преобразованиями можно получить теорему косинусов.

Умножив равенство (108_1) на c, (108_2) на b, (108_3) на a, затем первые два почленно сложим и из результата вычтем третье.

Мы получим:

$$c^2 + b^2 - a^2 = (bc \cos \alpha + ac \cos \beta) + (ab \cos \gamma + bc \cos \alpha) -$$
$$- (ba \cos \gamma + ca \cos \beta) = 2bc \cos \alpha,$$

откуда

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Аналогично найдём выражения и для двух других сторон треугольника.

Пользуясь теоремой косинусов, полученной из системы равенств (108), и самой этой системой, легко также алгебраически вывести теорему синусов. Из теоремы косинусов имеем:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta. \qquad (107_2)$$

Равенство (108_1) запишем так:

$$b \cos \alpha = c - a \cos \beta.$$

Возвышая это равенство в квадрат, получим:

$$b^2 \cos^2 \alpha = c^2 - 2ac \cos \beta + a^2 \cos^2 \beta.$$

Почленно вычитая последнее равенство из (107_2), находим:

$$b^2 \sin^2 \alpha = a^2 \sin^2 \beta,$$

откуда

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Аналогично выводится другое равенство теоремы синусов.

В следующей главе мы увидим, что с помощью выведенных в этой главе соотношений между основными элементами треугольника можно по трём из них (среди которых по крайней мере один — линейный) определить остальные.

РАЗЛИЧНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА

§ 80. Теорема тангенсов. Из теоремы синусов

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

образуем производные пропорции:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \beta},$$

$$\frac{a-b}{b} = \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \beta}.$$

Деля по частям первое равенство на второе, получим:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta}.$$

Применим формулы для суммы и разности синусов:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha+\beta}{2}} \cdot \frac{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha-\beta}{2}} =$$

$$= \operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha-\beta}{2},$$

или

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}. \qquad (109_1)$$

Это равенство выражает теорему тангенсов: *отношение суммы двух сторон треугольника к их разности равно отношению тангенса полусуммы противолежащих углов к тангенсу их полуразности.*

Тем же способом можно получить два других соотношения теоремы тангенсов:

$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}; \qquad (109_2)$$

$$\frac{c+a}{c-a}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2}}. \qquad (109_3)$$

Любые два из равенств (109) получаются из третьего циклической перестановкой букв a, b, c и α, β, γ.

§ 81. Зависимость между периметром и другими элементами треугольника. Из теоремы косинусов

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

получим:

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Эта формула позволяет определить угол треугольника по трём его сторонам. Если пользоваться таблицей логарифмов, то более удобной является другая формула, которую мы сейчас выведем.

По формуле (83) § 62, имеем:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc+b^2+c^2-a^2}}.$$

Корень берём со знаком $+$, так как половина угла треугольника всегда меньше $\frac{\pi}{2}$ (90°).

Подкоренное выражение преобразуем так:

$$\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc+b^2+c^2-a^2}=\frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2}=\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{(a+b+c)(b+c-a)}.$$

Обозначим, как обычно, периметр треугольника через $2p$:

$$a+b+c=2p.$$

Тогда

$$a+b-c=a+b+c-2c=2p-2c=2(p-c);$$
$$a+c-b=2(p-b);\quad b+c-a=2(p-a)$$

и

$$\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc+b^2+c^2-a^2}=\frac{2(p-c)\cdot 2(p-b)}{2p\cdot 2(p-a)}=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p(p-a)^2}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p(p-a)^2}},$$

или:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{p-a}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}. \qquad (110_1)$$

Циклическая перестановка букв даёт:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{1}{p-b}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}, \qquad (110_2)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{p-c}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}. \qquad (110_3)$$

Этими формулами часто пользуются при вычислении углов треугольника по его сторонам.

Число $p-c=\frac{b+c-a}{2}$ положительно, так как сумма двух сторон треугольника b и c больше третьей стороны a. По аналогичной причине положительными являются числа $(p-b)$ и $(p-a)$. Следовательно, в формулах (110) под знаком корня стоят *положительные* числа.

По формуле Герона, известной из геометрии, имеем:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где S — площадь треугольника. Значит,

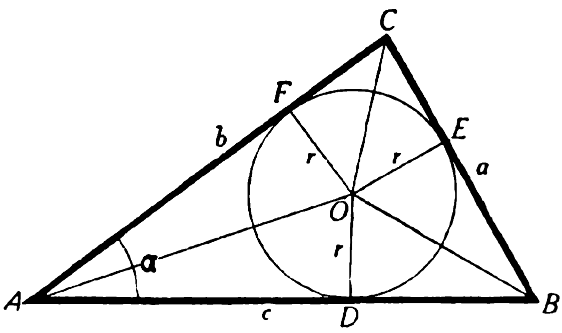
$$\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2}}=\frac{S}{p},$$

и нашим соотношениям можно придать вид:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{S}{p(p-a)}, \qquad (111_1)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{S}{p(p-b)}, \qquad (111_2)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{S}{p(p-c)}. \qquad (111_3)$$



Черт. 56

Заметим, что формулы (111) легко выводятся из геометрических соображений. Впишем окружность в треугольник (черт. 56) и соединим её центр с вершинами треугольника и с точками касания. Пусть r — радиус вписанной окружности.

Тогда пл. $ABC=$ пл. $AOB+$ пл. $BOC+$ пл. $COA=$

$$=\frac{cr}{2}+\frac{br}{2}+\frac{ar}{2}=r\frac{a+b+c}{2}=r\frac{2p}{2},$$

т. е.

$$S=r\cdot p. \qquad (112)$$

Из треугольника AOD найдём:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{AD}$$

(AO — биссектриса угла A). Определим AD. Имеем:

$$AD+DB+BE+EC+CF+FA=2p,$$

но

$$AF=AD, \quad DB=BE, \quad CE=CF$$

как отрезки касательных, проведённых из одной точки. Поэтому

$$AD+BE+FC=p.$$

Отсюда

$$AD+a=p$$

и

$$AD=p-a.$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{p-a}, \tag{113_1}$$

и аналогично:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{r}{p-b}, \tag{113_2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{p-c}. \tag{113_3}$$

Заменяя здесь r его выражением из формулы (112): $r=\frac{S}{p}$, придём к формулам (111).

§ 82. Зависимость между площадью и другими элементами треугольника. Кроме известных нам выражений для площади треугольника, укажем ещё одно, очень удобное во многих случаях. Из вершины C проведём высоту CD треугольника ABC (см. черт. 54). Как катет треугольника ACD она равна $b\sin\alpha$. Значит, площадь треугольника, равная половине произведения основания на высоту, запишется так:

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha. \tag{114}$$

Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.

Приведём примеры использования этой формулы для доказательства некоторых теорем.

I. Выражение радиуса описанной окружности через стороны и площадь треугольника. По теореме синусов (§ 77):

$$2R=\frac{a}{\sin\alpha},$$

или

$$R=\frac{a}{2\sin\alpha},$$

но

$$\frac{1}{2} bc \sin\alpha = S, \text{ т. е. } 2\sin\alpha = \frac{4S}{bc},$$

и, значит,

$$R = \frac{abc}{4S}. \tag{115}$$

II. Тригонометрический вывод формулы Герона. В формулу (84):

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

подставляем вместо $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ его выражение через стороны треугольника: § 81, формула (110_1). Получим:

$$\sin\alpha = \frac{2\frac{1}{p-a}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}}{1+\frac{1}{(p-a)^2}\cdot\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} =$$

$$= 2\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p(p-a)+(p-b)(p-c)} = 2\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p(2p-a-b-c)+bc} =$$

$$= 2\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc}.$$

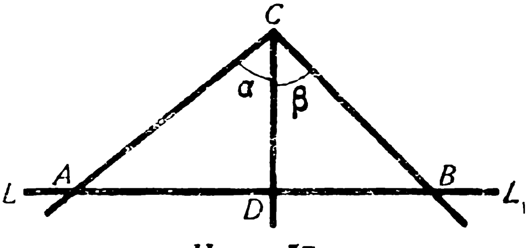
Окончательно имеем:

$$S = \frac{1}{2} bc\cdot 2\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc};$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

III. Вывод формулы синуса суммы двух аргументов.

Ограничимся тем случаем, когда каждый из слагаемых аргументов α и β не превосходит $\frac{\pi}{2}$.



Черт. 57.

Восставим к некоторой прямой LL_1 перпендикуляр CD произвольной длины (черт. 57) и из его конца C проведём наклонные CA и CB по разные стороны от CD так, чтобы углы ACD и BCD были равны соответственно α и β. Получим треугольник ACB, площадь которого равна сумме площадей треугольников ACD и BCD:

$$\text{пл. } ACB = \text{пл. } ACD + \text{пл. } BCD,$$

но пл. $ACB = \frac{1}{2} CA \cdot CB \cdot \sin \angle ACB = \frac{1}{2} CA \cdot CB \cdot \sin (\alpha + \beta)$;

пл. $ACD = \frac{1}{2} AC \cdot CD \cdot \sin \alpha$; пл. $BCD = \frac{1}{2} CB \cdot CD \cdot \sin \beta$,

и, следовательно:

$$\frac{1}{2} CA \cdot CB \cdot \sin (\alpha + \beta) = \frac{1}{2} CA \cdot CD \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} CB \cdot CD \sin \beta.$$

Отсюда:

$$\sin (\alpha + \beta) = \frac{CD}{CB} \sin \alpha + \frac{CD}{CA} \sin \beta.$$

Из треугольников ACD и BCD имеем:

$$\frac{CD}{CB} = \cos \beta \quad \text{и} \quad \frac{CD}{CA} = \cos \alpha,$$

поэтому

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta.$$

Глава шестая

РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

ТАБЛИЦА ЛОГАРИФМОВ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 83. Логарифмы тригонометрических функций. Решая треугольники, приходится умножать и делить многозначные числа. Для упрощения действий пользуются таблицами логарифмов.

Пусть, например, $x = 1753 \cdot \cos 27°1'$.

Прологарифмируем это выражение[1]):

$$\lg x = \lg 1753 + \lg \cos 27°1'.$$

Находим $\lg \cos 27°1'$ в два приёма. Сначала по таблице натуральных тригонометрических функций найдём $\cos 27°1' = 0{,}8909$. Далее по таблице логарифмов чисел:

$$\lg \cos 27°1' = \lg 0{,}8909 = \bar{1}{,}9498$$

и

$$\lg 1753 = 3{,}2438.$$

Следовательно,

$$\lg x = 3{,}2438 + \bar{1}{,}9498 = 3{,}1936$$

и

$$x = 1562.$$

Чтобы избежать двукратного обращения к таблицам, пользуются специальными таблицами логарифмов тригонометрических функций. В этих таблицах для острого угла α указаны логарифмы его синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

Величины $\lg \sin \alpha$, $\lg \cos \alpha$, $\lg \operatorname{tg} \alpha$, $\lg \operatorname{ctg} \alpha$ также являются функциями острого угла α, так как каждому острому углу соответствуют определённые значения его тригонометрических функций, а значит, и их логарифмов.

Замечания. 1. Функции $\lg \sin \alpha$, $\lg \cos \alpha$, $\lg \operatorname{tg} \alpha$, $\lg \operatorname{ctg} \alpha$ можно определить не только для острых, но и для всех тех углов α, для которых соответственно $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ положительны. Например, $\lg \sin \alpha$ можно определить для углов первой и второй четверти, но нельзя определить для углов третьей и четвёртой четверти.

---

[1]) Пользуемся таблицами Брадиса.

2. Так же как тригонометрические функции, функции $\lg \sin x$, $\lg \cos x$, $\lg \operatorname{tg} x$, $\lg \operatorname{ctg} x$ можно рассматривать как функции числового аргумента x. Они определены для тех x, для которых соответственные тригонометрические функции положительны. В частности, все они определены для x-ов, заключённых между 0 и $\frac{\pi}{2}$.

Укажем простейшие свойства функций:

$$\lg \sin \alpha, \ \lg \cos \alpha, \ \lg \operatorname{tg} \alpha \text{ и } \lg \operatorname{ctg} \alpha.$$

Как известно, десятичные логарифмы положительных чисел, меньших единицы, отрицательны, а логарифмы чисел, больших единицы, положительны. Поэтому $\lg \sin \alpha$, $\lg \cos \alpha$ отрицательны для любого острого угла α; $\lg \operatorname{tg} \alpha$ отрицателен при $\alpha < 45^\circ$, положителен при $\alpha > 45^\circ$; $\lg \operatorname{ctg} \alpha$, наоборот, положителен при $\alpha < 45^\circ$, отрицателен при $\alpha > 45^\circ$.

При возрастании острого угла $\sin \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$ возрастают, а $\cos \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ убывают. Поэтому при возрастании острого угла α $\lg \sin \alpha$ и $\lg \operatorname{tg} \alpha$ возрастают, а $\lg \cos \alpha$ и $\lg \operatorname{ctg} \alpha$ убывают.

При α, стремящемся к 0, $\sin \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$ также стремятся к 0, $\lg \sin \alpha$ и $\lg \operatorname{tg} \alpha$ алгебраически неограниченно убывают. При α, стремящемся к 90°, $\cos \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ стремятся к 0, $\lg \cos \alpha$ и $\lg \operatorname{ctg} \alpha$ алгебраически неограниченно убывают. При α, стремящемся к 90°, $\operatorname{tg} \alpha$ неограниченно возрастает и вместе с ним неограниченно возрастает и $\lg \operatorname{tg} \alpha$; точно так же при α, стремящемся к 0, $\operatorname{ctg} \alpha$, а вместе с ним $\lg \operatorname{ctg} \alpha$ неограниченно возрастают.

§ 84. Устройство таблиц логарифмов тригонометрических функций. Устройство таблиц логарифмов тригонометрических функций в основном повторяет устройство таблиц натуральных значений тригонометрических функций, но там, где в последних таблицах находятся значения $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, в таблицах логарифмов тригонометрических функций находятся значения $\lg \sin \alpha$, $\lg \cos \alpha$, $\lg \operatorname{tg} \alpha$ и $\lg \operatorname{ctg} \alpha$.

Наибольшее распространение имеют четырёхзначные таблицы логарифмов тригонометрических функций Брадиса (включённые в его „Четырёхзначные математические таблицы“) и пятизначные таблицы Пржевальского.

Для особо точных вычислений, например, в астрономии, пользуются семизначными, десятизначными и другими таблицами.

Как и в обычной таблице логарифмов, мантиссы логарифмов тригонометрических величин, т. е. дробные части логарифмов в таблицах, всегда даются положительными. Характеристики логарифмов тригонометрических функций, т. е. их целые части, могут быть и отрицательными; в последнем случае знак „минус“ пишут над характеристикой.

Пример.

$\lg \sin 20°12' = \bar{1},5382 = -1 + 0,5382 = -0,4618.$

В таблицах Пржевальского, чтобы избежать в печати отрицательных характеристик, все отрицательные характеристики увеличены на 10 единиц. При работе по таблицам Пржевальского это следует принимать во внимание.

Углы α, для которых приведены в таблице значения $\lg \sin \alpha$, $\lg \cos \alpha$, $\lg \operatorname{tg} \alpha$ и $\lg \operatorname{ctg} \alpha$, даются через определённые промежутки. В таблицах Брадиса этот промежуток равен 6 минутам. Значения $\lg \sin \alpha$ и $\lg \operatorname{tg} \alpha$ для углов α, меньших 14°, и $\lg \operatorname{tg} \alpha$ для углов α, больших 76°, даны через минуту.

Например, находим непосредственно в таблице:

$$\lg \sin 18°18' = \bar{1},4969; \quad \lg \operatorname{tg} 4°17' = \bar{2},8745.$$

В силу зависимости $\lg \sin (90° - \alpha) = \lg \cos \alpha$ таблица логарифмов синусов служит для определения логарифмов косинусов (а таблица логарифмов тангенсов служит для определения логарифмов котангенсов).

Так, на тех же местах таблицы мы находим значения

$$\lg \sin 34°12' = \lg \cos 55°48' = \bar{1},7498,$$
$$\lg \operatorname{tg} 80° = \lg \operatorname{ctg} 10° = 0,7537.$$

Для отыскания логарифма какой-либо функции угла α, отсутствующего в таблицах Брадиса (например, $\lg \sin 20°20'$), ищем в таблице значение логарифма той же функции от угла α_0, ближайшего к α (в нашем примере таким углом будет угол в 20°18'). Угол α получается путём прибавления к α_0 или вычитания из α_0 допущенной погрешности h, которая не превышает 3 минут. В той же строке, где находится значение логарифма функции для угла α_0, указана поправка для допущенных погрешностей в 1', 2' и 3', которая прибавляется или вычитается из значения логарифма функции угла α_0.

Как производится поправка, поясним на примерах.

Пример. Пусть требуется найти $\lg \sin 20°20'$; ближайший к 20°20' угол, имеющийся в таблице, равен 20°18'; для него:

$$\lg \sin 20°18' = \bar{1},5402.$$

Угол в 20°20' получается путём прибавления к углу в 20°18' погрешности h, равной 2'. Находим из таблицы поправку d, соответствующую 2 минутам: $d = 0,0007$. Функция $\lg \sin \alpha$ (как и $\lg \operatorname{tg} \alpha$)

возрастает с возрастанием угла, потому что с возрастанием угла α увеличивается $\sin\alpha$ (а также $\operatorname{tg}\alpha$). Поэтому поправку $d = 0{,}0007$ нужно прибавить к значению $\lg\sin 20°18'$.

Итак, $\lg\sin 20°20' = \lg\sin 20°18' + d = \bar{1}{,}5402 + 0{,}0007 = \bar{1}{,}5409$.

Действия можно записать следующим образом:

$$\begin{array}{r} \lg\sin 20°18' = \bar{1}{,}5402 \\ +\;2' \qquad +7 \\ \hline \lg\sin 20°20' = \bar{1}{,}5409 \end{array}.$$

Обратно, если погрешность в $1'$, $2'$ или $3'$ вычитается из угла α_0, то в случае функций $\lg\sin\alpha$ и $\lg\operatorname{tg}\alpha$ вычитается и соответствующая поправка d.

Пример. Найдём $\lg\operatorname{tg} 18°9'$:

$$\begin{array}{r} \lg\operatorname{tg} 18°12' = \bar{1}{,}5169 \\ -\;3' \qquad -13 \\ \hline \lg\operatorname{tg} 18°9' = \bar{1}{,}5156 \end{array}.$$

Функции же $\lg\cos\alpha$ и $\lg\operatorname{ctg}\alpha$ *убывают при возрастании угла* α, так как с возрастанием α $\cos\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ уменьшаются. Поэтому соответствующая поправка d вычитается, если погрешность h угла прибавляется к углу α_0: поправка d прибавляется, если погрешность h угла вычитается из угла α_0.

Примеры. 1) Найдём $\lg\cos 30°32'$:

$$\begin{array}{r} \lg\cos 30°30' = \bar{1}{,}9353 \\ +\;2' = \qquad -1 \\ \hline \lg\cos 30°32' = \bar{1}{,}9352 \end{array}.$$

2) Найдём $\lg\operatorname{ctg} 20°11'$:

$$\begin{array}{r} \lg\operatorname{ctg} 20°12' = 0{,}4342 \\ -\;1' \qquad +4 \\ \hline \lg\operatorname{ctg} 20°11' = 0{,}4346 \end{array}.$$

§ 85. Использование таблиц в обратном назначении. Таблицы логарифмов тригонометрических функций (так же как и таблицы натуральных значений тригонометрических функций) могут быть использованы для нахождения острого угла α по заданному значению одной из функций $\lg\sin\alpha$, $\lg\cos\alpha$, $\lg\operatorname{tg}\alpha$, $\lg\operatorname{ctg}\alpha$. Ход выкладок обратен тому, которым мы пользовались для нахождения значений по заданному углу. Поясним его на числовых примерах.

Примеры. 1) Найти α, если $\lg\sin\alpha = \bar{1}{,}5361$.

В таблице легко находим острый угол, равный $20°6'$, для которого $\lg\sin\alpha = \bar{1}{,}5361$.

2) Найти α, если $\lg\operatorname{tg}\alpha = 0{,}2221$.

В таблице значений функции $\lg \operatorname{tg} \alpha$ нет числа 0,2221. Ищем ближайшее к нему значение этой функции, помещённое в таблице: это есть число $0{,}2229 = \lg \operatorname{tg} 59°6'$.

Заданное число 0,2221 получается из 0,2229 вычитанием 0,0008. В таблице поправок (в той же строке) мы видим, что поправка $d = 0{,}0009$, ближайшая к 0,0008, соответствует погрешности угла 3′. Поскольку поправка d вычитается, погрешность угла $h = 3'$ должна тоже вычитаться (для функций $\lg \sin \alpha$ и $\lg \operatorname{tg} \alpha$ прибавлению поправок функций соответствует прибавление погрешностей угла, а вычитанию поправок функций соответствует вычитание погрешностей угла).

Значит,

$$\alpha = 59°6' - 3' = 59°3'.$$

Действия записать так:

$$\begin{array}{r} \lg \operatorname{tg} \alpha = 0{,}2221 \\ \lg \operatorname{tg} 59°6' = 0{,}2229 \\ -3' \qquad -8 \\ \hline \alpha = 59°3'. \end{array}$$

3) Найти α, если $\lg \cos \alpha = \bar{1},9377$.

Ход выкладок отличается от предыдущего тем, что для функции $\lg \cos \alpha$ (и $\lg \operatorname{ctg} \alpha$) прибавлению поправки d соответствует вычитание погрешности h угла α, а вычитанию поправки d — прибавление погрешности h угла α.

Выкладки можно записать так:

$$\begin{array}{r} \lg \cos \alpha = \bar{1},9377 \\ \lg \cos 30° = \bar{1},9375 \\ -3' \qquad +2 \\ \hline \alpha = 29°57'. \end{array}$$

§ 86. Решение прямоугольных треугольников с помощью логарифмических таблиц. Мы покажем на числовых примерах основные случаи решения прямоугольных треугольников с помощью таблиц логарифмов тригонометрических функций.

Будем называть в дальнейшем, ради краткости, таблицу логарифмов чисел первой таблицей, а таблицу логарифмов тригонометрических функций — второй таблицей; нахождение логарифма данного числа и логарифма тригонометрической функции данного угла будем называть прямыми действиями, а нахождение числа по данному логарифму и угла по данному логарифму его тригонометрической функции — обратными действиями [1]).

---

[1]) Для нахождения числа по данному его логарифму создаются иногда таблицы „антилогарифмов". Такие таблицы имеются, например, в указанной книге Брадиса.

Рассмотрим четыре основных случая решения прямоугольных треугольников (см. также §§ 16, 17).

Случай I. *Даны гипотенуза c и угол α.*

Пример. $c = 12{,}783$; $\alpha = 23°17'7''$.

Поскольку таблицы Брадиса четырёхзначные, округлим значения c до четырёх значащих цифр, положив $c = 12{,}78$; точно так же при пользовании этими таблицами угол α округлим до целого числа минут, $\alpha = 23°17'$.

Находим:

$$\beta = 90° - 23°17' = 66°43'.$$

Далее определяем a:

$$a = c \sin \alpha,$$

откуда

$$\lg a = \lg c + \lg \sin \alpha.$$

В первой и второй таблицах находим (прямое действие):

$$+\begin{array}{r} \lg c = 1{,}1065 \\ \lg \sin \alpha = \bar{1}{,}5969 \\ \hline \lg a = 0{,}7034 \end{array}.$$

По первой таблице (обратным действием) или по таблице антилогарифмов находим:

$$a = 5{,}047.$$

Определяем b:

$$b = c \sin \beta,$$

откуда

$$\lg b = \lg c + \lg \sin \beta.$$

Во второй таблице находим

$$+\begin{array}{r} \lg \sin \beta = \bar{1}{,}9632 \\ \lg c = 1{,}1065 \\ \hline \lg b = 1{,}0697 \end{array},$$

откуда (обратным действием) находим:

$$b = 11{,}74.$$

Для контроля можно воспользоваться формулой:

$$b = a \operatorname{tg} \beta,$$

откуда

$$\lg b = \lg a + \lg \operatorname{tg} \beta.$$

По второй таблице:

$$+\begin{array}{r} \lg \operatorname{tg} \beta = 0{,}3662 \\ \lg a = 0{,}7034 \\ \hline \lg b = 1{,}0696 \end{array}.$$

Раньше было найдено: $\lg b = 1{,}0697$. Мы имеем хорошее совпадение.

Случай II. *Дан катет a и острый угол* (например, α).

Пример. Дано: $a = 17{,}56$; $\alpha = 81°58'$.

Имеем: $\beta = 90° - \alpha = 90° - 81°58' = 8°2'$.

Определяем b:

$$b = a \operatorname{tg} \beta,$$

откуда

$$\lg b = \lg a + \lg \operatorname{tg} \beta.$$

В первой и второй таблицах находим:

$$+\begin{array}{r} \lg a = 1{,}2445 \\ \lg \operatorname{tg} \beta = \overline{1}{,}1496 \\ \hline \lg b = 0{,}3941 \end{array}.$$

Находим b:

$$b = 2{,}478.$$

Далее определяем c:

$$c = \frac{a}{\sin \alpha},$$

откуда

$$\lg c = \lg a - \lg \sin \alpha.$$

Во второй таблице находим:

$$\lg \sin \alpha = \overline{1}{,}9958,$$

откуда

$$-\lg \sin \alpha = -\overline{1}{,}9958 = 0{,}0042.$$

Имеем:

$$+\begin{array}{r} -\lg \sin \alpha = 0{,}0042 \\ \lg a = 1{,}2445 \\ \hline \lg c = 1{,}2487 \end{array}.$$

Отсюда находим:

$$c = 17{,}73.$$

Для проверки можно воспользоваться соотношением:

$$b = c \sin \beta,$$

откуда

$$\lg b = \lg c + \lg \sin \beta.$$

Во второй таблице находим:

$$+\begin{array}{r} \lg \sin \beta = \overline{1}{,}1453 \\ \lg c = 1{,}2488 \\ \hline \lg b = 0{,}3941 \end{array}.$$

Ранее мы получили: $\lg b = 0{,}3941$. Совпадение.

Случай III. *Даны катет a и гипотенуза c.*

Пример. $a = 23{,}15$; $c = 31{,}81$.

Находим α:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c},$$

откуда

$$\lg \sin \alpha = \lg a - \lg c.$$

По первой таблице:

$$\lg c = 1{,}5025,$$

и, значит,

$$+\begin{array}{r} -\lg c = \overline{2},4975 \\ \lg a = 1{,}3645 \\ \hline \lg \sin \alpha = \overline{1},8620 \end{array}.$$

Из второй таблицы (обратным действием) находим:

$$\alpha = 46°42'.$$

Следовательно,

$$\beta = 90° - 46°42' = 43°18'.$$

Далее находим b:

$$b = c \sin \beta,$$

откуда

$$\lg b = \lg c + \lg \sin \beta.$$

По второй таблице:

$$+\begin{array}{r} \lg \sin \beta = \overline{1},8362 \\ \lg c = 1{,}5025 \\ \hline \lg b = 1{,}3387 \end{array}.$$

Находим b:

$$b = 21{,}81.$$

В качестве контрольной используем формулу:

$$a = b \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\lg a = \lg b + \lg \operatorname{tg} \alpha.$$

По второй таблице находим:

$$+\begin{array}{r} \lg \operatorname{tg} \alpha = 0{,}0258 \\ \lg b = 1{,}3387 \\ \hline \lg a = 1{,}3645 \end{array},$$

что совпадает с табличным значением $\lg a$.

Случай IV. *Даны катеты a и b.*

Пример. $a = 7{,}561$; $b = 9{,}364$.

Имеем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b},$$

поэтому

$$\lg \operatorname{tg} \alpha = \lg a - \lg b.$$

Находим:

$$\lg b = 0{,}9715,$$

и, значит,

$$+\begin{array}{r} -\lg b = \overline{1},0285 \\ \lg a = 0{,}8786 \\ \hline \lg \operatorname{tg} \alpha = \overline{1},9071 \end{array}.$$

По второй таблице (обратным действием) находим:

$$\alpha = 38°55',$$

следовательно,

$$\beta = 90° - 38°55' = 51°5'.$$

Далее определяем c:

$$c = \frac{a}{\sin \alpha},$$

поэтому

$$\lg c = \lg a - \lg \sin \alpha.$$

По второй таблице

$$\lg \sin \alpha = \lg \sin 38°55' = \bar{1},7981,$$

следовательно,

$$+\begin{array}{r} -\lg \sin \alpha = 0,2019 \\ \lg a = 0,8786 \\ \hline \lg c = 1,0805 \end{array}.$$

Находим:

$$c = 12,03.$$

В качестве контрольной можно воспользоваться формулой:

$$b = c \sin \beta,$$

откуда

$$\lg b = \lg c + \lg \sin \beta.$$

$$+\begin{array}{r} \lg \sin \beta = \bar{1},8910 \\ \lg c = 1,0805 \\ \hline \lg b = 0,9715 \end{array},$$

что совпадает с табличным значением $\lg b$.

РЕШЕНИЕ КОСОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

§ 87. Общие замечания. Как уже было сказано, *решить треугольник — значит по его заданным трём основным элементам (из которых по крайней мере один линейный) найти три остальных. Для определения трёх неизвестных элементов нужно составить систему из трёх уравнений.* В качестве одного из этих уравнений принимают обычно равенство (103): $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. В качестве двух других можно использовать два из равенств (108), или два из равенств (104), выражающих теорему синусов, или два из равенств (107), выражающих теорему косинусов, и т. п. Важно, однако, для каждой комбинации задаваемых элементов выбрать ту систему уравнений, которая позволяет найти неизвестные элементы кратчайшим путём.

Задача решения косоугольного треугольника упрощается, если две заданные стороны или два заданных угла равны:

$a = b$ или $\alpha = \beta$ (случай равнобедренного треугольника). В этом случае высота, опущенная на основание, разбивает равнобедренный треугольник на два равных прямоугольных треугольника, и задача сводится к решению прямоугольного треугольника.

Рассмотрим отдельно четыре возможных случая решения косоугольного трегольника:

1) *по заданной стороне и двум углам;*

2) *по заданным двум сторонам и углу между ними;*

3) *по заданным двум сторонам и углу, лежащему против одной из них;*

4) *по трём заданным сторонам.*

Решение треугольника по заданным элементам иногда оказывается невозможным. Например, не существует треугольника со сторонами 20, 10, 5 (так как каждая сторона треугольника должна быть меньше суммы и больше разности двух других сторон) или со сторонами $a = 20$, $b = 10$ и углом $\beta = 100°$, лежащим против стороны b (так как против меньшей стороны b не может лежать тупой угол). Поэтому нельзя решить треугольник по трём его сторонам, если эти стороны равны 20, 10 и 5; точно так же нельзя решить треугольник, если даны $a = 20$, $b = 10$ и $\beta = 100°$. Мы укажем приёмы решения треугольников, а также и способы исследования решения, позволяющие установить возможность или невозможность решения треугольника.

При решении задач мы будем пользоваться как „натуральными", так и „логарифмическими" таблицами.

§ 88. Случай I. *Даны сторона и два угла, например, a, α и β. Найти b, c и γ.*

Решение. Находим:

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta.$$

По теореме синусов

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma},$$

откуда

$$b = \frac{a}{\sin\alpha} \cdot \sin\beta,$$

$$c = \frac{a}{\sin\alpha} \cdot \sin\gamma.$$

В натуральных таблицах находим значения $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$; зная их, вычисляем b и c.

Пример. Дано: $a=20$, $\alpha=69^\circ$, $\beta=82^\circ$. Найти γ, b, c.

Имеем: $\gamma=180^\circ-69^\circ-82^\circ=29^\circ$.

В таблицах находим:

$$\sin\alpha=0{,}934,\quad \sin\beta=0{,}990,\quad \sin\gamma=0{,}485.$$

Следовательно:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{20}{0{,}934}=21{,}4;$$

$$b=\frac{a}{\sin\alpha}\cdot\sin\beta=21{,}4\quad 0{,}990=21{,}2;$$

$$c=\frac{a}{\sin\alpha}\cdot\sin\gamma=21{,}4\quad 0{,}485=10{,}4.$$

Аналогично решают задачу при пользовании таблицей логарифмов.

Пример. $a=23{,}64$; $\beta=97^\circ15'$; $\gamma=15^\circ31'$.

Имеем:

$$\alpha=1\ 0^\circ-\beta-\gamma=180^\circ-97^\circ15'-15^\circ31'=67^\circ14'.$$

Находим b и c по теореме синусов:

$$b=\sin\beta\frac{a}{\sin\alpha},\qquad c=\sin\gamma\frac{a}{\sin\alpha},$$

откуда

$$\left.\begin{aligned}\lg b&=\lg\sin\beta+(\lg a-\lg\sin\alpha)\\ \lg c&=\lg\sin\gamma+(\lg a-\lg\sin\alpha).\end{aligned}\right.\qquad (*)$$

При этом

$$\sin\beta=\sin 97^\circ15'=\sin(90^\circ+7^\circ15')=\cos 7^\circ15'.$$

В таблице логарифмов синусов находим:

$$\lg\sin\alpha=\lg\sin 67^\circ14'=\bar{1}{,}9648,$$

следовательно:

$$\begin{array}{rr}
+ & -\lg\sin\alpha=0{,}0352\\
 & \lg a=1{,}3736\\ \hline
+ & \lg a-\lg\sin\alpha=1{,}4088\\
 & \lg\sin\beta=\bar{1}{,}9966\\ \hline
 & \lg b=1{,}4054.
\end{array}$$

Зная $\lg b$, находим b:

$$b=25{,}43.$$

Аналогично, по формуле (*), определяем c:

$$\begin{array}{r}
\lg\sin\gamma=\bar{1}{,}4274\\
\lg a-\lg\sin\alpha=1{,}4088\\ \hline
\lg c=0{,}8362
\end{array}$$

и

$$c=6{,}858.$$

В качестве контрольной используем формулу тангенсов:

$$\frac{a+c}{a-c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2}}; \quad (a+c)\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}=(a-c)\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2},$$

откуда

$$\lg(a+c)+\lg\operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2}=\lg(a-c)+\lg\operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2};$$

$$a+c=23{,}64+6{,}86=30{,}50; \quad a-c=23{,}64-6{,}86=16{,}78;$$

$$\frac{\alpha-\gamma}{2}=\frac{67^\circ14'-15^\circ31'}{2}\approx 25^\circ51'; \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=\operatorname{ctg}48^\circ38'.$$

Находим:

$$+\begin{array}{r}\lg(a+c)=1{,}4843\\ \lg\operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2}=\bar{1}{,}6853\\ \hline =1{,}1696\end{array} \qquad +\begin{array}{r}\lg(a-c)=1{,}2247\\ \lg\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=\bar{1}{,}9448\\ \hline =1{,}1695\end{array}$$

$$1{,}1696\approx 1{,}1695.$$

§ 89. Случай II. *Даны две стороны и угол между ними: a, b и γ. Найти c, α и β.*

Решение. Сторону c, а затем и углы α и β можно найти по теореме косинусов:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma.$$

Пример. Пусть $a=6$, $b=5$, $\gamma=60^\circ$.

$$c^2=6^2+5^2-2\cdot6\cdot5\cos 60^\circ=36+25-60\,\frac{1}{2}=31;$$

$$c=\sqrt{31}=5{,}57.$$

Угол α можно найти по формуле:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha.$$

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{25+31-36}{2\cdot5\cdot5{,}57}=\frac{20}{55{,}7}=0{,}36.$$

Пользуемся здесь трёхзначными таблицами для углов, взятых через 6′, и находим с точностью до 6′:

$$\alpha=68^\circ54';$$

$$\beta=180^\circ-60^\circ-68^\circ54'=51^\circ6'.$$

Если для решения треугольника пользоваться таблицами логарифмов, то углы α и β можно найти, применяя формулу тангенсов:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}},$$

которую, на основании того, что

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2},$$

заменяют формулой:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

С помощью этого равенства находим $\frac{\alpha-\beta}{2}$; теперь, зная $\frac{\alpha-\beta}{2}$, а также $\frac{\alpha+\beta}{2}$ $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)$, находим α и β. Длину стороны c вычисляют по теореме синусов:

$$c=\frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Пример: Дано: $a=10{,}24$; $b=7{,}56$; $\gamma=60°10'$.
Найти c, α и β.
Имеем:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{(a-b)\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{a+b}=\frac{(a-b)\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}{a+b};$$

$$\lg\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\lg(a-b)+\lg\left(\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right)-\lg(a+b)$$

и

$$a+b=17{,}8,\ a-b=2{,}68,\ \frac{\gamma}{2}=30°5'.$$

В первой таблице найдём:

$$\lg(a+b)=1{,}2504.$$

Следовательно,

$$\begin{array}{rr} & -\lg(a+b)=\bar{\bar{2}},7496\\ + & \lg(a-b)=0{,}4281\\ & \lg\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=0{,}2371\\ \hline & \lg\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\bar{1},4148.\end{array}$$

Из второй таблицы находим:

$$\frac{\alpha-\beta}{2}=14°34'.$$

С другой стороны:

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=90°-\frac{\gamma}{2}=90°-30°5'=59°55'.$$

Почленное сложение и вычитание равенств даёт:

$$\alpha = 74°29', \quad \beta = 45°21'.$$

Далее находим c:

$$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha},$$

откуда

$$\lg c = \lg a + \lg \sin \gamma - \lg \sin \alpha.$$

По второй таблице:

$$\lg \sin \alpha = \bar{1},9839,$$

и далее:

$$\begin{array}{r} -\lg \sin \alpha = 0,0161 \\ + \quad \lg \sin \gamma = \bar{1},9383 \\ \lg a = 1,0103 \\ \hline \lg c = 0,9647, \end{array}$$

отсюда

$$c = 9,220.$$

Для проверки воспользуемся формулой:

$$\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{b}{\sin \beta},$$

или

$$c \sin \beta = b \sin \gamma,$$

$$\lg c + \lg \sin \beta = \lg b + \lg \sin \gamma.$$

Вычисления пойдут так:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} \lg c = 0,9647 \\ \lg \sin \beta = \bar{1},8521 \end{array} \\ \hline = 0,8168 \end{array} \qquad \begin{array}{r} + \begin{array}{r} \lg b = 0,8785 \\ \lg \sin \gamma = \bar{1},9383 \end{array} \\ \hline = 0,8168 \end{array}$$

$$0,8168 = 0,8168.$$

В случаях I и II *задача всегда имеет решение и притом только одно.*

§ 90. Случай III. *Даны две стороны и угол против одной из них: a, b и α. Найти c, β и γ.*

Решение. Из теоремы синусов следует:

$$\sin \beta = \frac{b}{a} \sin \alpha. \qquad (116)$$

Определив β по его синусу, найдём:

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta.$$

Тогда c определится т кже по теореме синусов:

$$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}.$$

Произведём исследование задачи, оставив без рассмотрения случай равнобедренного треугольника $a=b$, о котором уже говорилось выше. Рассмотрим отдельно случаи $a>b$ и $a<b$.

1) $a>b$. (Данный угол лежит против большей из данных сторон.)

В этом случае в формуле (116) $\frac{b}{a}<1$ и поэтому $\sin\beta<\sin\alpha\leqslant 1$, т. е. $\sin\beta<1$. Следовательно, всегда можно найти β по его синусу, так как для синуса получается такое значение, которое он может иметь (<1). Так как β — угол треугольника, то найденному значению $\sin\beta$ могут соответствовать два угла β — один острый, другой тупой. Но поскольку β лежит против меньшей стороны b, угол β должен быть острым, и поэтому из двух значений угла β следует взять только одно, именно значение острого угла.

Итак, в случае $a>b$, т. е. когда данный угол лежит против большей из данных сторон, задача имеет решение и притом только одно.

Пример. Дано $a=20$, $b=15$, $\alpha=30^\circ$. Найти c, β, γ.

Имеем:

$$\sin\beta=\frac{b}{a}\sin\alpha=\frac{15}{20}\sin 30^\circ=\frac{15}{20}\cdot\frac{1}{2}=0{,}375,$$

откуда

$$\beta=22^\circ;$$

$$\gamma=180^\circ-\alpha-\beta=128^\circ.$$

Находим:

$$\sin\gamma=\sin 128^\circ=\cos 38^\circ=0{,}788;$$

$$c=\frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}=\frac{20\cdot 0{,}788}{0{,}5}=31{,}5.$$

2) $a<b$. (Данный угол лежит против меньшей из данных сторон.)

В этом случае, если угол α тупой или прямой, задача не имеет решения, так как ни тупой, ни прямой угол не может лежать против меньшей стороны.

Пусть угол α острый.

Рассмотрим три более частных случая:

а) $\frac{b}{a}\sin\alpha>1$ (или, что то же самое, $a<b\sin\alpha$), тогда $\sin\beta=\frac{b}{a}\sin\alpha>1$, что невозможно.

Задача не имеет решения.

б) $\dfrac{b}{a}\sin\alpha = 1$ (или, что то же самое, $a = b\sin\alpha$).

Решение единственное — прямоугольный треугольник.

в) $\dfrac{b}{a}\sin\alpha < 1$ (или, что то же самое, $a > b\sin\alpha$), тогда $\sin\beta < 1$.

В этом случае по значению $\sin\beta$ найдём два угла β — один острый, другой тупой.

Задача имеет два решения.

Примеры. 1) Дано: $a = 1$, $b = 3$, $\alpha = 30°$.

Находим:

$$\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha = \frac{3}{1}\sin 30° = \frac{3}{2}.$$

Задача не имеет решения.

2) Дано $a = 10$, $b = 20$, $\alpha = 30°$.

Найдём:

$$\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha = \frac{2}{1}\sin 30° = \frac{2}{1}\cdot\frac{1}{2} = 1; \quad \beta = 90°.$$

Следовательно, треугольник прямоугольный.

Далее:

$$\gamma = 90° - \alpha - 60°; \qquad c = b\sin\gamma = 20\sin 60° = 20\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 17{,}3.$$

3) Дано; $a = 5$, $b = 7{,}66$, $\alpha = 30°$.

Находим:

$$\sin\beta = \frac{b\cdot\sin\alpha}{a} = \frac{7{,}66\cdot 0{,}5}{5} = 0{,}766.$$

Полученному значению синуса соответствуют два угла β. Один находим по таблице: $\beta_1 = 50°$, другой $\beta_2 = 180° - 50° = 130°$.

Соответственно находим два значения γ:

$$\gamma_1 = 180° - 30° - 50° = 100°, \quad \gamma_2 = 180° - 30° - 130° = 20°.$$

Наконец, найдём два значения стороны c:

$$c_1 = \frac{a}{\sin\alpha}\sin\gamma_1 = \frac{5}{0{,}5}\sin 100° = 10\sin 80° = 10\cdot 0{,}985 = 9{,}85;$$

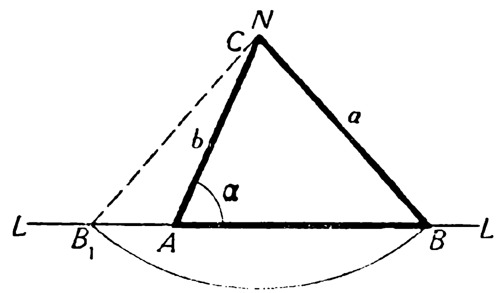
$$c_2 = \frac{5}{0{,}5}\sin 20° = 10\cdot 0{,}342 = 3{,}42.$$

Задача имеет два решения: $\beta_1 = 50°$, $\gamma_1 = 100°$, $c_1 = 9{,}85$ и $\beta_2 = 130°$, $\gamma_2 = 20°$, $c_2 = 3{,}42$.

Результаты исследования могут быть записаны в виде схемы:

$a > b$ (данный угол лежит против большей из данных сторон)	$a < b$ (данный угол α лежит против меньшей из данных сторон)			
одно решение	α — тупой или прямой угол	α — острый угол		
	нет решения	$a < b \sin \alpha$	$= b \sin \alpha$	$a > b \sin \alpha$
		нет решения	одно решение	два решения

Можно провести исследование и геометрически. Построение треугольника ABC по данным сторонам a, b и углу α производится так (черт. 58): на прямой LL_1 отмечают вершину A и откладывают угол L_1AN, равный α. Далее, на стороне AN этого угла отсекают отрезок AC, равный b. Приняв точку C за центр, проводят окружность радиуса a. Точка B, в которой эта окружность пересекает сторону AL_1 угла α, и будет третьей вершиной искомого треугольника.



Черт. 58.

В случае $a > b$ эта окружность радиуса a пересекает прямую LL_1 в двух точках (черт. 58): в точке B и в точке B_1. Треугольник ABC удовлетворяет условиям задачи. В треугольнике же AB_1C угол в вершине A равен не α, а $180° - \alpha$, следовательно, этот треугольник не удовлетворяет условиям задачи.

Итак, единственным решением является треугольник ABC [1]).

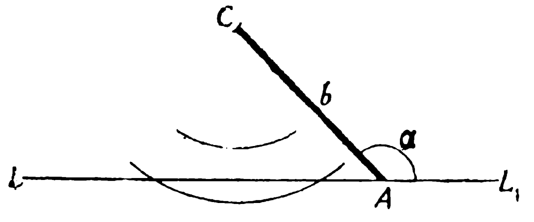
В случае $a < b$, если угол α тупой или прямой (черт. 59), окружность радиуса a или не пересекает вовсе прямой LL_1 или пересекает её в точках, лежащих на луче AL. Решения, следовательно, не существует.

Пусть теперь $a < b$ и угол α острый (черт. 60). Опустим из точки C перпендикуляр CD на LL_1. Имеем: $CD = b \sin \alpha$. Если $a < b \sin \alpha = CD$, окружность радиуса a с центром в C не пересекает LL_1. Решения в этом случае не существует.

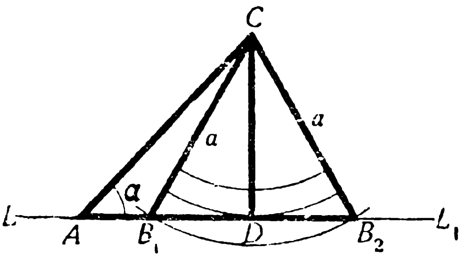
---

[1]) Лишь при $\alpha = 90°$, $180° - \alpha = \alpha$. Но в этом случае оба прямоугольных треугольника ABC и AB_1C равны.

Если $a = b \sin \alpha = CD$ (черт. 60), окружность радиуса a с центром в C касается AL_1 в точке D. Прямоугольный треугольник ADC ($\beta = 90°$) и будет единственным решением задачи.



Черт. 59.



Черт. 60

Если же $a > b \sin \alpha = CD$ (черт. 60), то окружность радиуса a пересечёт AL_1 в двух точках: B_1 и B_2. Получаем два треугольника: AB_1C и AB_2C; каждый из них даёт решение задачи.

Покажем на примере, как решается задача с помощью таблицы логарифмов.

Пример. Дано $a = 20{,}21$; $b = 15{,}76$; $\alpha = 100°3'$ (случай $a > b$). Имеем:

$$\sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a},$$

$$\lg \sin \beta = \lg \sin \alpha + \lg b - \lg a.$$

В нашем примере:

$$\sin \alpha = \sin 100°3' = \cos 10°3' \text{ и } \lg a = 1{,}3056.$$

Следовательно,

$$\begin{array}{rr} & -\lg a = \bar{2}{,}6944 \\ + & \lg b = 1{,}1976 \\ & \lg \sin \alpha = \bar{1}{,}9933 \\ \hline & \lg \sin \beta = \bar{1}{,}8853. \end{array}$$

По второй таблице найдём:

$$\beta = 50°9'.$$

Значение же $\beta = 180° - 50°9'$ должно быть отброшено, так как угол β, лежащий против меньшей стороны b, не может быть тупым. Далее:

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 100°3' - 50°9' = 29°48'.$$

Теперь найдём c:

$$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}.$$

$$\lg c = \lg a + \lg \sin \gamma - \lg \sin \alpha.$$

Так как (см. выше) $\lg \sin \alpha = \bar{1}{,}9933$, то

$$\begin{array}{rr} & -\lg \sin \alpha = 0{,}0067 \\ + & \lg a = 1{,}3056 \\ & \lg \sin \gamma = \bar{1}{,}6963 \\ \hline & \lg c = 1{,}0086, \end{array}$$

$$c = 10{,}20.$$

В качестве контрольной используем формулу тангенсов:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}},$$

$$(a-b)\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=(a+b)\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

и

$$\lg(a-b)+\lg\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\lg(a+b)+\lg\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Имеем:

$$a+b=35{,}97;\quad a-b=4{,}45;\quad \frac{\alpha-\beta}{2}=24°57';$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}14°54'.$$

Находим:

$$\begin{array}{rr} \lg(a-b)=0{,}6484 & \lg(a+b)=1{,}5560 \\ \lg\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=0{,}5750 & \lg\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\bar{1}{,}6677 \\ \hline =1{,}2234, & =1{,}2237, \end{array}$$

$$1{,}2234\approx 1{,}2237.$$

§ 91. Случай IV. *Даны три стороны: a, b, c. Найти: α, β, γ.*

Решение. Углы α и β можно определить из формул (см. § 81):

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{p-a}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}=\frac{r}{p-a};\quad (113_1)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{1}{p-b}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}=\frac{r}{p-b}.\quad (113_2)$$

Если каждая из сторон a, b, c меньше суммы двух других, то под корнем в формулах (113) стоят положительные числа (см. § 81). Углы $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$ острые, перед корнем надо поэтому брать знак $+$. Значение острых углов $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$ единственным образом определяются по их тангенсам.

Задача имеет решение и притом только одно.

Если одно из чисел a, b, c, например, a, больше суммы двух других: $a>b+c$, то число $p-a$ — отрицательное, а $p-b$ и $p-c$ — числа положительные. Под знаком корня в формулах (113) стоят числа отрицательные, и *задача решений не имеет* (что ясно и из геометрических соображений).

Если вычисления вести по таблицам натуральных значений тригонометрических функций, то удобнее пользоваться теоремой косинусов:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \qquad \cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}.$$

Пример. Дано $a=4$, $b=5$, $c=6$; найти α, β, γ.

Находим:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{5^2+6^2-4^2}{2\cdot5\cdot6} = \frac{45}{60} = 0{,}75;$$

$$\cos\beta = \frac{4^2+6^2-5^2}{2\cdot4\cdot6} = \frac{27}{48} \approx 0{,}563.$$

В таблицах находим: $\alpha = 41^\circ 40'$; $\beta = 55^\circ 40'$.

Наконец,

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 41^\circ 40' - 55^\circ 40' = 82^\circ 40'.$$

Покажем, как решается задача с помощью таблицы логарифмов.

Пример. $a = 20{,}71$, $b = 17{,}52$, $c = 19{,}63$.

Из формул (113_1) и (113_2) этого параграфа следует:

$$\lg\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \lg r - \lg(p-a), \qquad \lg\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \lg r - \lg(p-b),$$

где

$$\lg r = \frac{1}{2}[\lg(p-a) + \lg(p-b) + \lg(p-c) - \lg p].$$

Находим:

$$\begin{array}{ll}
a = 20{,}71 & p-a = 28{,}93 - 20{,}71 = 8{,}22 \\
b = 17{,}52 & p-b = 28{,}93 - 17{,}52 = 11{,}41 \\
\underline{c = 19{,}63} & p-c = 28{,}93 - 19{,}63 = 9{,}3 \\
2p = 57{,}86, & \\
p = 28{,}93. &
\end{array}$$

Далее:

$$\begin{array}{ll}
\lg(p-a) = 0{,}9149 & -\lg(p-a) = \bar{1}{,}0851 \\
\lg(p-b) = 1{,}0573 & -\lg(p-b) = \bar{2}{,}9427 \\
\lg(p-c) = 0{,}9685 & -\lg(p-c) = \bar{1}{,}0315 \\
\lg p = 1{,}4614 & -\lg p = \bar{2}{,}5386
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\lg(p-a) = 0{,}9149 & \\
+\lg(p-b) = 1{,}0573 & \\
\lg(p-c) = 0{,}9685 & \\
-\lg p = \bar{2}{,}5386 & \\
\hline
2\lg r = 1{,}4793 & \\
\lg r = 0{,}7396 & \lg r = 0{,}7396 \\
-\lg(p-a) = \bar{1}{,}0851 & -\lg(p-b) = \bar{2}{,}9427 \\
\hline
\lg\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \bar{1}{,}8247. & \lg\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \bar{1}{,}6823
\end{array}$$

Отсюда по второй таблице:

$$\frac{\alpha}{2}=33^\circ44', \qquad \frac{\beta}{2}=25^\circ42',$$

$$\alpha=67^\circ28'. \qquad \beta=51^\circ24'.$$

Далее:

$$\gamma=180^\circ-\alpha-\beta=180^\circ-67^\circ28'-51^\circ24'=61^\circ8'.$$

Для проверки можно воспользоваться формулой (113):

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{(p-c)}r; \qquad \lg r=0{,}7396$$

$$\lg\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\lg r-\lg(p-c); \qquad \underline{-\lg(p-c)=1{,}0315}$$

$$\frac{\gamma}{2}=\frac{61^\circ8'}{2}=30^\circ34'; \qquad \lg\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\bar{1}{,}7711.$$

$$\lg\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\bar{1}{,}7713$$

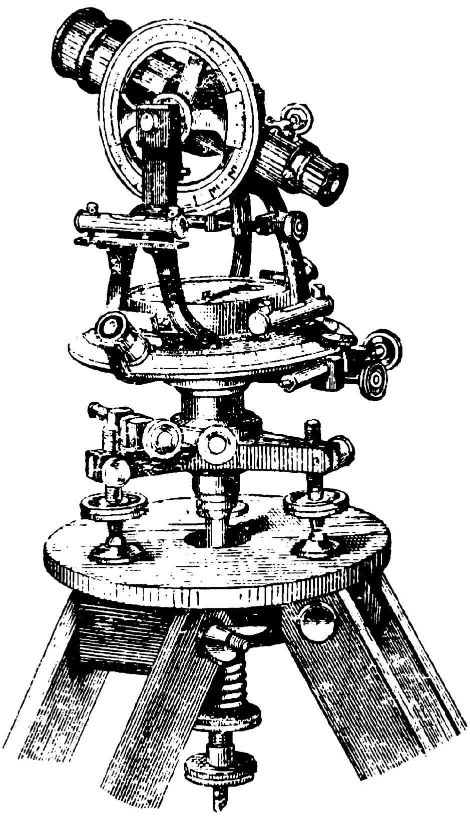
$$\bar{1}{,}7713\approx\bar{1}{,}7711.$$

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ

§ 92. Измерения линий и углов на местности. Решение треугольников позволяет во многих случаях упростить измерение на местности. При этих измерениях определяются расстояния между точками и углы между линиями на земной поверхности.

Непосредственное измерение расстояний на местности производится с помощью измерительных приборов (например, измерительных лент); при этом весьма трудно добиться большой точности. Непосредственное измерение больших расстояний вообще невозможно. Кроме того, одна или обе точки, расстояние между которыми измеряется, могут быть недоступны (например, она может быть отделена рекой, болотом или находиться в расположении неприятеля и т. п.). Решение треугольников позволяет найти расстояние между двумя точками, не производя непосредственного измерения этого расстояния, а измеряя лишь углы и расстояния между доступными точками, не слишком отдалёнными друг от друга. Измерение углов на местности выполняется проще, чем измерение расстояний. Оно производится с помощью так называемых угломерных приборов (например, теодолитов; снимок см. на сл. стр.).

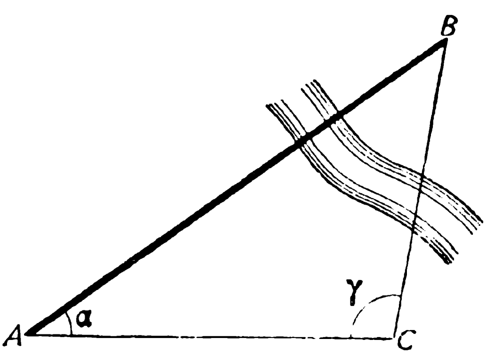
Зрительная труба теодолита способна вращаться как в горизонтальной, так и в вертикальной плоскости. Если труба, находясь в точке A в горизонтальном положении, направлена на точку B, а затем, после поворота в горизонтальном положении, стала направленной на точку C, то угол BAC совпадает с углом поворота трубы в горизонтальной плоскости. Аналогично, если труба была сначала в горизонтальном положении, а затем, повернувшись в вертикальном положении, направилась на точку D, то угол поворота совпадает с углом между прямой OD и горизонтальной плоскостью. Углы поворота трубы измеряются с большой точностью с помощью делительной шкалы и микрометрических винтов.



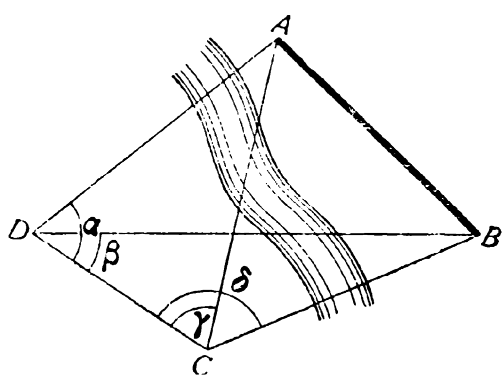
Приведём сейчас несколько примеров определения расстояний с помощью решения треугольников.

Задача 1. *Определение расстояния от доступной точки до недоступной.*

Пусть точка A доступна, B — недоступна (черт. 61). Для определения расстояния AB выбирают доступную точку C, из которой видны A и B. Измеряют расстояние CA и углы



Черт. 61.



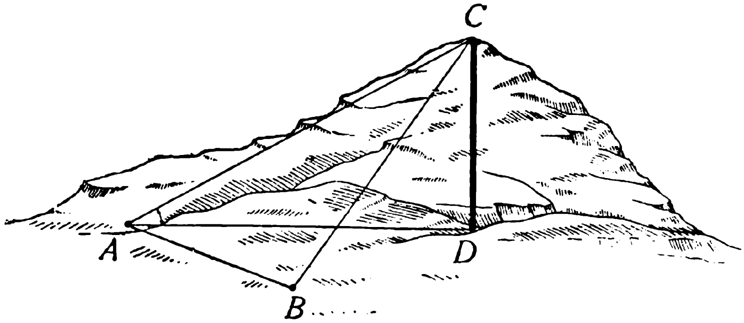
Черт. 62.

$CAB = \alpha$ и $ACB = \gamma$. Решая треугольник ABC по стороне AC и двум углам, находим сторону AB.

Задача 2. *Определение расстояния между недоступными точками.*

Пусть A и B — две недоступные точки (например, две вершины горного хребта (черт. 62). Выбираем две доступные точки C и D, из которых видны A и B. Измерим расстояние CD и углы $ADC = \alpha$, $BDC = \beta$, $ACD = \gamma$, $BCD = \delta$.

Решая треугольник ACD по стороне CD и углам $ADC = \alpha$ и $ACD = \gamma$ и треугольник BCD по стороне CD и углам $BDC = \beta$ и $BCD = \delta$, найдём стороны AC и BC. Решая треугольник



Черт. 63.

ABC по двум сторонам AC и BC и углу между ними ($\angle ACB = \angle BCD - \angle ACD = \delta - \gamma$), найдём искомое расстояние.

Задача 3. *Определение высоты предмета.*

Пусть C — вершина горы (черт. 63), которую будем считать недоступной, A и B — две доступные точки, из которых видна вершина C.

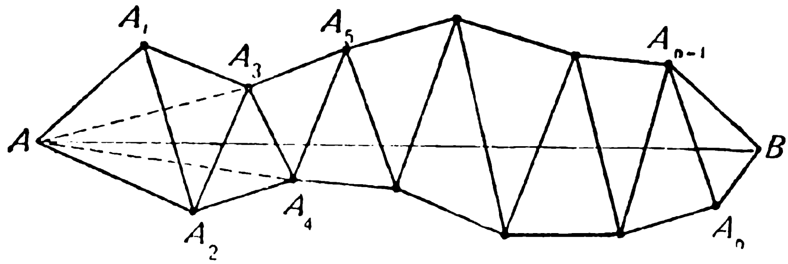
Определим (как в предыдущей задаче) расстояние AC из треугольника ABC. Далее определим угол $\alpha = CAD$ между направлением из точки A на C и горизонтальным направлением AD (AD — проекция AC). Отрезок DC, равный разности высот над уровнем моря точек C и D или A, находится из прямоугольного треугольника ADC по гипотенузе AC и углу α:

$$CD = AC \sin \alpha.$$

Задача 4. *Определение расстояния между двумя далёкими точками A и B.*

Покрывают прямую AB сетью треугольников $AA_1A_2, A_1A_2A_3$, $A_3A_4A_5 \ldots A_{n-1}A_nB$ (черт. 64). Вершины треугольников выбираются так, что из каждой вершины треугольника видны предметы, расположенные в двух других. Измеряют тщательно одну из сторон, например, AA_1. Затем, измерив углы AA_1A_2

и AA_2A_1, находят, как в задаче 2, стороны AA_2 и A_1A_2. Далее, точно таким же образом, зная сторону A_1A_2 треугольника $A_1A_2A_3$ и измерив его углы, определяем другие его стороны. Так последовательно определяются, измеряя в дальнейшем лишь углы, стороны всех наших треугольников. Далее рассматривают вспомогательные треугольники AA_2A_3, AA_3A_4,



Черт. 64.

$AA_4A_5 \ldots AA_nB$. В треугольнике AA_2A_3 по данным сторонам AA_2, A_2A_3 и $\angle AA_2A_3 = \angle AA_2A_1 + \angle A_1A_2A_3$ находят сторону AA_3 и $\angle AA_3A_2$; аналогично, в треугольнике AA_3A_4 по сторонам AA_3, A_3A_4 и $\angle AA_3A_4 = \angle AA_3A_2 + \angle A_2A_3A_4$ находят сторону AA_4 и $\angle AA_4A_3$ и т. д. Последовательно, решая так один за другим все вспомогательные треугольники, находим в конце концов сторону AB последнего из этих треугольников.

Глава седьмая

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 93. Определения. Во многих задачах встречается необходимость находить не только значения тригонометрических функций по данному углу или дуге, но и обратно, угол или дугу по заданному значению какой-нибудь тригонометрической функции. В этой главе специально займёмся этой обратной задачей.

Пусть синус некоторого угла (или дуги) α равен a:

$$\sin\alpha = a.$$

Это означает, разумеется, также и то, что угол (или дуга), синус которого есть a, равен α радианов. Вместо такого словесного утверждения употребляют запись:

$$\alpha = \operatorname{Arc}\sin a$$

(произносят: α равно арксинус a). Приставка Arc (сокращение от Arcus — дуга) неотделима от обозначения sin и вместе с ним образует символ, указывающий величину угла (дуги), синус которого равен числу a, стоящему за знаком Arc sin.

Подобным образом вводятся:

$$\operatorname{Arc}\cos a \text{ (арккосинус } a\text{)},$$
$$\operatorname{Arc}\operatorname{tg} a \text{ (арктангенс } a\text{)},$$
$$\operatorname{Arc}\operatorname{ctg} a \text{ (арккотангенс } a\text{)}.$$

Запись $\operatorname{Arc}\cos a$ указывает величину угла (или дуги), косинус которого равен a; запись $\operatorname{Arc}\operatorname{tg} a$ — величину угла (или дуги), тангенс которого равен a; запись $\operatorname{Arc}\operatorname{ctg} a$ — величину угла (или дуги), котангенс которого равен a. Относительно этих обозначений следует сделать те же замечания, которые были сделаны относительно обозначений $\operatorname{Arc}\sin a$.

С изменением a меняются также и $\operatorname{Arc}\sin a$, $\operatorname{Arc}\cos a$, $\operatorname{Arc}\operatorname{tg} a$, $\operatorname{Arc}\operatorname{ctg} a$, которые мы можем рассматривать как функции аргумента a.

Эти функции, а также аналогично определяемые $\operatorname{Arc}\sec a$ и $\operatorname{Arc}\operatorname{cosec} a$ называются *обратными тригонометрическими функциями*. В отличие от них $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ (и $\sec\alpha$ и $\operatorname{cosec}\alpha$) иногда называют *прямыми тригонометрическими функциями*.

Определение. *Обратной тригонометрической функцией аргумента a называется величина, измеряющая угол* (дугу), *для которого соответствующая прямая тригонометрическая функция равна a.*

Выражения $\operatorname{Arc}\sin a$ и $\operatorname{Arc}\cos a$ имеют смысл, только если $|a|\leqslant 1$, ибо значения синуса и косинуса любого угла по абсолютной величине не могут быть больше единицы. Что касается выражений $\operatorname{Arc}\operatorname{tg} a$ и $\operatorname{Arc}\operatorname{ctg} a$, то они имеют смысл при любом a.

§ 94. Многозначность обратных тригонометрических функций. Мы подчёркивали уже следующее свойство тригонометрических функций: каждому значению угла (или дуги) соответствует *единственное* значение тригонометрической функции. Это свойство называется *однозначностью*. Итак, прямые тригонометрические функции *однозначны*. В противоположность этому обратные тригонометрические функции неоднозначны, а, как говорят, *многозначны*. Именно, каждая обратная тригонометрическая функция имеет не одно, а много, даже неограниченно много (условно говорят „бесконечно много“) значений; притом это имеет место для любого значения аргумента. В самом деле, если данное значение какой-нибудь прямой тригонометрической функции соответствует некоторому углу, то, как мы знаем, взятая тригонометрическая функция принимает это же значение и для всех углов, отличающихся от указанного на полный оборот (на 2π), а также и для многих других углов.

Рассмотрим каждую обратную тригонометрическую функцию в отдельности.

Арксинус. Пусть известно, что

$$\operatorname{Arc}\sin a = \alpha.$$

Это значит, по определению, что $\sin\alpha = a$. Но тогда в силу периодичности и $\sin(\alpha + k\cdot 2\pi) = a$, где k — произвольное целое число. Отсюда сразу следует:

$$\operatorname{Arc}\sin a = \alpha + k\cdot 2\pi = \alpha + 2k\pi. \qquad (117_1)$$

Кроме того, в согласии с правилами приведения (§ 40):

$$\sin \alpha = \sin (\pi - \alpha) = a.$$

Поэтому

$$\operatorname{Arc} \sin a = \pi - \alpha,$$

и в силу периодичности

$$\operatorname{Arc} \sin a = \pi - \alpha + k \cdot 2\pi = -\alpha + (2k+1)\pi. \qquad (117_2)$$

Мы видим, что если известен один угол α, синус которого равен данному числу a, то всякий угол одного из двух видов: $\alpha + 2k \cdot \pi$ и $-\alpha + (2k+1)\pi$ имеет синус, равный тому же числу a. Два выражения: $\alpha + 2k\pi$ и $-\alpha + (2k+1)\pi$ можно заменить одним, если заметить, что в первом из них множителем при π служит произвольное чётное число, а во втором — произвольное нечётное число. Очевидно, выражение $(-1)^n \alpha + n\pi$, где n — любое целое число, соединяет в себе обà предыдущих выражения (117). Именно, при n чётном оно обращается в первое из них, а при n нечётном — во второе.

Таким образом:

$$\operatorname{Arc} \sin a = (-1)^n \alpha + n\pi, \qquad (118)$$

где α — *какой-нибудь* угол, синус которого равен a, а n — целое число (положительное, отрицательное или нуль). Правая часть формулы даёт нам *общий вид углов* (дуг), *имеющих данный синус.*

Пример: Так как $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$,

то

$$\operatorname{Arc} \sin \frac{1}{2} = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi \; (= (1)^n \, 30^\circ + n \cdot 180^\circ).$$

Придавая n значения: $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$, будем получать по этой формуле различные значения $\operatorname{Arc} \sin \frac{1}{2}$. В частности при $n = 1$ и $n = 2$ находим:

$$\operatorname{Arc} \sin \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \pi \, (150^\circ), \quad \operatorname{Arc} \sin \frac{1}{2} = \frac{13}{6} \pi \, (390^\circ).$$

Арккосинус. Если известно, что

$$\operatorname{Arc} \cos a = \alpha,$$

т. е., что $\cos \alpha = a$, то и $\cos (\alpha + k \cdot 2\pi) = a$ и, значит,

$$\operatorname{Arc} \cos a = \alpha + 2k\pi.$$

Но известно, что

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha = a,$$

и поэтому

$$\operatorname{Arc}\cos a = -\alpha + 2k\pi.$$

Итак, если α — какой-либо угол, косинус которого равен данному числу a, то всякий угол одного из двух видов: $\alpha + 2k\pi$ и $-\alpha + 2k\pi$, где k — произвольное целое число, имеет косинус, равный тому же числу a. Так как множителем при π и в первом, и во втором выражениях служит произвольное чётное число, то эти два выражения можно заменить одним общим выражением: $\pm\alpha + 2k\pi$.

Таким образом,

$$\operatorname{Arc}\cos a = \pm\alpha + 2n\pi, \tag{119}$$

где α — *какой-нибудь* угол, косинус которого равен a, а n — целое число (положительное, отрицательное или нуль). Правая часть формулы даёт нам *общий вид углов* (дуг), *имеющих данный косинус*.

Пример. Так как $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$,

то вообще,

$$\operatorname{Arc}\cos\frac{1}{2} = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi\ (\pm 60^\circ + 2n\cdot 180^\circ).$$

Придавая n различные целые значения, будем получать по этой формуле различные значения $\operatorname{Arc}\cos\frac{1}{2}$. В частности, при $n = 1$, $n = 2$ находим:

$$\operatorname{Arc}\cos\frac{1}{2} = \frac{7}{3}\pi\ (=420^\circ);\quad \operatorname{Arc}\cos\frac{1}{2} = \frac{5}{3}\pi\ (300^\circ);$$

$$\operatorname{Arc}\cos\frac{1}{2} = \frac{13}{3}\pi\ (=780^\circ);\quad \operatorname{Arc}\cos\frac{1}{2} = \frac{11}{3}\pi\ (660^\circ).$$

Арктангенс. Пусть известно, что

$$\operatorname{Arc}\operatorname{tg} a = \alpha.$$

Значит, $\operatorname{tg}\alpha = a$ и в силу периодичности $\operatorname{tg}(\alpha + n\pi) = a$. Поэтому наряду со значением, равным α, $\operatorname{Arc}\operatorname{tg} a$ равен также любому углу (дуге) вида: $\alpha + n\pi$. Таким образом,

$$\operatorname{Arc}\operatorname{tg} a = \alpha + n\pi, \tag{120}$$

где α — *какой-нибудь* угол, тангенс которого равен a, а n — целое число (положительное, отрицательное или нуль). Правая часть формулы даёт нам *общий вид углов* (дуг), *имеющих данный тангенс*.

Пример. Так как $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$,

то вообще

$$\operatorname{Arc\,tg} 1=\frac{\pi}{4}+n\pi\,(45^\circ+n\,180^\circ).$$

При $n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ получаем по этой формуле различные значения Arc tg 1. В частности, при $n=1$, $n=-1$, находим:

$$\operatorname{Arc\,tg} 1=\frac{5}{4}\pi\,(225^\circ);\quad \operatorname{Arctg} 1=-\frac{3}{4}\pi\,(-135^\circ).$$

Арккотангенс. Пусть известно, что

$$\operatorname{Arc\,ctg} a=\alpha.$$

Таким же образом, как и в случае арктангенса, убеждаемся, что

$$\operatorname{Arc\,ctg} a=\alpha+n\pi, \tag{121}$$

где α — *какой-нибудь* угол, котангенс которого равен a, а n — целое число (положительное, отрицательное или нуль). Правая часть формулы даёт нам *общий вид углов* (дуг), *имеющих данный котангенс*.

Пример. Так как $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$,

то вообще

$$\operatorname{Arc\,ctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{6}+n\pi\,(30^\circ+n\cdot 180^\circ),$$

где n — целое число. В частности, при $n=1$, $n=-1$ находим:

$$\operatorname{Arc\,ctg}\sqrt{3}=\frac{7}{6}\pi\,(210^\circ);\quad \operatorname{Arc\,ctg}\sqrt{3}=-\frac{5}{6}\pi\,(=150^\circ).$$

§ 95. Нахождение значений обратных тригонометрических функций. Для того чтобы знать значения обратной тригонометрической функции при данном значении аргумента, достаточно знать *только одно* её значение (§ 94). Другие её значения получаются тогда по формулам (118) — (121).

В § 112 будет доказано, что эти формулы действительно являются *общими*, т. е. что *всякое* значение обратной тригонометрической функции может быть найдено по одной из этих формул при подходящем значении целого числа n. Другими словами, покажем, что обратная тригонометрическая функция при данном значении аргумента не может иметь никаких других значений, кроме получаемых из формул (118)—(121).

Фактически найти одно какое-нибудь (точное или приближённое) значение данной обратной тригонометрической функции можно с помощью таблиц тригонометрических функций.

Допустим сперва, что аргумент a — число положительное (для $\operatorname{Arc\,sin} a$ и $\operatorname{Arc\,cos} a$, удовлетворяющее неравенству $a \leqslant 1$). Тогда существует один острый положительный угол, данная тригонометрическая функция которого равна этому положительному числу. В самом деле, при изменении α от 0 до $\frac{\pi}{2}$ функции $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ принимают *любое значение между 0 и 1*, а $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ — *любое положительное значение*. Значит, по таблицам значений тригонометрических функций или их логарифмов можно найти острый положительный угол, соответствующий данному положительному значению прямой тригонометрической функции.

Пусть теперь аргумент обратной тригонометрической функции есть число отрицательное (для $\operatorname{Arc\,sin} a$ и $\operatorname{Arc\,cos} a$, кроме того, удовлетворяющее неравенству $|a| \leqslant 1$).

Укажем в этом случае правило для отыскания значений арксинуса и арктангенса и правило для отыскания значений арккосинуса и арккотангенса.

Пусть дана одна из двух обратных тригонометрических функций: арксинус или арктангенс отрицательного аргумента; если переменить знак аргумента и найти при этом одно какое-нибудь значение рассматриваемой обратной тригонометрической функции, то это же значение, взятое с обратным знаком, и будет одним из искомых значений обратной тригонометрической функции заданного отрицательного аргумента.

Покажем это на примере арксинуса. Пусть требуется определить значение $\operatorname{Arc\,sin}(-a)$ где $0 < a < 1$. Возьмём $\operatorname{Arc\,sin} a$ и обозначим через α какое-нибудь его значение. Тогда

$$\sin\alpha = a$$

и в силу нечётности синуса

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha = -a,$$

отсюда и следует, что одним из значений $\operatorname{Arc\,sin}(-a)$ является $-\alpha$.

Аналогично рассуждаем в случае арктангенса.

Пример. Найдём $\operatorname{Arc\,tg}(-\sqrt{3})$.

Так как одно из значений $\operatorname{Arc\,tg}\sqrt{3}$ равно $\frac{\pi}{3}$ (60°), то одно из значений

$$\operatorname{Arc\,tg}(-\sqrt{3}) \text{ равно } -\frac{\pi}{3}, \text{ и вообще:}$$

$$\operatorname{Arc\,tg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} + n\pi \; (-60^\circ + n\cdot 180^\circ).$$

Рассмотрим теперь, как найти значения $\operatorname{Arc\,cos}(-a)$, если $0 < a < 1$. Обозначим через α какое-нибудь значение $\operatorname{Arc\,cos}(-a)$, и пусть $\beta = \pi - \alpha$. При этом $\cos\alpha = -a$, а в согласии с правилами приведения:

$$\cos\beta = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha = -(-a) = a.$$

Отсюда следует, что β служит одним из значений $\operatorname{Arc\,cos} a$, и мы приходим к известному случаю положительного аргумента. Зная одно из значений $\operatorname{Arc\,cos} a = \beta$, найдём одно из искомых значений α из равенства:

$$\alpha = \pi - \beta.$$

Пример. Найдём $\operatorname{Arc\,cos}\left(-\frac{1}{2}\right)$. Так как одним из значений $\operatorname{Arc\,cos}\frac{1}{2}$ служит $\frac{\pi}{3}$, то одним из значений $\operatorname{Arc\,cos}\left(-\frac{1}{2}\right)$ служит

$$\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi \; (120^\circ)$$

и, следовательно,

$$\operatorname{Arc\,cos}\left(-\frac{1}{2}\right) = \pm\frac{2}{3}\pi + 2n\pi \; (\pm 120^\circ + 2n\cdot 180^\circ).$$

Аналогично рассуждаем в случае арккотангенса.

Зная общее выражение данной обратной тригонометрической функции, мы по этому выражению подбираем значение, отвечающее условиям рассматриваемой задачи. Например, если угол треугольника такой, что его тангенс равен $-\sqrt{3}$, то в общем выражении, которое было найдено для таких углов:

$$-60^\circ + n\cdot 180^\circ,$$

нужно, очевидно, положить $n = 1$. Искомый угол оказывается равным 120°. (Все углы при других значениях n или отрицательные, или большие 180° и, следовательно, не могут быть углами треугольника.)

ИЗУЧЕНИЕ ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 96. Общее понятие обратной функции. Прежде чем обратиться к изучению обратных тригонометрических функций и к их графикам, обратимся к общему понятию обратной функции.

Пусть нам дана функциональная зависимость между двумя переменными величинами x и y. Обычно выбор одной из них в качестве независимой переменной (аргумента) может быть сделан вполне произвольно, по нашему усмотрению. Если, скажем, x выбрана аргументом (независимой переменной), то функцией будет y; обратно: если в силу каких-нибудь соображений целесообразнее считать аргументом y (т. е. выбирать значения y по нашему усмотрению), то функцией (зависимой переменной) будет x.

Однако y как функция x выражается, вообще говоря, иначе, чем x как функция y. Эти две функции называются *взаимно обратными*. Разъясним понятие взаимной обратности двух функций на примере.

Пусть x и y находятся между собой в такой зависимости, что значение y получается из соответствующего значения x возведением последнего в квадрат. Такую зависимость можно выразить равенством:

$$y = x^2.$$

Здесь y — функция, явно представленная через аргумент x.

Но ту же самую зависимость можно выразить, очевидно, и таким равенством:

$$x = \pm\sqrt{y}.$$

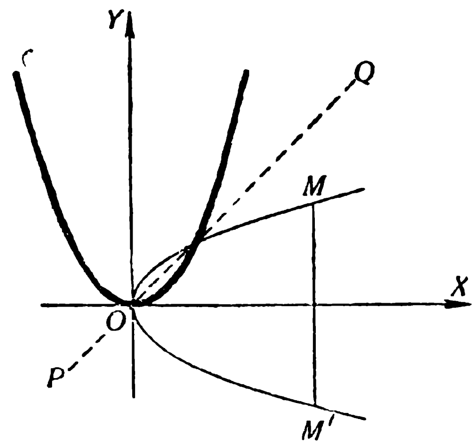
Это только другая запись предыдущего равенства. Считая здесь y независимой переменной, замечаем, что x как функция выражается через свой аргумент (y) иначе, чем y как функция своего аргумента (x). Первая функция ($y = x^2$) определяется тем, что для получения её значения нужно значение независимой переменной *возвести в квадрат*; вторая же функция ($x = \pm\sqrt{y}$) определяется тем, что для получения её значений нужно из значения независимой переменной *извлечь квадратный корень*. Две функции, из которых одна есть квадрат аргумента, а вторая — корень квадратный из аргумента, являются взаимно обратными.

Обозначим независимую переменную во втором из равенств, как обычно принято, через x, а функцию — через y (т. е. переменим в равенстве $x = \pm\sqrt{y}$ местами x и y).

Тогда мы будем иметь два таких выражения для наших взаимно обратных функций:

$$y = x^2 \text{ и } y = \pm\sqrt{x}.$$

График одной из взаимно обратных функций легко получить по графику другой. Покажем это на взятом уже примере. Графиком функции $y = x^2$ служит, как мы знаем, парабола (черт. 65, жирная линия). Она же является графиком функции $x = \pm\sqrt{y}$ (ибо последнее равенство только своим видом отличается от равенства $y = x^2$). Но если заменить y на x, а x на y, то мы получим функцию $y = \pm\sqrt{x}$, график которой в той же системе осей должен быть, очевидно, так расположен относительно оси OX, как график функции $x = \pm\sqrt{y}$ относительно оси OY. Таким образом, сразу находим график функции $y = \pm\sqrt{x}$ (черт. 65, тонкая линия). Легко видеть, что он может быть вычерчен по графику функции $y = x^2$ при помощи простого перегибания чертежа по биссектрисе первого и третьего углов между осями OX и OY.



Черт. 65.

Такой автоматический способ вычерчивания графика обратной функции является вполне общим. *В одной и той же системе осей графики двух любых взаимно обратных функций* (с одинаково обозначенными аргументами) *совмещаются между собой, если чертёж перегнуть по биссектрисе первого и третьего углов между осями.*

Рассмотрим ещё вопрос о том, как отражается на графике функции свойство её однозначности. Если каждому значению x соответствует *одно* значение y, то прямая, перпендикулярная к оси OX, может пересекать график функции не больше чем в одной точке.

В случае многозначности функции прямая, перпендикулярная к оси OX, может пересекать график больше, чем в одной точке. Так, например, функция $y=x^2$ — однозначная и каждая прямая, перпендикулярная к оси OX, пересекает параболу-график функции только в одной точке (черт. 65). Функция же $y=\pm\sqrt{x}$ (обратная первой) — двузначная (каждому положительному значению x соответствуют два значения y — одно положительное, другое отрицательное), и прямая, перпендикулярная к оси OX, не пересекает график функции $y=\pm\sqrt{x}$, если она расположена левее оси OY, или пересекает его в двух точках (черт. 65), если она расположена правее оси OY: одна из этих точек находится над осью OX, другая — под осью OX.

Из этого примера видно, что функция, обратная данной однозначной функции, может быть и многозначной.

§ 97. Функция $y=\operatorname{Arc}\sin x$. Пусть дана тригонометрическая функция

$$y=\sin x.$$

Так как по определению y есть значение синуса угла (дуги) в x радианов, то (см. § 93)

$$x=\operatorname{Arc}\sin y.$$

Рассматривая x как функцию y, мы приходим к функции, обратной функции $y=\sin x$, т. е. именно к обратной тригонометрической функции *арксинус*. Меняя местами x и y, получаем запись функции арксинус в обычном виде, когда аргумент и функция обозначены так же, как и в прямой функции:

$$y=\operatorname{Arc}\sin x.$$

Функцией $\operatorname{Arc}\sin x$ *называется функция, обратная функции* $\sin x$.

В равенстве $y=\operatorname{Arc}\sin x$ переменные x и y могут выражать разнообразные величины. Так, y (значение функции) может выражать и длину, и время, и температуру и т. д. То же самое относится и к другим обратным тригонометрическим функциям, которые мы изучаем ниже.

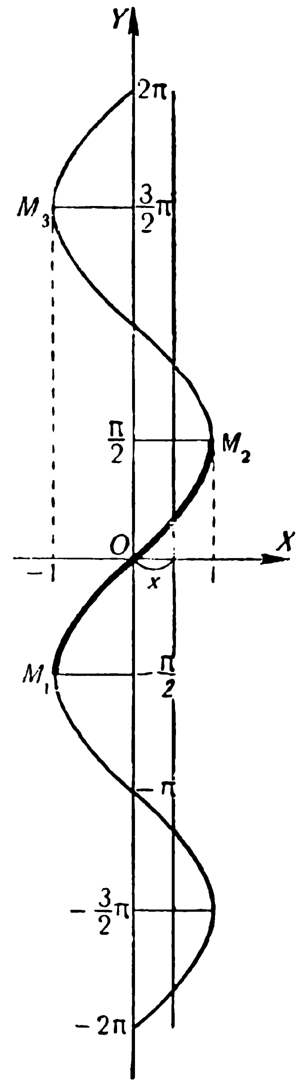
Но численное значение y мы определяем как радианную меру угла, синус которого равен x.

Функция $y=\operatorname{Arc}\sin x$ имеет смысл лишь для значений x, по абсолютной величине не превосходящих единицы: $-1\leqslant x\leqslant 1$. В противоположность прямой функции $y=\sin x$, обратная функция $y=\operatorname{Arc}\sin x$ не однозначная, а *многозначная*. Каждому значению x соответствует бесчисленное множество значений y, определяемых по формуле:

$$y = \operatorname{Arc}\sin x = (-1)^n y_1 + n\pi,$$
$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \tag{122}$$

где y_1 обозначает какое-нибудь значение $\operatorname{Arc}\sin x$. График функции $y = \operatorname{Arc}\sin x$ легко получить из графика функции $y = \sin x$ посредством приёма, указанного в § 96.

Перегнув чертёж 41 по биссектрисе первого и третьего углов между осями, получим график арксинуса, которым будет синусоида, „навёртывающаяся" на ось OY (черт. 66) так же, как первоначальная синусоида — график синуса — „навёртывалась" на ось OX.



Черт. 66.

По чертежу 66 видно, что прямая, перпендикулярная к оси OX, или вовсе не имеет с графиком общих точек, или имеет с ним бесчисленное множество общих точек. Это указывает на многозначность функции $y = \operatorname{Arc}\sin x$. Ординаты y точек пересечения графика с прямой и будут значениями арксинуса, соответствующими тому значению аргумента, которое равно абсциссе x.

§ 98. Главное значение $\operatorname{Arc}\sin x$. Выделим на графике функции $y = \operatorname{Arc}\sin x$ такую его наибольшую часть, чтобы прямая, перпендикулярная к оси OX и проходящая через *любую* точку отрезка от -1 до $+1$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$, пересекала её в одной и только в одной точке. Это можно сделать по-разному. Например, частью графика, удовлетворяющей поставленному условию, является дуга M_1M_2 (черт. 66). Такой частью может быть также дуга M_2M_3 и т. п. Каждая такая дуга служит графиком некоторой однозначной функции (ибо каждому значению x на отрезке от -1 до $+1$ соответствует *одно* значение функции).

Из всех возможных частей графика арксинуса, обладающих указанным свойством, остановимся на M_1M_2. Эта часть *ближе* находится к оси OX, чем любая другая часть (M_2M_3 и т. д.).

Точка M_1, соответствующая значению $x=-1$, имеет ординату $y=-\frac{\pi}{2}$, а точка M_2, соответствующая значению $x=1$, имеет ординату $y=\frac{\pi}{2}$. Таким образом, мы видим, что ординаты точек кривой M_1M_2 заключены между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{т. е. по абсолютной величине не превосходят } \frac{\pi}{2}\right)$. Так как ордината точки кривой M_1M_2 изображает значение $\operatorname{Arc}\sin x$, то отсюда следует, что среди всех значений $\operatorname{Arc}\sin x$ есть одно и только одно, которое заключено между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$.

Определение. *Значение* $\operatorname{Arc}\sin x$, *заключённое между* $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$, *называется главным значением* $\operatorname{Arc}\sin x$.

Оно обозначается так: $\arcsin x$.

Следовательно,

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2} \tag{123}$$

для всякого x на отрезке от -1 до $+1$.

Главное значение арксинуса $y=\arcsin x$ является однозначной функцией x $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$, графиком которой служит кривая M_1M_2 (черт. 66).

По графику ясно видно, что если $x>0$, то и $\arcsin x>0$, если $x=0$, то и $\arcsin x=0$, если $x<0$, то и $\arcsin x<0$.

Функция $y=\arcsin x$ *возрастающая:* когда x увеличивается от -1 до $+1$, $\arcsin x$ увеличивается от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$. Графически это проявляется в том, что точка, двигаясь слева направо вдоль кривой, поднимается.

Заметим ещё, что $y=\arcsin x$ *функция нечётная*:

$$\arcsin(-x)=-\arcsin x.$$

В силу того что $\arcsin x$ является одним из значений $\operatorname{Arc}\sin x$, то на основании формулы (122), § 97, все другие значения выразятся через $\arcsin x$ — главное значение $\operatorname{Arc}\sin x$ — так:

$$\operatorname{Arc}\sin x=(-1)^n \arcsin x+n\pi$$
$$(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{124}$$

Читателю будет полезно на графике проверить эту формулу.

§ 99. Функция $y = \mathrm{Arc}\cos x$. Возьмём теперь тригонометрическую функцию

$$y = \cos x.$$

По определению, y есть значение косинуса угла (дуги) в x радианов. Значит (см. § 93),

$$x = \mathrm{Arc}\cos y.$$

Считая x функцией, а y аргументом, приходим к функции, обратной функции $y = \cos x$, т. е. к обратной тригонометрической функции *арккосинус*. Меняя x и y местами, получим:

$$y = \mathrm{Arc}\cos x.$$

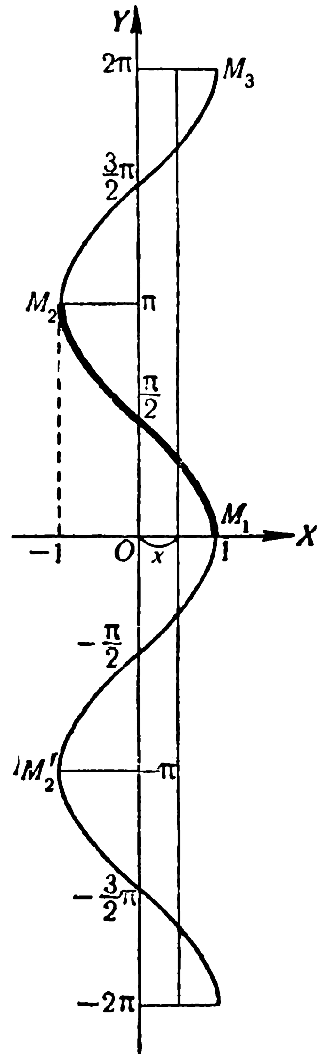
Функцией $\mathrm{Arc}\cos x$ *называется функция, обратная функции* $\cos x$.

Значениями функции $y = \mathrm{Arc}\cos x$ являются числа, измеряющие (обязательно в радианной мере) углы (дуги), косинус которых равен данному числу x.

Функция $y = \mathrm{Arc}\cos x$ имеет смысл лишь для значений x, не превосходящих единицы по абсолютной величине. $\mathrm{Arc}\cos x$ — функция *многозначная*. Каждому значению x, если $-1 \leqslant x \leqslant 1$, соответствует бесчисленное множество значений y, определяемых по формуле:

$$y = \mathrm{Arc}\cos x = \pm y_1 + 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{125}$$

где y_1 обозначает какое-нибудь значение $\mathrm{Arc}\cos x$.



Черт. 67.

Перегибая чертёж 42 по биссектрисе первого и третьего углов между осями, получим график функции $y = \mathrm{Arc}\cos x$ (черт. 67).

Прямая, перпендикулярная к оси OX, или вовсе не имеет общих точек с графиком арккосинуса, или имеет с ним бесчисленное множество общих точек.

§ 100. Главное значение $\mathrm{Arc}\cos x$. Выделим на графике функции $y = \mathrm{Arc}\cos x$ такую его наибольшую часть, чтобы прямая, перпендикулярная к оси OX и проходящая через *любую* точку отрезка от -1 до $+1$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$, пересекала её в одной и только в одной точке. Такими частями могут быть дуги $M_2^1M_1$, M_1M_2, M_2M_3 и т. п. (черт. 67). Каждая из этих дуг служит графиком некоторой однозначной функции (ибо каждому значению x на отрезке от -1 до $+1$ соответствует *одно* значение функции).

Среди этих дуг две, а именно: $M_2^1M_1$ и M_1M_2, расположены к оси OX *ближе* других; выберем M_1M_2, так как ординаты её точек *положительные*.

Точка M_2, соответствующая значению $x=-1$, имеет ординату $y=\pi$, а точка M_1, соответствующая значению $x=1$, имеет ординату $y=0$. Таким образом, ординаты точек кривой M_1M_2 заключены между 0 и π.

Так как ордината точки кривой M_1M_2 изображает значение $\operatorname{Arc}\cos x$, то отсюда следует, что среди всех значений $\operatorname{Arc}\cos x$ есть одно и только одно, которое заключено между 0 и π.

Определение. *Значение* $\operatorname{Arc}\cos x$, *заключённое между* 0 и π, *называется главным значением* $\operatorname{Arc}\cos x$.

Оно обозначается так: $\arccos x$. Следовательно,

$$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi \tag{126}$$

для всякого x на отрезке от -1 до $+1$.

Главное значение арккосинуса $y=\arccos x$ является однозначной функцией x $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$, графиком которой служит кривая M_1M_2 (черт. 67).

Функция $y=\arccos x$ *убывающая*: когда x увеличивается от -1 до $+1$, $\arccos x$ уменьшается от π до 0. При этом точка графика, передвигаясь слева направо, опускается.

Так как $\arccos x$ является одним из значений $\operatorname{Arc}\cos x$, то на основании формулы (125), § 99, все другие значения выразятся через $\arccos x$ — главное значение $\operatorname{Arc}\cos x$ — так:

$$\operatorname{Arc}\cos x = \pm \arccos x + 2n\pi \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{127}$$

Нетрудно по графику проверить эту формулу.

§ 101. Функция $y=\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x$. Пусть дана тригонометрическая функция

$$y=\operatorname{tg} x.$$

По определению, y есть значение тангенса угла (дуги) в x радианов. Значит (см. § 93),

$$x=\operatorname{Arc}\operatorname{tg} y.$$

Считая x функцией от y, получаем функцию, обратную функции $y = \operatorname{tg} x$, т. е. обратную тригонометрическую функцию *арктангенс*. Меняя x и y местами, придём к функции:

$$y = \operatorname{Arc\,tg} x.$$

Функцией $\operatorname{Arc\,tg} x$ *называется функция, обратная функции* $\operatorname{tg} x$.

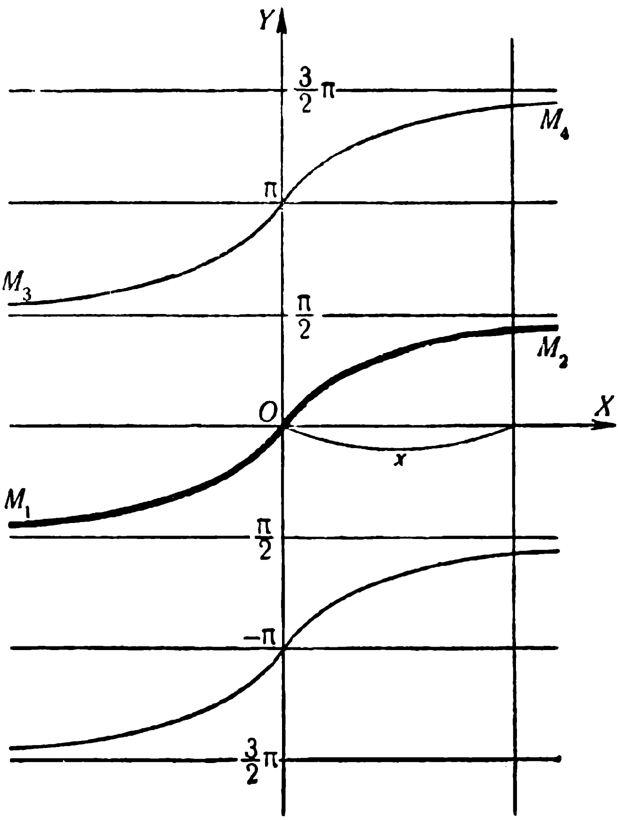
Значениями функции $y = \operatorname{Arc\,tg} x$ являются числа, измеряющие (обязательно в радианной мере) углы (дуги), тангенс которых равен данному числу x.

Функция $y = \operatorname{Arc\,tg} x$ имеет смысл для любых значений x, причём она — функция *многозначная*. Каждому значению x соответствует бесчисленное множество значений y, определяемых по формуле:

$$y = \operatorname{Arc\,tg} x = y_1 + n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \quad (128)$$

где y_1 обозначает какое-нибудь значение $\operatorname{Arc\,tg} x$.

Если чертёж 44 перегнуть по биссектрисе первого и третьего углов между осями, то мы получим график функции $y = \operatorname{Arc\,tg} x$ (черт. 68).



Черт. 68.

Всякая прямая, перпендикулярная к оси OX, пересекает график $\operatorname{Arc\,tg} x$ в бесчисленном множестве точек, ординаты которых и будут значениями $\operatorname{Arc\,tg} x$.

§ 102. Главное значение $\operatorname{Arc\,tg} x$. График функции $y = \operatorname{Arc\,tg} x$ (черт. 68) состоит из отдельных ветвей M_1M_2, M_3M_4 и т. п., каждая из которых служит графиком некоторой однозначной функции (ибо каждому значению x соответствует одно значение функции).

Выделим ветвь M_1M_2; она расположена ближе к оси OX_0, чем другие ветви (M_3M_4 и т. д.). Любая ордината точки кривой M_1M_2 заключена между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$ (по абсолютной величине меньше $\frac{\pi}{2}$). Отсюда следует, что среди всех значений $\operatorname{Arc\,tg} x$ есть одно и только одно, которое заключено между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$.

Определение. *Значение* $\operatorname{Arc\,tg} x$, *заключённое между* $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$, *называется главным значением* $\operatorname{Arc\,tg} x$.

Оно обозначается так: $\operatorname{Arc\,tg} x$. Следовательно,

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,tg} x < \frac{\pi}{2} \tag{129}$$

для всякого значения x.

Главное значение арктангенса $y = \operatorname{arc\,tg} x$ является однозначной функцией x, графиком которой служит кривая M_1M_2 (черт. 68).

Функция $y = \operatorname{arc\,tg} x$ *возрастающая:* когда x увеличивается, $\operatorname{arc\,tg} x$ тоже увеличивается. Эта функция *нечётная:*

$$\operatorname{arc\,tg}(-x) = -\operatorname{arc\,tg} x.$$

В силу того что $\operatorname{arc\,tg} x$ является одним из значений $\operatorname{Arc\,tg} x$, то на основании формулы (128), § 101, все другие значения выразятся через $\operatorname{arc\,tg} x$ — главное значение $\operatorname{Arc\,tg} x$ — так:

$$\operatorname{Arc\,tg} x = \operatorname{arc\,tg} x + n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{130}$$

Заметим, что главное значение для $\operatorname{Arc\,tg} x$ было выбрано так же, как и для $\operatorname{Arc\,sin} x$.

§ 103. Функция $y = \operatorname{Arc\,ctg} x$. Наконец, возьмём функцию

$$y = \operatorname{ctg} x.$$

По определению, y есть значение котангенса угла (дуги) в x радианов. Поэтому (см. § 93):

$$x = \operatorname{Arc\,tg} y.$$

Рассматривая x как функцию y, мы приходим к функции, обратной функции $y = \operatorname{ctg} x$, т. е. к обратной тригонометрической функции *арккотангенс.* Меняя x и y местами, получим функцию:

$$y = \operatorname{Arc\,ctg} x.$$

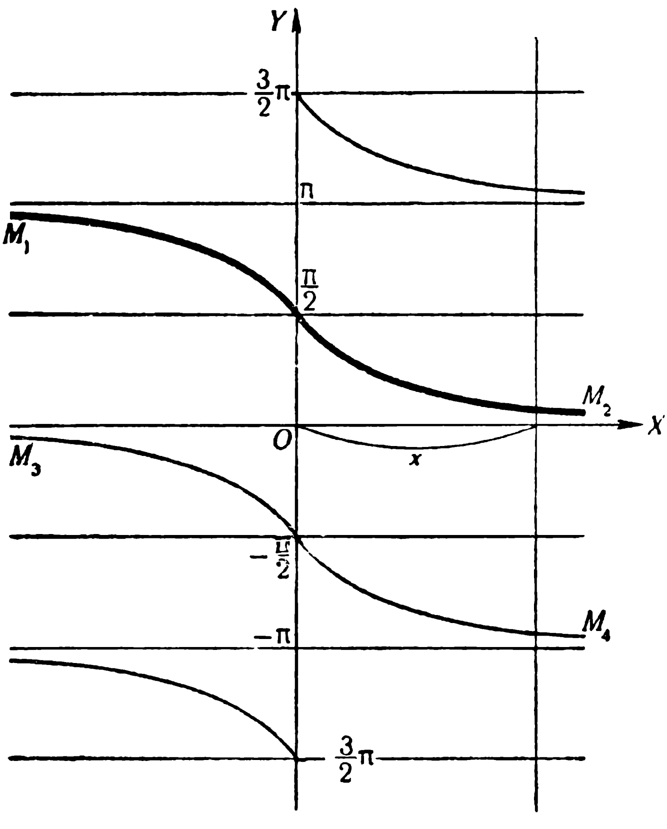
Функцией Arc ctg x *называется функция, обратная функции* ctg x.

Значениями функции $y = \operatorname{Arc\,ctg} x$ являются числа, измеряющие (обязательно в радианной мере) углы (дуги), котангенс которых равен числу x. Эта функция, подобно Arc tg x, имеет смысл для любых значений x, причём она функция *многозначная*. Каждому значению x соответствует бесчисленное множество значений y, определяемых по формуле:

$$y = \operatorname{Arc\,ctg} x = y_1 + n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{131}$$

где y_1 обозначает какое-нибудь значение Arc ctg x.

Перегибая чертёж 45 по биссектрисе первого и третьего углов между осями, получим график функции $y = \operatorname{Arc\,ctg} x$ (черт. 69).



Черт. 69.

Всякая прямая, перпендикулярная к оси OX, пересекает график функции Arc ctg x в бесчисленном множестве точек.

§ 104. Главное значение Arc ctg x. График функции $y = \operatorname{Arc\,ctg} x$ (черт. 69) состоит из отдельных ветвей M_1M_2, M_3M_4 и т. п., каждая из которых служит графиком некоторой однозначной функции (ибо каждому значению x соответствует одно значение функции).

Среди этих ветвей две, а именно: M_1M_2 и M_3M_4, расположены к оси OX *ближе* других; мы выберем M_1M_2, так как ординаты её точек *положительные*. Любая ордината точки кривой M_1M_2 заключена между 0 и π. Отсюда следует, что среди всех значений $\operatorname{Arc\,ctg} x$ есть одно и только одно, которое заключено между 0 и π.

Определение. *Значение* $\operatorname{Arc\,ctg} x$, *заключённое между* 0 и π, *называется главным значением* $\operatorname{Arc\,ctg} x$.

Оно обозначается так: $\operatorname{arc\,ctg} x$. Следовательно,

$$0 < \operatorname{arc\,ctg} x < \pi \tag{132}$$

для всякого x.

Главное значение арккотангенса $y = \operatorname{arc\,ctg} x$ является однозначной функцией x, графиком которой служит кривая M_1M_2 (черт. 69). Эта функция *убывающая*: когда x увеличивается, $\operatorname{arc\,ctg} x$ уменьшается.

Так как $\operatorname{arc\,ctg} x$ является одним из значений $\operatorname{Arc\,ctg} x$, то на основании формулы (131), § 103, все другие значения выразятся через $\operatorname{arc\,ctg} x$ — главное значение $\operatorname{Arc\,ctg} x$ — так:

$$\operatorname{Arc\,ctg} x = \operatorname{arc\,ctg} x + n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{133}$$

Заметим, что главное значение для $\operatorname{Arc\,ctg} x$ было выбрано так же, как и для $\operatorname{Arc\,cos} x$.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 105. Простейшие преобразования. В силу того что тригонометрические и обратные тригонометрические функции взаимно обратны, между ними существуют различные зависимости.

1) Рассмотрим выражение: $\sin(\arcsin x)$. Обозначим его через y.

$$y = \sin(\arcsin x).$$

Отсюда:

$$\arcsin x = \arcsin y,$$

и, значит, $y = x$.

Итак,

$$\sin(\arcsin x) = x.$$

Этот результат делается совершенно понятным, если внимательно присмотреться к выражению в левой части. Действительно, оно представляет синус некоторого угла, именно равного $\arcsin x$, т. е. такого, синус которого равен x. В самой этой фразе заключён ответ.

Точно так же

$$\cos(\arccos x) = x, \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x) = x, \quad \operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,ctg} x) = x.$$

Равенства $\sin(\arcsin x) = x$ и $\cos(\arccos x) = x$ имеют смысл лишь при $|x| \leqslant 1$.

2) В качестве очень интересного примера возьмём функцию, рассмотренную великим русским математиком П. Л. Чебышевым (1821—1894): $\cos(n \arccos x)$, где n — целое неотрицательное число. Докажем, что эта функция есть *многочлен n-ой степени* относительно x, коэфициентом которого при старшей степени x, т. е. при x^n, является число 2^{n-1}.

При $n = 1$, $n = 2$ это очевидно:

$$\cos(\arccos x) = x, \quad \cos(2\arccos x) = 2\cos^2(\arccos x) - 1 = \\ = 2x^2 - 1.$$

Применим теперь метод полной математической индукции. Предположим, что наше утверждение справедливо до какого-нибудь n включительно; докажем, что при этом оно имеет место и для $n+1$. Так как (§ 66)

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos n\theta \cdot \cos\theta,$$

то

$$\cos(n+1)\theta = 2\cos n\theta \cdot \cos\theta - \cos(n-1)\theta.$$

Положим здесь $\theta = \arccos x$; тогда

$$\cos[(n+1)\arccos x] = 2\cos(\arccos x)\cos(n\arccos x) - \\ - \cos[(n-1)\arccos x] = 2x\cos(n\arccos x) - \\ - \cos[(n-1)\arccos a].$$

В силу сделанного допущения, имеем:

$$\cos(n\arccos x) = 2^{n-1}x^n + a_1x^{n-1} + \ldots$$
$$\cos[(n-1)\arccos x] = 2^{n-2}x^{n-1} + \ldots$$

Поэтому

$$\cos[(n+1)\arccos x] = 2^n x^{n+1} + 2a_1x^n + \ldots - (2^{n-2}x^{n-1} + \ldots).$$

Отсюда видно, что $\cos[(n+1)\arccos x]$ действительно есть многочлен степени $n+1$, причём коэфициентом при x^{n+1} служит число 2^n, что и требовалось доказать. Ввиду того что это предложение справедливо для $n = 1$ и $n = 2$, оно справедливо, по доказанному, для любого n.

Многочлены $\cos(n \arccos x)$ обладают целым рядом замечательных свойств, изучаемых в высшей математике. Эти многочлены в честь П. Л. Чебышева называются многочленами Чебышева.

3) Преобразуем выражение: $\sin(\arccos x)$.

Применяя известную формулу, получим:

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - [\cos(\arccos x)]^2};$$

в силу предыдущего, $\cos(\arccos x) = x$,
и, значит,

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Точно так же

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Без особых объяснений должны быть понятны равенства:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,ctg} x) = \frac{1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,ctg} x)} = \frac{1}{x},$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,tg} x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)} = \frac{1}{x}.$$

4) Далее возьмём выражение $\operatorname{Arc\,sin}(\sin x)$. Обозначим его через y:

$y = \operatorname{Arc\,sin}(\sin x)$.

Отсюда

$$\sin x = \sin y,$$

и, значит, имеется такое значение y, которое равно x. Общим же ответом, как мы знаем, будет:

$$\operatorname{Arc\,sin}(\sin x) = (-1)^n \cdot x + n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Точно так же

$$\operatorname{Arc\,cos}(\cos x) = \pm x + 2n\pi; \quad \operatorname{Arc\,tg}(\operatorname{tg} x) = x + n\pi;$$
$$\operatorname{Arc\,ctg}(\operatorname{ctg} x) = x + n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

5) Если в выражении: $\operatorname{Arc\,sin}(\cos x)$ заменить $\cos x$ через $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, то мы, очевидно, получим:

$$\operatorname{Arc\,sin}(\cos x) = (-1)^n \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

$$\operatorname{Arc\,cos}(\sin x) = \pm\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

§ 106. Дальнейшие преобразования. Естественно, что формулы, связывающие между собой тригонометрические функции, приводят к формулам, связывающим между собой обратные тригонометрические функции.

1) Докажем, что

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Положим $\arcsin x = \alpha$, $\arccos x = \beta$.

Отсюда $x = \sin \alpha$, $x = \cos \beta$

и $\sin \alpha = \cos \beta = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right)$.

По условию: $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$. Отсюда следует, что $-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} - \beta \leqslant \frac{\pi}{2}$. Таким образом, имеем равенство синусов от двух углов, лежащих в первой положительной или в первой отрицательной четверти. Но это равенство может иметь место только в том случае, если сами углы равны:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta,$$

откуда

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2},$$

или

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Справедливость этого равенства также легко усмотреть по графикам функций $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$.

2) Точно так же

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

3) Найдём формулу для суммы арксинусов:

$$\arcsin x + \arcsin y.$$

Положим $\alpha = \arcsin x$, $\beta = \arcsin y$.

Тогда $x = \sin \alpha$, $y = \sin \beta$.

Возьмём синус суммы:

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

Подставляя сюда вместо $\sin \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \alpha$, $\sin \beta$ их выражения через x и y, получим:

$$\sin (\alpha + \beta) = x \sqrt{1 - y^2} + y \sqrt{1 - x^2}.$$

Перед корнями берём знак плюс, так как в первой положительной и в первой отрицательной четверти косинус положителен (ведь рассматриваются главные значения!).

Значит,

$$\alpha + \beta = \arcsin x + \arcsin y = \arcsin (x \sqrt{1 - y^2} + y \sqrt{1 - x^2}),$$

если $\alpha+\beta$ (так же как и α и β в отдельности) удовлетворяют неравенствам:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha+\beta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Если $\alpha+\beta$ выходит за эти границы, нужно принять в расчёт другие (неглавные) значения арксинуса. (Заметим, что при наших условиях $\alpha+\beta$ всегда удовлетворяет неравенствам: $-\pi \leqslant \alpha+\beta \leqslant \pi$.).

4) В частности, при $x=y$ находим (если $-\frac{\pi}{4} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{4}$)

$$2 \arcsin x = \arcsin (2x\sqrt{1-x^2}).$$

Подобным же образом читатель сам может вывести формулу для суммы арккосинусов.

5) Преобразуем сумму арктангенсов: $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y$.

Положим $\alpha = \operatorname{arc\,tg} x$, $\beta = \operatorname{arc\,tg} y$.

Тогда $x = \operatorname{tg} \alpha$, $y = \operatorname{tg} \beta$.

Возьмём тангенс суммы:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{x+y}{1-xy}.$$

Если сумма $\alpha+\beta$ (так же как и α и β в отдельности) заключена между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$, то

$$\alpha+\beta = \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy}.$$

В том случае, когда $\alpha+\beta$ выходит за указанные границы, необходимо обратиться к другим (неглавным) значениям арктангенса. (При наших условиях сумма $\alpha+\beta$ всегда заключена между $-\pi$ и π.)

6) В частности, при $x=y$ находим, если

$$-\frac{\pi}{4} \leqslant \operatorname{arc\,tg} x \leqslant \frac{\pi}{4},$$

$$2 \operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,tg} \frac{2x}{1-x^2}.$$

7) Меняя в формуле для суммы y на $-y$, получим:

$$\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,tg} \frac{x-y}{1+xy},$$

если

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} y < \frac{\pi}{2},$$

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,tg} x < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,tg} y < \frac{\pi}{2}.$$

8) Для иллюстрации применения выведенных формул приведём один интересный пример. Вычислим значение выражения:

$$4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239}.$$

Так как $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} > \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}$, то эта разность положительна, и легко показать, что она меньше $\frac{\pi}{2}$. Действительно:

$$4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239} < 4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} < 4\cdot\frac{1}{5},$$

так как в первой четверти дуга меньше своего тангенса. Но в свою очередь $\frac{4}{5} < \frac{\pi}{2} = 1{,}57$; таким образом, для преобразования данной разности можно воспользоваться выведенными здесь формулами.

Прежде всего преобразуем первый член:

$$4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} = 2\left(2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}\right) = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{2\cdot\frac{1}{5}}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2} = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{5}{12}.$$

Снова применяя формулу удвоенного арктангенса, получим:

$$4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{2\cdot\frac{5}{12}}{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2} = \operatorname{arc\,tg}\frac{120}{119}.$$

Итак,

$$4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239} = \operatorname{arc\,tg}\frac{120}{119} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}.$$

Воспользовавшись формулой для разности арктангенсов, найдём:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{120}{119} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119\cdot 239}} = \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Окончательно приходим к любопытному результату:

$$4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$

По образцу примеров этого параграфа следует решать и другие задачи, связанные с преобразованием обратных тригонометрических функций.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 107. Определение. *Тригонометрическим уравнением называется равенство, содержащее неизвестную величину только под знаком тригонометрических функций и справедливое лишь при некоторых определённых значениях неизвестной.* Последние называются корнями уравнения. Иными словами, корнями тригонометрического уравнения являются значения неизвестной величины, которые *удовлетворяют* уравнению. В отличие от тригонометрических уравнений тригонометрические *тождества* удовлетворяются при всех значениях переменных величин, стоящих под знаками тригонометрических функций, для которых эти функции имеют смысл.

Решить тригонометрическое уравнение — значит найти все его корни.

Мы будем рассматривать лишь некоторые простые типы тригонометрических уравнений. *Решение их обычно сводится к определению значения одной какой-нибудь тригонометрической функции, аргументом которой служит выражение, содержащее неизвестную величину.* Зная значение тригонометрической функции, можно найти посредством обратных тригонометрических функций и значение её аргумента.

Пусть, например, заданное уравнение привело к равенству:

$$\sin(ax+b)=c, \quad \text{где } |c|\leqslant 1.$$

Это равенство представляет собой простейшее тригонометрическое уравнение. Оно решается сразу. Имеем:

$$ax+b=\operatorname{Arc}\sin c=(-1)^n \arcsin c+n\pi (n=0, \pm 1, 2, \ldots), \quad (*)$$

откуда

$$x=\frac{1}{a}[-b+(-1)^n \arcsin c+n\pi] (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \quad (**)$$

Правая часть полученного выражения (**) заключает в себе *все* корни уравнения (*). Придавая n значения $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, получим частные значения неизвестного: $x_0, x_1, x_2, \ldots$.

Отсюда видно, что исходное уравнение имеет *бесчисленное множество корней*. Если же $|c|>1$, то решение уравнения невозможно — оно вовсе не имеет корней. Обычно тригонометрическое уравнение или вовсе не имеет корней, или имеет их бесчисленное множество.

В противоположность этому алгебраические уравнения с одним неизвестным имеют лишь *конечное число корней*.

Что касается методов, при помощи которых данное тригонометрическое уравнение приводится к уравнению простейшего вида, то они состоят в преобразованиях уравнения в равносильное. К ним относятся: прибавление (алгебраическое) к обеим частям уравнения одного и того же выражения и умножение или деление всех членов уравнения на одно и то же выражение, не обращающееся в нуль.

Наряду с этим используются тригонометрические тождества. Если в процессе решения уравнения производятся преобразования, которые могут приводить к новым корням, как, например, возведение обеих частей уравнения в квадрат, то необходимо учесть, какие новые, посторонние исходному уравнению корни появляются в результате этих преобразований.

Всё сказанное в предыдущем § уяснится из разбора приводимых дальше примеров.

§ 108. Примеры уравнений.

1) $2\cos x + 1 = 0$.

Здесь сразу находится значение $\cos x$:

$$\cos x = -\frac{1}{2}.$$

Корни этого уравнения являются в то же время корнями заданного уравнения. Находим:

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Но

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi \ (= 120°),$$

значит,

$$x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2n\pi\,(= \pm 120° + 360°n) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Пример на приведение к *одному* аргументу.

2) $\sin 2x = \sin^2 x$.

Перенося $\sin^2 x$ в левую часть уравнения и заменяя $\sin 2x$ через $2\sin x\cos x$ (для того чтобы все члены уравнения привести к одному аргументу), получим:

$$\sin x\,(2\cos x - \sin x) = 0.$$

Приравняв нулю каждый из двух множителей левой части, придём к двум уравнениям:

$$\sin x = 0 \text{ и } 2\cos x - \sin x = 0.$$

Первое даёт

$$x = n\pi\,(= 180°\,n) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Второе после деления на $\cos x$ даёт:

$$\operatorname{tg} x = 2,$$

откуда

$$x = \operatorname{arc\,tg} 2 + n\pi = 1{,}11 + n\pi\,(= 63°30' + 180°n)\,(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Значения x, найденные из последних двух формул, и будут корнями исходного уравнения.

В данном случае деление на $\cos x$ не приводит к потере корней, так как значения x, обращающие $\cos x$ в нуль, не являются корнями исходного уравнения.

Пример на приведение к *одной* функции.

3) $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0$.

Рассмотрим сначала случай, когда $a\neq 0$.

Для того чтобы заданное уравнение привести к уравнению, содержащему *одну* тригонометрическую функцию, разделим обе части на $\cos^2 x$ (мы не потеряем при этом корней данного уравнения, так как при $\cos x=0$ левая часть не обращается в нуль).

Получим уравнение:

$$a\,\mathrm{tg}^2 x+b\,\mathrm{tg}\,x+c=0.$$

Решая его относительно $\mathrm{tg}\,x$, найдём:

$$\mathrm{tg}\,x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{4a}.$$

Отсюда видно, что условием возможности решения первоначального уравнения является неравенство:

$$b^2\geqslant 4ac.$$

Если оно выполнено, то

$$x=\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{4a}\right)+n\pi\quad(n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Этот пример иллюстрирует приём, часто употребляемый при решении тригонометрических уравнений — стараются преобразовать уравнение к такому виду, чтобы в нём участвовала одна тригонометрическая функция от неизвестного аргумента.

Пусть теперь $a=0$. Тогда уравнение имеет вид:

$$\cos x\,(b\sin x+c\cos x)=0.$$

Значит, имеем уравнения:

$$\cos x=0;\quad b\sin x+c\cos x=0;$$

первое из них даёт:

$$x=\pm\frac{\pi}{2}+2n\pi\qquad(n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Что касается второго, то при $b\neq 0$ деля на $\cos x$ (корни уравнения $\cos x=0$ уже учтены). Находим:

$$\mathrm{tg}\,x=-\frac{c}{b},$$

откуда

$$x=\mathrm{arc\,tg}\,\frac{c}{b}+n\pi\ (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

При $b=0$ мы приходим к прежним корням уравнения $\cos x=0$.

4) $\sin^2 x\cdot\mathrm{ctg}\,2x=0$. Это уравнение распадается на два уравнения:

$$\sin^2 x=0\ \text{и}\ \mathrm{ctg}\,2x=0.$$

Корни первого из этих уравнений ($x = n\pi$) нельзя, однако, считать корнями исходного уравнения, так как при $x = n\pi$ $\operatorname{ctg} 2x$ не существует. Корни же второго уравнения, именно:

$$x = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

и являются искомыми корнями заданного уравнения.

§ 109. Равенства одноимённых тригонометрических функций. Решим сначала такой пример:

1) $\sin 5x = \sin 4x$.

Перенося $\sin 4x$ в левую часть и применив формулу для разности синусов, получим:

$$2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{9}{2}x = 0.$$

Следовательно, имеем два уравнения:

$$\sin\frac{x}{2} = 0 \quad \text{и} \quad \cos\frac{9}{2}x = 0.$$

Далее находим:

$$\frac{x}{2} = n\pi, \quad \frac{9}{2}x = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi,$$

и окончательно:

$$x = 2n\pi\ (= 360^\circ n), \quad x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{4n\pi}{9}\ (= \pm 20^\circ + 80^\circ).$$

Возьмём ещё пример:

2) $\cos 5x = \cos 4x$.

Имеем:

$$\cos 5x - \cos 4x = 0,$$

т. е.

$$-2\sin\frac{9}{2}x\cdot\sin\frac{1}{2}x = 0,$$

или

$$\sin\frac{9}{2}x = 0, \quad \sin\frac{1}{2}x = 0,$$

откуда

$$x = \frac{2}{9}n\pi \text{ и } x = 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Наконец, решим ещё один подобный пример:

3) $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg} 4x$. Последовательно находим:

$$\operatorname{tg} 5x - \operatorname{tg} 4x = \frac{\sin x}{\cos 5x \cdot \cos 4x} = 0,$$

$$\sin x = 0,$$

$$x = n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Мы получили все корни заданного уравнения, так как при этих значениях знаменатель не обращается в нуль.

Перейдём теперь к более общим уравнениям.

1) $\sin A = \sin B$, где A и B — выражения, содержащие неизвестную величину x. Во взятом выше примере: $A = 5x$, $B = 4x$. Имеем:

$$\sin A - \sin B = 2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2} = 0,$$

или

$$\sin \frac{A-B}{2} = 0, \quad \cos \frac{A+B}{2} = 0,$$

откуда

$$A - B = 2n\pi, \quad A + B = (2n+1)\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Мы получили две серии уравнений для определения x. Подставляя, например, $5x$ вместо A и $4x$ вместо B, вернёмся к решению предыдущего примера.

Аналогично в таком общем виде могут быть решены и уравнения:

$$2) \ \cos A = \cos B, \quad 3) \ \operatorname{tg} A = \operatorname{tg} B.$$

Эти указанные уравнения 1), 2), 3) можно решить иначе, рассуждая следующим образом. Возьмём, например, уравнение 1). Раз синусы двух выражений равны, то эти выражения являются двумя различными значениями арксинуса одной и той же величины. Значит, в силу формулы (122), § 97, находим:

$$A = (-1)^n B + n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Эта формула объединяет обе серии, найденные выше: первая серия получается отсюда при чётном n, вторая при нечётном n. (Ср. преобразование 4, § 105.)

Совершенно аналогично могут быть решены и уравнения 2) и 3):

$$2) \ \cos A = \cos B;$$

все корни этого уравнения находятся из формулы:

$$A = \pm B + 2n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

(см. формулу (125), § 99);

в примере $5x = \pm 4x + 2n\pi$, что объединяет две серии, указанные раньше.

3) $\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} B$; все корни этого уравнения находятся из формулы:

$$A = B + n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

в примере $5x = 4x + n\pi$ или $x = n\pi$; мы получили то же, что и выше.

Мы можем сформулировать правило для решения уравнений рассмотренного вида:

Если одноимённые тригонометрические функции от двух выражений равны, то эти выражения связаны между собой так, как два значения соответствующей обратной тригонометрической функции.

§ 110. Дальнейшие примеры. 1) $a \sin x + b \cos x + c = 0$.

Решение уравнений приёмом введения вспомогательного аргумента (см. § 67).

Полагая

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\rho}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{\rho},$$

получим:

$$a \sin x + b \cos x = \rho \sin(x + \varphi).$$

Таким образом, наше уравнение принимает вид:

$$\rho \sin(x + \varphi) + c = 0$$

или

$$\sin(x + \varphi) = -\frac{c}{\rho},$$

т. е. вид, указанный в § 100. Мы видим, что уравнение имеет корни, если $|c| \leqslant \rho$, т. е. $c^2 \leqslant a^2 + b^2$.

В следующем параграфе изложим один общий метод, с помощью которого также может быть решено рассматриваемое уравнение.

2) $\sin(\alpha + x) = a \sin x$.

Раскрывая синус суммы и перенеся $a \sin x$ в левую часть, получим уравнение:

$$(\cos\alpha - a)\sin x + \sin\alpha\cos x = 0$$

и, значит,

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin\alpha}{a - \cos\alpha},$$

если, конечно, $\cos\alpha \neq a$.

Отсюда

$$x = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin \alpha}{a - \cos} + n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Если же $\cos \alpha = a$, то уравнение приводится к уравнению $\cos x = 0$.

Отсюда $x = \pm \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

3) $\sin x + \cos x = a$.

Это уравнение имеет вид уравнения первого примера, но решить его можно проще.

Заменим $\cos x$ через $\sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ и используем формулу для суммы синусов:

$$\sin x + \sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right);$$

тогда

$$\sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = a,$$

откуда

$$\cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Имея в виду, что косинус по абсолютной величине не может превосходить 1, заключаем, что решение уравнения возможно, если

$$\frac{|a|}{\sqrt{2}} \leqslant 1, \quad \text{т. е.} \quad |a| \leqslant \sqrt{2}.$$

Если это условие выполнено, то

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{a}{\sqrt{2}} + 2n\pi.$$

4) *При каких значениях x выражение* $\sin x + \cos x$ *достигает наибольшего значения?*

Исследуя решение уравнения $\sin x + \cos x = a$, мы заключили, что $|a| \leqslant \sqrt{2}$, значит, наибольшее значение, какое может принять выражение $\sin x + \cos x$, равно $\sqrt{2}$. Теперь, чтобы найти те значения x, при которых $\sin x + \cos x$ достигает своего наибольшего значения, нужно решить уравнение:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}.$$

По предыдущему,

$$\cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1,$$

отсюда

$$x=\frac{\pi}{4}\pm \arccos 1+2n\pi,$$

или

$$x=\frac{\pi}{4}+2n\pi\,(=45^\circ+360^\circ n)\qquad (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

5) $$\frac{\sin mx}{\sin x}=\frac{\cos mx}{\cos x}. \qquad (*)$$

Перенесём все члены уравнения в левую часть и приведём к общему знаменателю:

$$\frac{\sin mx\cdot\cos\quad-\cos mx\cdot\sin x}{\sin x\cos x}=0. \qquad (**)$$

В числителе находится, как легко видеть, синус разности:

$$\frac{\sin(mx-x)}{\sin x\cos x}=\frac{\sin[(m-1)x]}{\sin x\cos x}=0.$$

Дробь может быть равна нулю только при условии, что числитель равен нулю, если одновременно не обращается в нуль и знаменатель.

Поэтому определим, прежде всего, при каких значениях x обращается в нуль знаменатель уравнения (**).

Пусть $\sin x\cdot\cos x=0$, или $\frac{1}{2}\sin 2x=0$;

$$\text{отсюда}\quad 2x=n\pi,\quad x=n\cdot\frac{\pi}{2}\qquad (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Итак, знаменатель данного уравнения обращается в нуль при всех значениях x кратных $\frac{\pi}{2}$.

Теперь следует решить уравнение $\sin[(m-1)x]=0$. Все корни этого уравнения, за исключением значений x, кратных $\frac{\pi}{2}$, будут удовлетворять данному уравнению (*).

Решая уравнение

$$\sin[(m-1)x]=0,$$

находим: $(m-1)x=n\pi$,
откуда

$$x=\frac{n}{m-1}\cdot\pi,\quad\text{или}\quad x=\frac{2n}{m-1}\cdot\frac{\pi}{2}\quad (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Исследуя это решение, сразу исключаем $m=1$; в этом случае уравнение (*) обращается в тождество: $\frac{\sin x}{\sin x}=\frac{\cos x}{\cos x}$. При $m=2$ и $m=3$ получаются $x=2n\cdot\frac{\pi}{2}$ и $x=n\cdot\frac{\pi}{2}$; здесь все значения x кратные $\frac{\pi}{2}$ и, следовательно, корнями уравнения (**) быть не могут, ибо обращают в нуль и числитель, и знаменатель.

Таким образом, уравнения

$$\frac{\sin 2x}{\sin x}=\frac{\cos 2x}{\cos x} \quad \text{и} \quad \frac{\sin 3x}{\sin x}=\frac{\cos 3x}{\cos x}$$

совсем не имеют решений.

Наконец, если m отлично от 1, 2 и 3, то все решения уравнения (*) заключены в формуле:

$$x=\frac{2n}{m-1}\cdot\frac{\pi}{2},$$

где n может принимать значения 0, ± 1, ± 2, ..., кроме тех, которые обращают дробь $\frac{2n}{m-1}$ в целое число. Например, при $m=4$ $x=\frac{2n}{3}\cdot\frac{\pi}{2}$, где n — любое целое положительное или отрицательное число, а также нуль, но не кратное числу 3.

§ 111. Один общий метод. Разобранные в предыдущих параграфах примеры тригонометрических уравнений показывают, что различные приёмы, употребляемые для решения простейших типов уравнений, рассматриваемых в школьном курсе математики, имеют чаще всего целью привести данное уравнение к алгебраическому уравнению относительно какой-нибудь одной тригонометрической функции.

Укажем общий метод, позволяющий всегда достигнуть этой цели для одного часто встречающегося класса тригонометрических уравнений, а именно таких, у которых правая часть есть нуль, а левая часть представляет собой *рациональное выражение* относительно тригонометрических функций от одного и того же аргумента; в простейшем случае этим аргументом будет неизвестная величина x.

Выражение называется рациональным относительно некоторых величин A, B, C ..., если в этом выражении над величинами A, B, C производятся только рациональные действия: сложение, вычитание, умножение, деление и возведение в целую положительную степень.

Если тригонометрические функции от x входят в уравнение рационально, то оно называется рациональным относительно этих функций. Вспомним теперь, что все тригонометрические функции от x рационально выражаются через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, а именно:

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \operatorname{tg} x=\frac{2t}{1-t^2}, \qquad (84)$$

где $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Если в данное рациональное уравнение подставим вместо тригонометрических функций от x их выражения через t, то будем иметь также рациональное уравнение относительно t, из которого и находим неизвестную величину t. Зная $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, мы найдём и x.

Возьмём для примера уравнение, уже решённое:

$$a\sin x+b\cos x+c=0. \qquad (*)$$

Заменяя в уравнении (*) $\sin x$ и $\cos x$ выражениями через t, находим:

$$2a\frac{t}{1+t^2}+b\frac{1-t^2}{1+t^2}+c=0,$$

откуда

$$(c-b)t^2+2at+(c+b)=0. \qquad (**)$$

Получилось квадратное уравнение относительно t при условии, что $b\neq c$. Решая его, найдём:

$$t=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-c^2+b^2}}{c-b}.$$

Отсюда снова видно, что неравенство $a^2+b^2\geqslant c^2$ является условием возможности решения первоначального уравнения. Если оно выполнено, то

$$x=2\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{-a\pm\sqrt{a^2-c^2+b^2}}{c-b}+n\pi\right) \qquad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

Если же $b=c$, то уравнение (*) следует решать непосредственно, так как квадратное уравнение (**) обращается в линейное, что сопровождается потерей корня.

Тогда из уравнения (*) имеем:

$$\sin x\left(a+b\,\frac{1+\cos x}{\sin x}\right)=0,$$

и, значит,

$$\sin x=0, \quad a+b\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=0,$$

откуда

$$x=n\pi, \quad x=2\left(-\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}+n\pi\right) \qquad n=0,\pm1,\pm2,\ldots).$$

Вторая из этих серий корней получается и из решения линейного уравнения, в которое обращается квадратное уравнение (**) при $b=c$, а первая серия корней при этом оказывается потерянной.

Вообще, при подстановке в уравнение t вместо $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ можно потерять корни вида $x=(2n+1)\pi$; при этих значениях $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$

не существует. Поэтому, решая уравнение этим приёмом, нужно проверить, не являются ли указанные значения корнями уравнения.

Решение уравнений по изложенному методу не всегда является наиболее простым. Часто какой-нибудь приём, специально приспособленный для данного уравнения, скорее приводит к цели, чем общий метод. Поэтому нужно стремиться искать специальный, наиболее короткий, простой и изящный приём для решения уравнения. Если более удобный специальный приём не удаётся найти, следует обратиться к общему методу.

§ 112. Доказательство общности формул для значений обратных тригонометрических функций. Докажем теперь, что указанные нами формулы (124), (127), (130), (133) действительно являются общими, иначе говоря, что данная обратная тригонометрическая функция не может иметь никаких других значений, кроме тех, которые получаются по нашим формулам при всевозможных значениях числа n.

Для доказательства нам нужно найти общий вид аргумента, данная тригонометрическая функция которого равна заданному числу.

Возьмём для примера синус. Пусть

$$\sin x = a \ (|a| \leqslant 1).$$

Решим это тригонометрическое уравнение. Так как синус от аргумента, изменяющегося от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, есть функция, возрастающая от -1 до $+1$, то каково бы ни было число a (при условии $|a| < 1$), существует одно и только одно значение аргумента (обозначим его через α), по абсолютной величине не превосходящее $\frac{\pi}{2}$, синус которого равен a:

$$\sin \alpha = a.$$

Наше уравнение перепишем так:

$$\sin x = \sin \alpha, \quad \text{или} \quad \sin x - \sin \alpha = 0,$$

или

$$2 \sin \frac{x-\alpha}{2} \cdot \cos \frac{x+\alpha}{2} = 0.$$

Это даёт два уравнения:

$$\sin \frac{x-\alpha}{2} = 0 \quad \text{и} \quad \cos \frac{x+\alpha}{2} = 0.$$

Последние уравнения удовлетворяются только при следующих значениях аргументов (ср. § 34):

$$\frac{x-\alpha}{2}=k\pi, \quad \frac{x+\alpha}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi \qquad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Отсюда

$$x=\alpha+2k\pi \quad \text{и} \quad x=-\alpha+(2k+1)\pi,$$

что можно соединить в одну формулу:

$$x=(-1)^n\alpha+n\pi \qquad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Но α есть не что иное, как главное значение $\arcsin\alpha$. Значит,

$$x=\operatorname{Arc}\sin\alpha=(-1)^n\arcsin\alpha+n\pi \qquad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

и мы получили формулу (124), данную в § 98.

Из хода рассуждения ясно, что никаких других значений $\operatorname{Arc}\sin\alpha$ иметь не может. Совершенно так же доказывается общность формул для значений остальных обратных тригонометрических функций.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК.

Тригонометрия возникла в связи с астрономией в качестве её вспомогательного вычислительного средства. Определение положения светила на небесной сфере связано с решением сферических треугольников, т. е. треугольников, стороны которых суть дуги больших кругов на поверхности сферы. Таким образом, более сложная задача — решение сферических треугольников — встречалась и решалась, насколько известно, раньше более простой задачи — решения плоских треугольников. Уже в древней Греции тригонометрия достигла довольно высокой степени развития. В трудах знаменитого астронома Птолемея (II в. до н. э.) решается целый ряд вопросов тригонометрии. Греки имели дело не с числовыми величинами, как, например, синус, а с отрезками. Роль синуса играет хорда двойной дуги, хорда, стягивающая угол 2α (равная $2R\sin\alpha$, где R — радиус круга). Теорема, определявшая хорду суммы двух дуг, соответствовала нашей теореме сложения для синусов, а теорема о хорде половинной дуги соответствовала теореме о синусе половинного угла.

Птолемей построил таблицу этих хорд для дуг через $\frac{1^\circ}{2}$, $\left(\text{что соответствует таблице синусов через } \frac{1}{4}^\circ\right)$. Хорда дуги в $\frac{1^\circ}{2}$ принимается приближённо равной дуге (причём оценивается погрешность), и далее с помощью теоремы сложения строится вся таблица.

Тригонометрия древних индусов близка к греческой. Вместо хорды двойного угла индусы рассматривали полухорду. Эта полухорда называлась индусами „тетивой лука". Арабы назвали эту величину „синус" — латинский перевод арабского слова (означающего „пазуха"), имеющего сходную транскрипцию с индусским словом, означающим „тетива лука".

В средние века работа по развитию математики велась в основном в странах Востока, в частности, у народов Узбекистана и Таджикистана. Одним из первых восточных математиков был хорезмский учёный[1]) Мохxамед Аль-Хорезми. Им была, между прочим, составлена новая таблица синусов и косинусов.

Важнейшим этапом в развитии тригонометрии были работы таджикского математика Нассир Эддина (XIII в.). Тригонометрия в его работе впервые выступает в качестве самостоятельной математической дисциплины. Нассир Эддин систематически исследовал основные случаи решения треугольников как плоских, так и сферических.

В XIV — XV вв. центром восточной культуры становится Самарканд, где была основана знаменитая обсерватория Улугбека (первая половина XV в.). Улугбек и его сотрудники составили значительно более точные, чем прежде, таблицы синусов и косинусов. Причём по значениям этих величин для данного угла они определяли их значения не только для половины, но и для трети угла. Это приводило к решению кубических уравнений, для отыскания корней которых были найдены приближённые методы.

В Западной Европе развитие математики началось значительно позже, чем на Востоке, и проходило вначале под влиянием восточной математики. Результаты Нассир Эддина были лишь в XV в. переоткрыты математиком Региомонтаном (1436 — 1476).

В дальнейшем развитие океанического мореплавания потребовало более точного определения положения небесных светил, а следовательно, более точных таблиц тригонометри-

---

[1]) Хорезмский оазис на Аму-Дарье — один из древнейших очагов культуры.

ческих функций. Региомонтан составил таблицу синусов для углов через $1'$ с точностью до $\frac{1}{10^7}$.

Действие умножения многозначных чисел весьма утомительно; арабы пользовались формулами, выражающими произведения синусов и косинусов через их суммы, для того чтобы заменять действие умножения сложением. Впоследствии Непер (1550—1617) открыл логарифмическую функцию, позволяющую свести операцию умножения к сложению; он построил таблицы логарифмов тригонометрических функций.

Развитие алгебраической символики, введение отрицательных чисел, рассмотрение направленных отрезков и дуг, изучение тригонометрических функций любых углов приблизили тригонометрию к её современному виду. Учение о колебательном движении дало новое применение тригонометрических функций к изучению периодических процессов.

С XVII в. изучение тригонометрических функций включилось в общий метод математического анализа. И. Ньютон (1642—1727) нашёл выражения для $\sin x$ и $\cos x$ в виде бесконечных рядов:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} - \ldots, \qquad (*)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot2} + \frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} - \ldots \qquad (**)$$

С помощью формул (*), (**) можно находить значения $\sin x$, $\cos x$ с любой степенью точности и составлять их таблицы. Аналогичные формулы были найдены для $\operatorname{arc\,tg} x$, $\operatorname{ars\,sin} x$; например, при $-1 \leqslant x \leqslant 1$,

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots. \qquad (***)$$

Так как $\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}$ (см. § 106), то с помощью формулы (***) для $x = \frac{1}{5}$ и $x = \frac{1}{239}$ удобно определять значение π с любым числом верных знаков. При $x = 1$ мы приходим к интересной формуле Лейбница:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Л. П. Эйлер (1707—1783), крупнейший математик XVIII в., член петербургской Академии наук, придал тригонометрии современный вид. Именно Эйлер определяет синус, косинус и другие тригонометрические величины не как отрезки, а как числа, выражающие отношения отрезков. Эйлер нашёл ряд выражений для тригонометрических и обратных тригонометрических функций в виде бесконечных сумм и произведений, например, следующее:

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{n\pi^2}\right)\ldots$$

Рассматривая функции не только действительного, но и комплексного аргумента, Эйлер открыл замечательные связи между тригонометрическими функциями и показательной, а также между обратными тригонометрическими функциями и логарифмической.

Из более поздних работ отметим важную теорему Фурье (1760—1830) о том, что всякое периодическое движение можно рассматривать как „наложение“ простых гармонических колебаний.

Великий русский геометр Н. И. Лобачевский (1793—1855) открыл геометрическую систему, отличную от обычной эвклидовой. Существенным этапом в создании геометрии Лобачевского было построение особой тригонометрии для неэвклидовой плоскости. Соотношения между элементами треугольников в этой плоскости отличны от соотношений между аналогичными элементами для треугольников в обычной эвклидовой плоскости. Так, сумма углов треугольника в плоскости Лобачевского всегда меньше π и зависит от его площади. Если площадь треугольника стремится к нулю, сумма его углов стремится к π, и соотношения между его сторонами и углами в пределе переходят в соотношения для треугольников в эвклидовой плоскости.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Определение тригонометрических функций любого угла и простейшие свойства

Некоторые важнейшие формулы

Приведение к острому углу

Глава третья

ИЗУЧЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТА

Тригонометрические функции числового аргумента

График функции

Графики тригонометрических функций

Ход изменения тригонометрических функций

Гармонические колебания

Глава четвёртая

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Формулы сложения и вычитания

Формулы для двойного и половинного аргументов

Преобразования произведения тригонометрических функций в сумму и обратные преобразования

Приближённые равенства для тригонометрических функций

Применение комплексных чисел

Глава пятая

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Основные зависимости между элементами треугольника

Различные зависимости между элементами треугольника

Глава шестая

РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Таблицы логарифмов тригонометрических функций

Решение косоугольных треугольников

Некоторые применения

Глава седьмая

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Обратные тригонометрические функции

Изучение обратных тригонометрических функций

Преобразования обратных тригонометрических функций

Тригонометрические уравнения

Редактор *А. А. Борисов*. Техн. редактор *Н. Н. Махова*

Подписано к печати 12/V 1950 г. А02849. Бумага $84 \times 108^{1}/_{32}$. Бум. листов 2,87. Печатных листов 9,43. Учётно-изд. листов 9,27. Тираж 20 тыс. экз. Цена без переплёта 1 р. 40 к. Переплёт 60 к. Заказ № 1308.

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Главполиграфиздата при Совете Министров СССР. Москва, Валовая, 28.