УДК 374(075.3):51
ББК 74.200.58+22.1
К82

Крижановский А.Ф.

К82 Математические кружки. 5–7 классы. — М.: ИЛЕКСА, 2016. — 320 с.: илл.

ISBN 978-5-89237-443-9

В книге представлены олимпиадные задачи по математике и задачи повышенной сложности по школьным темам. Все задачи сгруппированы по занятиям. Есть дополнительные задания по темам, формирующие творческий подход к решению задач, развивающие логическое мышление, способность работать самостоятельно. Все материалы пособия подготовлены в ориентации на внеурочные кружковые занятия, в которых участвуют школьники с разным уровнем подготовленности по математике. Содержание заданий, их группировка и последовательность отражают двадцатилетний опыт автора по подготовке школьников к математическим олимпиадам. В конце книги приведены методические рекомендации для учителей, ответы, указания и решения задач, примеры различных методических соревнований. Отдельно приведены пропедевтические задания по некоторым геометрическим сюжетам, задания на моделирование, ссылки на интернет-ресурсы. Книга рассчитана на школьников, учителей и преподавателей — руководителей математических кружков, студентов педагогических вузов, взрослых, помогающих детям в учебе.

УДК 374(075.3):51
ББК 74.200.58+22.1

ISBN 978-5-89237-443-9

ПРЕДИСЛОВИЕ

В книге представлены задачи по математике, разбитые на отдельные занятия — «листочки». Тематика занятий включает в себя классические разделы «олимпиадной» математики, такие как чётность, принцип Дирихле, инвариант и многие другие. Наряду с этим, часть материала посвящена углублённому повторению и решению задач повышенной сложности по таким школьным темам, как натуральные числа, дроби, проценты, графики, многочлены, треугольники и т. д. Отдельной важной частью занятий является развитие творческого мышления, умение создать или проанализировать неожиданную математическую конструкцию. Такого рода задания часто включены и как дополнение к основным заданиям по теме, и как материал для отдельных занятий по развитию конструктивных способностей.

Занятия сгруппированы по классам и темам в соответствии с авторским видением удобной последовательности их изучения, а также школьной программой по математике. Однако практически все темы можно изучать отдельно, меняя их порядок или пропуская некоторый материал. «Листочки», в основном, составлены с избыточным количеством задач. Часть из них очень простая, и посильна любому школьнику. Многие задачи требуют мозгового штурма, настойчивости и целеустремлённости в поисках ответа и его обоснования. Некоторые представляются автору достаточно сложными для школьников, и преподавателю или руководителю кружка можно разобрать их с детьми совместно или же опустить вовсе. «Листочки» можно использовать на кружке для начинающих — разбирая посильный для школьников материал, на кружке среднего уровня — пытаясь на занятии и с учётом домашнего задания решить большинство задач, на кружке для математически подготовленных и мотивированных детей — анализируя наиболее сложные задания.

Собранный в книге материал отражает двадцатилетний опыт работы автора по подготовке детей к математическим олимпиадам. Структура и содержание занятий разработаны специально для математических кружков, куда ходят дети из разных школ и с различным уровнем математической подготовки, апробированы на занятиях кружка «Физматик» при физико-энергетическом факультете Харьковского национального университета им. Каразина. Естественно, автор старался при этом учесть опыт многих известных центров математической подготовки школьников, прежде всего — Москвы и Санкт-Петербурга.

В книге представлено около 100 разработок занятий — «листочков», в конце даны краткие методические комментарии для преподавателей по каждому занятию, ответы, указания и решения задач, примеры различных математических соревнований. Некоторые задачи включены в несколько занятий, чтобы выявить различные способы их решения или естественным образом организовать на кружке элементы повторения, так же некоторые задачи из «листочков» используются в приведенных разработках математических соревнований. Особняком стоят «листочки», посвящённые пропедевтике важных геометрических сюжетов, таких, как кривые второго порядка, паркеты, правильные многогранники. На них с разной степенью подробности намечены идеи и сюжеты, даны задания на моделирование, ссылки на интернет ресурсы. В зависимости от математических предпочтений руководителя кружка, эти занятия можно строить как в виде решения задач, так и по системе «моделируем своими руками», целесообразно привлечь компьютерную технику для визуализации многих эффектов.

Автор с удовольствием приносит благодарность К. Д. Драчу, Е. Л. Фертман, А. А. Кислинскому, А. П. Ершовой, чьи ценные замечания и задачи способствовали улучшению книги.

Представленные в книге материалы предназначены для творческих учителей средней и старшей школы; руководителей математических кружков; детей, любящих математику и интеллектуальное творчество; всех, интересующихся математикой. Они будут также полезны для домашних тренировок в решении математических задач вместе с родителями, при проведении летних математических школ. Любите математику! Приятной вам интеллектуальной работы!

5 класс

Занятие

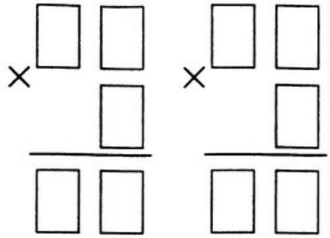
1 Арифметика

1. Сколько существует четырёхзначных чисел, в запись которых входят только цифры 0 и 9?
2. Сколько существует восьмизначных чисел, сумма цифр каждого из которых равна 2?
3. Сколько существует нечётных восьмизначных чисел, сумма цифр каждого из которых равна 3? Запишите все такие числа: а) цифрами; б) словами.
4. Поставьте скобки в выражении $6 \cdot 8 + 20 : 4 - 2$ так, чтобы значение выражения было равно 58.
5. В записи 6 6 6 6 6 6 6 6 поставьте между некоторыми цифрами знак плюс так, чтобы получилось выражение, значение которого равно: а) 264; б) 13332; в) 67332.
6. Впишите в квадраты цифры от 0 до 9 так, чтобы получилось три верных примера на сложение (все 10 вписанных цифр должны быть различны): а) найдите хотя бы одно решение; б) найдите ещё одно решение; в) найдите все решения и докажите, что других нет.

$$\square + \square = \square\square$$
$$\square + \square = \square$$
$$\square + \square = \square$$

7. Решите ребус КИС + КСИ = ИСК (одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры): а) найдите хотя бы одно решение; б) докажите, что других решений нет.
8. Решите ребус ШАРИК + МУРКА = ДРУЗЬЯ.

9. Впишите в квадраты цифры от 0 до 9 так, чтобы получилось два верных примера на умножение (все 10 вписанных цифр должны быть различны): а) найдите хотя бы одно решение; б) найдите ещё одно решение; в) найдите все решения и докажите, что других нет.



10. Выписали подряд все числа от 1 до 99. Сколько раз написана цифра 5?
11. Из спичек сложили 6 неверных равенств (в римской нумерации). Переложите в каждом равенстве по 1 спичке так, чтобы равенства стали верными.

а)

г)

б)

д)

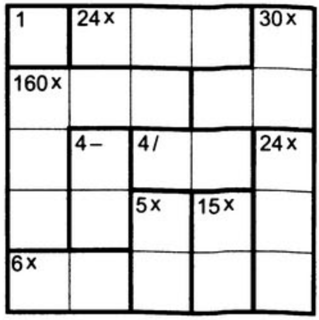
в)

е)

12. Коле так надоели мухи, что он решил их всех переловить. За 4 дня он наловил 216 мух, причём каждый день, кроме первого, он ловил столько мух, сколько за все предыдущие вместе. Сколько мух поймал Коля во второй день?
13. Выписали подряд все числа от 1 до 1000. Сколько раз выписана цифра 1?
14. Напишите наименьшее десятизначное число, все цифры которого различны. Какая цифра стоит в разряде десятков миллионов?

15. Сумма и произведение четырёх натуральных (не обязательно различных) чисел равны 8: а) найдите хотя бы одну четвёрку таких чисел; б) найдите все такие четвёрки и докажите, что других нет.

16. Решите сукендо. В каждой строке и каждом столбце все цифры (от 1 до 5) должны быть различными, а в каждой фигуре результат записанного математического действия должен совпадать с указанным: а) найдите одно решение; б) докажите, что других решений нет.



17. В записи 1 2 3 4 5 6 7 8 9 поставьте знаки плюс и минус так, чтобы значение полученного выражения равнялось 100: а) используя 3 знака; б) используя 4 знака; в) используя 7 знаков.

18. Вместо всех звёздочек в выражении $1*2*3*4*5*6*7*8*9$ расставьте знаки арифметических действий (+, – , · , :) так, чтобы его значение равнялось 100.

Занятие 2 Десятичная система счисления

1. Могло ли оказаться, что для нумерации всех страниц в книжке потребовалось ровно 100 цифр (страницы пронумерованы подряд, начиная с первой)?

2. Натуральные числа от 1 начинают выписывать подряд. Какая цифра окажется на 2012-м месте?

3. Из книги выпала какая-то её часть. Первая страница выпавшего куска имеет номер 387, а номер последней выпавшей страницы состоит из тех же цифр, но в другом порядке. Сколько листов выпало из книги?

4. Все натуральные числа от 1 до 100 разбиты на две группы : чётные и нечётные. Определить, в какой из групп сумма всех цифр, использованных для записи чисел, больше и на сколько.
5. Сумма двух чисел равна 495. Одно из них оканчивается нулём. Если этот нуль зачеркнуть, то получится второе число. Найдите данные числа.
6. Сумма двух чисел равна 499. Одно из них оканчивается четвёркой. Если эту четвёрку зачеркнуть, то получится второе число. Найдите данные числа.
7. Цифра десятков в данном двузначном числе втрое больше цифры единиц. Если эти цифры переставить, то получится число, меньшее данного на 36. Найдите данное число.
8. Докажите, что если в трёхзначном числе средняя цифра равна сумме крайних, то число делится на 11 без остатка.
9. Запишите произвольное трёхзначное число. Затем запишите число, состоящее из тех же цифр, но идущих в обратном порядке. Вычтите из большего числа меньшее. Полученный результат всегда разделится без остатка на 99. Почему?
10. К трёхзначному числу слева приписали 3, и оно увеличилось в 9 раз. Какое это число?
11. У трёхзначного числа первую цифру переставили в конец, и оно стало на 441 меньше. Какое это число?
12. У шестизначного числа первую цифру перенесли в конец, и оно стало в 5 раз меньше. Что это за число?
13. К натуральному числу справа приписали 6, и оно увеличилось в 13 раз. Какое это число?
14. К натуральному числу справа приписали 36, и оно увеличилось в 103 раза. Какое это число?
15. Восстановите запись в пункте а) одним способом, а в пункте б) — двумя. Докажите, что других способов нет.

а)
$$\begin{array}{r} -\ **** \\ *** \\ \hline 1 \end{array}$$

б)
$$\begin{array}{r} +\ ** \\ ** \\ \hline 197 \end{array}$$

16. Кащей сказал Ивану-царевичу: «Жить тебе до завтрашнего утра. Утром явишься пред мои очи, задумаю я цифры a, b, c. Назовешь ты мне три числа x, y, z. Выслушаю я тебя и скажу, чему равно значение выражения $ax + by + cz$. Тогда отгадай, какие a, b, c я задумал. Не отгадаешь — голову с плеч долой». Запечалился Иван, пошел думу думать. Надо бы ему помочь.

17. Найдите значение цифры a. Ответ обоснуйте: а) $\overline{a3} + \overline{a4} + \overline{a6} = 103$; б) $\overline{9a} : \overline{1a} = a$.

18. Выполните деление: $\overline{aa0aa} : \overline{aa}$.

19. Найдите все возможные значения цифр a и b, для которых $\overline{ab} \cdot a \cdot b = \overline{bbb}$.

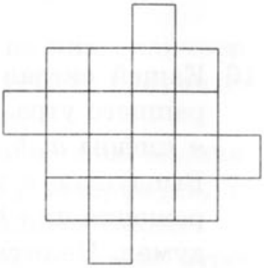
20. В 120ти квартирном доме два 60-ти квартирных подъезда. Все жильцы купили новые таблички с номерами квартир, при этом таблички для двузначных номеров стоили вдвое, а для трёхзначных — втрое дороже однозначных. Жильцы второго подъезда израсходовали на таблички 846 рублей. Сколько израсходовали жильцы первого подъезда?

21. Решите хидато. Нужно найти путь от числа 1 до числа 16, последовательно проходящий по всем числам в порядке возрастания. Из данной клетки двигаться можно только в клетку, соседнюю с ней по строке, столбцу или диагонали: а) найдите одно решение; б) докажите, что других решений нет.

	8		4
			3
	10		1
12		16	15

22. Из трёхзначного числа вычли число, записанное теми же цифрами, но идущими в обратном порядке. В результате получили 792. Найдите данное число (все возможные варианты).

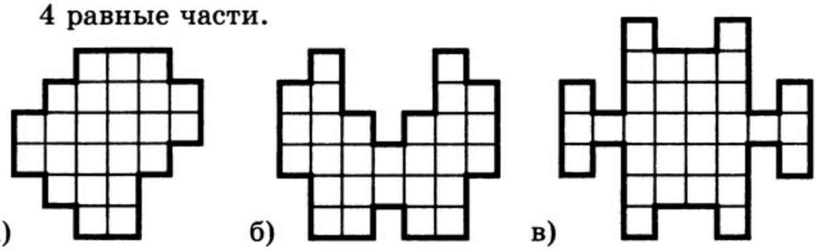
23. Разделите данную фигуру пятью способами на 4 равные части так, чтобы линии разрезов шли по сторонам клеточек.



Занятие 3 Развитие комбинационных способностей

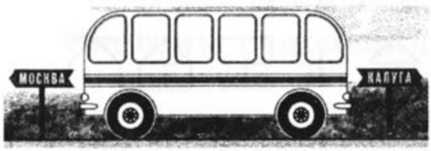
1. Девочка заменила каждую букву своего имени её номером в русском алфавите и получила число 2011533. Как её зовут?
2. Число 222122111121 получается, если в некотором слове заменить буквы на их номера в алфавите. Какое это слово?
3. Дан клетчатый квадрат 4×4. Раскрасьте его клетки в 4 цвета так, чтобы в каждой строке, в каждом столбце и в каждой из двух диагоналей цвета всех клеток были различны. Впишите теперь в клетки числа от 1 до 4 так, чтобы одинаковые числа не повторялись ни в строчках, ни в столбцах, ни в двух диагоналях, ни на клетках одного цвета.
4. Разрежьте квадрат со стороной 4 см на 5 прямоугольников с равным периметром, из которых только один является квадратом.
5. Нарисуйте карту из четырёх треугольных стран так, чтобы каждая граничила с каждой из остальных по отрезку.

6. Разрежьте каждую из трёх фигур на рисунке на 4 равные части.



а) б) в)

7. Следователь Иванов хочет установить по фотографии, куда ехал автобус. Как ему это сделать?



8. Восстановите два недостающих символа в данной последовательности букв или цифр:

ВДН?В Д?БИЦ

Занятие
4

Последовательности

Продолжите последовательность.
Объясните идею построения последовательности.

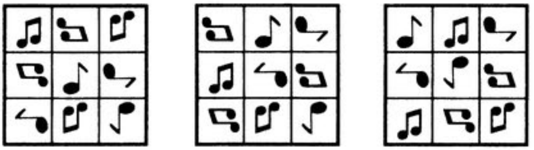
1. 1, 3, 5, 7, 9, ...
2. 1, 2, 4, 7, 11, ...
3. 1, 4, 9, 16, 25, ...
4. 1, 8, 27, 64, 125, ...
5. 1, 2, 4, 8, 16, ...
6. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...
7. 1, 3, 7, 15, 31, ...
8. 1, 2, 6, 24, 120, ...
9. 2, 6, 16, 44, ...

10. 2, 5, 11, 20, 32, ...
11. 11, 21, 41, 81, 161, ...
12. 1, 2, 3, 6, 11, 20, ...
13. 7, 21, 24, 72, 75, 225, ...
14. 1, 4, 27, 256, ...
15. 1, 11, 21, 1112, 3112, 211213, 312213, 212223, 114213, ...
16. 1, 10, 1011, 1011000, 10110001111, ...
17. 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, ...
18. 1, 3, 15, 105, ...
19. 15, 30, 26, 52, 48, 96, ...
20. м, м, с, м, д, м, м,?,?
21.  ...

Занятие 5 Последовательности - 2

Продолжите последовательность.
Объясните идею построения последовательности.

1. а, я, б, ю, в, э,?,?
2. п, р, н, о, с, т, л, м, у, ф,?,?
3. а, е, й, о, у, ...
4. з, а, и, а, н, а, а, а, и, а, д, а,?,?
5. о, д, т, ч, п, ш, с, ...
6. а, е, ё, и, о, у, ...
7. п, в, с, ч, п, с, ...
8. а, б, г, ж, о, ...
9. юг, кот, рука, книга, куплет, ...
10. абак, баня, весы, гора, дело, ...
11. д, р, м, ф, с, л, ...
12. басня, обувь, автор, огонь, идеал, ...
13. я, ф, м, а, м, и, ...
14. а, ау, аууа, ауууауаау, ...

15. Нил, Нева, Днепр, Хуанхе,...
16. к, о, ж, з, г, с, ...
17. капля, лужа, озеро, море, ...
18. база, ряса, сбор, пюре, ...
19. Европа, Америка, Азия, Австралия, Африка,...
20.  ...

Занятие
6 Системы счисления

1. Имеются двухчашечные весы и по одной гире с массами 1, 2, 4, 8, 16 г. На одну чашу весов кладут груз, а на другую можно класть гири. Докажите, что весы можно уравновесить, если масса груза равна 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., 31 г.
2. Переведите из десятичной системы счисления в двоичную числа: а) 14; б) 55; в) 99; г) 127; д) 129.
3. Переведите из двоичной системы счисления в десятичную числа: а) 101; б) 1101; в) 10001; г) 1111; д) 101011.
4. Решите задание 2, используя процедуру деления «в столбик».
5. «Необыкновенная девочка»

Ей было тысяча сто лет,
Она в сто первый класс ходила,
В портфеле по сто книг носила –
Все это правда, а не бред.

Когда, пыля десятком ног,
Она шагала по дороге,
За ней всегда бежал щенок
С одним хвостом, зато стоногий.

Она ловила каждый звук
Своими десятью ушами,
И десять загорелых рук
Портфель и поводок держали.

И десять темно-синих глаз
Рассматривали мир привычно...
Но станет все сейчас обычным,
Когда поймёте мой рассказ.

(А.Н. Стариков)

6. Выполните действия в двоичной системе. Проверьте результат с помощью вычислений в десятичной системе счисления: а) $1101 + 1111$; б) $10010 - 1101$; в) $111 \cdot 1011$; г) $11111100 : 111$.
7. В пробирку посадили некоторое одноклеточное животное, которое размножается делением пополам каждую секунду. Через 16 секунд пробирка оказалась полной. Определить, сколько времени понадобилось, чтобы заполнить половину пробирки. Сколько «жителей» было в пробирке через 7 секунд?
8. Ведущий загадывает натуральное число от 1 до 100. Ему можно задавать вопросы, на которые он отвечает «да» или «нет». Выясните: а) как отгадать задуманное число за 7 вопросов; б) можно ли гарантированно угадать задуманное число за меньшее число вопросов? в) изменится ли решение двух предыдущих пунктов, если ведущий загадывает число от 1 до 127?
9. Переведите из десятичной системы счисления в троичную числа: а) 69; б) 97; в) 253.
10. Переведите числа из троичной системы в десятичную: а) 1220; б) 21122; в) 10211.
11. Решите задание 9, используя процедуру деления «в столбик».
12. Выполните действия в троичной системе. Проверьте результат с помощью вычислений в десятичной

системе счисления: а) 1201 + 1002; б) 1022 – 222; в) 102 221; г) 21210 : 12.

13. Имеются двухчашечные весы и по одной гире с массами 1, 3, 9, 27, 81 г. На одну чашу весов кладут груз, гири разрешается класть на обе чаши. Докажите, что весы можно уравновесить, если масса груза равна: а) 31 г, 52 г, 74 г, 80 г; б) любому целому числу граммов от 1 до 121 включительно.

Занятие

7 Системы счисления - 2

1. Переведите числа в троичную систему счисления: а) 31; б) 52; в) 74; г) 80; д) 111.

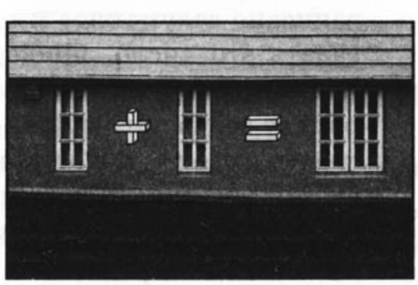
2. Переведите числа в уравновешенную троичную систему: а) 31; б) 52; в) 74; г) 80; д) 111.

3. Переведите из уравновешенной троичной системы в десятичную числа: а) $1\bar{1}01\bar{1}$; б) $100\bar{1}\bar{1}$.

4. Какие цифры и разряды используются в системе счисления с основанием: а) 4; б) 5; в) 7; г) 10; д) 16?

5. Переведите числа из двоичной системы в троичную: а) 11001; б) 10111.

6. Переведите числа из троичной системы в двоичную: а) 11201; б) 22210.



7. Переведите число 2130: а) из четверичной системы в пятеричную; б) из пятеричной системы в четверичную.
8. Переведите число 1111011 из двоичной системы в шестнадцатиричную.
9. Переведите число 5af из шестнадцатиричной системы: а) в двоичную; б) в десятичную.
10. Найдите все двузначные числа, вшестеро большие своей суммы цифр (в десятичной системе счисления).
11. В саду росло 63_q фруктовых деревьев, из них 30_q яблони, 21_q груши, 5_q сливы, 4_q вишни. В какой системе счисления ведется счет, и сколько было деревьев каждого вида?
12. Запишите при помощи римской нумерации: а) 27; б) 45; в) 161; г) 869; д) 1999; е) 2012.
13. Переведите в десятичную систему счисления: а) LXXIV; б) XCVIII; в) CDXIX; г) MMDCCCXXXVII.
14. Переведите число XLIX в: а) двоичную систему; б) уравновешенную троичную систему; в) семеричную систему.
15. Найдите сумму: а) $1 + 2 + 4 + 8$; б) $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 1024$; в) $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n$.
16. Предложите вашему другу задумать любое натуральное число от 1 до 31. Затем покажите ему таблицу с числами. Попросите вашего друга, чтобы он, не возвращая вам таблицы, назвал номера строк, в которых записано задуманное им число. Тогда вы сможете отгадать это число, придерживаясь такого алгоритма. Запишите в двоичной системе число, которое в разрядах, соответствующих номерам указанных другом строк, имеет 1, а в остальных разрядах 0. Переведите его в десятичную систему, и получите ответ. Например, друг загадал 29. Оно есть в строках 1,3,4,5. Получаем: $11101_2 = 16 + 8 + 4 + 1 = 29_{10}$.

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31
2	3	6	7	10	11	14	15	18	19	22	23	26	27	30	31
4	5	6	7	12	13	14	15	20	21	22	23	28	29	30	31
8	9	10	11	12	13	14	15	24	25	26	27	28	29	30	31
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

Занятие
8 Переливания

1. Имеются два сосуда вместимостью 3 л и 5 л. Как при помощи этих сосудов набрать из крана ровно 4 л?
2. Есть два сосуда ёмкостью 5 л и 7 л. Как налить в один из них ровно 6 л воды из водопроводного крана? Пользоваться другими сосудами нельзя.
3. Имеются две кастрюли вместимостью 8 л и 5 л. Как при помощи них набрать из крана ровно 7 л?
4. В первый сосуд входит 9 л, во второй — 5 л, в третий — 3 л. Первый сосуд наполнен водой, остальные два пусты. Как с помощью этих сосудов отмерить ровно 1 литр воды? А 4 литра?
5. Как набрать в реке ровно 6 л воды, если есть только два ведра: четырёхлитровое и девятилитровое?
6. Есть два ведра: 17 л и 5 л. Как с их помощью набрать из озера 13 л воды?
7. Как с помощью семилитрового ведра и трёхлитровой банки набрать в кастрюлю ровно 5 л воды?
8. Бидон ёмкостью 10 л наполнен молоком. Требуется перелить из этого бидона 5 л в семилитровый бидон, используя при этом ещё один бидон ёмкостью 3 л. Как это сделать?

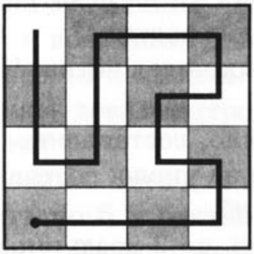
9. В бочке находится не менее 13 вёдер бензина. Как отлить из неё ровно 8 вёдер с помощью девятиведёрной и пятиведёрных бочек?
10. В кастрюле находится не менее десяти литров супа. Можно ли отлить из неё ровно 6 л, используя две кастрюли вместимостью 9 л и 5 л соответственно?
11. Двенадцатилитровая кастрюля наполнена компотом. Как его разлить на две равные части, пользуясь только пятилитровой и восьмилитровой кастрюлями?
12. В котелке не менее 10 л киселя. Как отлить из него ровно 6 л, пользуясь девятилитровым ведром и пятилитровым бидоном?
13. В бочке 18 л керосина. Есть два ведра по 7 л, в которые нужно налить по 6 л бензина. Кроме того, есть черпак объёмом 4 л. Как осуществить разлив?
14. Имеются три бочонка вместимостью 6 л, 3 л и 7 л. В первом и третьем содержится соответственно 4 л и 6 л кваса. Требуется, пользуясь только этими бочонками, разделить квас на две равные части.
15. В трёх кучках находится 22, 14 и 12 орехов. Требуется за три перекладывания уравнять число орехов в каждой кучке, соблюдая при этом условие: из любой кучки можно взять несколько орехов и переложить в другую кучку, причём ровно столько, сколько их было в этой второй кучке.
16. Имеются два типа песочных часов. Одни отмеряют 7 мин, вторые — 11 мин. Как с их помощью отмерить ровно 15 минут?
17. На книжной полке стоят учебники по математике за разные классы в таком порядке: 1, 2, 6, 10, 3, 8, 4, 7, 9, 5. Можно ли расставить их по порядку с 1 по 10 за три перекладывания, если за один раз можно брать по две соседние книги и ставить их вместе, не разъединяя, на другое место?

Занятие
9

Чётность - 1

1. Чётным или нечётным будет результат действия для двух чисел, если первое из них чётно (нечётно), второе чётно (нечётно), а выполняемое действие: а) сложение; б) вычитание; в) умножение; г*) деление?
2. Сумма двух целых чисел нечётна. Чётным или нечётным будет их произведение?
3. Сумма трёх целых чисел чётна. Чётно или нечётно их произведение?
4. а) Может ли число, составленное из одних четвёрок, делиться нацело на число, составленное из одних троек? б) А наоборот?
5. У 7-и гномов есть по 2 воздушных шарика: красный и жёлтый. Могут ли они так поменяться друг с другом шариками, чтобы у каждого было по 2 шарика одного цвета?
6. Страницы энциклопедии пронумерованы подряд числами от 1 до 500. Двоечник Вася вырвал из этой энциклопедии 25 листов и сложил все 50 чисел, которые на них написаны. В ответе у Васи получилось 2012. Не ошибся ли он?
7. Во время сбора грибов мальчик несколько раз переходил полотно одной и той же железной дороги. По одну или по разные стороны от этого полотна находится теперь мальчик и его дом, если число переходов через железную дорогу равно: а) 5; б) 12; в) 2013; г) n?
8. Аладдин, уходя, написал на листе число 2000. В течение 1001 ночи принцесса Жасмин меняла это число, каждую ночь прибавляя или отнимая от него единицу. Мог ли Аладдин, вернувшись, увидеть на листе число 2012?

9. Фишка стоит в левом нижнем углу доски 4×4. За один ход она может передвинуться на одну клетку по вертикали или по горизонтали. Каких клеток доски она может достичь, побывав при этом на каждой из клеток ровно по 1 разу? Найдите все такие клетки, докажите, что до них фишка добраться может, а до остальных — нет.



10. Парламент одной страны образовал столько комиссий, что даже спикер не знал точно, сколько их. К тому же каждый день парламент либо добавлял в одну из комиссий одного члена, либо исключал одного из какой-то комиссии. Через год численность ни одной комиссии не изменилась. Докажите, что год был високосный.

11. Граница владений двух рыцарей A и B проходит по руслу извилистого ручья. На обрывке карты показано расположение замка рыцаря A, деревни и участка ручья. Кому из рыцарей принадлежит деревня?

12. Попросите вашего друга взять в каждую руку по монетке: в одну — 10 коп., в другую — 5 коп., не показывая вам в какой руке — какая монетка. Затем попросите его проделать в уме следующие две операции:

1) умножить достоинство монетки в левой руке на *любое чётное* число, а достоинство монетки в правой руке — на *любое нечётное* число;

2) сложить два получившихся числа и сказать вам эту сумму.

Можете ли вы, на основании ответа вашего друга, сказать, в какой руке — какая монетка?

13. Костя и Максим играют в такую игру. В строке

1		2		3		4		5		6		7		8		9

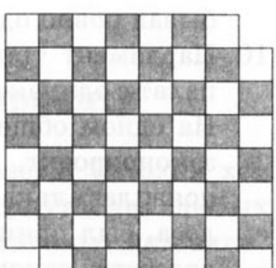
они по очереди ставят в пустые клетки знаки + или –. Если значение полученного в конце выражения чётно, выигрывает Максим, а если нечётно — Костя. Может ли Максим выиграть? Ответ объясните.

Занятие
10

Чётность - 2

1. Можно ли доску размером 5×5 заполнить доминошками размером 1×2?

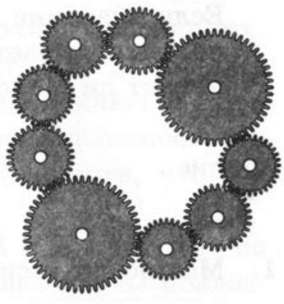
2. Из шахматной доски вырезали две клетки — a1 и h8. Можно ли оставшуюся часть доски (см. рисунок) покрыть 31-й доминошкой так, чтобы каждая покрывала ровно две клетки доски?



3. Вокруг лесной поляны растут ели. От нечего делать, Серый Волк измерил их высоты и заме-

тил, что, во-первых, все числа оказались целыми, а во-вторых, высоты соседних елей отличаются на 1. Могло ли такое быть, если елей было: а) 10; б) 21?

4. Ученица 5 класса Катя и несколько её одноклассников встали в круг, взявшись за руки. Оказалось, что каждый держит за руки либо двух мальчиков, либо двух девочек. Если в кругу стоит 10 мальчиков, то сколько там стоит девочек?
5. 25 мальчиков и 25 девочек сидят за круглым столом. Докажите, что у кого-то из сидящих за столом оба соседа — одного пола.
6. Можно ли нарисовать замкнутую ломаную, каждое звено которой пересекается ровно с одним из остальных звеньев, если количество звеньев равно: а) 6; б) 7?
7. Может ли прямая, не содержащая вершин замкнутой 11-звенной ломаной, пересекать все её звенья?
8. На плоскости расположено 9 шестерёнок, соединенных по цепочке (см. рисунок). Могут ли все шестерёнки вращаться одновременно?



9. Можно ли ходом коня обойти все клетки шахматной доски, начав с клетки a1, закончив в клетке h8 и на каждой клетке доски побывав ровно один раз?
10. Парламент тридесятого королевства состоит из двух палат с одинаковым числом парламентариев в каждой. На одном общем заседании ими был принят важный законопроект. На следующее утро в одной из газет появилась такая заметка: «Вчера, с перевесом в 23 голоса, был принят такой необходимый для нашего королевства законопроект! Воздержавшихся, как всегда, не было». Правдива ли она?

11. На доске написаны десять чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. За один ход разрешается к любым двум из них одновременно добавлять по единице. Можно ли за несколько ходов все числа сделать равными?
12. Кузнечик прыгает по прямой, причём в первый раз он прыгнул на 1 см в какую-то сторону, во второй раз — на 2 см, и т. д. Докажите, что после 2013 прыжков он не мог оказаться там, где начинал.
13. Все костяшки домино выложили в цепь. На одном конце оказалось 5 очков. Сколько очков на другом конце?
14. На доске 25×25 расставлены 25 шашек, причём их расположение симметрично относительно одной из диагоналей. Докажите, что на ней стоит хотя бы одна шашка.
15. В квадратной доске 4×4 вырезали несколько клеточек (отмечены X). Можно ли оставшуюся доску покрыть доминошками 2×1 (доминошки не перекрываются и за край доски не выходят)?

а)

		X	

б)

		X	
	X		

в)

			X
	X		

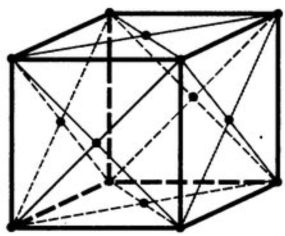
Занятие

11 От чётности к инварианту

1. На столе стоят 7 стаканов дном вверх. За один ход разрешается одновременно перевернуть два любых стакана. Можно ли поставить все стаканы дном вниз?
2. В квадрате одна угловая клетка покрашена в чёрный цвет. Остальные клетки этого квадрата — белые. За

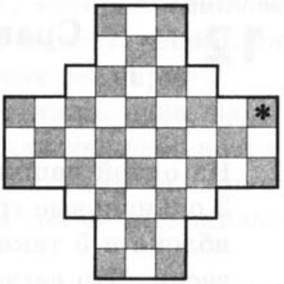
один ход можно менять цвета всех клеток любой строки или любого столбца на противоположные. Можно ли через несколько ходов добиться того, чтобы все клетки стали чёрными, если размеры квадрата: а) 4×4; б) 3×3?

3. На доске записаны числа 1, 2, 3, ..., 2013. За 1 шаг разрешается вытереть с доски любые два числа и вместо них записать их разность (следим, чтобы вычитаемое было не больше уменьшаемого). Может ли через 2012 шагов на доске остаться число нуль?
4. В банке лежат чёрные и белые зёрнышки. Наугад берут два из них. Если они одинакового цвета, то вместо них в банку кладут одно чёрное зёрнышко, если разного — то чёрное зёрнышко забирают, а белое кладут обратно в банку. В конце концов, осталось одно зёрнышко. Какого оно цвета, если белых зёрнышек в банке изначально было 100?
5. На шахматную доску поместили фигуру «верблюд», которая перемещается ходами вида (1; 3), в отличие от коня, который перемещается ходами вида (1; 2). Может ли «верблюд», стартовав с какого то поля, закончить свой маршрут на поле, соседнем со стартовым?
6. На кубе отмечены вершины и центры граней, а также проведены диагонали всех граней. Можно ли по отрезкам диагоналей обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно по одному разу?

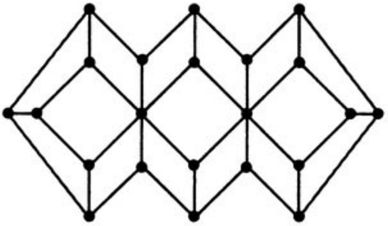


7. Мышка грызёт куб сыра с ребром 3, разбитый на 27 единичных кубиков. Когда мышка съедает какой-либо кубик, она переходит к кубику, имеющему общую грань с предыдущим. Может ли мышка съесть весь куб, кроме центрального кубика (там спрятан крючок мышеловки)?

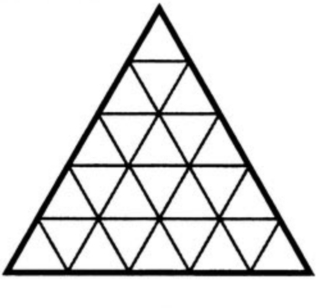
8. Обойдите доску, побывав на каждой клеточке только один раз. За один ход можно передвинуться на одну клетку по вертикали или по горизонтали. Можно ли решить задачу, если стартовать придётся с клеточки, отмеченной звёздочкой?



9. На рисунке изображена схема городов и дорог в некотором государстве. Можно ли обойти все города, побывав в каждом из них ровно по одному разу?



10. Треугольный замок разделен на треугольные залы. В середине каждой стены, разделяющей залы, сделана дверь. Рыцарь вошел в замок, прогулялся по нескольким залам, побывав в каждом из них ровно один раз, а затем вышел из замка. Какое наибольшее число залов он мог посетить?



Занятие 12 Сравнения и взвешивания

Сравнения

1. На одной чашке весов лежат 6 одинаковых яблок и 3 одинаковые груши, на другой чашке — 3 таких же яблока и 5 таких же груш. Весы находятся в равновесии. Что легче: яблоко или груша?
2. Три одинаковых яблока тяжелее, чем четыре одинаковые груши. Что тяжелее: 4 яблока или 5 груш?
3. Груша и слива весят столько, сколько весят 2 яблока, 4 груши весят столько, сколько весят вместе 5 яблок и 2 сливы. Что тяжелее: 7 яблок или 5 груш?
4. 6 карасей тяжелее 10 лещей, но легче 5 окуней; 10 карасей тяжелее 8 окуней. Что тяжелее: 2 карася или 3 леща?

Взвешивания на чашечных весах без гирь

5. Из трёх одинаковых по виду монет одна фальшивая, она легче настоящей. Как найти фальшивую монету одним взвешиванием на чашечных весах без гирь?
6. Есть 9 монет, из которых 8 — настоящие, они весят одинаково, и одна фальшивая, которая тяжелее настоящей. Как определить фальшивую монету при помощи двух взвешиваний на чашечных весах без гирь?
7. Одна из четырёх монет — фальшивая, а остальные — настоящие. Фальшивая отличатся по весу от настоящих, но неизвестно, легче она или тяжелее. Как определить фальшивую монету на чашечных весах без гирь, используя не более двух взвешиваний?
8. В мешке 24 кг гвоздей. Как при помощи чашечных весов без гирь отвесить 9 кг гвоздей?

9. Среди 27 монет одна фальшивая, которая тяжелее настоящей. Как найти фальшивую монету, используя три взвешивания на чашечных весах без гирь?
10. Из 75 одинаковых по виду монет лишь одна фальшивая, но неизвестно, легче она или тяжелее настоящей. Как определить за два взвешивания на чашечных весах без гирь, тяжелее или легче фальшивая монета, чем настоящая?
11. Есть четыре предмета различного веса, которые нужно упорядочить по убыванию весов, и чашечные весы без гирь. На каждую чашку помещается только один предмет. Как нужно действовать, чтобы решить задачу, используя не более пяти взвешиваний?
12. Среди четырёх золотых монет с надписями 1 пиастр, 2 пиастра, 3 пиастра и 5 пиастров три настоящие — их масса в граммах равна их достоинству, и одна фальшивая — её масса в граммах отличается от её достоинства. Как при помощи двух взвешиваний на чашечных весах без гирь определить фальшивую монету?

Взвешивания на стрелочных (электронных) весах

13. Имеется три мешка с монетами, в двух из них настоящие монеты по 10 г каждая, а в одном — фальшивые по 9 г каждая. Как за одно взвешивание на стрелочных весах определить, в каком мешке фальшивые монеты? (Мешки можно развязывать, а монеты из них вынимать).
14. Имеется 10 мешков с монетами, в девяти из них настоящие монеты по 10 г каждая, а в одном — фальшивые по 11 г каждая. Как за одно взвешивание на электронных весах определить, в каком мешке фальшивые монеты? (Мешки можно развязывать, а монеты из них вынимать).

15. На плохо отрегулированных стрелочных весах бабушка взвесила два пакета сахара — получилось 500 г и 300 г. Когда же она взвесила на тех же весах оба пакета вместе, то получилось 900 г. Определите по этим данным, сколько на самом деле весит каждый пакет сахара.
16. Есть 5 мешков с монетами. Все монеты по виду одинаковы, но в одном мешке каждая монета весит 1 г, в другом — 2 г, в третьем — 3 г, в четвёртом — 4 г, в пятом — 5 г. Как при помощи одного взвешивания на электронных весах определить массу монеты из каждого мешка? (Мешки можно развязывать, а монеты из них вынимать).
17. Есть 5 мешков с монетами. Все монеты по виду одинаковы, и в каждом из мешков все монеты весят поровну. При этом в разных мешках монеты могут оказаться разными, а могут — одинаковыми. Вообще же монеты могут быть массой 1 г, 2 г, 3 г, 4 г, 5 г. Как при помощи одного взвешивания на электронных весах определить массу монеты из каждого мешка? (Мешки можно развязывать, а монеты из них вынимать).

Занятие 13 Инвариант

1. У Васи в коллекции — 20 дисков с фильмами, а у Пети — 40. Они обмениваются между собой некоторыми дисками. Могло ли через некоторое время оказаться, что в коллекции у Васи — 28 дисков, а у Пети — 34 диска?
2. В прямоугольной таблице $m \times n$ расставлены числа так, что суммы чисел в каждых строчке и столбце одинаковы и не равны нулю. Докажите, что $m = n$.
3. У Ивана-Царевича два волшебных меча, один из которых может отрубить Змею Горынычу ровно 21 голову,

а второй — ровно 4 головы, но тогда у Змея сразу отрастает 60 голов. Может ли Иван отрубить Змею все головы, если их изначально: а) 105; б) 7; в) 100?

4. Хулиганы Костя и Максим рвут газету, причём Костя рвёт каждый попадающийся ему кусок газеты на 4 части, а Максим — на 7 частей. На следующий день нашли 2013 кусков. Все ли куски найдены?

5. В пробирке находятся марсианские амёбы трёх типов: *A*, *B*, *C*. Две амёбы разных типов, встречаясь, могут слиться в одну амёбу третьего типа. После нескольких таких слияний в пробирке оказалась одна амёба. Какого она типа, если изначально амёб типа *A* было 20 штук, типа *B* — 21 штука, типа *C* — 22 штуки?

6. В квадрате 3×3 расставлены плюсы и минусы. За 1 ход можно изменить все знаки в любой строке или любом столбце на противоположные. Можно ли за несколько ходов получить таблицу из одних плюсов, если начальная расстановка знаков такова:

а)

+	−	−
−	−	−
−	−	−

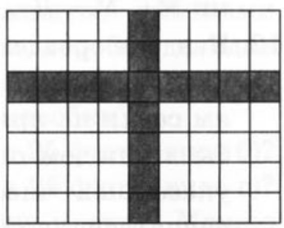
б)

−	+	−
+	−	+
−	+	−

в)

+	−	+
−	+	−
+	+	+

7. В таблице 8×9 в чёрный цвет покрашена ровно одна клетка, остальные — белые. За один ход разрешается перекрашивать все клетки в любом «крестике» (в объединении любой строки и любого столбца) в противоположный цвет. Можно ли добиться того, чтобы через несколько ходов все клетки стали белыми?



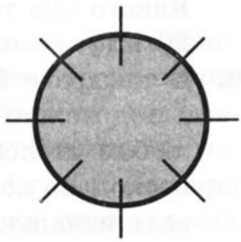
8. На доске 10×10 расставлены 50 шашек: 25 в левой нижней четверти доски, 25 — в правой верхней четверти. За один ход любая шашка может перепрыг-

нуть через шашку, соседнюю с ней по горизонтали, вертикали или диагонали на следующее поле, если оно свободно. Могут ли через некоторое время шашки оказаться на одной половине доски?

9. Прямоугольник размером 4×6 разделите на фигурки вида уголков из трёх клеточек так, чтобы никакие две из них вместе не образовали прямоугольник.

10. Дана таблица 4×4. Расставьте семь звёздочек (*) в клетки таблицы так, что при вычёркивании любых двух строк и любых двух столбцов в оставшихся четырёх клетках была хотя бы одна звёздочка.

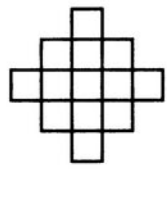
11. За круглым столом сидят 4 мальчика и 4 девочки, причём некоторые из них всегда говорят правду, а некоторые всегда обманывают. Известно, что девочек-обманщиц столько же, сколько и мальчиков-обманщиков. Все сидящие за столом утверждают, что их сосед справа — девочка. Нарисуйте хотя бы один вариант расположения детей за столом, соответствующий условию (удобно пользоваться обозначениями М+, М−, Д+, Д−).



12. Квадрат разделен на 36 маленьких квадратиков. Разрежьте его по линиям сетки на прямоугольники так, чтобы в каждом оказалось ровно одно из указанных чисел. Это число должно равняться количеству квадратиков, попавших в этот прямоугольник.

4				3	
					3
			6		
	6	4			2
		1			
3				4	

13. Фигура «летучая ладья» ходит по строкам и столбцам на любое число клеток, но за один ход не может встать на соседнее поле. Сможет ли она обойти изо-



бражённую на рисунке фигуру, побывав на каждой клетке ровно один раз? Ответ объясните.

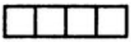
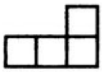
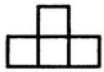
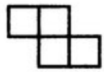
14. Решите судоку. Заполните таблицу числами от 1 до 9 так, чтобы в каждой строке, каждом столбце и в каждом выделенном квадрате 3×3 все цифры были различными.

	2	9	5	3	8		4	
		5	4	7			2	9
1		4						3
4			2			5	7	8
	9			8			3	
3	7	8			5			1
2						9		7
9	4			6	2	3		
	1		7	5	9	4	6	

Занятие

14 Инвариант и раскраски

1. Докажите, что шахматную доску 8×8 нельзя замостить 15 фигурками вида а) и одной фигуркой вида б).

а)  б)  в)  г) 

2. Докажите, что доску 10×10 нельзя замостить фигурками вида в).
3. Докажите, что фигурками вида а) нельзя замостить доску: а) 10×10; б) 102×102.
4. Дно прямоугольной коробки вымощено плитками 1×4 и 2×2. Плитки высыпали из коробки и одна плитка 2×2 потерялась. Её заменили на плитку 1×4. Удастся ли теперь вымостить дно коробки?
5. Можно ли разрезать доску 10×10 на 25 фигур вида б)?
6. Можно ли разрезать доску 10×10 на 25 фигур вида г)?
7. Из квадратной доски вырезали одну клетку. Можно ли оставшуюся доску разрезать на уголки из трёх клеток, если сторона квадрата: а) 2; б) 4; в) 8; г) 2^n?
8. Можно ли обойти ходом коня, побывав на каждой клетке ровно один раз, доску: а) 3×3; б) 4×4; в) 4×5; г) 8×8?

9. Разделите квадрат 5×5 по линиям клеточек на 5 равных по площади фигур, среди которых нет двух одинаковых.
10. Можно ли квадрат 4×4 разрезать по линиям клеточек на четыре равные по площади фигуры, среди которых нет двух одинаковых? Ответ объясните.
11. В каждой клетке доски 7×7 сидит жук. В некоторый момент все жуки одновременно переползают на соседние (по горизонтали или вертикали) клетки. Докажите, что после этого останется хотя бы одна пустая клетка. Может ли такая клетка остаться ровно одна?
12. На каждой клетке доски 5×5 сидит жук. По свистку каждый жук переползает в одну из соседних по диагонали клеток. При этом в некоторых клеточках могут оказаться по несколько жуков, а в некоторых — ни одного. Найдите наименьшее возможное число клеточек, оставшихся пустыми после переползания. Приведите пример соответствующего перемещения жуков и докажите, что меньшего числа незанятых клеток оказаться не может.
13. Квадрат разделен на 49 одинаковых квадратиков. Расставьте в них 24 единицы и 25 нулей так, чтобы сумма чисел в клетках, соседних с клеткой, содержащей единицу, равнялась 1. Кроме того, сумма чисел в клетках, соседних с клеткой, содержащей нуль, не должна равняться 1. Клетки считаются соседними, если у них есть общая сторона.

Занятие 15 Переправы

1. *(Старинная задача XVIII века)* Крестьянину надо перевезти через реку волка, козу и капусту. Лодка вмещает одного человека, а с ним либо волка, либо

козу, либо капусту. Если без присмотра оставить козу и волка, волк съест козу. Если без присмотра оставить капусту и козу, коза съест капусту. Как крестьянину перевезти свой груз через речку?

2. Отряд солдат подходит к реке, через которую надо переправиться. Но мост сломан, а река глубока. Вдруг командир замечает двух мальчиков, которые катаются на лодке недалеко от берега. Но лодка так мала, что может выдержать только одного солдата или только двух мальчиков — не больше! Однако все солдаты переправились через реку именно на этой лодке. Как это было сделано?

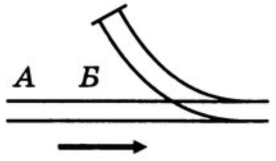
3. По каналу один за другим идут три парохода: *А*, *Б*, *В*. Навстречу им показались ещё три парохода, которые тоже идут один за другим: *Г*, *Д*, *Е*. Канал такой ширины, что два парохода в нём разъехаться не могут, но в канале с одной стороны есть залив, в котором может поместиться только один пароход. Могут ли пароходы разъехаться так, чтобы продолжать свой путь по-прежнему?

4. Семья ночью подошла к мосту. Папа может перейти его за 1 минуту, мама — за 2, малыш — за 5, а бабушка — за 10 минут. У них есть один фонарик. Мост выдерживает только двоих. Как им перейти мост за 17 минут? Если переходят двое, то они идут с меньшей скоростью. Двигаться по мосту без фонарика нельзя. Светить издали нельзя. Носить друг друга на руках нельзя. Кидаться фонариком тоже нельзя.

5. Однажды по лесу гуляли три рыцаря, каждый со своей дамой. Подойдя к реке, они захотели переправить-

ся на другой берег. В их распоряжении оказалась одна лодка без гребца, поднимающая всего двух человек. Как им переправиться, если ни одна из дам не согласна ехать в лодке или быть на берегу в окружении чужих рыцарей без своего рыцаря? Дамы тоже умеют грести.

6. Поезд *Б* приближается к станции железной дороги, но его нагоняет быстрее идущий поезд *А*, который необходимо пропустить вперёд. У станции от главного пути отходит боковая ветка, куда можно отвести на время вагоны с главного пути, но ветка эта настолько короткая, что на ней не помещается весь поезд *Б*. Спрашивается, как всё-таки пропустить поезд *А* вперёд?

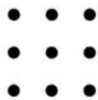


7. В кабине лифта 20-этажного дома есть две кнопки. При нажатии на одну из них лифт поднимается на 13 этажей, а при нажатии на другую опускается на 8 этажей. Как попасть с 13-го этажа на 8-й?
8. (*Старинная задача XIX века*) В лодке, вмещающей только двух человек, через реку должны переправиться три миссионера и три каннибала. Миссионеры боятся оставаться на каком-нибудь берегу в меньшинстве. Только один миссионер и один каннибал умеют грести. Как им переправиться?
9. Трём хирургам необходимо последовательно прооперировать в полевых условиях больного, страдающего заразным заболеванием. Сами хирурги тоже больны, причём все — разными болезнями. В распоряжении хирургов есть лишь две пары стерильных перчаток. Подскажите план операции, после которой ни хирурги, ни больной не заразятся друг от друга. (Помогать друг другу во время операций хирурги не должны. Оперировать одной рукой нельзя.)

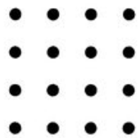
Занятие
16

Развитие комбинационных способностей - 2

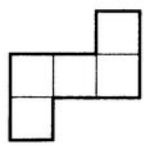
1. Расставьте на мини шахматной доске 4×4 одного короля, две ладьи и два слона так, чтобы они не находились под боем друг друга (цвет фигур роли не играет).
2. Перечеркните данные 9 точек четырьмя отрезками, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя по линии дважды.



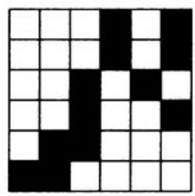
3. Перечеркните данные 16 точек шестью отрезками, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя по линии дважды.



4. Разрежьте фигуру двумя прямолинейными разрезами на такие части, из которых можно сложить квадрат. Покажите, как его сложить.

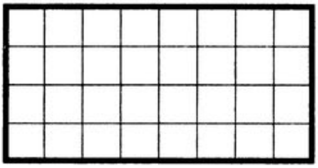


5. Разрежьте фигуру на 4 одинаковые части так, чтобы каждая из них содержала 3 закрашенные клетки.



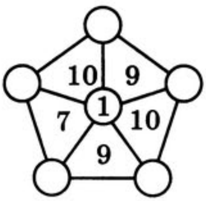
6. Поставьте 12 стульев в три ряда, по 5 стульев в каждом.
7. Могут ли 6 футболистов расположиться на футбольном поле так, чтобы каждый из них мог дать пас по земле ровно 4 другим? Ответ объясните.
8. Игорь двигает фишку по прямоугольной доске 8×4, при этом за один ход разрешается переставить её в одну из соседних клеток по диагонали. Раскрасьте клетки доски в четыре цвета так, чтобы за два хода

нельзя было из любой клетки попасть в другую клетку того же цвета. (Цвета клеток можно обозначить цифрами 1, 2, 3, 4.)



9. На книжной полке стоят учебники по математике за разные классы в таком порядке: 1, 2, 6, 10, 3, 8, 4, 7, 9, 5. Можно ли расставить их по порядку с 1 по 10 за три перекладывания, если за один раз можно брать по две соседние книги и ставить их вместе, не разъединяя, на другое место? Ответ объясните.

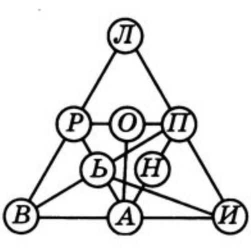
10. Впишите в кружки различные числа от 2 до 6 так, чтобы каждое число, записанное внутри треугольника, равнялось сумме чисел, записанных в кружках, расположенных в вершинах этого треугольника.



11. Назовем квадрат «конно-магическим», если сумма чисел в любых двух клеточках, связанных ходом коня, одинаковая. Расставьте числа, среди которых не все одинаковые, в клеточки квадрата 4×4 так, чтобы он стал «конно-магическим».

12. Пруд имеет форму квадрата. По углам его растут вербы. Как расширить пруд, увеличив его площадь в 2 раза, чтобы те же вербы стояли вдоль всех сторон нового пруда?

13. Расставьте цифры от 1 до 9 в кружки так, чтобы вдоль каждой нарисованной прямой сумма чисел в кружках была 12. Запишите подряд цифры от 1 до 9, а под ними —



соответствующие буквы. Какое слово у вас получилось?

14. Десять одинаковых монет положили, как на рисунке 1. Переложите три монеты так, чтобы расположение всех десяти монет стало как на рисунке 2.

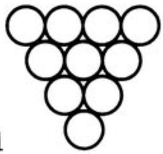


Рис. 1

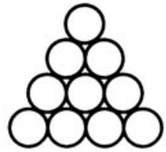


Рис. 2

15. В четырёх клеточках квадрата записаны числа. Закрасьте некоторые пустые клеточки так, чтобы эти числа равнялись количеству соседних с данной закрашенных клеточек. Клеточки считаются соседними, если у них есть общая сторона или общая вершина.

	3	2	
	4	1	

16. Дана фигура, состоящая из спичек. Уберите 2 спички так, чтобы осталось 4 квадрата со стороной в одну спичку.

Занятие
17 Комбинаторика - 1

1. В магазине есть 5 разных видов чашек и 4 вида блюдец. Сколькими способами можно составить комплект из чашки с блюдцем?
2. В магазине есть 5 разных видов чашек, 4 вида блюдец, 3 вида чайных ложек. Сколькими способами можно составить комплект из чашки, блюдца и ложки?
3. Из города А в город Б ведет 6 дорог, из города Б в город В — 4 дороги, из города А в город Г — 2 дороги,

из города Г в город В — 5 дорог. Сколько маршрутов ведут из А в В (проезжать город дважды нельзя)?

4. В магазине есть 5 разных видов чашек, 4 вида блюдец, 3 вида чайных ложек. Сколькими способами можно составить подарок из двух предметов с разными названиями?
5. В футбольной команде из 11 человек нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?
6. Сколькими способами можно сделать трёхцветный флаг с тремя горизонтальными полосами одинаковой ширины, если имеется материя шести различных цветов?
7. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и чёрную ладьи так, чтобы они не били друг друга?
8. Сколькими способами можно разместить на шахматной доске белого и чёрного короля так, чтобы они не били друг друга?
9. В стране есть 20 городов. Каждый с каждым соединен авиалинией. Сколько авиалиний в этой стране?
10. Нарисован выпуклый n-угольник, и в нем проведены все диагонали. Сколько всего нарисовано отрезков?
11. Сколько диагоналей в выпуклом n-угольнике?
12. Монету трижды подбрасывают. Сколько различных последовательностей орлов и решек можно при этом получить?
13. Каждую клетку квадратной таблицы 2×2 можно покрасить в чёрный или белый цвет. Сколько существует различных раскрасок этой таблицы?
14. Нарисуйте дерево случаев к задачам: а) 12; б) 13.
15. Сколько существует четырёхзначных чисел, у которых все цифры — нечётные?

16. Сколько существует пятизначных чисел, у которых все цифры — чётные?
17. В алфавите племени Мумбо-Юмбо три буквы: А, Б, В. Словом является любая последовательность, состоящая не более, чем из 4 букв. Сколько слов в языке племени Мумбо-Юмбо?
18. Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна чётная цифра?

Занятие
18 Комбинаторика - 2

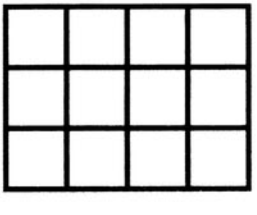
1. Сколько существует трёхзначных чисел, в записи которых цифры 1, 2, 3 встречаются ровно по одному разу?
2. Сколькими способами можно выложить в ряд красный, чёрный, синий и зелёный шарики?
3. Сколько способов переставить цифры в числе 24685?
4. Сколько существует пятизначных чисел, в которых цифры 3, 5, 7, 9, 0 встречаются ровно по одному разу?
5. Сколько способов переставить буквы в слове «глобус»?
6. Сколько способов переставить цифры в числе 3453?
7. Сколько способов переставить буквы в слове «молоко»?
8. Сколькими способами можно переставить цифры в числе 23253?
9. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «папаша»?
10. Сколько способов переставить буквы в слове «математика»?
11. В алфавите племени Бум-Бум шесть букв. Словом является любая последовательность из шести букв, в которой хотя бы две буквы одинаковые. Сколько слов в языке племени Бум-Бум?

12. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску 8 ладей так, чтобы они не били друг друга (цвет ладей роли не играет)?
13. На танцплощадке собрались n юношей и n девушек. Сколькими способами они могут разбиться на пары для участия в танце (танцуют все!)?
14. У мамы есть два одинаковых яблока, три одинаковые груши и четыре одинаковых апельсина. Каждый день в течение девяти дней подряд она дает сыну один из оставшихся фруктов. Сколько можно составить расписаний такой «фруктовой диеты»?
15. Расставьте в клетках квадрата 3×3 числа $3, 4, 5, \ldots, 11$ так, чтобы произведение чисел в первой строке равнялось произведению чисел в первом столбце, произведение чисел во второй строке равнялось произведению чисел во втором столбце, а произведение чисел в третьей строке равнялось произведению чисел в третьем столбце.
16. Можно ли в клетках квадрата 6×6 расставить натуральные числа так, чтобы в любом прямоугольнике 4×1 сумма чисел была чётной, а сумма всех чисел в квадрате была нечётной?

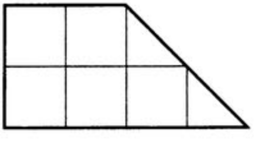
Занятие 19 Комбинаторика - 3

1. В киоске продаются 5 видов конвертов и 4 вида марок. Сколькими способами можно купить конверт с маркой?
2. Сколько существует двузначных чисел, цифры которых различны?
3. Сколько существует трёхзначных чисел, у которых есть одинаковые цифры?

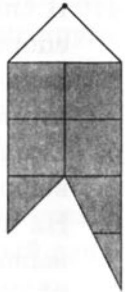
4. В спортивной лотерее нужно предсказать итог семи спортивных матчей. Итог каждого — победа одной из двух команд либо ничья, счёт роли не играет. Сколькими способами можно заполнить лотерейный билет?
5. Сколькими способами из 10 разных предметов можно выбрать несколько?
6. На полке стоит 5 книг. Сколькими способами можно выложить в стопку несколько из них (стопка состоит не менее, чем из одной книги)?
7. Чемпионат страны по шахматам проходит в один круг. Сколько играется партий, если участвуют 15 шахматистов?
8. Сколько существует восьмицифровых чисел, цифры которых идут в порядке убывания?
9. Сколькими способами можно поселить 7 студентов в три комнаты общежития, если эти комнаты одноместная, двухместная и четырёхместная?
10. Сколькими способами можно расставить на первой строке шахматной доски комплект белых фигур: короля, ферзя, двух слонов, двух коней, двух ладей?
11. Сколькими способами можно разбить 10 человек на пары?
12. План города имеет схему, изображенную на рисунке. На всех улицах введено одностороннее движение: можно ехать только «вверх» или «вправо». Сколько есть разных способов добраться из «левого нижнего» угла в «правый верхний»?



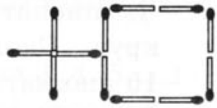
13. Разрежьте следующую фигуру на 4 равные части.



14. В стене имеется маленькая дырка (точка). У хозяина есть флажок следующей формы (см. рисунок). Покажите на рисунке все точки, в которые можно вбить гвоздь, так чтобы флажок закрывал дырку.



15. На рисунке представлена фигура, сложенная из спичек. Переложите 5 спичек, чтобы получилось три квадрата.



Занятие

20 Математическая логика - 1

На одном острове живут только рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Все действия в задачах этого цикла происходят на острове рыцарей и лжецов.

1. В этой задаче два персонажа: *A* и *B*. *A* говорит: «По крайней мере, один из нас лжец». Кто из персонажей рыцарь, а кто — лжец?
2. Собрались три островитянина: *A*, *B* и *C*. Двое из них высказывают такие утверждения:

   A: Мы все лжецы.

   B: Ровно один из нас — рыцарь.

   Кто из этой троицы рыцарь, а кто — лжец?
3. Собрались три островитянина: *A*, *B* и *C*. Двое из них высказывают такие утверждения:

   A: Мы все лжецы.

   B: Ровно один из нас — лжец.

Кто из этой троицы рыцарь, а кто — лжец? Сколько решений имеет задача? Можно ли утверждать наверняка, что *C* — рыцарь?

4. Три островитянина: *A*, *B*, *C* разговаривали между собой в саду. Проходивший мимо незнакомец спросил у *A*: «Вы рыцарь или лжец?» Тот ответил, но так неразборчиво, что незнакомец не смог ничего понять. Тогда незнакомец спросил у *B*: «Что сказал *A*?». *B* ответил: «*A* сказал, что он лжец». «Не верьте *B*, он лжёт!» — вмешался в разговор островитянин *C*. Кто из островитян *B* и *C* рыцарь, а кто — лжец?
5. Будем считать, что два островитянина однотипны, если оба — рыцари, или оба — лжецы.

   A: *B* — лжец.

   B: *A* и *C* — однотипны.

   Кто такой *C*: рыцарь или лжец?
6. Каждый из собравшихся на площади жителей острова сказал: «Все вы — лжецы». Сколько рыцарей среди них?
7. Представьте, что все лжецы острова живут в одном городе, а все рыцари — в другом. Как выяснить у местного жителя, куда ведет интересующая нас дорога — в город рыцарей или в город лжецов, задав при этом: а) два вопроса; б) один вопрос?
8. Какой вопрос вы задали бы жителю острова, чтобы узнать, живёт ли у него дома ручной крокодил?
9. В правительстве острова 20 министров. По крайней мере, один из них рыцарь. Из любых двух министров хотя бы один — лжец. Сколько рыцарей в правительстве?
10. Какое предложение не сможет произнести ни один житель острова рыцарей и лжецов?
11. Путник послал проводника из местных жителей спросить у аборигена, работающего в поле, кем тот является — рыцарем или лжецом. Проводник вер-

нулся и сказал: «Тот человек сказал, что он лжец». Кем был проводник — рыцарем или лжецом?

12. В парламенте острова участвуют 32 депутата: и рыцари, и лжецы. На заседании они расселись в четыре ряда по 8 человек. Каждый при этом осмотрелся по сторонам и заявил: «Среди моих соседей есть и рыцари, и лжецы». Определите: а) могло ли в парламенте быть ровно 8 лжецов? б) могло ли в парламенте быть менее восьми лжецов? (Два парламентария считаются соседями, если один из них сидит слева, справа, спереди или сзади от другого).

На другом острове живут рыцари, лжецы и нормальные люди. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут, а каждый нормальный человек иногда врет, а иногда говорит правду. Все действия в задачах этого цикла происходят на острове рыцарей, лжецов и нормальных людей.

13. Среди троих персонажей этой задачи есть рыцарь, лжец и нормальный человек.

A: Я нормальный человек.

B: Это правда.

C: Я — не нормальный человек.

Кто такие *A*, *B*, *C*?

14. Встретились двое.

A: *B* — рыцарь.

B: *A* — не рыцарь.

Докажите, что по крайней мере один из них говорит правду, причём это не рыцарь.

15. На этот раз *A* и *B* высказывают такие утверждения.

A: *B* — рыцарь.

B: *A* — лжец.

Докажите, что либо один из них говорит правду, но это не рыцарь, либо один из них врет, но это не лжец.

16. Из трёх островитян один — рыцарь, один — лжец, один — нормальный человек. На вопрос: «Кто *B*?», они ответили:

    A: Лжец.

    B: Я — нормальный человек.

    C: *B* — рыцарь.

    Кто рыцарь, кто лжец, а кто — нормальный человек?
17. Какое предложение не сможет произнести ни один житель острова рыцарей, лжецов и нормальных людей? Сможете ли Вы произнести это предложение? Сделайте выводы ☺☺☺.
18. Из трёх жителей острова *A*, *B* и *C* один — рыцарь, другой — лжец, третий — нормальный человек. *A* сказал: «Я — нормальный человек». *B* сказал: «Оба они иногда говорят правду». *C* сказал: «*B* — нормальный человек». Кто есть кто?

Занятие
21 Математическая логика - 2

1. Черепаха Тортилла вынесла для Буратино три коробочки — красную, синюю и зелёную. На красной коробочке было написано «Здесь золотой ключик», на синей «Зелёная коробочка пуста», на зелёной — «Здесь сидит гадюка». Тортилла предупредила Буратино, что все надписи не соответствуют действительности, хотя в одной из коробочек находится золотой ключик, в другой — гадюка, а третья пуста. Помогите Буратино понять, где находится ключик.
2. Вася сказал, что на его дне рождения было больше 6 гостей. А его сестра сказала, что гостей было больше 5. Сколько было гостей, если известно, что одно из этих утверждений истинное, а другое ложное?

3. Каждый из четырёх гномов — Бени, Вени, Жени и Сени — либо всегда говорит правду, либо всегда врет. Мы услышали разговор:

   Беня — Вене: «Ты врун».

   Женя — Бене: «Сам ты врун!»

   Сеня — Жене: «Оба они вруны. Да и ты тоже».

   Кто из них четырёх говорит правду?
4. На столе лежат 4 карточки, на которых сверху написано: «а», «б», «1», «2». О том, что написано на обратных сторонах, мы не знаем. Какое минимальное число карточек нужно перевернуть, чтобы проверить, правда ли, что если на какой-то стороне карточки написано чётное число, то на другой — гласная буква?
5. У короля было украдено варенье. Трое подозреваемых — Мартовский заяц, Болванщик и Соня — дали такие показания.

   Заяц: Не крал я никакого варенья.

   Болванщик: Варенье украл один из нас, но не я.

   Соня: По крайней мере, один из них сказал правду.

   Как показало расследование, Мартовский Заяц и Соня никогда не говорят правды одновременно. Кто украл варенье?
6. В другой раз у короля украли перец. Подозрение пало на Грифона, Черепаху Квази и Омара. На суде Грифон заявил, что Черепаха Квази невиновен, а Черепаха Квази утверждал, что виновен Омар.

   Выяснилось, что ни один невиновный не лгал и ни один виновный не сказал правды, причём вор работал в одиночку. Кто украл перец?
7. В одну из трёх шкатулок — золотую, серебряную и свинцовую — невеста спрятала свой портрет. На крышках шкатулок сделаны надписи: на золотой —

«Портрет в этой шкатулке», на серебряной — «Портрет не в этой шкатулке», на свинцовой — «портрет не в золотой шкатулке». Помогите жениху определить шкатулку с портретом, если он знает, что хотя бы две надписи из трёх ложны.

8. В другой раз (наверное, после ссоры) невеста предложила жениху такое задание. В одну из трёх шкатулок она поместила кинжал, а две другие оставила пустыми. Надписи на шкатулках гласили: на золотой — «Кинжал в этой шкатулке», на серебряной — «Эта шкатулка пуста», на свинцовой — «Мастер Беллини изготовил не более одной шкатулки». Надо сказать, что мастер Беллини помещал на своих шкатулках истинные высказывания, мастер Челлини — ложные, а с другими мастерами невеста дела не имеет. Если жених выберет шкатулку без кинжала, то невеста его простит, а если нет... Помогите жениху определить, в какой шкатулке точно нет кинжала.

В лесу Забывчивости жили Лев и Единорог. Лев лгал по понедельникам, вторникам и средам, в другие же дни недели говорил правду. Единорог поступал иначе — лгал по четвергам, пятницам и субботам, в остальные же дни его высказывания были исключительно правдивы. В этом же лесу жили два брата-близнеца Траляля и Труляля. Один из них вел себя как Лев, а другой — как Единорог. Но кто как — Алиса не знала.

9. Однажды Алиса встретила Льва и Единорога. Те сообщили ей такую информацию.

   Лев: Вчера был один из дней, когда я лгу.

   Единорог: Я вчера лгал.

Помогите Алисе определить, какой сегодня день недели.

10. В другой раз Алиса встретила одного Льва. Он сказал: «Я лгал вчера». Подумав, он добавил: «После завтрашнего дня я буду лгать два дня подряд».

    В какой день Алиса встретила Льва?

11. Однажды Алиса встретила двух братьев-близнецов Траляля и Труляля, и они представились ей. «Я — Траляля», — сказал первый. «Я — Труляля», — сказал второй. Кто из них Траляля, а кто — Труляля?

12. В другой раз они заявили следующее:

    Первый. Я лгу по субботам.

    Второй. Я буду лгать завтра.

    Первый. И я лгу по воскресеньям.

    В какой из дней недели это было?

Алисе по секрету рассказали, что есть ещё и третий близнец, Трулюлю, который всегда лжёт. Но действительно ли близнецов трое, Алиса все же не уверена.

13. Два встреченных Алисой в будний день брата сказали следующее. Первый: «Трулюлю не существует». Второй: «Я существую». Какие выводы вы сможете сделать на основании этой истории?

14. Алиса встретила двух братьев и спросила «Кто вы?» В ответ она услышала от первого — «Я Трулюлю», от второго — «Да, это он». Можно ли определить имя первого брата? А второго?

Занятие 22 Математическая логика - 3

В некоторых комнатах замка сидят принцессы, а в некоторых — тигры. Помогите странствующему рыцарю найти свою принцессу.

1. На одной из двух комнат висит табличка: «По крайней мере, в одной из комнат находится принцесса».

На другой комнате табличка гласит: «Тигр сидит в другой комнате». Выяснилось, что обе таблички либо истинны одновременно, либо одновременно ложны. Где находится принцесса?

В двух комнатах сидят тигры, а в одной ждет своего спасителя принцесса. Таблички на комнатах таковы.

Первая: «В этой комнате сидит тигр».

Вторая: «В этой комнате находится принцесса».

Третья: «Тигр сидит в комнате №2».

Известно, что ровно одно из утверждений является истинным. Где же принцесса?

В одной из трёх комнат находится принцесса, и табличка на двери этой комнаты содержит истинное утверждение. В двух других комнатах сидят тигры, и хотя бы одна табличка на этих двух дверях ложна. Итак.

Первая: «Тигр сидит в комнате №2».

Вторая: «В этой комнате сидит тигр».

Третья: «Тигр сидит в комнате №1».

Где принцесса?

На этот раз в одной из комнат сидит принцесса, в другой — тигр, а третья — пуста. Табличка на комнате с принцессой содержит истинное утверждение, а на комнате с тигром — ложное, а на пустой комнате табличка может содержать как истинное, так и ложное утверждение. Вот эти таблички.

Первая: «Комната №3 пуста».

Вторая: «Тигр сидит в комнате №1».

Третья: «Эта комната пуста».

Где же принцесса, а где тигр? Какая комната пуста?

В этом цикле задач две комнаты. В каждой из них может быть как принцесса, так и тигр. Может, их обитатели разные, а может и одинаковые. Но в любом случае надпись на двери первой комнаты

истинна, если в ней находится принцесса, и ложна, если в ней сидит тигр. А со второй комнатой все наоборот. Если там принцесса, табличка лжёт, а если тигр — говорит правду. Как же быть в этом случае?

5. Табличка на каждой из комнат гласит: «В обеих комнатах находятся принцессы». Какую комнату следует выбрать?
6. Надпись на двери первой комнаты: «По крайней мере, в одной из комнат находится принцесса». Надпись на второй двери: «Принцесса в другой комнате». Кто где?
7. На этот раз таблички были более загадочными.

   Первая: «Что выбрать — большая разница».

   Вторая: «Лучше выбрать другую комнату».

   Как быть рыцарю в этой ситуации?
8. На этот раз таблички гласили: «В этой комнате сидит тигр» и «В обеих комнатах сидят тигры». Жаль только, что их не успели прикрепить, и какая из них от какой двери — неизвестно. Как же обнаружить принцессу?

Вот ещё несколько логических головоломок.

9. В тетради написано 100 утверждений:

   1) В этой тетради ровно одно ложное утверждение.
   2) В этой тетради ровно два ложных утверждения.
   3) В этой тетради ровно три ложных утверждения.

   ....

   100) В этой тетради ровно сто ложных утверждений.

   Какое из этих утверждений верно?
10. В другой тетради написаны такие 100 утверждений:

    1) В этой тетради ровно одно истинное утверждение.
    2) В этой тетради ровно два истинных утверждения.
    3) В этой тетради ровно три истинных утверждения.

    ....

100) В этой тетради ровно сто истинных утверждений.

Сколько на самом деле истинных утверждений в этой тетради? Можно ли это однозначно определить?

11. Один из вопросов на экзамене был засекречен. Поэтому ученику пришлось выбирать правильный ответ (а он — только один), не зная условия. Помогите ему. Вот варианты ответов:

А) Все от Б) до Е).

Б) Ни один из В) — Е).

В) Все от А) до Е).

Г) Один из А), Б), В).

Д) Ни один из А) — Г).

Е) Ни один из А) — Д).

Занятие 23 Повторяем школьную программу, или дроби - 1

1. Который сейчас час, если оставшаяся часть суток вдвое больше прошедшей?
2. У Вити на дне рождения было 5 друзей. Первому он отрезал $\frac{1}{6}$ часть пирога, второму — $\frac{1}{5}$ остатка, третьему — $\frac{1}{4}$ нового остатка, четвертому — $\frac{1}{3}$ оставшегося к этому моменту пирога. Последний кусок Витя разделил с пятым другом пополам. Кому достался самый большой кусок?
3. Я отпил $\frac{1}{6}$ чашечки чёрного кофе и долил её молоком доверху. Затем я выпил $\frac{1}{3}$ чашечки и снова долил её молоком доверху. Потом я выпил ещё полчашки

и долил молока доверху. Наконец я выпил полную чашку. Чего я выпил больше: кофе или молока?

4. На трёх полках стоят книги. На нижней полке книг в 2 раза меньше, чем на двух остальных, на средней — в 3 раза меньше, чем на двух остальных, а на верхней стоит 30 книг. Сколько всего книг на трёх полках?
5. Четыре человека купили лодку. Первый внёс половину суммы, внесённой остальными; второй — треть суммы, внесённой остальными, третий — четверть суммы, внесённой остальными. Четвертый внёс недостающие 1300 рублей. Сколько стоит лодка и сколько внёс каждый?
6. Когда пассажир проехал половину пути, он стал смотреть в окно и смотрел до тех пор, пока не осталось проехать половину того пути, что он проехал, глядя в окно. Какую часть всего пути пассажир смотрел в окно?
7. Как разделить 5 яблок поровну между шестью детьми, не разрезая никакое яблоко более чем на 3 части?
8. Как отрезать от шнура длиной $\frac{2}{3}$ метра кусок длиной полметра, не пользуясь измерительными инструментами?
9. У Тани и Димы денег поровну. Какую часть денег должна Таня отдать Диме, чтобы у него стало в 2 раза больше денег, чем у неё?
10. Сравните значения выражений, не выполняя сложения: $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$ и $\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\frac{8}{9}$.
11. Какая из двух дробей больше: $\frac{23}{37}$ или $\frac{115}{187}$?
12. В стаде 8 овец. Первая съедает копну сена за 1 день, вторая — за 2 дня, третья — за 3 дня, ..., восьмая — за 8 дней. Кто съест быстрее копну сена: две первые овцы или все остальные вместе?

13. Вычислите удобным способом:

а) $\dfrac{74\cdot147-73}{73\cdot147+74}$; б) $\dfrac{1+2+3+4+5+6+7+8}{8+9+10+11+12+13+14+15}$.

14. Найдите значение выражения:

$$\frac{666666\cdot666666}{1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1}-\frac{777777\cdot777777}{1+2+3+4+5+6+7+6+5+4+3+2+1}.$$

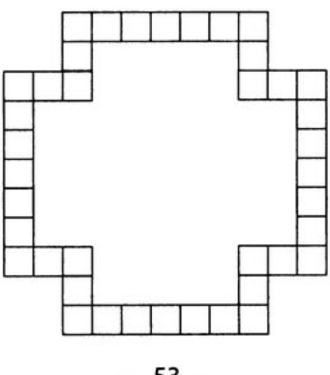
15. Мама оставила Тане яблоки на три дня. В первый день Таня съела половину всех яблок и ещё пол-яблока. Во второй день она съела половину оставшихся яблок и ещё пол-яблока. В третий день она снова съела половину оставшихся яблок и последние пол-яблока. Сколько яблок оставила мама Тане?

16. Среди четырёх людей нет трёх с одинаковым именем, или с одинаковым отчеством, или с одинаковой фамилией, но у каждых двух совпадает или имя, или отчество, или фамилия. Может ли так быть?

17. Найдите хотя бы одно решение в натуральных числах уравнения $28x+30y+31z=365$.

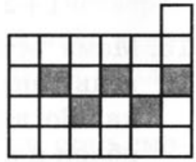
18. Разрежьте шахматную доску (8×8) по границам клеток на 20 частей одинакового периметра.

19. Разрежьте рамку на 16 равных частей:

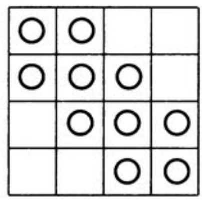


Занятие 24 Развитие комбинационных способностей - 3

1. Дата 21.02.2012 читается одинаково слева направо и справа налево. А будут ли после неё ещё такие даты в нашем столетии?
2. Может ли произведение цифр трёхзначного числа равняться 28?
3. Разрежьте фигуру на 5 частей одинаковой формы и одинакового размера так, чтобы в каждую часть попал ровно один серый квадратик.

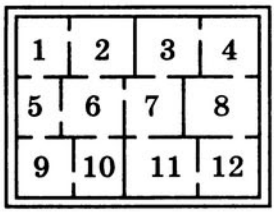


4. Расставьте на шахматной доске 14 слонов так, чтобы они не били друг друга.
5. В квадрате 4×4 отметили 10 клеток. Разрежьте квадрат на 4 одинаковые части так, чтобы они содержали соответственно 1, 2, 3 и 4 отмеченные клетки.



6. В коробке есть карандаши разной длины и есть карандаши разного цвета. Всегда ли среди них найдутся два карандаша, отличающиеся и по цвету, и по длине?
7. Представьте число 111 как сумму 51 натурального слагаемого так, чтобы у всех слагаемых была одна и та же сумма цифр.
8. Есть 30 гирек, которые весят 1 г, 2 г, 3 г, ..., 30 г. Можно ли разложить их на три кучки одинаковой массы по 10 гирек в каждой?
9. На крайней клетке доски $1\times n$ сидит кузнечик. Одним прыжком он может перепрыгнуть через одну клетку или через две клетки, и приземлится на следующей. Сможет ли он побывать на всех клетках по 1 разу, если: а) $n=6$; б) $n=21$?

10. Расставьте 48 ладей на клетчатой доске 10×10 так, чтобы каждая била 2 или 4 пустые клетки.
11. Могут ли 8 шахматных слонов побить все клетки доски 4×10? А 7 слонов?
12. В ряд сидит n детей — девочек и мальчиков. Известно, что среди любых 10 подряд сидящих детей мальчиков больше, чем девочек. Может ли в целом девочек быть больше, чем мальчиков, если: а) $n = 15$; б) $n = 30$?
13. В кабине 20-этажного дома есть 2 кнопки. При нажатии на одну из них лифт поднимается на 13 этажей (если это возможно), а при нажатии на другую — опускается на 8 этажей (если это возможно). Как попасть с 13-го этажа на 8-ой?
14. Можно ли перенумеровать рёбра куба числами от 1 до 12 так, чтобы сумма номеров любых трёх ребер, сходящихся в одной вершине, делилась нацело на 3?
15. Экскурсоводу нужно выбрать маршрут по залам музея так, чтобы обойти во время экскурсии все залы, ни в какой не заходя дважды. Найдите один из возможных маршрутов.



Занятие 25 Повторяем школьную программу, или дроби - 2

1. Два крестьянина вышли из деревни в город. Когда прошли $\frac{1}{3}$ пути, они сели отдохнуть. «Сколько нам ещё осталось идти?» — спросил один попутчик у другого. «Нам осталось идти на 12 км больше, чем мы

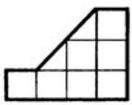
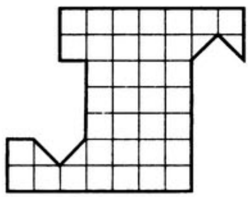
прошли», — был ответ. Каково расстояние между городом и деревней?

2. Летела стая гусей, а навстречу им летит один гусь и говорит: «Здравствуйте, сто гусей!» Вожак стаи отвечает ему: «Нет, нас не сто гусей! Вот, если бы нас было столько, сколько есть, да ещё столько, да ещё полстолька, де ещё четверть столька, да ты, гусь, с нами, вот тогда нас было бы сто гусей, а так...» Сколько же гусей было в стае?
3. В двух мешках вместе находится 140 кг муки. Если из первого мешка переложить во второй $\frac{1}{8}$ часть муки, находящейся в первом мешке, то в обоих мешках муки станет поровну. Сколько килограммов муки было в каждом мешке?
4. Когда велосипедист проехал $\frac{2}{3}$ пути, лопнула шина. На остальной путь пешком он затратил вдвое больше времени, чем на велосипедную езду. Во сколько раз велосипедист ехал быстрее, чем шёл?
5. Когда мальчик прошел $\frac{3}{8}$ моста, он услышал сигнал автомобиля. Если мальчик побежит назад, то встретится с автомобилем около начала моста, а если вперёд — автомобиль догонит его в конце моста. Мальчик бегает с постоянной скоростью. Найдите её, если скорость автомобиля 60 км/ч. Ответ объясните.
6. В волшебной стране живут только тролли и гоблины. Чудо-Юдо, которое забрело в эту страну, сожрало $\frac{1}{4}$ всех троллей и $\frac{1}{4}$ всех гоблинов. Могло ли оказаться, что съедена половина населения страны? Ответ объясните.

7. При замерзании вода увеличила свой объем на $\frac{1}{11}$ часть. На какую часть своего объема уменьшится лёд при обратном превращении в воду?
8. Две противоположные стороны прямоугольника увеличили на $\frac{1}{6}$ часть, а две другие уменьшили на $\frac{1}{6}$ часть. Как изменится площадь прямоугольника?
9. Рыболов на вопрос, какова масса пойманной им рыбы, ответил: «Масса хвоста 1 кг, масса головы составляет столько, сколько хвост и половина туловища, а масса туловища — столько, сколько голова и хвост вместе». Найдите массу рыбы.
10. Пароход от Киева до Херсона идет трое суток, а от Херсона до Киева — четверо суток (без остановок). Сколько будут плыть плоты от Киева до Херсона? А от Херсона до Киева?
11. В классе число отсутствующих учеников составляло $\frac{1}{6}$ часть числа присутствующих. Когда из класса вышел один ученик, число отсутствующих стало равно $\frac{1}{5}$ числа присутствующих. Сколько учеников в классе?
12. Какой угол образуют стрелки часов: а) в 7 ч 20 мин; б) в 9 ч 20 мин?
13. То да это, да половина того да этого — во сколько раз больше, чем три четверти того да этого?
14. Числитель и знаменатель некоторой дроби — натуральные числа. Могло ли значение дроби увеличиться от того, что её числитель увеличили на 1, а знаменатель — на 10?
15. (Задача Л. Эйлера) Решив все сбережения разделить поровну между всеми своими сыновьями, некто составил такое завещание: «Старший из моих сыновей

должен получить 1000 рублей и $\frac{1}{8}$ часть остатка; следующий — 2000 рублей и $\frac{1}{8}$ часть нового остатка; третий сын — 3000 рублей и $\frac{1}{8}$ часть третьего остатка ...» и т. д. Определите число сыновей и размер завещанного сбережения.

16. Разрежьте каждую из фигур на две равные части.

а)  б) 

Занятие **26**

Геометрическая смесь - 1

Разминка

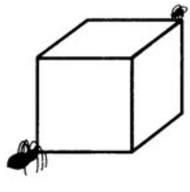
1. На прямоугольном лугу пасется коза, которая привязана к вбитому в землю колышку 10-метровой веревкой. Коза съедает всю траву, до которой может дотянуться. Нарисуйте оставшуюся без травы часть луга.
2. Сумма длин всех сторон квадратной клумбы, выраженных в метрах, равна площади этой клумбы, выраженной в квадратных метрах. Найдите размеры клумбы.

Неравенство треугольника

3. У треугольника, длины сторон которого — целые числа, длина одной стороны равна 5, а другой — 1. Чему равна длина третьей стороны?

4. На листе бумаги поставили 5 точек A, B, C, D, E. Расстояние от A до B — 2 см, от B до C — 4 см, от C до D — 15 см, от D до E — 6 см, от E до A — 3 см. Найдите расстояние от E до B.

5. В противоположных вершинах куба сидят паук и муха. Каким кратчайшим путем паук может доползти до мухи?

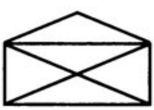
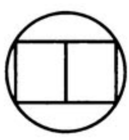
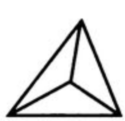


6. ***(помогает симметрия, или принцип Ферма)*** Две точки расположены по разные стороны от прямой. Как найти кратчайшее расстояние между ними? После устного решения этой почти шуточной задачи подумайте над решением более сложной.

   По одну сторону от железной дороги растут два дерева. На одном из них сидит ворона. Мимо деревьев проезжает поезд, а на крыше одного из вагонов лежит кусочек сыра. Ворона хочет подлететь к вагону, схватить сыр и взлететь на другое дерево. Где должен в момент подлета находиться вагон с сыром, чтобы путь вороны был наименьшим из возможных?

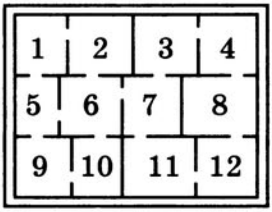
Свойство Эйлеровых графов

7. ***(Уникурсальные кривые)*** Начертите фигуры, не проводя по линии дважды и не отрывая карандаша (ручки) от бумаги:

а)  б)  в) 

8. ***(Старая задача на новый лад)*** Экскурсоводу нужно выбрать маршрут по залам музея так, чтобы пройти во время экскурсии через каждую дверь, причём

ровно один раз. Где нужно начать и где закончить экскурсию? Найдите один из возможных маршрутов.

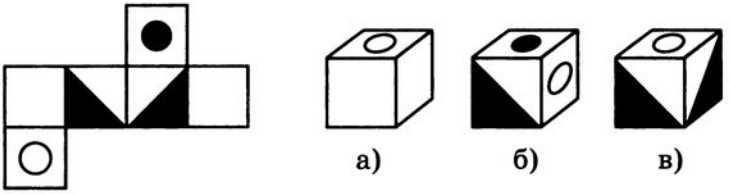


Параллелограмм, параллелепипед, куб

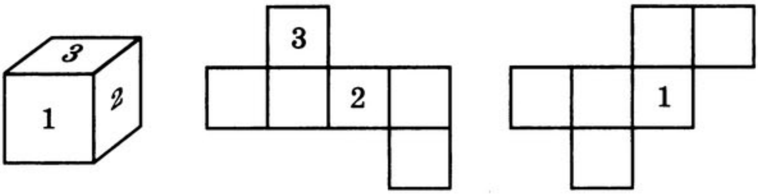
9. Из четырёх кусков проволоки по 9 см каждый нужно сложить, не разрезая их, каркас прямоугольного параллелепипеда с длинами ребер 2 см, 3 см, 4 см. Как это сделать?
10. Деревянный кубик с ребром 3 см, выкрашенный в красный цвет, распилили на кубики с ребром 1 см. Сколько получилось маленьких кубиков? Сколько из них имеют три красные грани? Две красные грани? Одну? Ни одной?
11. Окрашенный кубик с ребром 10 см распилили на кубики с ребром 1 см. Сколько среди них окажется кубиков: а) с тремя окрашенными гранями? б) с двумя окрашенными гранями? в) с одной? г) вообще неокрашенных?
12. На рисунке в вершинах параллелограмма расставлены 4 точки. Нарисуйте треугольник так, чтобы все точки находились на его сторонах.

13. На рисунке указаны три вершины параллелограмма. Нарисуйте данный параллелограмм. Сколько решений имеет задача?

14. Дана развертка куба. Какие из кубиков на рисунках а) — в) можно из неё склеить?



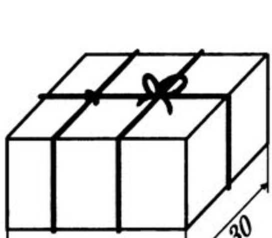
15. Мыло имеет форму прямоугольного параллелепипеда. За две недели использования все его размеры уменьшились в два раза. На сколько дней хватит оставшегося обмылка, если использовать его с такой же скоростью?
16. На видимых гранях куба проставлены числа 1, 2, 3. А на развёртке — одно из чисел или два. Расставьте на развертках куба числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, чтобы сумма чисел на противолежащих гранях была равна 7.



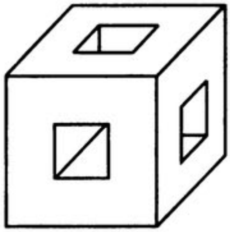
Занятие
27 Геометрическая смесь - 2

Разминка

1. Сколько сантиметров шпагата потребуется, чтобы перевязать посылочный ящик, размеры которого 50 см, 30 см и 20 см так, как показано на рисунке, если на все узлы и бантик вместе уходит 10 см?

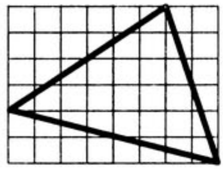


2. В кубе с ребром 3 см сделали 3 сквозных отверстия со стороной 1 см. Найдите объём части, которая осталась.

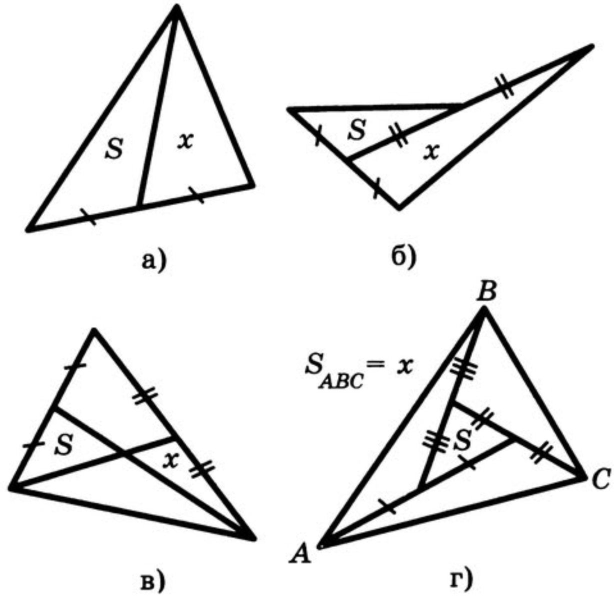


Площади

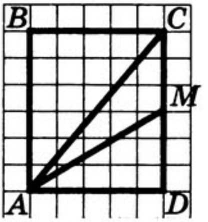
3. Стороны прямоугольника равны 15 см и 2 дм. Найдите площадь прямоугольника.
4. Катеты прямоугольного треугольника равны a см и b см. Найдите его площадь.
5. Найти площадь треугольника, изображенного на рисунке.



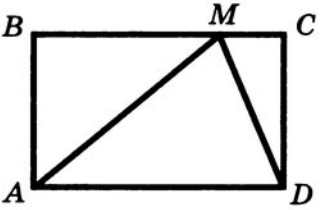
6. Выразите неизвестную площадь x через известную площадь S.



7. Точка M — середина стороны CD прямоугольника $ABCD$, $AB = 6$ см, $AD = 5$ см. Чему равна площадь треугольника ACM?

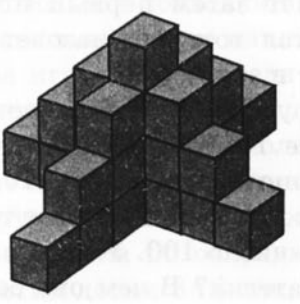


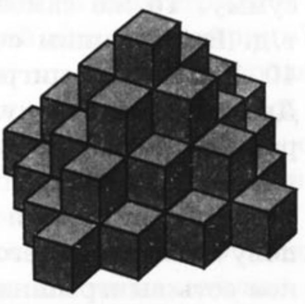
8. Площадь треугольника AMD равна 20 см². Чему равна площадь прямоугольника $ABCD$?



Объёмы

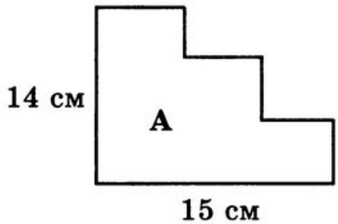
9. В бассейне с горизонтальным дном площадью 1 га содержится миллион литров воды. Можно ли в этом бассейне проводить соревнования по плаванию для пятиклассников?
10. На какую высоту возвышался бы столб, составленный из всех миллиметровых кубиков одного кубометра, положенных один на другой?
11. Сколько кубиков использовано для постройки башни?

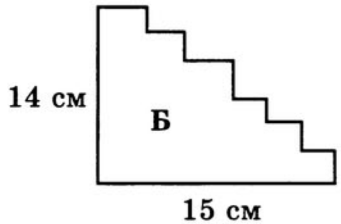
а) 

б) 

Дополнение

12. Можно ли из прямоугольных параллелепипедов $1\times1\times2$ сложить куб $3\times3\times3$, из которого вынут угловой кубик?
13. Можно ли из прямоугольных параллелепипедов $1\times1\times2$ сложить куб $3\times3\times3$, из которого вынут центральный кубик?
14. Сравните периметры фигур, изображенных на рисунках.





Занятие **28**

Математические игры

Стратегия — дополнение

1. Играют двое. Начинающий называет одно из чисел: 1, 2, 3, 4. Второй игрок прибавляет к этому числу одно из чисел 1, 2, 3, 4 и называет получившуюся сумму. То же самое делает затем первый игрок, и т. д. Выигравшим считается тот, кто назовет число 40. Кто и как выигрывает в эту игру?
2. Двое играют в такую игру. Первый называет натуральное число, не большее 10, затем второй прибавляет к нему натуральное число, не большее 10, затем то же делает первый игрок и т. д. Выигрывает тот, кто получит после своего хода число 100. У кого из игроков есть выигрышная стратегия? В чем она состоит?

3. В ящике лежат 35 шариков. Двое игроков по очереди берут от одного до пяти шариков. Тот, кто возьмет последний шарик, — проиграл. Кто и как может обеспечить себе выигрыш, независимо от ходов соперника: первый игрок или второй?
4. Есть поле в виде квадрата 3×3. Два игрока по очереди вписывают в пустые клеточки натуральные числа от 1 до 9. Числа в таблице не должны повторяться. Тот, после чьего хода в строке, столбце или одной из двух диагоналей сумма всех трёх вписанных чисел будет ровно 15, выигрывает. Если после заполнения всей таблицы нет выигравшего, фиксируется ничья. Чем закончится такая игра при правильной игре соперников?

Стратегия — симметрия

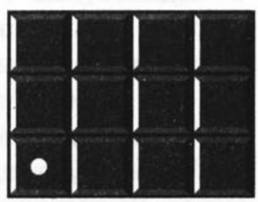
5. Имеются две кучки камней: в одной 20 камней, в другой — 30. За один ход разрешается взять любое количество камней (конечно, натуральное), но только из одной кучки. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. У кого из игроков есть выигрышная стратегия? В чем она состоит?
6. На столе лежит три кучки камешков. В одной кучке один камешек, в другой — два, в третьей — три. Двое играющих по очереди берут камешки (не менее одного), но только из одной кучки. Выигрывает тот, кто возьмет последний камешек. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его соперник?
7. Два игрока по очереди ставят шахматных королей в клетки доски 5×5 так, чтобы они не находились под боем друга (цвет королей роли не играет). Кто не сможет пойти, тот проиграл. Кто и как выигрывает в эту игру: первый или второй игрок?
8. Два игрока по очереди ставят шахматных слонов в клетки доски 8×8 так, чтобы они не находились под

боем друга (цвет слонов роли не играет). Кто не сможет пойти, тот проиграл. Кто и как выигрывает в эту игру: первый или второй игрок?

9. Два игрока по очереди ставят шахматных коней в клетки доски 8×8 так, чтобы они не находились под боем друга (цвет коней роли не играет). Кто не сможет пойти, тот проиграл. Кто и как выигрывает в эту игру: первый или второй игрок?
10. Дана клетчатая доска 10×10. За один ход разрешается покрыть любые 2 соседние клеточки доминошкой 2×1 так, чтобы доминошки не перекрывались. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. У кого из двух игроков есть выигрышная стратегия?
11. В каждой клетке доски 9×9 стоит шашка. За 1 ход разрешается снять с доски несколько подряд идущих вдоль строки или столбца шашки. Выигрывает снявший последнюю шашку. Кто из двух игроков может обеспечить себе выигрыш независимо от ходов соперника?
12. У ромашки а) 12 лепестков; б) 11 лепестков. За один ход разрешается оторвать либо один лепесток, либо два рядом растущих лепестка. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто и как выигрывает в эту игру?

Дебютные стратегии

13. Есть шоколадка 3×4. За 1 ход игрок выбирает точку на пересечении линий, ограничивающих дольки шоколадки (в том числе на контуре). Далее проводит от выбранной точки разлом вправо — до края и вверх до края, затем съедает отщёлкнутую верхне-правую часть (в ней должна быть хоть одна долька). Кто съест левую нижнюю дольку, тот про-



играл. Кто из двух игроков выигрывает при правильной стратегии: начинающий или его соперник?

14. Два голодных кота украли цепочку из шести сосисок и теперь делят её между собой. По очереди каждый кот перекусывает по одной перемычке между сосисками и съедает появляющиеся при этом одиночные сосиски. Сколько кому достанется?
15. Лиса Алиса и кот Базилио делят 10 золотых по такому правилу. Сначала Базилио делит все золотые на две кучки, в каждой не менее двух золотых. Затем Алиса делит каждую из этих кучек ещё на две меньшие кучки. Из полученных четырёх кучек наибольшая и наименьшая достаются Алисе, а две средние — Базилио. Кому в итоге сколько достанется, если каждый хочет получить побольше?

Игры — шутки

16. Двое игроков по очереди ломают шоколадку 6×8. За один ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого куска вдоль углубления. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу?
17. Есть три кучки камней: 10, 15 и 20 камней соответственно. За один ход разрешается разбить любую кучку на две меньшие. Кто не сможет сделать ход, то проиграл. Кто из двух игроков выигрывает в эту игру?

Занятие 29 Среднее арифметическое и средняя скорость

Средняя скорость

1. Половину пути лошадь шла порожняком со скоростью 12 км/ч. Остальной путь она шла с возом со

скоростью 4 км/ч. Какова средняя скорость лошади, т. е. с какой постоянной скоростью ей нужно было бы двигаться, чтобы на весь путь потратить такое же количество времени?

2. Путь от дома до школы Буратино проделал пешком, обратно он двигался той же дорогой, но первую половину пути он проехал на собаке, а вторую половину пути — на черепахе. Известно, что скорость собаки в четыре раза больше, а скорость черепахи — в два раза меньше, чем скорость, с которой Буратино шел пешком в школу. На какой путь — из дома до школы или из школы до дома — затратил Буратино больше времени?
3. Двое путников одновременно по одной дороге вышли из A в B. Первый половину времени, затраченного им на переход, проходил по 5 км в час, а затем — по 4 км в час. Второй же первую половину пути шел со скоростью 4 км/ч, а затем — со скоростью 5 км/ч. Кто из них раньше пришёл в B?
4. От потолка комнаты вертикально вниз по стене поползли две мухи. Спустившись до пола, они поползли обратно. Первая муха ползла в оба конца с одной и той же скоростью, а вторая, хотя и поднималась вдвое медленнее первой, но зато спускалась вдвое быстрее. Какая из мух раньше приползёт обратно?
5. Метрострой нанял двух кротов для рытья туннеля. Один из них копает быстрее другого, а едят они одинаково. Что выгоднее (в смысле затрат продуктов): копать с двух сторон до встречи или копать с двух сторон, но каждому — ровно половину туннеля?

Среднее арифметическое и сумма

6. Средний возраст одиннадцати футболистов команды 22 года. Во время игры один из игроков получил травму и ушёл с поля. Средний возраст оставшихся

на поле игроков стал 21 год. Сколько лет футболисту, ушедшему с поля?

7. Из теста можно сделать 20 одинаковых калачей или 25 одинаковых булочек. Какова масса всего теста, если на один калач идёт на 10 г теста больше, чем на одну булочку?
8. В выполнении заказа по изготовлению приборов приняла участие бригада в составе бригадира и девяти молодых рабочих. В течение дня каждый из рабочих смонтировал по 15 приборов, а бригадир — на 9 приборов больше, чем в среднем каждый из десяти членов бригады. Сколько всего приборов смонтировала бригада за один день?
9. Сеня купил три пакета орехов, а Саша — 2 таких же пакета. К ним присоединился Костя, и они все орехи разделили поровну. При расчете оказалось, что Костя должен уплатить товарищам 25 копеек. Сколько денег из этой суммы должен получить Сеня и сколько Саша? Сколько стоил пакет орехов?
10. На привале сошлись трое охотников. Первый положил в общий костер три полена, второй — пять поленьев. Третий не положил ничего, но уплатил первым двум охотникам 8 рублей. Как им разделить между собой эти деньги по справедливости?
11. Профессор Тестер провел серию тестов с Дусей и подсчитал среднее количество баллов, набранных ею в одном тесте. Если бы Дуся в последнем тесте набрала 97 баллов, то средний балл составил бы 90. Но Дуся набрала за последний тест всего 73 балла и 87 баллов в среднем. Сколько тестов было в серии?
12. Три команды собрались на летней школе участвовать в квесте. Перед началом Славик перешел из первой команды во вторую, Антон — из второй команды в третью, а Марина — из третьей в первую. После этого

средний возраст первой команды вырос на неделю, второй — вырос на две недели, третьей — уменьшился на четыре недели. Известно, что в первой и второй командах было по 12 человек. Сколько человек было в третьей команде?

13. Смешали $6\frac{2}{3}$ литра воды при температуре 60°C и $3\frac{1}{3}$ литра воды при температуре 30°C. Найдите температуру смеси.
14. Аня и Таня вместе весят 40 кг, Таня и Маня — 50 кг, Маня и Ваня — 90 кг, Ваня и Даня — 100 кг, Даня и Аня — 60 кг. Сколько весят все пятеро вместе? А каждый в отдельности?
15. Штирлиц передал в Центр вместо чисел a, b, c, d числа $a+b$, $a+c$, $a+d$, $b+c$, $b+d$, не указав даже, в каком порядке они переданы. В Центре получили числа 13, 15, 16, 20 и 22. Чему равна сумма $c+d$? Можно ли по этим данным найти набор натуральных чисел a, b, c, d? Можно ли найти однозначно числа a, b, c и d?

Занятие 30 Проценты - 1

Совсем простые задачи

1. Папа получил 2300 руб. зарплаты, из которых 15% потратил на подарок маме. Сколько стоил подарок?
2. Ученик прочитал 138 страниц, что составляет 23% числа всех страниц в книге. Сколько страниц в книге?
3. В школе 700 учеников. Среди них 357 мальчиков. Сколько процентов от всех учеников школы составляют девочки?
4. После снижения цен на 30% свитер стал стоить 210 руб. Сколько стоил свитер до снижения цен?

Простые задачи

5. В первом полугодии авиационный завод перевыполнил план на 12%, а во втором недовыполнил на 7%, выпустив на 95 самолетов меньше, чем в первом полугодии. Каков годовой план завода?
6. В парке запланировали посадить 1200 деревьев. В первый день посадили 30% всех деревьев, во второй — 120% деревьев, посаженных в первый день. Сколько деревьев посадили в третий день?
7. Рабочий в феврале увеличил производительность труда по сравнению с январем на 5%, а в марте увеличил её снова по сравнению с предыдущим месяцем на 10%. Сколько деталей изготовил рабочий в марте, если в январе он изготовил 200 деталей?

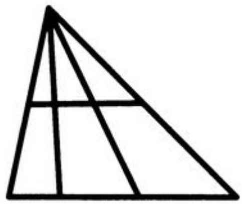
Задачи

8. Все пятиклассники либо спортсмены, либо танцоры, либо занимаются и спортом, и танцами. 85% детей занимается в спортивных клубах, 75% детей — в танцевальных кружках. Какой процент детей и танцует, и занимается спортом?
9. Митя подсчитал, что цена компьютерной мышки составляет 95% его денег, а цена коврика для мышки — 15% его денег. Если бабушка даст ему ещё 12 руб., то он сможет как раз купить и мышку, и коврик. Сколько стоит мышка и сколько — коврик?
10. Как изменится цена товара, если её сначала увеличить на 100%, а затем уменьшить на 50%?
11. Цену на картофель в супермаркете сначала повысили на 20%, а через некоторое время понизили на 20%. Когда картофель стоил дешевле: до повышения цены или после её снижения, и на сколько процентов?
12. В двух магазинах джинсы стоили одинаково. В одном из них цену снизили сперва на 10%, а затем ещё на

10% (от нового уровня), а в другом цены просто сразу снизили на 20%. Что выгоднее для покупателя? На сколько процентов?

Задачи на смекалку

13. Сколько треугольников на рисунке?



14. Расставьте в клетках квадратной таблицы 4×4 десять минусов так, чтобы в каждом столбце было чётное число минусов, а в каждой строке было нечётное число минусов.
15. Расставьте по кругу четыре единицы, три двойки и три тройки так, чтобы сумма любых трёх подряд стоящих чисел не делилась нацело на 3.

Занятие 31 Проценты - 2

Задачи

1. Отрезок увеличили на 25%. На сколько процентов надо уменьшить новый отрезок, чтобы получить первоначальный?
2. Число A составляет 20% числа B, число B составляет 20% числа C. Найдите $\dfrac{A}{C}$.
3. Длину прямоугольника увеличили на 50%, а ширину уменьшили на 50%. На сколько процентов изменится площадь прямоугольника?

4. В семье 4 человека. Если Маше удвоят стипендию, общий доход всей семьи возрастёт на 5%, если вместо этого маме удвоят зарплату — на 15%, если же зарплату удвоят папе — на 25%. На сколько процентов возрастёт доход всей семьи, если дедушке удвоят пенсию?

Задачи поинтереснее

5. Все ребра куба уменьшили на 20%. На сколько процентов изменился объем куба?
6. *(Из жизни Карлсона)* За весну Карлсон похудел на 25%, затем за лето прибавил в весе 20%, за осень похудел на 10%, а за зиму прибавил 20%. Похудел ли он или поправился за год? На сколько процентов?
7. *(Из жизни Карлсона — 2)* Малыш и Карлсон вместе съели банку варенья. При этом Карлсон съел на 40% меньше ложек варенья, чем Малыш, но зато в его ложке помещалось на 150% варенья больше, чем в ложке Малыша. Какую часть банки варенья съел Карлсон?
8. В банк положили 10 000 $ под 10% годовых. Какая сумма окажется на счету через три года?
9. Собрали 100 кг грибов. Оказалось, что их влажность 99%. Когда грибы подсушили, оказалось, что их влажность снизилась до 98%. Сколько весят сушеные грибы?
10. Вода Тихого океана содержит 3,5% соли (по весу). Сколько пресной воды надо добавить к 40 кг океанской воды, чтобы содержание соли стало 0,5%?

Сложные задачи

11. Алик, Боря и Вася собирали грибы. Боря собрал грибов на 20% больше, чем Алик, но на 20% меньше, чем Вася. На сколько процентов больше, чем Алик, собрал грибов Вася?

12. Маша — призёр олимпиады по математике. Среди призеров более 94% — мальчики. Чему равно наименьшее возможное число призеров?
13. Давным-давно цена билета на стадион была 1р. 80 к. После снижения входной платы число зрителей увеличилось на 50%, а выручка выросла на 25%. Сколько стал стоить билет после снижения цены?
14. *(Из жизни М. В. Ломоносова)* Михайло тратил одну денежку на хлеб и квас. Когда цены выросли на 20%, на ту же денежку он приобретал полхлеба и квас. Хватит ли той же денежки хотя бы на квас, если цены ещё раз вырастут на 20%?
15. Предприятие получило задание за два года снизить на 51% потребление электроэнергии. Каждый год требуют снижать на одно и то же число процентов. На какое?

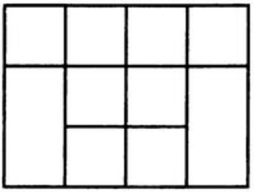
Задачи на смекалку

16. Разрежьте по линиям клеточек квадрат 4×4 на 9 прямоугольников так, чтобы равные прямоугольники не соприкасались ни сторонами, ни вершинами.
17. Назовем натуральное число зеброй, если в его записи чередуются чётные и нечётные цифры. Может ли разность двух стозначных зебр быть стозначной зеброй?
18. Может ли в месяце быть шесть воскресений?

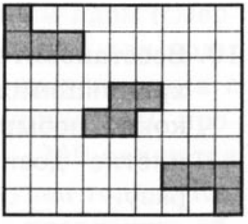
6 класс

Занятие 1

Математическая солянка



1. На рисунке изображен прямоугольник с продольными и поперечными линиями. Проведите линию не отрывая карандаша от бумаги так, чтобы она пересекала по одному разу все 27 отрезков — звеньев нарисованной сетки.
2. Расшифруйте ребус (одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры): Б + БЕЕЕ = МУУУ.
3. Боб и Ваня соревнуются в изготовлении и употреблении сладких коктейлей. Боб смешал пепси с фантой, а Ваня — лимонад с сиропом. Известно, что лимонад слаще пепси, а сироп слаще фанты. Могла ли смесь Боба оказаться слаще Ваниной (сладость — доля сахара от общей массы коктейля)?



4. Из прямоугольника 8×9 клеток вырезали закрашенные фигуры. Разрежьте полученную фигуру на две равные части так, чтобы из них можно было сложить прямоугольник 6×10. Покажите, как его сложить.
5. Найдите ошибку в следующем рассуждении (***софизме***).

$$1 \text{ руб.} = 100 \text{ коп.}$$

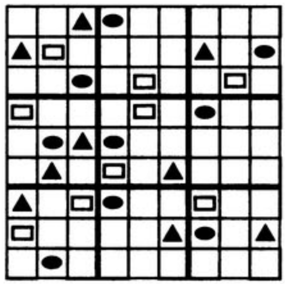
$$10 \text{ руб.} = 1000 \text{ коп.}$$

Перемножая эти равенства, получаем:

$$10 \text{ руб.} = 100\,000 \text{ коп.}$$

Разделив это равенство на 10, получим: 1 руб. = = 10 000 коп. А может, и нет никакой ошибки ☺☺☺?

6. **Найдите значение произведения (разные буквы обозначают разные цифры, одинаковые буквы — одинаковые цифры): К×А×Р×Л×С×О×Н×К×О×Н×Ф×Е×Т×А.**
7. **Инопланетянин, прилетев на Землю в понедельник, воскликнул «А!». Во вторник он воскликнул «Ау!», в среду «Аууа!», в четверг — «Ауууауаау!». Что он воскликнет в субботу?**
8. **В корзине лежат 30 грибов — рыжиков и груздей. Известно, что среди любых 12 грибов имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 20 грибов — хотя бы один груздь. Сколько рыжиков и сколько груздей в корзине?**
9. **Из данных девяти квадратов сложите один, чтобы на горизонталях, вертикалях и двух диагоналях было ровно по одному символу каждого вида.**

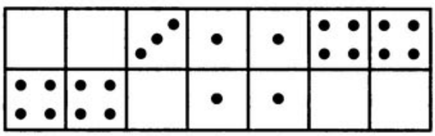


10. **Восстановите по некоторым сохранившимся номерам путь коня, побывавшего на каждой клетке доски 6×6 по одному разу.**

17				11	
2			25		
23	16	1			
30			19		
15				13	
8					35

11. Один сапфир и два топаза
Ценней, чем изумруд, в три раза.
А семь сапфиров и топаз
Его ценнее в восемь раз.
Определить прошу я вас,
Сапфир ценнее иль топаз.

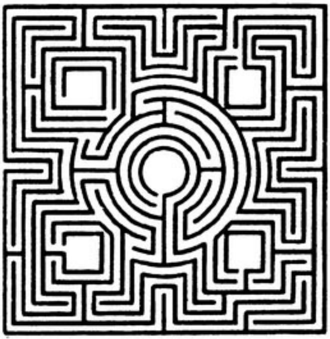
12. В мешке лежит 101 конфета. Двое игроков по очереди берут из мешка от 1 до 10 конфет. Когда все конфеты из мешка разобраны, игроки подсчитывают, у кого сколько конфет. Если полученные числа взаимно простые, то выигрывает первый игрок, а если нет — то второй. Кто выиграет в эту игру? (По-моему — тот, у кого будет больше вкусных конфет из мешка ☺☺☺)
13. Сколькими способами из полной колоды в 52 карты можно выбрать 4 карты — все разных мастей и достоинств (есть 4 масти: пики, трефы, бубны, червы и в каждой — карты 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, В, Д, К, Т)?
14. В равенстве $101 - 102 = 1$ переставьте одну цифру так, чтобы оно стало верным.
15. Несколько доминошек образовали узор, указанный на рисунке. Определите, где какая доминошка.



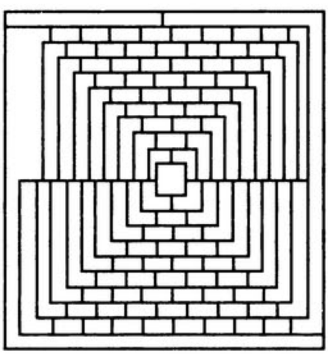
16. В некотором царстве есть 10 источников с мёртвой водой (№1, №2, ..., №10), которая по вкусу не отличается от обычной, но является сильным ядом (смертельным даже для Кащея). Противоядием для воды из любого источника является вода из источника с бóльшим номером (для воды из источника №10 противоядия нет). Источники №1, №2, ..., №9 являются общедоступными, источник №10 доступен только Кащею. Иван вызвал Кащея на дуэль, предложив обменяться стаканами с водой и выпить её. Кащей согласился, предложив Ивану воду из источника №10 и рассчитывая выпить её в качестве противоядия. Однако Иван остался жив, а Кащей умер. Как Ивану это удалось?

17. Тридцать три ореха разложили по кучкам, причём в каждой кучке больше одного ореха. После того, как из каждой кучки, кроме первой, в первую переложили по одному ореху, во всех кучках орехов стало поровну. Сколько имеется кучек и сколько орехов было в каждой из них первоначально?

18. Проложите маршрут к центру лабиринта.



19. В 1976 году было доказано, что любая карта может быть покрашена в четыре цвета так, что страны, имеющие общую границу, будут окрашены в разные цвета. Сможете ли вы закрасить так приведенную на рисунке карту из 100 стран? (Цвета удобно обозначать 1,2,3,4).



Занятие

2 Делимость - 1

1. Ковбой Джо зашел в бар и попросил у бармена бутылку виски за 3 доллара, трубку за 6 долларов, 3 пачки табака и 9 коробок спичек, цену которых он не знал. Бармен потребовал 11 долларов 80 центов, на что Джо вытащил револьвер. Бармен сосчитал снова и исправил ошибку. Как Джо догадался, что бармен пытался его обсчитать?
2. К числу 15 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 15.
3. а) Верно ли, что если число кратно 15, то оно кратно 3 и 5?

   б) Верно ли, что если число кратно 3 и 5, то оно кратно 15?

   в) Верно ли, что если число кратно 12, то оно кратно 2 и 6?

   г) Верно ли, что если число кратно 2 и 6, то оно кратно 12?

   д) Верно ли, что если число кратно 6 и 10, то оно кратно 60?
4. Найдите все четырёхзначные числа, которые делятся на 45, а две средние цифры у них 97.
5. Найдите цифры x и y пятизначного числа $\overline{42x4y}$, если известно, что это число делится на 72.
6. Найдите наибольшее натуральное число, делящееся на 36, в записи которого участвуют все 10 цифр по одному разу.
7. При некоторых целых a, b, c число $3a + 4b + 5c$ делится на 11. Докажите, что тогда и число $9a + b + 4c$ будет делиться на 11.
8. В стране Анчурии в обращении имеются купюры следующих достоинств: 1 анчур, 10 анчуров, 100 анчуров и 1000 анчуров. Можно ли отсчитать ровно

1 миллион анчуров так, чтобы получилось ровно полмиллиона купюр?

9. Найдите двузначное число, первая цифра которого равна разности между этим двузначным числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке. Сколько существует чисел с таким свойством?
10. Незнайка перемножил все числа от 1 до 100. Подсчитал сумму цифр произведения. У полученного числа он снова подсчитал сумму цифр и т. д. В конце концов, он получил однозначное число. Какое?
11. Петя заменил в примере на умножение одинаковые цифры одинаковыми буквами, а разные — разными, и получил АБ · ВГ = ДДЕЕ. Докажите, что он ошибся.
12. Придумайте число, делящееся нацело на 11, в записи которого использованы все десять цифр по одному разу.
13. Может ли сумма цифр точного квадрата ($a = b^2$) равняться 2013?
14. Докажите, что число $\underbrace{111\ldots11}_{2n}$ — составное при $n \geq 2$.
15. Докажите, что числа, запись которых состоит из трёх одинаковых цифр, делятся и на 3, и на 37.

Теоретические сведения

Простые и составные числа.

Натуральное число называется простым, если у него есть ровно два делителя.

Натуральное число называется составным, если у него есть более двух различных делителей.

Единица не является ни простым, ни составным числом.

Два натуральных числа называются взаимно простыми, если у них нет общих простых делителей.

Признак делимости на 2, 5, 10. Если последняя цифра числа кратна двум (пяти, десяти), то и число кратно двум (пяти, десяти).

Остатки от деления числа на 2, 5, 10. Остаток от деления числа на 2 (5,10) равен остатку от деления последней цифры данного числа на 2 (5, 10).

Признак делимости на 2^n, 5^n, 10^n. Если n-значное число, составленное из последних n цифр данного числа, кратно 2^n (5^n, 10^n), то и само данное число кратно 2^n (5^n, 10^n).

Остатки от деления числа на 2^n, 5^n, 10^n. Остаток от деления числа на 2^n (5^n, 10^n) равен остатку от деления n-значного числа, составленного из последних n цифр данного числа, на 2^n (5^n, 10^n).

Признак делимости на 3. Если сумма цифр числа кратна трём, то и число кратно трём.

Остаток от деления числа на 3. Остаток от деления числа на 3 равен остатку от деления на 3 суммы цифр данного числа.

Признак делимости на 9. Если сумма цифр числа кратна девяти, то и число кратно девяти.

Остаток от деления числа на 9. Остаток от деления числа на 9 равен остатку от деления на 9 суммы цифр данного числа.

Признак делимости на 11. Сложите цифры, стоящие на нечётных позициях. Отдельно сложите цифры, стоящие на чётных позициях. Вычтите из первой суммы вторую. Если результат кратен одиннадцати, то и само данное число кратно одиннадцати.

Остаток от деления числа на 11. Сложите цифры, стоящие на нечётных, считая справа, позициях. Отдельно сложите цифры, стоящие на чётных, считая справа, позициях. Вычтите из первой суммы вторую. Разделите результат с остатком на 11. Полученный при этом делении остаток равен остатку при делении данного числа на 11.

Признак делимости на 7, 11, 13, 1001. **Разбейте число на трёхзначные числа (справа налево), если нужно, дописав спереди числа один или два нуля. Сложите трёхзначные числа, оказавшиеся на нечётных местах. Отдельно сложите трёхзначные числа, оказавшиеся на чётных местах. Вычтите из первой суммы вторую. Если результат кратен 7 (11, 13, 1001), то и само данное число кратно 7 (11, 13, 1001).**

Остаток от деления числа на 7 (11, 13, 1001). **Разбейте число на трёхзначные числа (справа налево), если нужно, дописав спереди числа один или два нуля. Сложите трёхзначные числа, оказавшиеся на нечётных, считая справа, местах. Отдельно сложите трёхзначные числа, оказавшиеся на чётных, считая справа, местах. Вычтите из первой суммы вторую. Разделите результат с остатком на 7 (11, 13, 1001). Полученный при этом делении остаток равен остатку при делении данного числа на 7 (11, 13, 1001).**

Занятие 3 Делимость - 2

1. **Сформулируйте и докажите свойство остатков при делении на 4.**

Решение.

Остаток от деления числа на 4 равен остатку от деления двузначного числа, составленного из последних двух цифр данного числа, на 4.

Рассмотрим число $x = \overline{\ldots dcba}$. Распишем его по разрядам:

$$x = a + 10b + 100c + 1000d + \ldots = \overline{ba} + 100(c + 10d + \ldots).$$

Второе слагаемое кратно четырём. Значит, остаток от деления числа x на 4 совпадает с остатком от деления числа $\overline{ba}$ на 4. Утверждение доказано.

2. **Сформулируйте и докажите свойство остатков при делении на 8.**
3. **Докажите свойство остатков при делении на 9.**
4. **Докажите свойство остатков при делении на 11.**

Сложите цифры, стоящие на нечётных, считая справа, позициях. Отдельно сложите цифры, стоящие на чётных, считая справа, позициях. Вычтите из первой суммы вторую. Разделите результат с остатком на 11. Полученный при этом делении остаток равен остатку при делении данного числа на 11.

Рассмотрим число $x = \overline{\ldots edcba}$. Распишем его по разрядам:

$$x = a + 10b + 100c + 1000d + 10000e + \ldots =$$

$$= a + (11b - b) + (99c + c) + (1001d - d) + (9999e - e) + \ldots =$$

$$= (a - b + c - d + e - \ldots) + (11b + 99c + 1001d + 9999e + \ldots).$$

Второе слагаемое кратно 11. Значит, остаток от деления числа x на 11 совпадает с остатком от деления числа $(a - b + c - d + e - \ldots)$ на 11. Утверждение доказано.

5. **Разложите число 1001 на простые множители.**
6. **Докажите свойство остатков при делении на 7 (11, 13).**

Разбейте число на трёхзначные числа (справа налево), если нужно, дописав спереди числа один или два нуля. Сложите трёхзначные числа, оказавшиеся на нечётных, считая справа, местах. Отдельно сложите трёхзначные числа, оказавшиеся на чётных, считая справа, местах. Вычтите из первой суммы вторую. Разделите результат с остатком на 7 (11, 13). Полученный при этом делении остаток равен остатку при делении данного числа на 7 (11, 13).

Рассмотрим число $x = \overline{\ldots a_{12}a_{11}a_{10}a_9a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1}$. *Распишем его по разрядам:*

$$\begin{aligned} x &= a_1 + 10a_2 + 100a_3 + 1000a_4 + 10000a_5 + 100000a_6 + \\ &+1000000a_7 + 10000000a_8 + 100000000a_9 + \ldots = \\ &= \overline{a_3a_2a_1} + 1000 \cdot \overline{a_6a_5a_4} + 1000000 \cdot \overline{a_9a_8a_7} + \ldots = \\ &= \overline{a_3a_2a_1} + (1001 \cdot \overline{a_6a_5a_4} - \overline{a_6a_5a_4}) + \\ &+(999999 \cdot \overline{a_9a_8a_7} + \overline{a_9a_8a_7}) + \ldots = \\ &= (\overline{a_3a_2a_1} - \overline{a_6a_5a_4} + \overline{a_9a_8a_7} - \ldots) + \\ &+(1001 \cdot \overline{a_6a_5a_4} + 999999 \cdot \overline{a_9a_8a_7} + \ldots). \end{aligned}$$

Второе слагаемое кратно 7(11, 13). Значит, остаток от деления числа x на 7(11, 13) совпадает с остатком от деления числа $(\overline{a_3a_2a_1} - \overline{a_6a_5a_4} + \overline{a_9a_8a_7} - \ldots)$ *на 7 (11, 13). Утверждение доказано.*

7. **Найдите неизвестные цифры числа $\overline{4x87y6}$, кратного 56.**
8. **В корзине лежит меньше 100 яблок. Их можно разделить поровну между двумя, тремя или пятью детьми, но нельзя разделить поровну между четырьмя детьми. Сколько яблок в корзине?**
9. **Во всех подъездах дома одинаковое число этажей, а на каждом этаже одинаковое число квартир. При этом число этажей в доме больше числа квартир на этаже, число квартир на этаже больше числа подъездов, а число подъездов больше одного. Сколько в доме этажей, если всего в нем 105 квартир?**
10. **Центр города по ночам убирают бригады дворников. Известно, что во всех бригадах дворников поровну, и это число меньше, чем число бригад. Кроме того, все бригады отдежурили поровну ночей — большее число, чем число бригад. Всего дворники были заняты убор-**

кой 1001 человеко-ночь. Сколько дворников в бригаде, сколько бригад и сколько ночей работала каждая?

11. По прямой дороге ползли три черепахи. Первая из них сказала: «За мной ползут две черепахи». Вторая сказала: «Спереди меня ползет одна черепаха, и сзади меня ползет одна черепаха». Третья черепаха сказала: «Спереди меня ползет одна черепаха, и сзади ползут две черепахи». Как такое могло быть?

12. Найдите остаток от деления на 7 числа, десятичная запись которого состоит из 2013 единиц.
13. Докажите, что если число вида 111...11 кратно 13, то оно кратно и 77.
14. В девятизначном числе все цифры различны и нет цифры 0. Может ли такое число быть простым?
15. Обозначим через $S(x)$ сумму цифр числа x. Решите уравнение: $x + S(x) + S(S(x)) = 2014$.
16. Если к произвольному числу приписать число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, то полученное число без остатка разделится на 11: например, кратны одиннадцати числа вида $\overline{aa}, \overline{abba}, \overline{abccba}$ и т. д. Докажите это.
17. Дано шестизначное число, в записи которого цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6 встречаются по одному разу. Может ли это число быть кратным 121?

Занятие
4

Делимость - 3

1. Найдите все натуральные числа, при делении которых на 7 в частном получится то же число, что и в остатке.

2. При делении некоторого числа на 13 и 15 получились одинаковые частные, но первое деление было с остатком 8, а второе деление без остатка. Найдите данное число.
3. Когда трёхзначное число, первые две цифры которого одинаковые, а третья равна 5, разделили на однозначное число, то в остатке получили 8. Найдите делимое, делитель и неполное частное.
4. При делении на 2 число дает остаток 1, при делении на 3 — остаток 2. Какой остаток дает это число при делении на 6?
5. Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 2 дает в остатке 1, при делении на 3 дает в остатке 2, при делении на 4 дает в остатке 3, при делении на 5 дает в остатке 4, при делении на 6 дает в остатке 5, а на 7 делится нацело.
6. Учеников трёх классов повели на экскурсию. Когда хотели построить их парами, то оказалось, что один ученик при этом остается без пары. Когда хотели их построить тройками и четвёрками, то в каждом случае один ученик оставался без пары. Когда же всех построили по пять, то ни одного ученика вне строя не осталось. Сколько было учеников?
7. Двенадцать разбойников напали на Буратино и отобрали у него всё богатство — почти 30 000 золотых монет. Стали они делить деньги поровну, но один золотой оказался лишним. Разбойники передрались из-за того, кому достанется лишний золотой. Один из них испугался и убежал. Оставшиеся 11 разбойников стали опять делить богатство поровну, но всё повторилось: один золотой оказался лишним, разбойники передрались, один убежал, опять стали делить богатство поровну, один золотой оказался лишним и т. д. Когда осталось шесть разбойников, самый умный из них сказал: «Стойте! Дальше все снова будет так же! Отдадим лучше один золотой Буратино, чтобы про

☺☺

нас не говорили, что мы отбираем все подчистую, а остальное разделим поровну». Разбойники согласились с его предложением. Прав ли оказался умный разбойник? Сколько золотых монет было у Буратино?

8. Фермер привез на базар огурцы на продажу. Когда он стал считать их десятками, то не хватило двух огурцов до полного числа десятков. Когда он стал считать их дюжинами, то осталось восемь огурцов. Сколько огурцов привез фермер, если их было больше 300, но меньше 400?
9. Найдите среди чисел вида $3a+1$ первые три числа, которые кратны пяти.
10. Ученики двух шестых классов купили 737 учебников. Каждый купил одинаковое количество книг. Сколько было шестиклассников, и сколько учебников купил каждый из них?
11. Мимо железнодорожной станции прошли три поезда. В первом поезде было 418 пассажиров, во втором — 494, в третьем — 456 пассажиров. В каждом вагоне

было поровну пассажиров и их число — наибольшее из возможных. Сколько вагонов было в каждом поезде?

12. Ученики одной из школ на каникулах поехали на экскурсии на одинаковых полностью заполненных автобусах. В Курск поехало 520 человек, а в Орёл 455. Сколько мест в автобусе? Сколько автобусов заказала школа?
13. Наименьшее общее кратное двух чисел равно 360, а частные от деления этих чисел на их наибольший общий делитель равны 3 и 5 соответственно. Найдите эти числа.
14. Наибольший общий делитель двух чисел равен 7, а наименьшее общее кратное — 70. Найдите данные числа (все варианты).
15. Два числа относятся как $5 : 8$, а их наибольший общий делитель равен 21. Найдите данные числа.
16. Наименьшее общее кратное двух чисел равно 3780, а сами эти числа относятся как $14 : 15$. Найдите все варианты чисел с таким свойством.
17. Докажите, что $\text{НОК}(a,b) \cdot \text{НОД}(a,b) = a \cdot b$.
18. Известно, что НОК двух чисел в 16 раз больше их НОДа. Докажите, что одно из этих чисел кратно другому.

Занятие 5. Метод доказательства «от противного»

1. В школе 20 классов. В ближайшем доме живет 23 ученика этой школы. Обязательно ли среди них найдутся хотя бы два одноклассника?
2. В школе учится 370 человек. Докажите, что среди всех учащихся найдутся двое, празднующие свой день рождения в один и тот же день.

3. Кроликов рассаживают в клетки. Докажите, что если количество кроликов больше, чем количество клеток, то в одной из клеток окажется хотя бы два кролика.
4. Коля подсчитал, что в течение дня за завтраком, обедом и ужином он съел 10 конфет. Докажите, что хотя бы один раз он съел не меньше четырёх конфет.
5. В классе 37 человек. Докажите, что среди них найдутся четверо, родившиеся в один и тот же месяц.
6. В коллекции есть 25 золотых монет в 1, 2, 3, 5 пиастров. Имеется ли среди них семь монет одного достоинства? Обязательно ли монет какого-то достоинства будет ровно семь?
7. Пять мальчиков собрали вместе 14 грибов, причём каждый нашел хотя бы один гриб. Докажите, что хотя бы два мальчика нашли одинаковое число грибов.

8. Учительница объявила результаты диктанта. Больше всех ошибок было у Пети — 13. Докажите, что среди 29 учащихся этого класса есть трое, допустившие одинаковое число ошибок.
9. Есть 234 кролика, которых нужно рассадить в 10 клеток. Докажите, что найдется клетка, в которой окажется не менее 24 кроликов. Обязательно ли в какой-то клетке будет ровно 24 кролика?
10. В первенстве по футболу участвует 10 команд. Первенство разыгрывается в один круг, т.е. любые две команды играют между собой, но только один раз. В разгар первенства, в понедельник, решили сделать

перерыв, — никто не играл. Докажите, что найдутся две команды, сыгравшие к этому понедельнику одинаковое число игр.

11. Докажите, что в любой компании из пяти человек есть двое, имеющие одинаковое число знакомых в этой компании.
12. В городе живет 200 тысяч жителей. Известно, что у человека на голове не более 150 000 волос. Докажите, что в этом городе найдутся два человека с одинаковым количеством волос на голове.
13. В классе учится 25 учеников. Из них 20 занимаются английским языком, 17 увлекаются плаванием, 14 посещают математический кружок. Докажите, что в классе найдется хотя бы один ученик, который занимается английским языком, увлекается плаванием и посещает математический кружок.
14. Пятеро мужчин, возвращаясь вместе с работы, нашли 1200 руб. Каждый из них в честь находки хочет купить своей жене орхидею, которая стоит 250 руб. Докажите, что найденной суммы для этого не хватит.
15. Цифры 1, 2, ..., 9 разбили на три группы. Докажите, что произведение чисел в одной из групп не меньше чем 72.
16. Сто человек сидит вокруг круглого стола, причём более половины из них — мужчины. Докажите, что какие-то два мужчины сидят напротив друг друга.
17. В таблице 10×10 расставлены целые числа, причём любые два числа в соседних (по стороне) клетках отличаются не более, чем на 5. Докажите, что среди чисел в этой таблице есть два равных.
18. В бригаде работает семь человек и их суммарный возраст — 332 года. Докажите, что среди них можно выбрать трёх человек, сумма возрастов которых не меньше, чем 142 года.

☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺

Занятие
6

Шифровки

Шифровка 1 — азбука Морзе

Русская азбука Морзе

А ·–	Б –···	В ·––	Г ––·	Д –··	Е(Ё) ·	Ж ···–	З ––··
И ··	Й ·–––	К –·–	Л ·–··	М ––	Н –·	О –––	П ·––·
Р ·–·	С ···	Т –	У ··–	Ф ··–·	Х ····	Ц –·–·	Ч –––·
Ш ––––	Щ ––·–	Ъ ––·––	Ы –·––	Ь –··–	Э ··–··	Ю ··––	Я ·–·–

Расшифровать:

А) –·· ·–– ·–   ·––· ·–·· ··–– ···   – ·–· ··

Б) ·––· ·–·– – –··–   ··– –– –· ––– ··– ·· – –··–
–· ·–   – ·–· ··

Шифровка 2 — Пляшущие человечки

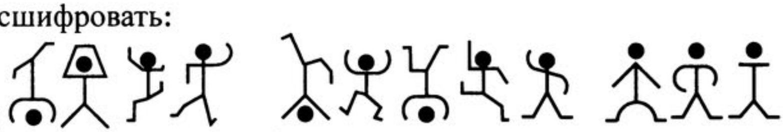
А Б В Г Д Е Ё Ж З И Й

К Л М Н О П Р С Т У Ф

Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э

Ю Я

Расшифровать:

А) 

Б) 

Шифровка 3 — шифр Цезаря

Шифр Цезаря со сдвигом в 3 буквы:

Исходный алфавит:

АБВГДЕЁЖЗИЙКЛМНОПРСТУФХЦЧШЩЪЫЬЭЮЯ

Шифрованный:

ГДЕЁЖЗИЙКЛМНОПРСТУФХЦЧШЩЪЫЬЭЮЯАБВ

Расшифруйте:

А) ЪЗХЮУЗ ТОБФ ЖЕГ

Б) ФЗПЯ ЦПРСЙЛХЯ РГ ЕСФЗПЯ

В) НХС УГФЫЛЧУСЕГО ХСХ ПСОСЖЗЩ

Шифровка 4 — Шифрующая таблица

Пример: шифр СДЧЫТРШХАУЕДРГНВЫЛОУЙУВХ

Расшифровка: (читать по столбцам)

С	Д	Ч	Ы
Т	Р	Ш	Х
А	У	Е	Д
Р	Г	Н	В
Ы	Л	О	У
Й	У	В	Х

Расшифровать :

А) ЧРНРЕЕУИТМСЪЫИТЪ

Б) ВЕМУЯОМИСТСЬНПЬ

Шифровка 5 — Магический квадрат

Пример: шифр ОИВ ЕОС РКЩ

Расшифровка: Вписываем буквы в магический квадрат рядом с числами:

2, О	7, И	6, В
9, Е	5, О	1, С
4, Р	3, К	8, Щ

Теперь читаем буквы по порядку чисел, начиная с 1: СОКРОВИЩЕ.

Расшифровать:

А) ТСДЯ ВПЬЮ ЬАЛЦ ПАТД нужно расшифровать с помощью магического квадрата:

7	12	1	
2	13		11
16		10	5
	6	15	4

Б) Перехвачен обрывок папируса, на котором с помощью магического квадрата зашифровано количество боевых колесниц. Расшифруйте его.

Ь С Е В Ь Т Д С Я Д Е Е Т Т Я Ш

16	3	2	13
5	10	11	
9	6		
4			

Шифровка 6 — Золотой Жук (частотный анализ)

Если взять достаточно длинный текст и подсчитать, сколько раз в нем встречаются разные буквы, то окажется, что буква О встречается чаще всего. За ней идет буква Е, потом А и И. Реже всего попадается Ъ. На этом основан анализ зашифрованного текста.

Если взять короткий текст, то обычно буква О встречается чаще всего, а вот буквы уже на втором-третьем месте могут быть разными. В этом случае для расшифровки используют дополнительную информацию о сообщении.

Пример. Знайка перехватил шифровку от Незнайки к Пончику:

44 49 37 49 16 49 62   39 49 24 51 33 48,
39 37 33 41 49 44 33   48   37 54 48 49 29 49
10   39 49 59 24 49 51 22.
24 49 56 24 54 62 48 54

Ага, думает Знайка, какое число встречается чаще всего? Число 49. Наверное, это буква О. Подставим букву О:

44 **О** 37 **О** 16 **О** 62   39 **О** 24 51 33 48,
39 37 33 41 **О** 44 33   48   37 54 48 49 29 49
10   39 **О** 59 44 **О** 51 22.   24 32 56 24 54 62 48 54

Дальше. Эту шифровку написал Незнайка, возможно, он её подписал. Проверяем. В последнем слове после точки 24 32 56 24 54 62 48 54 восемь букв. В слове “Незнайка” тоже восемь букв. Похоже на подпись. Подставляем:

44 **О** 37 **О** 16 **О** 62   39 **О** 24 51 33 48,
39 37 33 41 **О** 44 33   48   37 54 48 32 29 32
10   39 **О** 59 44 **О** 51 22.   **Н Е З Н А Й К А**

Какие буквы мы уже нашли?

- 49 — О
- 24 — Н
- 32 — Е
- 56 — З
- 54 — А
- 62 — Й
- 48 — К

Подставляем найденные буквы:

44 **О** 37 **О** 16 **О** 62 39 **О Н** 51 33 **К**,
39 37 33 41 **О** 44 33 **К** 37 **А К Е** 29 **Е**
10 39 **О** 59 **Н О** 51 22. **Н Е З Н А Й К А**

Смотрим, что получилось и думаем — шифровка отправлена Пончику, может быть, в начале идет “Привет, Пончик”? Не похоже. “Здравствуй, Пончик”? Опять не похоже. “Дорогой Пончик”? Может быть. Тогда мы знаем ещё семь букв:

- 44 — Д
- 37 — Р
- 16 — Г
- 62 — Й
- 39 — П
- 51 — Ч
- 33 — И

Подставляем найденные буквы:

Д О Р О Г О Й П О Н Ч И К, **П Р И** 41 **О Д И**
К Р А К Е 29 **Е** 10 **П О** 59 **Н О Ч** 22.
Н Е З Н А Й К А

Теперь всё ясно:

ДОРОГОЙ ПОНЧИК, ПРИХОДИ К РАКЕТЕ
В ПОЛНОЧЬ. НЕЗНАЙКА

Расшифровать:

А) Это зашифрованное распоряжение о продаже соли отправил Пончик:

10 16 21 40 29 30 29 22 32 51 44 21 34 49 10 21
21 40 54 21 27 11 88 51 16 32 14 54 41 11

Расшифруйте текст и узнайте, сколько фертингов стоит соль.

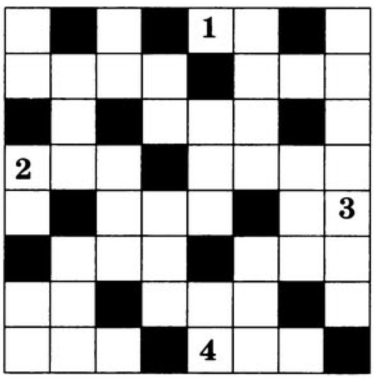
Б) Кот Матроскин отправил письмо из деревни Простоквашино.

49 16 32 16 24 43 39 44 48 44 48 43 21 48 21 48 !
56 10 48 11 21 16 32 16 29 11 16 32 16 41 16
49 43 10 24 32 48 49 56 11.
41 16 88 21 48 88 32 16 11 41 43 10

Расшифруйте письмо. Какая температура в деревне?

Шифровка 7 (шифровальный шаблон, или вращение квадрата)

Желающие вести тайную переписку по этому способу запасаются каждый «решёткой» — шифровальным шаблоном, т. е. бумажным квадратом с прорезанными в нём окошечками. Например, на рисунке окошечки затемнены.



Пусть теперь мы хотим зашифровать предложение «Если прилежно учить математику в школе, можно стать хорошим шифровальщиком». Возьмём чистый квадрат 8×8 и приложим на него шифровальный шаблон так, чтобы 1 оказалась сверху. Затем последовательно пишем буквы нашего предложения в окошках решётки. Получится такая запись:

	е		с			л	
				и			
п		р				и	
			л				
	е				ж		
н				о			
		у				ч	
			и				т

Затем повернём наш шифровальный шаблон цифрой 2 вверх, и продолжим последовательно писать буквы нашего предложения в окошках решётки. Получим:

	е	ь	с		м	л	
			а	и			т
п	е	р			м	и	
а			л	т			и
	е	к			ж	у	
н			в	о			
	ш	у			к	ч	о
л			и				т

Проделаем аналогичную работу, приложив шаблон вверх цифрой 3:

е	е	ь	с	м	м	л	
	о		а	и	ж		т
п	е	р	н		м	и	о
а		с	л	т		т	и
	е	к		а	ж	у	
н	т		в	о	ь		х
	ш	у	о		к	ч	о
л	р		и	о		ш	т

Закончим шифровку, приложив шаблон цифрой 4 кверху и заполнив последние 16 клеток:

е	е	ь	с	м	м	л	и
м	о	ш	а	и	ж	и	т
п	е	р	н	ф	м	и	о
а	р	с	л	т	о	т	и
в	е	к	а	а	ж	у	л
н	т	ь	в	о	ь	щ	х
и	ш	у	о	к	к	ч	о
л	р	о	и	о	м	ш	т

Шифровка готова! Расшифровка происходит в таком же порядке.

А) Создайте свой шифровальный шаблон. Подумайте, как добиться, чтобы ни в какой квадрат не пришлось вписывать букву дважды.
Б) Придумайте способ зашифровать предложение, в котором количество букв не 64.
В) Зашифруйте какое-нибудь предложение при помощи своего шифровального шаблона.

Занятие 7 Принцип Дирихле — первое знакомство

1. В мешке лежат шарики двух разных цветов: чёрного и белого. Докажите, что если вытащить наугад три шарика, то два из них окажутся одного цвета.
2. В лесу растёт миллион ёлок. Известно, что на каждой из них не более 600000 иголок. Докажите, что в лесу найдутся две ёлки с одинаковым числом иголок.

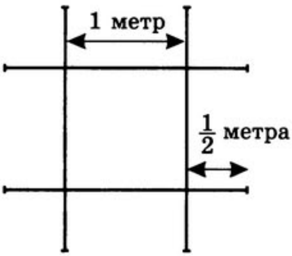
Принцип Дирихле.

Если кроликов рассаживать по клеткам, и при этом количество кроликов больше, чем количество клеток, то в одной из клеток окажется не менее двух кроликов.

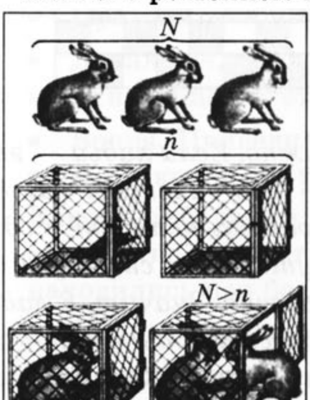
Иоганн Петер Густав Лежён Дирихле 1805–1859

3. Докажите, что из любых шести целых чисел можно выбрать два, разность которых кратна пяти.
4. В мешке лежат 5 белых и 2 чёрных шара. Какое наименьшее число шаров нужно вынуть наугад из ящика, чтобы среди них оказались шары одного цвета? Какое наименьшее число шаров нужно вынуть, чтобы среди них наверняка оказался хотя бы один чёрный?
5. В ящике лежат носки красного, белого, зелёного, синего и чёрного цветов. Какое наименьшее число носков нужно вытащить вслепую из ящика, чтобы среди них оказались два носка одного цвета?
6. В клетках таблицы 3×3 расставлены числа 1, 2, 3. Подсчитали все суммы по строчкам, столбцам и двум диагоналям. Докажите, что какие-то две из них равны.
7. Докажите, что среди чисел, записываемых только единицами, есть число, которое делится нацело на 2013.
8. Голубей рассадили в ящики, причём оказалось, что ящиков больше, чем голубей. Докажите, что хотя бы один из ящиков пуст.

9. Какое наибольшее число пауков может ужиться на паутине, изображённой на рисунке, если паук терпит соседа на расстоянии, не меньшем 1,1 м?



10. Докажите, что среди любых десяти целых чисел найдутся несколько таких, сумма которых кратна десяти.
11. Какое наибольшее число клеток на доске $n \times n$ можно закрасить так, чтобы никакие две закрашенные клетки не соприкасались (даже в одной точке) при $n = 6$? $n = 2014$?
12. Равносторонний треугольник A можно закрыть пятью одинаковыми равносторонними треугольниками (эти треугольники могут перекрываться друг с другом и выступать за пределы треугольника A). Докажите, что треугольник A можно полностью закрыть и четырьмя такими треугольниками.
13. Решите задачи №№ 1, 2, 10, 11, 12, 16 из занятия №5, используя принцип Дирихле. Сравните эти решения с решением методом «от противного».



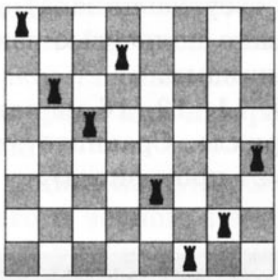
Занятие 8 Принцип Дирихле на шахматной доске

1. Какое наибольшее количество n ладей можно расставить на шахматной доске 8×8 так, чтобы они не находились под боем друг друга?

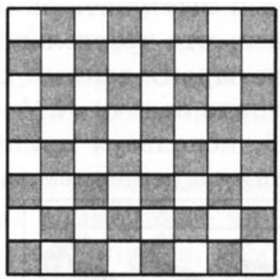
- Приведите пример расстановки n ладей.
- Докажите, что примера расстановки для $n+1$ ладьи не существует.
- Bonus. Сколько существует примеров расстановки n ладей, не бьющих друг друга, на доске 8×8?

Решение.

8 ладей расставить можно



9 ладей расставить нельзя



Пусть 9 ладей расставить можно. Если ладьи — это «кролики» (их 9), а строки — это «клетки» (их 8), то по принципу Дирихле 2 кролика попадут в одну клетку, т.е. две ладьи попадут в одну строку и будут бить друг друга. Противоречие. Значит, 8 ладей в соответствии с условием расставить можно, а 9 (и, тем более, больше девяти) нельзя. Значит, наибольшее количество ладей $n=8$. ***Ответ:*** *8.*

2. Какое наибольшее количество n королей можно расставить на шахматной доске 8×8 так, чтобы они не находились под боем друг друга?
   - Приведите пример расстановки n королей.
   - Докажите, что примера расстановки для $n+1$ короля не существует.
   - Bonus. Существует ли несколько примеров расстановки n королей, не бьющих друг друга, на доске 8×8?
3. Какое наибольшее количество n слонов можно расставить на шахматной доске 8×8 так, чтобы они не находились под боем друг друга?
   - Приведите пример расстановки n слонов.
   - Докажите, что примера расстановки для $n+1$ слона не существует.
   - Bonus. Приведите три различных примера расстановки n слонов, не бьющих друг друга, на доске 8×8.
4. Какое наибольшее количество n коней можно расставить на шахматной доске 8×8 так, чтобы они не находились под боем друг друга?
   - Приведите пример расстановки n коней.
   - Докажите, что примера расстановки для $n+1$ коня не существует.
   - Bonus. Приведите два различных примера расстановки n коней, не бьющих друг друга, на доске 8×8.
5. Какое наибольшее количество n ферзей можно расставить на шахматной доске 8×8 так, чтобы они не находились под боем друг друга?
   - Приведите пример расстановки n ферзей.
   - Докажите, что примера расстановки для $n+1$ ферзя не существует.

- Bonus. Приведите два различных примера расстановки n ферзей, не бьющих друг друга, на доске 8×8.

6. Рассмотрим фигуру магараджа — она бьет и как ферзь, и как конь. Какое наибольшее количество n магараджей можно расставить на мини шахматной доске 6×6 так, чтобы они не находились под боем друг друга?
   - Приведите пример расстановки n магараджей.
   - Докажите, что примера расстановки для $n + 1$ магараджи не существует.
7. Какое наибольшее число n полей можно отметить на шахматной доске 8×8 так, чтобы с любого из них на любое другое отмеченное поле можно было попасть, сделав ровно два хода шахматного коня?
   - Приведите пример того, как отметить n полей в соответствии с условием задачи.
   - Обоснуйте, что данный пример удовлетворяет условию.
   - Докажите, что примера, в котором отмечено $n + 1$ поле в соответствии с условием, не существует.

Занятие 9 Обобщённый принцип Дирихле

Обобщенный принцип Дирихле.

Если a кроликов рассаживать по b клеткам, и при этом $a : b = c$ (ост. r), где $r \neq 0$, то в одной из клеток окажется не менее $(c + 1)$ кролика.

1. В магазин привезли 25 ящиков с яблоками трёх сортов (в каждом ящике яблоки одного сорта). Докажи-

те, что среди них, по крайней мере, 9 ящиков с яблоками одного и того же сорта.

2. В школе 30 классов и 1000 учеников. Докажите, что есть класс, в котором не менее 34 учеников.
3. В квадратном коврике 1 м×1 м моль проела 51 маленькую дырочку. Докажите, что какие-то три из них можно накрыть латкой 20 см×20 см.
4. В ящике лежат цветные карандаши: 10 красных, 8 синих, 8 зелёных и 4 жёлтых. В темноте берем из ящика карандаши. Какое наименьшее число карандашей нужно взять, чтобы среди них заведомо нашлись: а) 4 карандаша одного цвета; б) хотя бы один карандаш каждого цвета; в) не менее шести синих карандашей?
5. На циферблате часов расположены 1994 точки. Докажите, что найдется момент времени, начиная с которого в течение 200 секунд минутная стрелка пробежит хотя бы вдоль 111 точек.
6. Какое наибольшее число полей на доске 8×8 можно закрасить в чёрный цвет так, чтобы в любом уголке из трёх клеточек было, по крайней мере, одно незакрашенное поле?
7. В стране Курляндии m футбольных команд (по 11 футболистов в каждой). Все футболисты собрались в аэропорту для поездки в соседнюю страну на ответственный матч. Самолет сделал 10 рейсов, перевозя каждый раз по m футболистов. Ещё один футболист прилетел к месту предстоящего матча на вертолете. Докажите, что хотя бы одна из команд была целиком доставлена в другую страну на матч.
8. Верно ли, что среди любых семи натуральных чисел найдутся три, сумма которых кратна трём?
9. Дано 8 различных натуральных чисел, не больших 15. Докажите, что среди их положительных попарных разностей есть три одинаковых.

10. Коля подсчитал, что в течение дня за завтраком, обедом и ужином он съел 10 конфет. Докажите, что хотя бы один раз он съел не меньше четырёх конфет. Решите задачу, используя обобщённый принцип Дирихле, и сравните со своим решением этой задачи (занятие №5) методом «от противного».
11. В классе 37 человек. Докажите, что среди них найдутся четверо, родившиеся в один и тот же месяц. Решите задачу, используя обобщённый принцип Дирихле, и сравните со своим решением этой задачи (занятие №5) методом «от противного».
12. В коллекции есть 25 золотых монет в 1, 2, 3, 5 пиастров. Имеется ли среди них семь монет одного достоинства? Обязательно ли монет какого-то достоинства будет ровно семь? Решите задачу, используя обобщённый принцип Дирихле, и сравните со своим решением этой задачи (занятие №5) методом «от противного».
13. Учительница объявила результаты диктанта. Больше всех ошибок было у Пети — 13. Докажите, что среди 29 учащихся этого класса есть трое, допустившие одинаковое число ошибок. Решите задачу, используя обобщённый принцип Дирихле, и сравните со своим решением этой задачи (занятие №5) методом «от противного».
14. На олимпиаде по математике каждому участнику предложили решить по 5 задач. 10 школьников вместе решили 35 задач, причём Петя решил одну задачу, Боря — две, Володя — три. Докажите, что нашелся ученик, решивший все пять задач, которые ему предложили.
15. *(Задача Рамсея)* Докажите, что в любой компании из шести человек есть либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых друг с другом.

16. На плоскости поставили 17 точек, причём никакие три из них не лежат на одной прямой. После этого каждую точку соединили с каждой другой отрезком. Каждый из проведенных отрезков покрашен в жёлтый, красный или синий цвет. Докажите, что существует треугольник с вершинами в данных точках и со сторонами одного цвета.
17. В классе 25 учеников. Среди любых трёх из них есть двое друзей. Докажите, что в этом классе есть ученик, у которого среди одноклассников не менее 12 друзей.
18. Можно ли увезти 50 камней весом 370 кг, 372 кг, 374 кг, ..., 468 кг на семи трёхтонках?
19. Клетки прямоугольника 5×41 раскрашены в два цвета. Докажите, что можно выбрать три строки и три столбца так, чтобы все 9 клеток, стоящие на их пересечении, были одного цвета.
20. Если сумма n чисел равна S, то среди них есть число, не меньшее $\frac{S}{n}$, и есть число, не большее $\frac{S}{n}$. Докажите.

Занятие 10 Математика: в шутку и всерьёз

1. В корзине лежат 5 яблок. Как разделить их поровну между пятью детьми так, чтобы каждый получил по яблоку, и одно осталось в корзине?
2. Экипаж, запряженный тройкой лошадей, проехал за час 15 км. С какой скоростью бежала каждая лошадь?
3. В семье пять братьев. У каждого из них есть одна сестра. Сколько всего детей в семье?
4. Два отца и два сына съели за завтраком три яйца, причём каждому досталось целое яйцо. Как это могло случиться?

5. В двух кошельках лежат две монеты, причём в одном кошельке монет вдвое больше, чем в другом. Как такое может быть?
6. Подряд стоят шесть стаканов: первые три с водой, остальные три пустые. Как, дотрагиваясь только до одного стакана, сделать так, чтобы пустые и полные стаканы чередовались?
7. В поездах стоп-краны всегда красного цвета. А какого цвета они в самолётах и вертолётах?
8. Один начинающий шахматист решил дать сеанс одновременной игры в шахматы чемпиону мира и вице-чемпиону. Один из них должен играть белыми, а другой — чёрными фигурами. Начинающий шахматист планирует или свести обе партии вничью, или даже одну выиграть. Как он собирается это делать?
9. Представьте себе корабль со спущенной на воду веревочной лестницей вдоль борта. У лестницы 10 ступенек. Расстояние между соседними ступеньками 30 см. Самая нижняя ступенька касается воды. Начинается прилив, который поднимает воду на 20 см за каждый час. Через какое время покроется водой третья снизу ступенька лестницы?
10. Король пожелал сместить своего министра, не слишком обидев его. Он подозвал министра к себе и предложил выбрать один из двух листочков, пояснив, что на одном написано «Уходите», а на другом — «Останьтесь». Листок, который вытащит министр, решит его судьбу. Министр догадался, что на обоих листках написано «Уходите». Как министру сохранить свое место?
11. Из Харькова в Киев на «Volvo» выехал бизнесмен Николай. Навстречу ему из Киева выехал на велосипеде доцент Иван Иванович. Кто из них в момент встречи окажется ближе к Киеву?

12. Сын отца профессора разговаривает с отцом сына профессора, а профессор в разговоре не участвует. Как такое могло быть?
13. Расшифруйте известное стихотворение:

Мяжя Дяма клёнгё брящэд,
Юлёмыря ф лэщгю нащыг.
Дыже, Дямэщгя, мэ брящъ
Мэ юдёмэд ф лэщгэ нащ.

14. Кузнец соединил 5 цепей, по 3 звена в каждой, в одну цепь, раскрыв 4 кольца и снова заковав их. Как выполнить работу быстрее?
15. Пять рыбаков съели 5 судаков за пять дней. За сколько дней 10 рыбаков съедят 10 судаков?
16. Один господин написал о себе: «Пальцев у меня двадцать пять на одной руке, столько же на другой, да десять на ногах». Что он забыл?
17. Три землекопа за 2 часа вырыли три ямы. Сколько ям выроют 6 землекопов за 5 часов?
18. Найдите наименьшее натуральное число, кратное 100, сумма цифр которого равна 100.
19. Придумайте трёхзначное число, у которого с любым из чисел 543, 142, 562 совпадает один из разрядов, а два других не совпадают.
20. Учитель задал на уроке сложную задачу. В результате число мальчиков, решивших эту задачу, оказалось равным числу девочек, не решивших её. Кого в классе больше: учеников, решивших задачу, или девочек, и почему?
21. «Когда послезавтра станет вчера, — сказала Пу́танка, — то сегодня будет столь же далеко от воскресенья, как и тот день, который был сегодня, когда позавчера было завтра». В какой день недели она произнесла этот головоломный лепет?
22. Сколько существует двузначных чисел, у которых цифра десятков: а) больше цифры единиц; б) меньше цифры единиц?

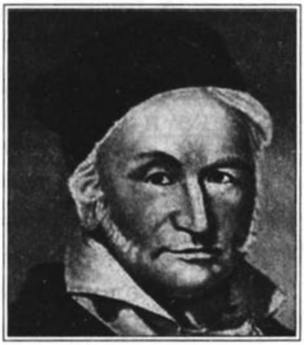
23. Шёл паломник в Иерусалим и встретил трёх странников. Каждый из них нёс три мешка, в каждом мешке — по три кота. Сколько живых существ двигалось в Иерусалим?
24. Три спички лежат на столе параллельно друг другу (| | |). Удалите спичку из середины, не трогая её.
25. Как бросить мяч таким образом, чтобы он, пролетев некоторое расстояние, остановился и начал двигаться в обратном направлении?
26. Сколько концов у 4 палок? У 5 палок? У 4 с половиной палок?
27. Большой, зелёный, живет под землёй и питается камнями. Кто это?
28. Ковбой вошёл в бар и попросил воды. Вместо ответа хозяин выхватил кольт и выстрелил в потолок. Ковбой поблагодарил и вышел. В чём тут дело?

Занятие 11 Арифметическая прогрессия

Арифметическая прогрессия

1. Бригада изготовила в январе 62 детали, а в каждый последующий месяц изготовляла на 14 деталей больше, чем в предыдущий. Сколько деталей изготовила бригада в ноябре того же года?
2. В первый день месяца Незнайка задал Знайке 147 вопросов, во второй день он задал 143 вопроса, в третий — 139 вопросов, и т. д. Таким образом он мучил Знайку 3 недели. Сколько вопросов он задал в последний день?
3. Сколько существует трёхзначных чисел, кратных 47?
4. Докажите **формулу n-го члена арифметической прогрессии:** $a_n = a_1 + d \cdot (n - 1)$.

Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом: $a_{n+1} = a_n + d$.
Число $d = a_{n+1} - a_n$ называют разностью арифметической прогрессии.



Иоганн Карл Фридрих
Гаусс
1777–1855

5. Найдите 11-ый член арифметической прогрессии: 16,9; 15,6; ...
6. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, если $a_4 = 26$, $a_9 = 61$.
7. Докажите, что **каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов этой прогрессии.**
8. Шестой член арифметической прогрессии равен 2013. Найдите сумму: а) пятого и седьмого членов этой прогрессии; б) четвертого и восьмого членов; в) сумму первых одиннадцати членов этой прогрессии.
9. Между числами $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ вставьте три числа так, чтобы вместе с данными числами они составили арифметическую прогрессию.
10. Докажите, что **последовательность** $a_n = kn + b$ **является арифметической прогрессией.** Найдите первый член и разность этой прогрессии.
11. Чему равна сумма внутренних углов треугольника? выпуклого четырёхугольника? выпуклого пятиуголь-

ника? выпуклого n-угольника? Докажите, что последовательность сумм внутренних углов треугольника, выпуклого четырёхугольника, выпуклого пятиугольника и т.д. является арифметической прогрессией.

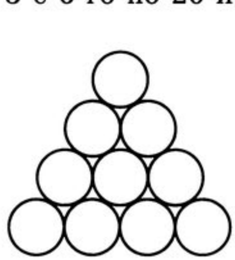
Сумма арифметической прогрессии

12. Рассказывают, что великий математик Карл Гаусс, ещё будучи учеником младших классов, устно решил пример на сложение: $1 + 2 + 3 + ... + 100$. Решите его и вы.
13. Разделите циферблат часов на шесть кусков с одинаковой суммой чисел в каждом куске. Чему равна сумма всех чисел на циферблате? А сумма всех цифр, изображенных на нем?

14. В первый день магазин продал 11 кг сахара, а в каждый следующий день продавал на 2 кг больше, чем в предыдущий. Сколько сахара продал магазин за 8 дней?
15. Найдите сумму всех трёхзначных чётных чисел.
16. Найдите сумму всех двузначных чисел, кратных семи.
17. Докажите **формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии:**

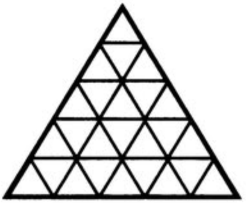
а) $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$; б) $S_n = \dfrac{2a_1 + d \cdot (n-1)}{2} \cdot n$.

18. Просуммируйте: а) $13 + 19 + 25 + ... + 265$; б) члены арифметической прогрессии $a_n = 2n - 3$ с 6-го по 20-й включительно.
19. В пирамидке, представленной на рисунке, всего 10 кружков. А сколько всего кружков будет в аналогичной пирамидке, в нижнем ярусе которой не 4, а 2013 кружков?



20. В компании из n человек каждый пожал руку всем остальным. Сколько всего было рукопожатий?

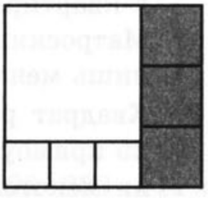
21. Каждую сторону равностороннего треугольника разделили на 5 одинаковых частей и разбили треугольник на 25 маленьких равносторонних треугольников. Сколько маленьких треугольников будет в аналогичной конструкции, если сторону равностороннего треугольника разделить не на 5, а на n одинаковых частей?



22. Найдите формулу для сумм: а) первых n нечётных натуральных чисел; б) первых n чётных натуральных чисел. Решите задание разными способами.

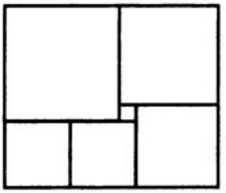
Занятие
12 Квадраты и прямоугольники

1. Прямоугольник разделен на 7 квадратов. Сторона каждого из закрашенных квадратов равна 8 см. Чему равна сторона большого белого квадрата?



2. Сторона квадрата на 5 см меньше длины прямоугольника и на 3 см больше его ширины. Периметр прямоугольника равен 24 см. Найдите площадь квадрата.

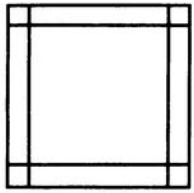
3. Прямоугольник составлен из квадратов. Найдите сторону самого большого квадрата, если сторона самого маленького равна 1.



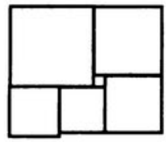
4. Можно ли составить магический квадрат из первых 36 простых чи-

сел? В магическом квадрате суммы чисел во всех строчках, всех столбцах и двух больших диагоналях равны.

5. Сколько всего квадратов изображено на рисунке?

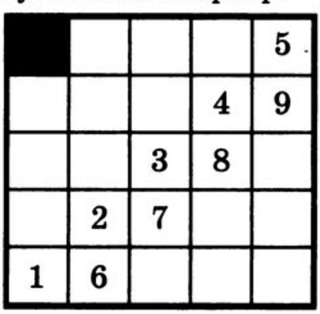


6. Фигура на рисунке составлена из квадратов. Найдите сторону левого нижнего квадрата, если сторона самого маленького равна 1.



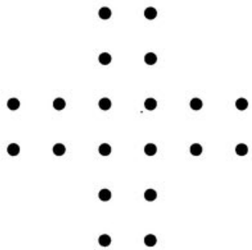
7. В Москве так подорожали квартиры, что их покупают впрок даже по кусочкам. Бизнесмен Шарик купил кусочки 3 дм × 5 дм, 3 см × 5 м, 4 дм × 2 м в квартирах, где 1 м^2 стоит 16000$. Бизнесмен Матроскин купил кусочки 2 см × 3 м, 4 см × 8 дм и 2 м × 7 дм в квартирах, где 1 м^2 стоит 12000$. Шарик должен Матроскину 80$. Может ли он расплатиться, только лишь меняясь с Матроскиным кусочками квартир?

8. Квадрат разбит прямыми на 25 прямоугольников. Площади некоторых из них указаны на рисунке (выполненном не в масштабе). Найдите площадь заштрихованного прямоугольника.

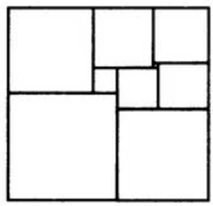


9. Двадцать точек размещены так, как показано на рисунке. Сколько можно построить квадратов таких, чтобы все их вершины лежали в некоторых из данных точек? Как убрать 6 точек, чтобы нельзя было по-

строить ни одного квадрата с вершинами в тех точках, которые остались?



10. (Разбиение Морона) Ширина прямоугольника на рисунке — 33 клетки, а высота — 32 клетки. Найдите размеры всех 9 квадратов, на которые он разделен (стороны всех квадратов выражаются целым числом клеток).



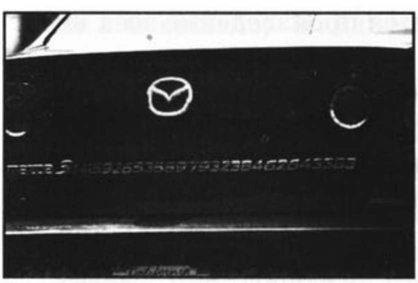
11. Доказать, что из пяти попарно различных квадратов нельзя сложить прямоугольник.
12. Можно ли сложить прямоугольник из шести попарно различных квадратов?

Занятие 13 Последние цифры, остатки и циклы

1. Найдите последнюю цифру числа $111 \cdot 222 \cdot 333 \cdot 444 \times$ $\times\, 555 \cdot 666$.
2. Какой цифрой оканчивается произведение всех нечётных чисел от 1 до 2013?
3. Найдите последнюю цифру числа: а) 2^{100}; б) 3^{2013}; в) $43^{43} - 17^{17}$; г) 9999^{999999}.
4. Докажите, что последняя цифра любого целого числа совпадает с последней цифрой его пятой степени.
5. Напишите формулу для чисел, дающих: а) при делении на 3 остаток 2; б) при делении на 5 остаток 3;

в) при делении на 4 остаток 1; г) нечётных чисел; д) при делении на 45 остаток 27; е)* при делении на 27 остаток 45; ж) напишите формулу для чисел, кратных 2013.

6. Разделите с остатком: а) 2014 на 850; б) 6! на 5; в) 1111111 на 111; г) $\underbrace{\overline{33\ldots33}}_{50}$ на $\underbrace{\overline{33\ldots33}}_{13}$.
7. При каком наименьшем n из любых n целых чисел можно выбрать 10 чисел, дающих одинаковые остатки при делении на 8?
8. Найдите остаток от деления числа $\underbrace{\overline{22\ldots22}}_{1000}$ на 7.
9. Запишите в виде десятичной периодической дроби: а) 2/3; б) 5/6; в) 3/7; г) 5/13.
10. Найдите тысячную цифру после запятой в десятичной записи числа 1/7.
11. Сколько воскресений может быть в году?
12. Может ли в одном месяце быть пять понедельников? А шесть?
13. В некотором месяце три воскресенья пришлись на чётные числа. Какой день недели был 20-го числа этого месяца?
14. В январе некоторого года было 4 понедельника и 4 пятницы. Каким днем недели было 15 число этого месяца?



15. В некотором году понедельников было больше, чем вторников, а воскресений больше, чем суббот. Какой день недели был первого января этого года?
16. В новогоднюю ночь на подоконнике стояли в ряд (слева направо) герань, крокус и кактус. Каждое утро Маша, вытирая пыль, меняет местами цветок справа и цветок в центре. Днем Таня, поливая цветы, меняет местами тот, что в центре, с тем, что слева. В каком порядке будут стоять цветы через 365 дней в следующую новогоднюю ночь?
17. Найдите две последние цифры числа 2^{2000}.
18. Олегу подарили игрушечного робота. Наблюдая за ним в течение долгого времени, он заметил, что:

    а) если сейчас робот кивает, то через минуту он моргает;

    б) если сейчас робот топает, то через минуту он хлопает;

    в) если сейчас робот пищит, то через минуту он кивает;

    г) если сейчас робот трещит, то через минуту он пищит;

    д) если сейчас робот моргает, то через минуту он топает;

    е) если сейчас робот хлопает, то через минуту он трещит.

    Сейчас робот пищит. Что он будет делать через 40 минут? Ответ объясните.
19. Начнем считать пальцы на правой руке: первый — мизинец, второй — безымянный, третий — средний, четвёртый — указательный, пятый — большой, шестой — снова указательный, седьмой — снова средний, восьмой — безымянный, девятый — мизинец, десятый — безымянный и т. д. Какой палец будет по счету 2013-м?

20. Докажите, что если целые числа a и m взаимно просты, то найдется такое натуральное n, что $a^n - 1$ будет кратно m.

Занятие 14 Обратный ход

1. Я задумал число, умножил его на 2, прибавил 3 и получил 17. Какое число я задумал?
2. Алёша задумал число. Он прибавил к нему 5, потом разделил сумму на 3, умножил на 4, отнял 6, разделил на 7 и получил число 2. Какое число задумал Алёша?
3. Женщина собрала в саду яблоки. Чтобы выйти из сада, ей пришлось пройти через 4 двери, каждую из которых охранял свирепый стражник, отбиравший половину яблок. Домой она принесла 10 яблок. Сколько яблок досталось стражникам?
4. Предложил чёрт лодырю: «Всякий раз, как перейдешь этот волшебный мост, твои деньги удвоятся. За это ты, перейдя мост, должен будешь отдать мне 24 копейки». Трижды перешел лодырь мост — и остался совсем без денег. Сколько денег было у лодыря первоначально?
5. Из натурального числа вычли сумму его цифр. Из полученного числа вычли сумму его цифр, и так поступали снова и снова. После одиннадцати таких вычитаний впервые получили нуль. С какого числа начали?
6. В двух комнатах было 76 человек. Когда из одной комнаты вышли 30, а из второй 40, то людей в комнатах оказалось поровну. Сколько человек было в каждой комнате первоначально?
7. На двух кустах сидело 25 воробьёв. После того, как с первого куста на второй перелетели 5 воробьёв, со второго улетели 7 воробьёв, то на первом кусте оста-

лось вдвое больше воробьёв, чем на втором. Сколько воробьёв было на каждом кусте первоначально?

8. В правом и левом карманах у меня всего 35 рублей. Если из правого кармана переложить в левый столько рублей, сколько было в левом, то в правом кармане будет на 3 рубля больше, чем в левом. Сколько денег у меня было в каждом кармане первоначально?
9. В двух мешках находится 140 кг муки. Если из первого мешка переложить во второй $\frac{1}{8}$ часть муки, находящейся в первом мешке, то в обоих мешках муки станет поровну. Сколько муки было в каждом мешке первоначально?
10. К натуральному числу прибавили сумму его цифр. К получившемуся числу прибавили сумму его цифр и т. д. Когда в седьмой раз к числу прибавили сумму его цифр, получили 1000. С какого числа начали?
11. Мама купила яблоки для своих детей — Вани, Нины и Миши. Дети должны были поделить яблоки между собой поровну. Ваня пришёл домой первым, сосчитал яблоки, взял третью часть и ушёл. Потом пришла Нина и, полагая, что она пришла первой, сосчитала оставшиеся яблоки, взяла третью часть и ушла. Наконец, пришёл Миша и взял третью часть оставшихся яблок. После этого в сумке осталось 8 яблок. Сколько яблок купила мама для своих детей? Как справедливо разделить оставшиеся яблоки?
12. Мама оставила Тане орехи на три дня. В первый день Таня съела половину всех орехов и ещё пол-ореха. Во второй день она съела половину оставшихся орехов и ещё пол-ореха. В третий день она опять съела половину оставшихся орехов и ещё пол-ореха, и орехов больше не осталось. Сколько орехов мама оставляла Тане?
13. Пять моряков собрали на острове мешок орехов и заночевали. Ночью один моряк проснулся и разделил

орехи на 5 равных частей. Один орех оказался лишним. Моряк отдал его мартышке, съел свою долю и лёг спать. Затем то же проделали остальные моряки, причём никто не знал о действиях предшественников. Утром оставшиеся орехи — уже в шестой раз — разделили поровну, причём снова остался один лишний орех для мартышки. Как такое могло быть?

14. Найдите значение выражения:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}}$$

15. Восстановите по некоторым сохранившимся номерам путь шахматного коня, побывавшего ровно по 1 разу на всех клетках шахматной доски 6×6:

17				11	
2			25		
23	16	1			
30			19		
15				13	
8					35

16. Найдите путь от верхнего левого «а» до правого нижнего «я», который проходит по 1 разу через каждую букву алфавита. За один шаг разрешается двигаться только на соседнюю клетку по горизонтали или по вертикали.

а	б	н	ю	р	д	е	ю
ж	ш	м	д	к	ш	ж	р
ъ	у	ы	л	м	б	ъ	а
о	ы	в	ф	э	у	е	х
ч	й	щ	с	ь	г	л	н
ц	ф	з	щ	с	т	й	к
п	ё	т	ь	п	э	ц	ч
и	в	ё	г	з	о	и	я

Занятие 15 Повторяем школьную программу: дроби, пропорции, уравнения

1. Петя может покрасить стену за 24 часа, а Ваня — за 8 часов. Какая часть стены останется неокрашенной после часа их совместной работы? Сколько часов им ещё осталось красить стену при совместной работе?
2. После того, как Наташа съела половину персиков из банки с персиковым компотом, уровень компота понизился на 1/3. На какую часть (от установившегося нового уровня) понизится уровень компота, если съесть половину оставшихся персиков?
3. За десять дней пират Ерёма
Способен выпить бочку рома.
А у пирата у Емели
Ушло б на это две недели.
За сколько смогут выпить ром
Пираты, действуя вдвоём?
4. Докажите, что дробь $\dfrac{14n+3}{21n+4}$ является несократимой ни при каком натуральном n.
5. При каких значениях a и b выполняется равенство: $\dfrac{a}{b}=\dfrac{a-3}{b-3}$?
6. *(Производные пропорции)* Известно, что $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$. Докажите, что верны пропорции: а) $\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}$; б) $\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$; в) $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d}$, если $a\neq b$, $c\neq d$.
7. *(Задача Феофана Прокопóвича)* Крепость с трёхтысячным гарнизоном оказалась в осаде. Солдаты имеют

запас провианта на 7 месяцев, но едва ли смогут освободиться от осады раньше, чем через год. Сколько солдат нужно вывести из крепости по подземному ходу, чтобы оставшимся хватило продовольствия на год?

8. Определите, при каких натуральных значениях x является натуральным числом значение выражения: $\frac{5x-2}{x-3}$.

9. Можно ли число 1 представить в виде суммы дробей $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$, где a, b, c, d — нечётные натуральные числа?

10. Для оклейки двух комнат куплены обои. На оклейку первой комнаты пошло на 2 рулона больше половины всех купленных обоев, а на оклейку второй пошло 2/3 количества обоев, израсходованных на оклейку первой комнаты. Сколько рулонов обоев было куплено, если после оклейки обеих комнат один рулон остался?

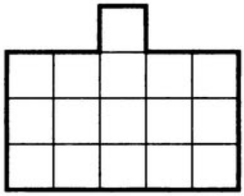
11. Для стада коров фермер заготовил корма на 30 дней. На сколько дней хватит этих кормов, если поголовье сократится на 40%, а дневная норма расхода кормов на каждую корову увеличится на 25%?

12. Для содержания лошадей был сделан запас сена на определённое время. Если бы лошадей было на две меньше, то сена хватило бы ещё на 10 дней, а если бы их было на две больше, то не хватило бы на 6 дней. Сколько было лошадей, и на сколько дней был сделан для них запас сена?

13. *(Задача Ньютона)* У купца была некоторая сумма денег. В первый год он истратил 100 фунтов, а к оставшейся сумме добавил третью её часть; в следующем году он опять истратил 100 фунтов, а потом

добавил к остатку третью его часть. В третьем году он опять истратил 100 фунтов и добавил к остатку третью его часть. В результате капитал купца стал вдвое больше первоначального. Определите его начальный капитал.

14. Разрежьте фигуру на 4 одинаковые части по линиям клеточек двумя способами:



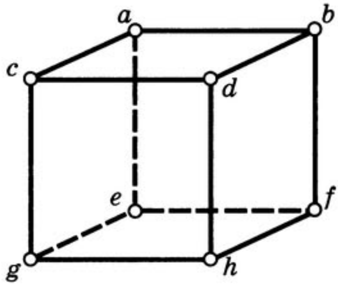
15. Акробат и собачонка
Весят два пустых бочонка.
Шустрый пёс без акробата
Весит два мотка шпагата.
А с одним мотком ягнёнок
Весит — видите — бочонок.
Сколько весит акробат
В пересчёте на ягнят?

16. Покажите, как разрезать данную фигуру по линиям клеточек на четыре одинаковые части и сложить из них квадрат 6×6 с шахматной раскраской.

Занятие
16

Принцип крайнего - 1

1. Можно ли расставить во всех вершинах куба натуральные числа так, чтобы число в каждой из вершин равнялось сумме чисел в трёх вершинах, соединённых с ней рёбрами?

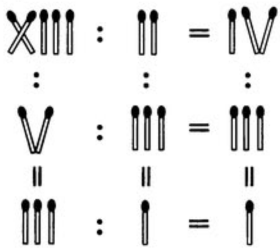


$a = b + c + e$
$b = a + d + f$
$c = a + d + g$
$\dots$

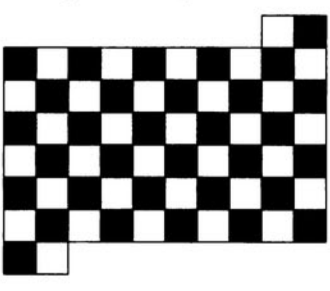
2. Можно ли расставить во всех вершинах куба рациональные числа (не все одинаковые) так, чтобы число в каждой из вершин равнялось сумме чисел в трёх вершинах, соединённых с ней рёбрами?
3. Вдоль окружности расставили 10 чисел так, что каждое оказалось равным среднему арифметическому своих соседей. Докажите, что все эти 10 чисел равны друг другу.
4. Вдоль окружности расставили 10 чисел так, что каждое оказалось не меньше, чем среднее арифметическое своих соседей. Докажите, что все эти 10 чисел равны друг другу.
5. Дан набор из десяти чисел. Известно, что среднее арифметическое любых двух из них также является некоторым числом из данного набора. Докажите, что набор состоит из десяти одинаковых чисел.
6. На прямой расположены 10 различных точек. Докажите, что можно нарисовать пять отрезков с концами

в данных точках так, чтобы полученные отрезки не имели общих точек.

7. На плоскости расположены 10 различных точек. Докажите, что можно нарисовать пять отрезков с концами в данных точках так, чтобы полученные отрезки не имели общих точек.
8. Можно ли на плоскости нарисовать несколько отрезков так, чтобы любая точка, являющаяся концом одного из них, лежала внутри какого-то другого отрезка?
9. В пространстве летает 2013 астероидов, все расстояния между которыми различны. На каждом из астероидов сидит астроном и наблюдает в телескоп ближайший к нему астероид (конечно, не тот, на котором он сидит). Докажите, что найдётся астероид, за которым никто из этих астрономов не наблюдает.
10. На столе лежат монеты. Безрукий вор хочет столкнуть носом какую-то монету со стола, не задев ею других монет. Всегда ли это ему удастся?
11. В каждом горизонтальном ряду переложите по 1 спичке так, чтобы все шесть примеров на деление (три горизонтальных и три вертикальных) были верными.



12. Разрежьте фигуру на две одинаковые части, из которых можно сложить шахматную доску.



13. Разместите восемь козлят и девять гусей в пяти хлевах так, чтобы в каждом хлеве были и козлята, и гуси, а число их ног равнялось 10 для каждого хлева.
14. Дядя Фёдор, кот Матроскин, Шарик и почтальон Печкин сидят на скамейке. Если Шарик, сидящий справа от всех, сядет между дядей Фёдором и котом, то кот окажется крайним слева. В каком положении они сидят?
15.

Кросс осенний вспоминая,
Спорят белки два часа:
Победил в забеге заяц,
А второй была лиса!
– Нет, — твердит вторая белка, –
Ты мне шутки эти брось.
Заяц был вторым, конечно,
Первым был, я помню, — лось.
– Я, промолвил филин важный,
В спор чужой не стану лезть.
Но у вас в словах у каждой
По одной ошибке есть.
Белки фыркнули сердито.
Неприятно стало им.
Вы уж, взвесив всё, решите,
Кто был первым, кто вторым.

16. Придумайте восемь попарно различных натуральных чисел, из которых ровно два делятся на 2, ровно три делятся на 3, ровно пять делятся на 5 и ровно семь делятся на 7.
17. *Задача-шутка* ☺☺☺. Трое попросили поджарить им по одной курице. Каждый съел свою курицу, и ещё две из заказанных куриц остались. Как такое могло быть?
18. На доске 8×8 покрасьте 40 клеточек в чёрный цвет так, чтобы у каждой чёрной клеточки ровно две соседних с ней (по стороне) клеточки также были чёрными.

Занятие
17

Принцип крайнего - 2

1. а) Докажите, что в треугольнике найдётся угол не меньший $60°$;

   б) докажите, что наибольший угол треугольника не меньше $60°$ и равен $60°$ только в случае, если треугольник равносторонний.

2. а) Докажите, что в треугольнике найдётся угол не больший $60°$;

   б) докажите, что наименьший угол треугольника не больше $60°$ и равен $60°$ только в случае, если треугольник равносторонний.

3. На плоскости без наложений лежат одинаковые круглые монеты. Докажите, что каждая из них касается не более шести других.

4. На плоскости без наложений лежит несколько круглых монет, среди которых нет двух с одинаковым радиусом. Докажите, что найдётся монета, которая касается не более пяти других.

5. В одном государстве расположено несколько аэродромов, все расстояния между которыми различны. С каждого аэродрома взлетает самолёт и летит на ближайший аэродром (не считая аэродрома, с которого он вылетел). Докажите, что на любом аэродроме приземлится не более пяти самолётов.

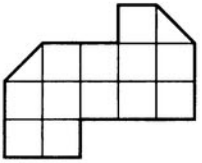
6. На прямоугольном столе без наложений лежит несколько круглых монет одинакового радиуса. Докажите, что среди них найдётся монета, касающаяся не более четырёх других.

7. На прямоугольном столе без наложений лежит несколько круглых монет одинакового радиуса. Докажите, что среди них найдётся монета, касающаяся не более трёх других.

8. Путешественник отправился из своего родного города A в самый удалённый от него город страны B; затем из города B — в самый удалённый от него город C, и т. д. Докажите, что если C не совпадает с A, то путешественник никогда не вернётся домой. (Все расстояния между городами различны).
9. Сумасшедший конструктор создал часы с 150 стрелками. Первая стрелка крутится со скоростью один оборот в час, вторая делает 2 оборота в час,..., 150-я стрелка делает 150 оборотов в час. Часы запустили из положения, когда все стрелки смотрели строго вверх. Когда в процессе работы часов встречаются две или более стрелки, эти стрелки немедленно отваливаются. Через какое время после запуска отвалится стрелка, вращающаяся со скоростью 74 оборота в час?
10. Докажите, что число $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ не является целым при $n>1$.
11. В некоторой стране каждый город соединён с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдется город, из которого можно добраться в любой другой не более чем с одной пересадкой.
12. Докажите, что в любом многограннике есть две грани с одинаковым числом сторон.
13. Все жители острова рыцарей и лжецов стали в круг, и каждый сказал путешественнику про соседа справа, рыцарь тот или лжец (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). На основании этих сообщений путешественник смог однозначно определить, какую часть всех жителей острова составляют рыцари. Какую часть всех жителей составляют лжецы?
14. 30 человек выстроены в шесть шеренг, по пять человек в каждой. Каждый из них либо рыцарь, всегда говорящий правду, либо лжец, который всегда лжёт,

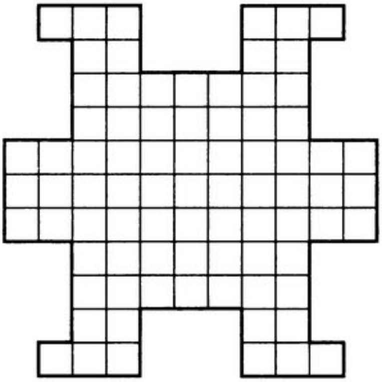
и всем им известно, кто из них рыцарь, а кто — лжец. Журналист спросил у каждого из них: «Верно ли, что найдутся хотя бы 4 шеренги, в каждой из которых лжецов больше половины?». Какое наибольшее количество ответов «да» он мог услышать?

15. Разделите фигуру на рисунке по линиям клеточек на две равные части.



16. Составьте из красных, жёлтых и зелёных кубиков $1 \times 1 \times 1$ куб $3 \times 3 \times 3$ так, чтобы в любом бруске $1 \times 1 \times 3$ все кубики были разного цвета.

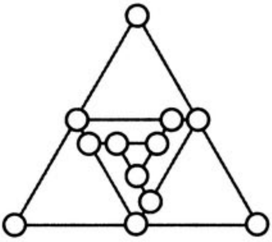
17. Разрежьте фигуру на 9 равных частей.



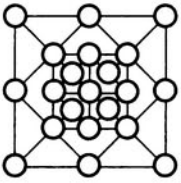
Занятие

18 Интеллектуальная разминка

Игра 1. «Магическая четвёрка» Дано число из четырёх цифр. Требуется составить равенство, в котором все данные цифры участвуют ровно по 1 разу. Примеры: 2179 $(2 + 7) \cdot 1 = 9$; 1630 $63^0 = 1$; 9212 $9^{2-2} = 1$. Можно давать числа друг другу, или сравнивать, кто быстрее составит формулу из числа, предложенного ведущим.



Игра 2. «Триноликс» Два игрока по очереди ставят: первый — крестики, второй — нолики в пустые кружки игрового поля. После заполнения всех кружков выигрывает тот, у кого окажется больше сторон треугольников с тремя его знаками вдоль них и треугольников с тремя его знаками в вершинах.



Игра 3. «Квадрошашки» Два игрока по очереди ставят: первый — крестики, второй — нолики в пустые кружки игрового поля. После заполнения всех кружков выигрывает тот, у кого окажется больше отрезков с тремя его знаками вдоль них.

Игра 4. «Превращение слов» Одно слово в другое можно превращать только путём замены одной из его букв. Переставлять буквы, исключать их или добавлять нельзя. Все слова в цепочке должны быть именами существительными, нарицательными, в именительном падеже и единственном числе.

Пример: превратить лису в волка.

ЛИСА — ЛИПА — ЛУПА — ЛУЗА — ЛОЗА —
ПОЗА — ПОЛА — ПОЛК — ВОЛК.

В соревнованиях можно подводить итоги: как по скорости правильного выполнения задания, так и по тому, у кого получилась самая короткая цепочка превращений.

Животные:

ГАЛКА...БЕЛКА КОЗА...ВОЛК ЛИС...ЛЕВ
ЛИСА...АИСТ РАК...СОМ МУХА...ПАУК

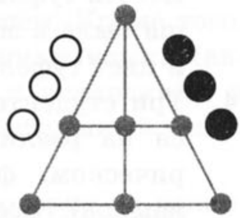
***3-4-5-6*:**

ШАХ...МАТ (**3 буквы, 3 слова в цепочке**)

НОЛЬ...СЕМЬ (**4 буквы, 4 слова в цепочке**)

БЕТОН...ЗАБОР (**5 букв, 5 слов в цепочке**)

ВОРОТА...ПАГОДА (**6 букв, 6 слов в цепочке**)



Игра 5. «Цоро-ёматату» Игроки по очереди выставляют свои фишки (один — три белых, другой — три чёрных) на свободные позиции игрового поля. Когда все фишки расставлены, остаётся только одна свободная позиция. После этого каждый игрок поочерёдно переставляет одну из своих фишек на свободное место. При этом можно либо переставлять фишку на соседнюю позицию, либо перепрыгивать через одну соседнюю фишку. Выигрывает тот, кто поставит три свои фишки вдоль одной из пяти нарисованных линий.

Занятие 19 Взаимно-однозначное соответствие

1. **Беседуют трое: Белокуров, Чернов и Рыжов. Брюнет сказал Белокурову: «Любопытно, что один из нас блондин, другой — брюнет, третий — рыжий, и ни у кого цвет волос не соответствует фамилии». Какой цвет волос у каждого из беседующих?**
2. **В бутылке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что:**

   1) вода и молоко не в бутылке;

   2) сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом;

   3) в банке не лимонад и не вода;

4) стакан стоит около банки и сосуда с молоком.

Куда налита какая жидкость?

3. Три подруги вышли погулять в белом, зелёном и синем платьях и туфлях таких же цветов. Известно, что только у Ани цвет платья и цвет туфель совпадают. Ни туфли, ни платье Вали не были белыми. Наташа была в зелёных туфлях. Определите цвет платья и цвет туфель каждой из подруг.

4. Три студента: Андреев, Борисов и Воронов — учатся на различных факультетах университета (историческом, физико-математическом и иностранных языков). Все они приехали из различных городов: Таллинна, Твери и Вышнего Волочка, причём один из них увлекается футболом, другой — баскетболом, третий — волейболом. Известно, что:

1) Андреев не из Вышнего Волочка, а Борисов не из Твери;

2) студент, приехавший из Вышнего Волочка, учится не на историческом факультете;

3) студент из Твери учится на факультете иностранных языков и увлекается футболом;

4) Воронов учится на историческом факультете;

5) студент физико-математического факультета не любит волейбол.

Из какого города приехал каждый студент, на каком факультете учится и каким видом спорта увлекается?

5. В течение последних четырёх лет инженеры Ерёмин, Фомин, Дементьев и Барклая получали очередные отпуска в мае, июне, июле и августе. Причём, если один из них отдыхает в мае, то другой — в июне, третий — в июле, а четвёртый — в августе. Каждый из них получал отпуск все четыре года в разное время. Так, Дементьев в первый год отдыхал в июле, а второй

год — в августе. Ерёмин второй год отдыхал в мае. На третий год Барклая отдыхал в июне, а Фомин на четвёртый год — в июле. Требуется узнать время отдыха каждого инженера в каждом из четырёх лет.

6. Маша, Люда, Женя и Катя умеют играть на различных музыкальных инструментах (виолончель, рояль, гитара и скрипка), но каждая на своём. Кроме того, девушки знают различные иностранные языки (английский, немецкий, французский и испанский), и нет двух, знающих один и тот же иностранный язык. Известно, что:

   1) девушка, играющая на гитаре, говорит по-испански;

   2) Люда не играет ни на скрипке, ни на виолончели и не знает английского;

   3) Маша не играет ни на скрипке, ни на виолончели и не знает английского;

   4) Женя знает французский, но не играет на скрипке.

   Кто на каком инструменте играет и какой иностранный язык знает?

7. В очереди за билетами в кино стоят Юра, Миша, Володя, Саша и Олег. Известно, что:

   1) Юра купит билет раньше, чем Миша, но позже Олега;

   2) Володя и Олег не стоят рядом;

   3) Саша не находится рядом ни с Олегом, ни с Юрой, ни с Володей.

   Кто за кем стоит?

8. На столе лежат в ряд четыре фигуры: треугольник, ромб, круг и квадрат. Цвета этих фигур — зелёный, жёлтый, синий и красный, и нет двух фигур одного цвета. Фигура красного цвета лежит между зелёной и синей, справа от жёлтой фигуры лежит ромб, круг

лежит правее треугольника и ромба. Также известно, что треугольник лежит не с краю, а фигура синего цвета не лежит рядом с жёлтой. В каком порядке лежат фигуры и каков цвет каждой из них?

9. Как-то раз четыре товарища (Валентин, Николай, Владимир и Алексей) пошли со своими жёнами на танцы. Во время первого танца каждый из них танцевал не со своей женой. Лена танцевала с Валентином, а Аня — с мужем Наташи. Оля танцевала с мужем Ани, Николай — с женой Владимира, а Владимир — с женой Валентина. Кто на ком женат? Кто с кем танцевал?

10. Четверо владельцев лодок решили провести гонки из четырёх заездов, меняясь в каждом заезде лодками. Известно, что:

    1) в первом заезде Борис был на лодке Виктора, а во втором Виктор — на лодке Олега;

    2) Пётр выиграл третий заезд на своей лодке «Мотылёк», причём он выиграл и все остальные заезды;

    3) на «Колибри» во втором заезде плыл Олег, а в четвёртом заезде плыл Борис;

    4) в четвёртом заезде лодка «Колибри» пришла второй после «Стрижа».

    Кому принадлежала лодка «Шмель»?

☺☺

Чем дальше вы убежите от проблем, тем дольше придётся возвращаться, чтобы их решить!

Занятие 20 Соответствия

1. Беседуют четверо: Салал, Абдул, Юсуф и Мохаммед. Они общались между собой на персидском, армянском, греческом и турецком языках, причём каждый знал ровно два языка. Известно, что не было языка, который знали бы все четверо. Салал не знал персидского языка, но был переводчиком, когда перс Абдул хотел объясниться с Мохаммедом. Мохаммед хорошо говорил на турецком языке, и разговаривал с Юсуфом без переводчика, хотя тот турецкого не знал. Ни Салал, ни Абдул, ни Юсуф не знали такого языка, на котором они все втроём могли объясниться между собой. Кроме того, никто не знал армянского и турецкого языков одновременно. Какими языками владел каждый?
2. На международном конгрессе встретились четверо учёных: физик, историк, биолог и математик. Национальности у них были различные, и, хотя каждый знал ровно два языка, не было такого языка, который знали все четверо. В разговорах они использовали английский, французский, русский и итальянский, причём был язык, которым владели сразу трое. Никто из учёных не знал русского и французского одновременно. Хотя физик не говорил по-английски, он мог быть переводчиком в разговоре биолога и историка. Историк говорил по-русски и общался с математиком без переводчика, хотя тот русского не знал. Физик, биолог и математик не могли общаться втроём на одном языке. Какие два языка знал каждый учёный?
3. Среди офицеров Александрова, Борисова, Васильева и Григорьева — майор, капитан и два лейтенанта.

Александров и один из лейтенантов — танкисты, Борисов и капитан — артиллеристы, а Александров младше по званию, чем Васильев. Определите род войск и воинское звание каждого из четырёх офицеров.

4. Джон, Дик и Роджер — цирковые клоуны. Во время отпуска они зарабатывают, как могут — каждый из них владеет двумя профессиями из шести: писатель, трубач, водитель грузовика, игрок в гольф, парикмахер, инженер. Сможете ли вы определить, кто какими профессиями владеет, если:

   1) водитель грузовика ухаживает за сестрой игрока в гольф;

   2) трубач и инженер посещают школу верховой езды вместе с Джоном;

   3) водитель грузовика насмехается над длинными ногами трубача;

   4) Дик получил от инженера в подарок коробку шоколадных конфет;

   5) игрок в гольф купил подержанную машину у писателя;

   6) Роджер съедает пиццу быстрее, чем Дик и игрок в гольф.

5. Перед Вами пять коробочек: белая, чёрная, красная, синяя и зелёная. Также есть по два шарика каждого из этих цветов. В каждой коробочке лежит по два шарика, причём цвета коробочки и шариков могут и не совпадать. Также известно, что:

   1) ни один шарик не лежит в коробочке того же цвета, что и он сам;

   2) в красной коробочке нет синих шариков;

   3) в коробочке нейтрального цвета (то есть белого или чёрного) лежит один красный и один зелёный шарик;

4) в чёрной коробочке лежат шарики холодных тонов (зелёный и синий цвета);

5) в одной из коробочек лежат один белый и один синий шарик;

6) в синей коробочке находится один чёрный шарик.

Какого цвета шарики лежат в каждой коробочке?

6. Пять друзей-садовников, живущих рядом друг с другом, выращивают в своих садах три вида урожаев: фрукты (яблоки, персики, орехи, вишня), овощи (морковь, петрушка, тыква, лук) и цветы (астры, розы, тюльпаны, лилии). Дома размещаются по кругу, то есть первый и последний дом — соседи. Кроме того, известно, что:

1) они растят 12 разных растений;

2) у каждого — по четыре разных растения;

3) каждое растение встречается, как минимум, в одном саду;

4) только одно растение встречается сразу в четырёх садах;

5) только в одном саду — все три вида урожая;

6) только в одном саду — все четыре разных растения одного вида урожая;

7) персики растут только в двух соседних садах;

8) сад Павла — в центре и лилий там нет;

9) тот, кто разводит астры, не выращивает овощи;

10) любитель роз не выращивает петрушку;

11) садовник, у которого есть орехи, выращивает как тыкву, так и петрушку;

12) в первом саду — яблоки и вишня;

13) вишня растёт только в двух садах;

14) в саду Александра — и лук, и вишня;

15) Алексей выращивает два разных вида фруктов;

16) тюльпаны — только в двух садах;

17) яблони растут только в одном единственном саде;
18) только в одном саду, том, что рядом с садом Петра, растёт петрушка;
19) сад Александра — не крайний;
20) Иван не выращивает ни овощи, ни астры;
21) в саду Павла — три разных вида овощей.

У кого какой сад, и что там растёт?

Занятие 21 Комбинаторика — это просто!

1. Сколькими способами можно выложить в ряд апельсин, банан, киви и грушу?
2. В забеге приняли участие пять бегунов. Стартовали они одновременно, а к финишу добежали все за разное время. Сколько существует вариантов окончания забега?
3. Сколько существует пятизначных чисел, все цифры которых — различны и нечётны?
4. Упростите выражение: а) $10! \cdot 11$; б) $n! \cdot (n+1)$.
5. Найдите значение выражения: а) $\dfrac{100!}{98!}$; б) $\dfrac{n!}{(n-1)!}$.
6. Сколькими способами можно нанизать на ниточку 7 различных бусин?
7. Сколько различных бус можно сделать, имея 7 различных бусин? Бусы можно поворачивать, но не переворачивать.
8. Сколько различных бус можно сделать, имея 7 различных бусин? Бусы можно как поворачивать, так и переворачивать.
9. Сколькими способами малышка Оля может сложить башенку из трёх колец, если у неё есть пять колец, все размеры которых различны?

10. Мама хочет надеть на маленького ребёнка четыре кофточки, чтобы ему не было холодно во время прогулки. Сколькими способами она сможет это проделать, если у неё в запасе есть шесть разных кофточек?
11. Мальчики решили подарить всем своим шестерым одноклассницам по открытке на 8 Марта. В киоске продаются открытки десяти видов, а всем девочкам ребята хотят подарить разные открытки. Сколькими способами они могут осуществить своё намерение?
12. Сколькими способами можно выбрать трёх дежурных из класса, если на уроке присутствует 20 учеников?
13. У Олеси есть 9 различных ленточек, и она хочет каждый день вплетать в волосы какие-то четыре из них. Сможет ли она весь год не повторяться?
14. Из пятнадцати игроков команды по мини-футболу тренер хочет отобрать в стартовый состав пять человек. Сколько вариантов состава ему придётся обдумать?
15. Малышка Оля подросла и хочет теперь сложить пирамидку из трёх колец. У неё по-прежнему есть пять колец, все размеры которых различны. Класть меньшее колечко можно только сверху большего. Сколько разных пирамидок может сложить Оля?
16. На плоскости отмечено десять точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?
17. У одного школьника 6 книг по математике, а у другого — 8. Сколькими способами они могут обменять три книги одного на три книги другого?
18. В шахматном кружке занимаются 2 девочки и 7 мальчиков. Для участия в турнире необходимо составить команду из четырёх человек, в которую обязательно должна входить хотя бы одна девочка. Сколькими способами это можно сделать?

19. На прямой отмечено десять точек, а на параллельной ей прямой — 11 точек. Сколько существует: а) треугольников; б) четырёхугольников с вершинами в отмеченных точках?

20. Сколькими способами можно разбить 10 человек на две баскетбольные команды по 5 человек в каждой?

21. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды (52 карты) 10 карт так, чтобы: а) среди них был ровно один туз?; б) среди них был хотя-бы один туз? Решите пункт б) двумя способами.

Теория

Перестановкой из n элементов называется любой упорядоченный набор из данных различных n элементов. В таком наборе указывается, какой элемент считается первым, какой — вторым, третьим и т. д.

Формула числа перестановок из элементов: $P_n = n!$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n;\ 1! = 1;\ 0! = 1$ (читается «эн факториал»).

Размещением из n элементов по k называется любой упорядоченный набор из k элементов ($0 \le k \le n$), которые выбираются из данных различных n элементов. В таком наборе указывается, какой элемент считается первым, какой — вторым, третьим и т. д.

Формула числа размещений из n элементов по k:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Сочетанием из n элементов по k называется любой неупорядоченный набор из k элементов ($0 \le k \le n$), которые выбираются из данных различных n элементов.

Формула числа сочетаний из n элементов по k:

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Занятие
22 Комбинаторика — это просто?

1. Сколькими способами можно составить расписание одного учебного дня из 6 различных предметов?
2. Сколькими способами из 7 членов президиума собрания можно выбрать председателя, его заместителя и секретаря?
3. Сколькими способами из 10 игроков волейбольной команды можно выбрать стартовую шестёрку?
4. Сколько различных правильных дробей можно составить, используя ровно два из чисел 2; 3; 5; 7; 11; 13?
5. В вазе стоят 10 белых и 5 красных роз. Определите, сколькими способами из них можно составить букет, в который входят две белые и одна красная розы?
6. Сколькими способами можно составить комиссию из трёх человек, выбирая её членов среди четырёх супружеских пар, но так, чтобы члены одной семьи не входили в комиссию одновременно?
7. В классе, в котором учатся Петя и Вася, — 31 человек, из которых 17 — девочки. Сколькими способами можно выбрать мужскую футбольную команду, если Вася и Петя не дружат и не могут входить в команду одновременно?
8. Из 12 девушек и 10 юношей выбирают команду, состоящую из пяти человек. Сколькими способами это можно сделать, если в команду должно войти не более трёх юношей?
9. Три стрелка должны поразить 6 мишеней (каждый по две). Сколькими способами они могут распределить мишени между собой?
10. Дюжину человек нужно распределить на три команды по 4 человека в каждой. Сколькими способами это можно сделать?

11. Из 12 человек нужно выбрать две команды по 4 человека в каждой. Сколькими способами это можно сделать?
12. Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 чёрных шашек на чёрных полях шахматной доски? Составьте формулу для решения задачи.
13. Сколько существует шестизначных чисел, у которых три чётных и три нечётных цифры?
14. Сколькими способами можно рассадить за круглым столом 8 мужчин и 8 женщин так, чтобы лица одного пола не сидели рядом?
15. У Коли есть шесть друзей и на протяжении пяти дней он приглашает к себе в гости ежедневно троих из них. При этом компания ни разу не должна повториться. Сколькими способами это можно сделать?
16. У Саши есть 10 друзей и в течение нескольких дней он приглашает некоторых из них в гости так, чтобы компания ни разу не повторялась. В какой-то день он может не пригласить никого. Какое наибольшее число дней он сможет так делать?

Занятие 23 Шахматные турниры

В шахматных турнирах
за выигрыш даётся 1 очко,
за ничью — 0,5 очка,
за поражение — 0 очков.

1. Шахматисты *А*, *Б*, *В*, *Г*, *Д*, *Е* сыграли между собой однокруговой турнир, т. е. каждый сыграл со всеми остальными по одной игре. *А* сыграл все партии вничью. *Б* не проиграл ни одной партии. *В* выиграл у победителя соревнований и сыграл вничью с *Д*.

Г обогнал *Д*, но отстал от *Е*. Кто сколько очков набрал и какое место занял?

2. *В* однокруговом турнире приняли участие шахматисты *А*, *Б*, *В*, *Г*, *Д*. Шахматист *А* сыграл все партии вничью. *Б* сыграл вничью с шахматистами, которые заняли первое и последнее места. *В* проиграл у *Б*, но зато сыграл вничью только одну партию. *Г* выиграл у *Д* и у занявшего четвёртое место. Шахматист *Д* не выиграл ни одной партии. Кто сколько очков набрал и какое место занял?
3. В шахматном однокруговом турнире участвовало 8 человек, и все они набрали разное количество очков. Шахматист, занявший второе место, набрал столько же очков, сколько набрали вместе шахматисты, занявшие четыре последних места. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие четвёртое и пятое места?
4. В шахматном турнире каждый из пяти игроков сыграл со всеми противниками по одному разу. Известно, что шахматист *А* занял первое место, *Б* — второе, *В* — третье, *Г* — четвёртое, *Д* — пятое. После турнира они обменялись впечатлениями.

   — Не думал, что лишь я один не испытаю горечь поражения, — сказал *Б*.

   — А вот мне единственному не удалось одержать ни одной победы, — заметил *Д*.

   Восстановите по этим данным турнирную таблицу: как сыграл каждый шахматист с остальными участниками турнира?
5. В шахматном турнире каждый шахматист половину своих очков набрал во встречах с участниками, занявшими три последних места. Сколько человек участвовало в турнире?
6. В шахматном турнире участвовало n шахматистов — мастера и гроссмейстеры. После окончания турнира оказалось, что каждый участник ровно половину своих

очков набрал в партиях против мастеров. Докажите, что n — квадрат целого числа.

7. У чёрных слишком много королей (10), но все они матуются одним-единственным ходом. Найдите этот ход.

Занятие
24 Футбольные турниры

В футбольных турнирах (старые правила) за выигрыш даётся 2 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков.

В футбольных турнирах (новые правила) за выигрыш даётся 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков.

1. В футбольном турнире (действовали старые футбольные правила) встретились 5 команд: «Авангард», «Буревестник», «Динамо», «Спартак», «Торпедо». Они сыграли друг с другом по одному матчу, причём в каждом туре играли 4 команды, а одна была свободна от игр. В первом туре «Буревестник» проиграл у «Спартака», а во втором выиграл у «Авангарда». В третьем туре команда «Торпедо» не играла, одержав перед этим победу и проиграв другую встречу.

В четвёртом туре не играл «Авангард», имевший в своём активе две победы при трёх сыгранных матчах. Динамовцы к этому времени сумели выиграть только один матч. Все встречи четвёртого и пятого туров окончились вничью. Каких результатов добилась каждая из команд в соревнованиях?

2. В футбольном турнире (действовали старые футбольные правила) встретились четыре команды: «Динамо», «Спартак», «Труд», «Шахтёр». Каждая команда сыграла по одной игре с каждой из команд-соперниц. В итоге команда «Динамо» набрала 5 очков, «Труд» — 3 очка, «Шахтёр» — 1 очко. Всего за время турнира было забито 11 голов (автоголов, т.е. голов в собственные ворота, не было), приём 5 из них забили игроки команды «Труд». Кстати, эта команда победила «Шахтёр» со счётом 2 : 1. Восстановите исход матчей с указанием счёта в каждом матче, если известно, что один из матчей закончился со счётом 3 : 3.

3. Четыре школьные команды «Старт», «Ракета», «Комета», «Вымпел» провели однокруговой турнир (очки начислялись по старым футбольным правилам). Судья набрал на компьютере таблицу с результатами, но старый принтер почти ничего не напечатал. Получилась такая таблица:

Команда	Старт	Комета	Ракета	Вымпел	Победы	Ничьи	Поражения	Мячи	Очки
Старт	■								6
Комета		■		1:0				2:	
Ракета			■					:8	
Вымпел		0:1		■					

Однако судья помнил, что остальные матчи закончились со счётом $2:0$, $1:1$, $2:2$, $3:1$, $5:3$. Помогите судье заполнить таблицу.

4. Футбольная команда сыграла в турнире 50 матчей и набрала 67 очков (по новым футбольным правилам). Могла ли эта команда в 2 раза меньше матчей выиграть, чем проиграть?
5. В финале школьного чемпионата по футболу встретились команды «Заучки», «Дровосеки» и «Киндер-сюрпризы». Команда «Заучки» в сумме забила 60 голов, «Дровосеки» пропустила 80 голов, а «Киндер-сюрпризы» забили столько же, сколько и пропустили. Известно, что все голы команды забивали только в ворота соперников. Докажите, что в игре «Дровосеки» — «Киндер-сюрпризы» было забито не менее 40 голов.
6. Команда «Вымпел» во втором матче турнира забила больше голов, чем в первом, а в третьем матче — на 6 голов меньше, чем в двух первых вместе взятых. Всего «Вымпел» за три эти матча забил 6 голов. Мог ли он выиграть все три раза?
7. Шестнадцать команд из 16 стран провели однокруговой турнир. Могло ли оказаться так, что каждая команда сыграла во всех этих странах, кроме своей родины?
8. В однокруговом турнире участвовало n команд.
   - Сколько партий сыграно?
   - Сколько набрали очков все команды в сумме (по старым футбольным правилам)?
   - Какова наименьшая и какова наибольшая возможная сумма очков (по новым футбольным правилам)?
9. В однокруговом турнире все футбольные команды набрали разное количество очков, причём ничьих не было. Докажите, что занявший первое место выиграл

у всех остальных, занявший второе место выиграл у всех, кроме первого, занявший третье — у всех, кроме первого и второго, ..., последний всем остальным проиграл.

10. В однокруговом футбольном турнире (по новым футбольным правилам) победитель набрал больше очков, чем любая другая команда. Может ли у какой-то другой команды оказаться больше побед?
11. Футбольный турнир проходит в один круг. Могло ли случиться так, что команда, занявшая первое место (по новым футбольным правилам), по старым правилам была бы последней?

Занятие 25 Шары и перегородки

1. Есть 6 ящиков, пронумерованных числами от 1 до 6. Сколькими способами можно разложить по этим ящикам 10 одинаковых шаров так, чтобы ни один ящик не оказался пустым?
2. Есть 6 ящиков, пронумерованных числами от 1 до 6. Сколькими способами можно разложить по этим ящикам 10 одинаковых шаров (некоторые ящики могут оказаться пустыми)?
3. Сколькими способами можно разложить 12 пятаков по 5 различным кошелькам так, чтобы ни один кошелёк не остался пустым?
4. Переплётчик должен переплести 12 одинаковых книг в красный, зелёный и синий переплёты. Сколькими способами он сможет это сделать?
5. Сколькими способами можно разрезать ожерелье, состоящее из 30 различных бусин, на 8 частей (резать

можно только между бусинами, каждая часть должна содержать хотя бы одну бусину).

6. В кошельке лежит по 20 монет достоинством 5 копеек, 10 копеек, 50 копеек. Сколькими способами можно из этих 60 монет выбрать двадцать?
7. Сколькими способами натуральное число n можно представить в виде суммы: а) k натуральных слагаемых (представления, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными); б) k неотрицательных целых слагаемых (представления, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными)?
8. В киоске продаются открытки 10 видов. Сколькими способами в этом киоске можно купить: а) 12 открыток; б) 8 открыток; в) 8 различных открыток?
9. Сколькими способами можно разместить в 9 лузах 7 белых и 2 чёрных шара? Часть луз могут оказаться пустыми, лузы считаются различными.
10. Поезду, в котором находится m пассажиров, предстоит сделать n остановок. Вычислите: а) сколькими способами могут выйти пассажиры на этих остановках; б) сколькими способами могут выйти пассажиры на этих остановках, если учитывается только количество пассажиров, вышедших на каждой остановке?
11. Сколькими способами могут три человека разделить между собой 6 одинаковых яблок, один апельсин, одну сливу и один мандарин?
12. Сколькими способами можно разложить в 6 различных ящиков 4 чёрных, 4 белых и 4 синих шара?
13. Общество из n членов выбирает из своего состава председателя. Определите: а) сколькими способами может пройти открытое голосование, если каждый голосует только за одного кандидата (может быть, и за себя); б) сколькими способами может пройти тайное голосо-

вание, если каждый голосует только за одного кандидата (может быть, и за себя), но учитывается только число голосов, поданных за каждого кандидата?

14. Сколькими способами можно представить число 1000000 в виде произведения трёх множителей, если произведения, отличающиеся порядком множителей, считаются различными?
15. Сколькими способами можно выложить в ряд 5 красных, 5 синих и 5 зелёных шариков так, чтобы никакие два синих шарика не лежали рядом?
16. На полке стоит 12 книг. Сколькими способами можно выбрать из них 5 книг, никакие две из которых не стоят рядом?

Занятие 26 Повторяем школьную программу: модуль числа, уравнения, неравенства

1. Найдите: а) $|2,7|$; б) $|-3,14|$; в) $|0|$; г) $\left|2013^{2015-2014}-2012-2016^{0}\right|$.
2. Запишите в порядке убывания числа: $-7,4; |2,9|; -5,9; 4,5; -0,6; -3,01; |-3,1|$.
3. Докажите, что $|x|=\begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0 \end{cases}$.
4. Вычислите: а) $\left|-7\frac{3}{4}\right|-\left|-5\frac{1}{6}\right|$; б) $|-29,68|:|2,8|$.
5. Решите уравнения: а) $|x|=19\frac{1}{8}$; б) $|x|=-19\frac{1}{8}$; в) $|-x|=19\frac{1}{8}$; г) $-x=-19\frac{1}{8}$; д) $|15-3x|=0$; е) $\left|x^2+1\right|=-(x^2+1)$; ж) $\left|x^3-x\right|=-x^2$.

6. Решите уравнения. Изобразите их решения на координатной прямой. Отметьте центр симметрии для каждого из полученных множеств точек: а) $|x| = 3$; б) $|x-1| = 3$; в) $|x-1| = -3$; г) $|x-1| = 0$; д) $|x+1| = 3$; е) $|x^2 - 4| = 0$.

7. Отметьте на координатной прямой решения неравенства: а) $|x| < 5$; б) $|x| \geq 2$; в) $1 < |x| \leq 6$; г) $|x-3| > 0$. Отметьте центр симметрии множества решений каждого неравенства.

8. Докажите, что **модуль разности двух чисел равен расстоянию между точками, изображающими эти числа на координатной прямой.**

9. Решите графически: а) $|x-3| = 1$; б) $|x+3| = 1$; в) $|x-3| \geq 2$; г) $|3+x| < 4$; д) $1 < |x+2| \leq 5$; е) $0 < |x+2| \leq 5$. Отметьте центр симметрии для каждого из полученных множеств решений уравнения или неравенства.

10. Решите уравнения: а) $|2x-5| = 3$; б) $||x-1|-3| = 2$; в) $|||x-3|-2|-1| = 2$.

11. Решите уравнения и неравенства: а) $|x+1| + |x-3| = 6$; б) $|x+1| + |x-3| = 4$; в) $|x+1| + |x-3| = 1$; г) $|x+1| + |x-3| \leq 8$.

12. Решите уравнения: а) $|0{,}5x - 2| = |2x+4|$; б) $\left|\frac{1}{3}x - 1\right| = x+1$; в) $|x| = a$; г) $|x-1{,}5| + (2x-3)^{2014} = 0$.

13. Изобразите в прямоугольной декартовой системе координат множество точек, удовлетворяющих условиям: $\begin{cases} 2 \leq x \leq 3 \\ 2 \leq |y| \leq 3 \end{cases}$. Найдите координаты центра симметрии данного множества. Постройте множество точек, симметричное данному относительно оси ординат.

Определение.

Модулем числа называется расстояние от точки, изображающей данное число на координатной прямой, до начала координат.

Обозначение.

Модуль числа a обозначается $|a|$.

Занятие 27 Повторяем школьную программу: уравнения и задачи

1. Решить уравнения:

а) $\left(|x|-\frac{3}{7}\right)\cdot\left(\frac{4}{7}x+8\right)=0$; б) $4(2,5-x)-\frac{7}{9}\left(\frac{3}{8}-\frac{36}{7}x\right)=2$.

2. Решить уравнения:

а) $\left(|y|+\frac{3}{7}\right)\cdot\left(\frac{5}{8}y-10\right)=0$;

б) $8(1,5-2x)-\frac{32}{33}\left(\frac{11}{16}-16,5x\right)=11\frac{1}{3}$.

3. Древний кирпич, называвшийся ***плинфа,*** имел совсем не такие размеры, как современный. Ширина плинфы составляет 0,75 от её длины. Высота — на 26,5 см меньше ширины. Вычислите размеры плинфы, если известно, что её длина и высота в сумме равны 43,5 см.

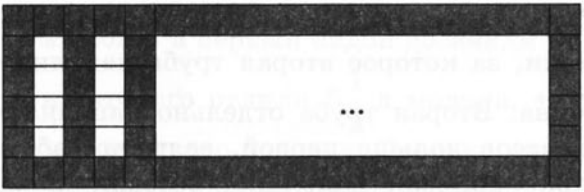
4. Три кирпича разных видов, которые применялись при строительстве на Кремлёвском холме, вместе весят 63 кг, причём масса большого в 6,5 раз больше, чем среднего. Масса маленького кирпича на 49 кг меньше массы большого. Вычислите массу каждого из этих кирпичей.

5. В первом бидоне было в $2\frac{1}{2}$ раза меньше молока, чем во втором. Когда в первый бидон добавили $18\frac{1}{4}$ л молока, и из второго отлили $6\frac{1}{2}$ л молока, то в обоих бидонах молока стало поровну. Сколько литров молока было в каждом бидоне первоначально?
6. В одном вагоне было в $1\frac{1}{3}$ раза больше груза, чем в другом. Если с первого вагона снять $11\frac{3}{4}$ т, а во второй добавить $3\frac{1}{4}$ т, то груза в вагонах станет поровну. Сколько тонн груза было в каждом вагоне первоначально?
7. На 9 сумок первого вида и 9 сумок второго вида пошло 36 м^2 ткани. Сколько ткани идёт на сумку первого вида и сколько — на сумку второго вид, если на 4 сумки первого вида идёт на $\frac{1}{4}$ м^2 больше, чем на 3 сумки второго вида?
8. За 9 дней бык и корова съедают 1 ц 17 кг сена. Сколько сена съедает в день корова и сколько — бык, если за 5 дней корова съедает на 2,5 кг сена меньше, чем бык за 4 дня?
9. В 9 утра из двух городов, находящихся друг от друга на расстоянии 280 км, одновременно навстречу друг другу (вдоль дороги между этими городами) выехали два поезда со скоростями 75,75 км/ч и 64,25 км/ч. В котором часу поезда будут находиться друг от друга на расстоянии 35 км?
10. Из двух городов, расстояние между которыми 300 км, в противоположных направлениях (вдоль дороги между этими городами) одновременно выехали два велосипедиста с скоростью 22,7 км/ч и 17,3 км/ч со-

ответственно. Через какое время после выезда расстояние между велосипедистами станет 350 км?

11. Первая труба наполняет бассейн за половину того времени, за которое вторая труба наполняет $\frac{2}{3}$ этого бассейна. Вторая труба отдельно наполняет бассейн на 6 часов дольше первой, если та работает одна. Сколько времени наполняет бассейн каждая труба в отдельности?
12. Сплав меди и цинка содержал меди на 640 г больше, чем цинка. После того, как из него выделили $\frac{6}{7}$ содержащейся в нём меди и 60% цинка, масса сплава составила 200 г. Сколько он весил первоначально?
13. Между пунктами A и B автобус ездит через возвышенность. При подъёме он едет со скоростью 25 км/ч, а при спуске 50 км/ч. От A до B он едет 3,5 часа, а от B до A — 4 часа. Найти расстояние AB.
14. Имеется три сосуда общей вместимостью 120 л. Если первый наполнить полностью, а затем перелить в два других, то либо третий будет полным, а второй заполнится наполовину, либо второй будет полным, а третий заполнится на треть. Найдите вместимость каждого сосуда.
15. Для содержания лошадей был сделан запас корма на определённое время. Если бы лошадей было на две меньше, то сена им хватило бы на период, больший на 10 дней. Если бы лошадей было на 2 больше, то сена им хватило бы на период, меньший запланированного на 6 дней. Сколько было лошадей, и на сколько дней был сделан запас?
16. Клетчатый прямоугольник состоит из шести строк и нечётного числа столбцов. В нём закрасили верхнюю и нижнюю строки и все нечётные столбцы. Всего ока-

залось 54 закрашенные клетки. Определите, сколько столбцов в данном прямоугольнике. Ответ объясните.



17. Есть трое часов, причём все они показывают неправильное время. В какой-то момент они показали время, как на рисунке. Известно, что время на одних часах отличается от правильного на 20 минут, на ещё одних — на 30 минут. На сколько минут отличается от правильного время на оставшихся часах? Ответ объясните.

18. Когда автомобиль проехал часть пути от А до В, то оказалось, что он проехал столько километров, сколько минут ему придется ехать оставшуюся часть. Но когда он проехал и эту часть пути, то оказалось, что её длина составляет столько километров, сколько минут он затратил на первую часть пути. Сколько километров проезжает автомобиль за один час? Ответ объясните.

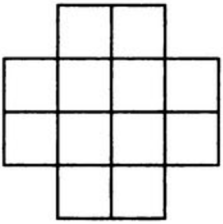
Занятие
28

Графы - 1

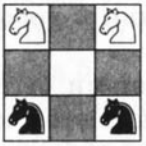
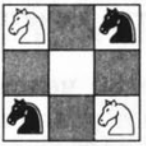
1. Между 9 планетами Солнечной системы ввели космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам: Земля — Меркурий, Плутон — Венера,

Уран — Нептун, Марс — Юпитер, Плутон — Земля, Юпитер — Сатурн, Уран — Марс, Меркурий — Плутон, Венера — Меркурий, Нептун — Сатурн. Можно ли добраться с Земли до Марса?

2. В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией ровно в том случае, когда двузначное число, составленное из цифр — названий этих городов, делится нацело на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9? А из города 2 в город 8?
3. В 10-значном числе каждые две подряд идущие цифры образуют число, кратное тринадцати. Докажите, что в этом числе нет цифры 8.
4. Можно ли доску на рисунке обойти ходом шахматного коня, побывав на каждой клетке ровно по одному разу, а затем вернуться на исходное поле?



5. Можно ли, сделав несколько ходов конями на мини-шахматной доске 3×3, из положения А получить положение В?

А)  В) 

6. В трёх вершинах правильного пятиугольника разместили по фишке. Разрешается переставлять их по диагоналям в свободные вершины. Можно ли за несколько ходов добиться того, чтобы одна из фишек вернулась на своё место, а две другие поменялись местами?
7. В государстве 100 городов, и из каждого выходит 4 дороги в другие города. Сколько всего дорог, соединяющих два города, в этом государстве?

8. Может ли в государстве, где из каждого города выходит ровно 3 дороги, быть ровно 100 дорог?
9. На одном островном государстве 5 городов — Столица, Восток, Запад, Север и Юг. Верховный правитель острова захотел соединить их дорогами, но так, чтобы из столицы выходило 4 дороги, из Востока и Юга — по 3, а из Севера и Запада — по две. Возможно ли выполнить его пожелание?
10. Не успел правитель острова осуществить свои планы, как произошла революция, и его свергли. Новое правительство решило построить дороги так, чтобы из каждого города выходило ровно по 3 дороги. Стоит ли парламенту острова голосовать за такое предложение?
11. В графе n вершин, и каждая соединена ребром с каждой из остальных (***полный граф***). Сколько в нём рёбер?
12. В сарае 10 корыт и 20 поросят. Иногда поросята перебегают от одного корыта к другому. К концу дня оказалось, что от каждого корыта к каждому перебегал какой-нибудь поросёнок. Докажите, что хоть один поросёнок перебегал не менее трёх раз.
13. В графе l рёбер. Найдите сумму степеней всех вершин этого графа.
14. **Количество нечётных вершин в графе — чётно.** Докажите.
15. В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют ровно по 3 друга (в этом классе), 11 — по 4 друга, а 10 — по 5 друзей?
16. В государстве есть 19 областей. Может ли оказаться так, что у каждой области 1, 5 или 9 соседних областей (у разных областей количество «соседей» может быть различным)?
17. Маша сказала своей подружке Лене: «У нас в классе 25 человек. И представь, каждый из них дружит ровно с семью одноклассниками». «Не может быть», — ответила Лена. Почему она так решила?

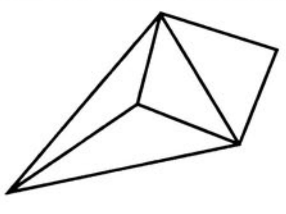
18. Джон, приехав из Диснейленда, рассказывал, что там на заколдованном озере имеются 7 островов, с каждого из которых ведёт 1, 3 или 5 мостов. Верно ли, что хотя бы один из этих мостов ведёт на берег озера?
19. Можно ли нарисовать 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?
20. Можно ли найти 5 натуральных чисел, таких, что для каждого числа x из них среди оставшихся четырёх чисел можно найти ровно три, каждое из которых имеет с x общий простой делитель?

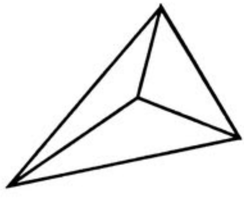
Занятие
29 Графы - 2

1. У марсиан бывает произвольное число рук. Однажды все марсиане взялись за руки так, что свободных рук не осталось. Докажите, что число марсиан, у которых нечётное число рук, чётно.
2. В одном городе от каждой площади отходит ровно 5 улиц, а каждая улица соединяет две площади. Докажите, что число площадей чётно, а число улиц делится нацело на 5.
3. В классе 27 человек. Каждый мальчик дружит с четырьмя девочками, а каждая девочка — с пятью мальчиками. Сколько в классе мальчиков и сколько девочек?
4. У царя Гвидона было 5 детей. Из всех его потомков (детей, внуков, правнуков и т. д.) 57 имели ровно трёх сыновей, остальные умерли бездетными. Сколько потомков у царя Гвидона?
5. В стране есть 15 городов, каждый из которых соединён дорогами не менее, чем с 7 другими. Докажите,

что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города).

6. Докажите, что граф с n вершинами, степень каждой из которых не менее $\frac{n-1}{2}$, — связен.
7. В городе 19 маршрутов автобусов, при этом каждый имеет общую остановку с не менее 9 других маршрутами. Докажите, что можно сесть на автобус любого маршрута и попасть на рейс любого другого маршрута, пересаживаясь на остановках.
8. В Тридевятом царстве только один вид транспорта, — ковёр-самолёт. Из столицы выходит 21 ковролиния, из города Дальний, — одна, а из всех остальных — по 20. Докажите, что из столицы можно долететь в Дальний (возможно, с пересадками).
9. В кабинете стоит несколько приборов и одна розетка, при этом некоторые из них соединены проводами. Все концы проводов подключены к приборам, а один конец подключён к розетке. От компьютера отходит 7 проводов, а от всех остальных приборов — по 4. Докажите, что компьютер соединён с розеткой (может быть, через другие приборы).
10. В стране из каждого города выходит сто дорог и от любого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь от любого города можно добраться до любого другого.
11. Можно ли нарисовать рисунок, не отрывая карандаш от бумаги и не проводя по линии дважды?

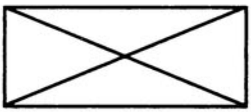
а) 

б) 

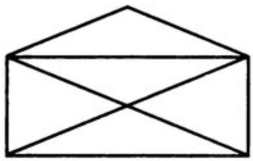
12. *(Теорема Эйлера)* **Граф, который можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя по линии дважды, имеет либо две нечётные вершины, либо ни одной.**

Леонард Эйлер
(1707–1783)

13. Можно ли нарисовать рисунок, не отрывая карандаш от бумаги и не проводя по линии дважды?

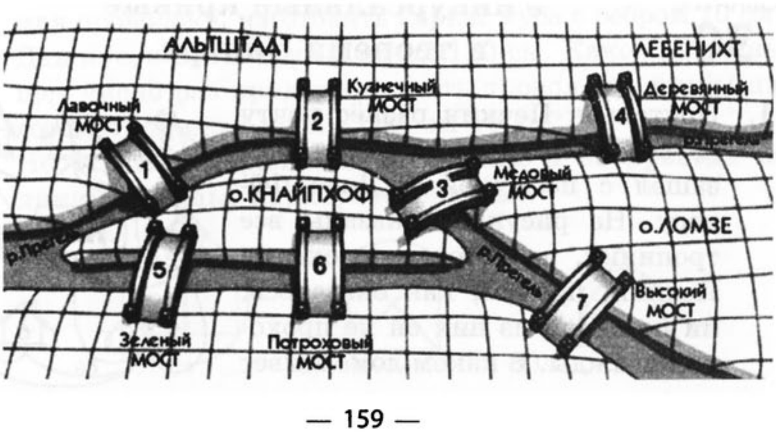


а) «запечатанный конверт»



б) «распечатанный конверт»

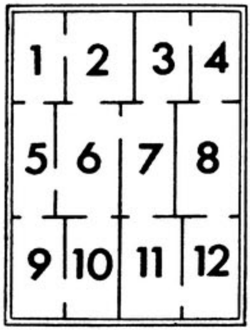
14. *(Задача о Кёнигсбергских мостах)* Можно ли совершить прогулку по Кёнигсбергу, пройдя по каждому мосту ровно один раз?



15. Имеется группа островов, соединённых мостами так, что от каждого острова можно добраться до любого другого. Турист побывал на всех островах, пройдя по каждому мосту ровно один раз. На острове Троекратном он побывал трижды. Сколько мостов ведёт с Троекратного, если турист: а) не с него начал и не на нём закончил; б) с него начал и не на нём закончил; в) с него начал и на нём закончил?

16. Граф можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя по линии дважды. В графе есть ровно две нечётные вершины. С какой вершины стоит начать рисовать граф? В какой вершине рисунок завершится?

17. Экскурсоводу нужно выбрать маршрут по залам музея так, чтобы пройти во время экскурсии через каждую дверь, причём ровно один раз. Где нужно начать и где закончить экскурсию? Найдите один из возможных маршрутов.



Занятие
30

Уникурсальные кривые и теорема Эйлера

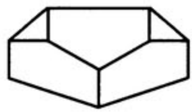
1. Почтальон Печкин разнёс почту во все дома деревни, после чего зашёл с посылкой к Дяде Фёдору. На рисунке показаны все тропинки, по которым проходил Печкин, причём, как оказалось, ни по одной из них он не проходил дважды. В каком доме живёт

Дядя Фёдор? Каким мог быть маршрут почтальона Печкина?

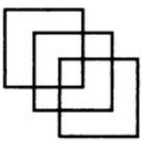
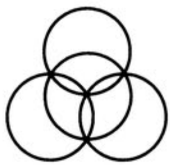
2. Не отрывая карандаша от бумаги и не проводя по линии дважды, нарисуйте фигуры, изображённые на рисунке:

а)  б) 

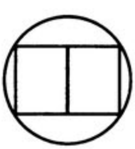
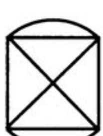
3. Может ли хулиган Вася прогуляться по парку и его окрестностям так, чтобы при этом перелезть через каждый забор ровно один раз?



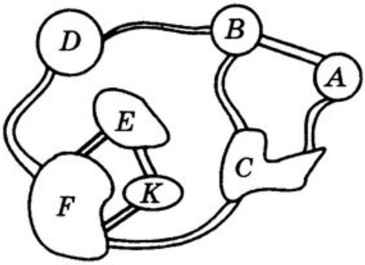
4. Не отрывая карандаша от бумаги и не проводя по линии дважды, начертите фигуры:

а)  б) 

5. Дан кусок проволоки длиной 120 см. Можно ли, не ломая проволоку, изготовить каркас куба с ребром 10 см?
6. Дан кусок проволоки длиной 120 см. Какое наименьшее число раз придётся ломать проволоку, чтобы изготовить каркас куба с ребром 10 см?
7. Не отрывая карандаша от бумаги и не проводя по линии дважды, нарисуйте фигуры:

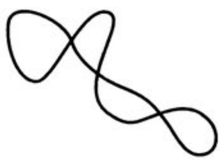
а)  б)  в) 

8. На озере семь островов, которые соединены между собой мостами так, как показано на рисунке. На какой остров должен доставить катер путешественников, чтобы они могли пройти по каждому мосту ровно один раз? С какого острова катер должен забрать путешественников? Каким может быть маршрут группы?

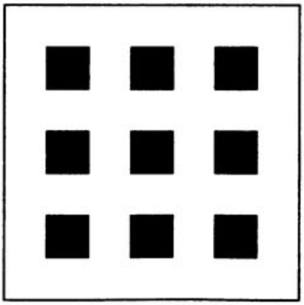


9. Говорят, что Магомет описывал одним росчерком состоящий из двух рогов Луны знак, представленный на рисунке. Попробуйте это сделать.

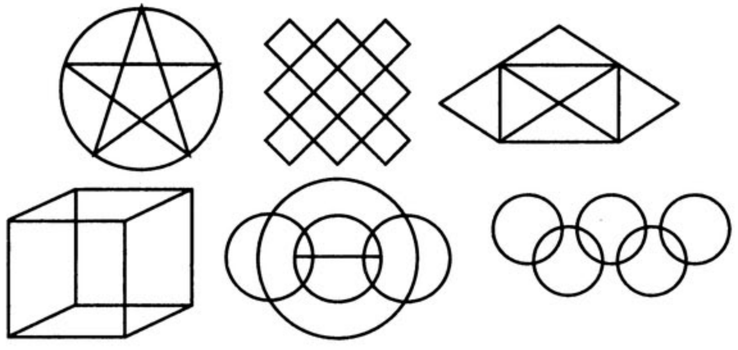
10. Петя нарисовал замкнутую линию, пересекающую себя три раза. Сумеет ли Коля нарисовать другую замкнутую линию, которая пересечёт первую ровно три раза, если вторую линию нельзя проводить через точки пересечения первой?



11. Какой наименьший путь должна проехать поливальная машина, чтобы полить все восемь улиц, изображённые на рисунке? Улицы образуют квадрат со стороной 300 м (расстояние между соседними перекрёстками 100 м).



12. Нарисуйте фигуры, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя по линии дважды:



Занятие 31 Математическая завалинка

Софизмы

1. «Единица равна нулю»

Возьмём уравнение: $x - a = 0$. Разделив обе его части на $x - a$, получим: $\dfrac{x-a}{x-a} = \dfrac{0}{x-a}$. Левая часть равенства равна 1, а правая равна 0. Значит, $1 = 0$. ☺☺☺

2. «Всякое число равно своему удвоенному значению»

Запишем очевидно верное для любого числа равенство: $a^2 - a^2 = a^2 - a^2$. В левой части равенства воспользуемся распределительным законом и вынесем общий множитель за скобки: $a^2 - a^2 = a(a - a)$. В правой части равенства вычтем и прибавим a^2 и трижды воспользуемся распределительным законом:

$$a^2 - a^2 + a^2 - a^2 = a(a - a) + a(a - a) = (a - a)(a + a).$$

Итак, приравняв левую и правую части, получим:

$$a(a - a) = (a - a)(a + a).$$

Сократим обе части на одинаковый множитель и получим: $a = 2a$ при любом a ☺☺☺

3. «Восемь равно шести»

Решим систему двух уравнений: $\begin{cases} x + 2y = 6, \\ y = 4 - \dfrac{x}{2} \end{cases}$. Подставим значение y из второго уравнения в первое: $x + 2 \cdot \left(4 - \dfrac{x}{2}\right) = 6$, откуда $x + 8 - x = 6$. Значит, $8 = 6$. ☺☺☺

Математика в стихах

4.

На острове Мимогу
Три племени живут.
Мимоны лгать не могут,
А Мимитики лгут.
Тими — и так и этак,
То истина, то ложь...
Корзиночки из веток
Плели Пик, Ил и Пош.
Они все трое были
Из разных из племен,
И Пик, взглянув на Ила,
Сказал, что Ил — мимон.
На это Пош ответил:
— Мимон ты сам!
А Ил,
Обстругивая ветви,
Двух слов не проронил.
Теперь прочти всё снова,
Подумай, не спеши,
И кто же из какого
Был племени — реши!

5.

Птицы, звери и жуки
Покупали башмаки:
Скуповатые фламинго
Взяли каждый
по ботинку,
Леопард и ягуары
Надевали по две пары,
А когда являлся жук,
Сразу требовал шесть штук.
Всяк, кто был в тот день
на рынке,
Приобрел себе ботинки.
И довольный продавец
Расщедрился под конец:

Птице, зверю и жуку
Подарил по колпаку.
Возвращаясь, стар и млад
Был своей обновке рад.
Опустел в момент базар:
Раскупили весь товар.
Запирая свой ларёк,
Продавец подвел итог:
Продал сорок башмаков,
Выдал десять колпаков.
Сколько ж было на базаре
Птиц, животных и жуков?

6.

Сорока новость принесла
Про два загадочных числа,
С которыми твори, что хошь:
Дели, сложи или умножь —
Получится один ответ.
Ты веришь птице или нет?

Логические задачи

7. В семейном ансамбле «Ласковый лай» участвуют Тит Фомич, Фома Титович, Фома Фролович, Фрол Фомич и Фрол Фролович Собакины. Один из них поёт, его отец играет на шарманке, брат держит микрофон, а дети бьют в барабан. Как зовут певца?
8. Три гнома: Пили, Ели и Спали, — нашли в пещере алмаз, топаз и медный таз (каждый нашёл что-то одно). У Ели капюшон красный, а борода длиннее, чем у Пили. У того, кто нашёл таз, самая длинная борода, а капюшон синий. Гном с самой короткой бородой нашёл алмаз. Кто что нашёл?
9. В Пустоземье живут три племени: эльфы, гоблины и хоббиты. Эльф всегда говорит только правду, гоблин всегда лжёт, а хоббит через раз говорит то правду, то ложь. Однажды за круглым столом пировало несколько пустоземцев, и один из них сказал, указав на своего левого соседа: «Он — хоббит». Сосед сказал: «Мой правый сосед солгал». В точности ту же фразу

повторил его левый сосед, потом её же произнёс следующий по кругу, и так они говорили «Мой правый сосед солгал» много-много кругов. Сколько пирующих было из каждого племени, если всего их было девять?

Нумерология

10. Найдутся ли три натуральных числа, которые друг на друга не делятся, но каждое является делителем произведения двух других?
11. Можно ли расставить по кругу несколько чисел так, чтобы каждое равнялось сумме своих «соседей», а все числа были различными?
12. Петя задумал однозначное натуральное число. Вася может назвать своё натуральное число и спросить, чему равен НОД двух этих чисел. Может ли он подобрать такое число, чтобы по ответу наверняка узнать Петино число?
13. Найдите два различных числа таких, что их произведение равно сумме составляющих их цифр.

7 класс

Занятие 1. Поиск выигрышных позиций в математических играх — анализ с конца

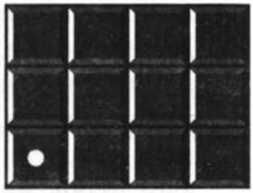
1. Играют двое. Начинающий называет одно из чисел: 1, 2, 3, 4. Второй игрок прибавляет к этому числу одно из чисел 1, 2, 3, 4 и называет получившуюся сумму. То же самое делает затем первый игрок, и т. д. Выигравшим считается тот, кто назовет число 40. Кто и как выигрывает в эту игру?
2. Двое играют в такую игру. Первый называет натуральное число, не большее 10, затем второй прибавляет к нему натуральное число, не большее 10, затем то же делает первый игрок и т. д. Выигрывает тот, кто получит после своего хода число 100. У кого из игроков есть выигрышная стратегия? В чем она состоит?
3. В ящике лежит 35 шариков. Двое игроков по очереди берут от одного до пяти шариков. Тот, кто возьмет последний шарик, — проиграл. Кто и как может обеспечить себе выигрыш, независимо от ходов соперника: первый игрок или второй?
4. Имеются две кучки камней: в одной 20 камней, в другой — 30. За один ход разрешается взять любое количество камней, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. У кого из игроков есть выигрышная стратегия? В чем она состоит?
5. Есть две кучки — по 8 камней в каждой. За один ход разрешается взять любое количество камней, но только из одной кучки. Кто не сможет пойти, тот: а) проиграл; б) выиграл. Кто и как выигрывает в эту игру?

6. Есть две кучки — в одной 8 камней, а в другой 6. За один ход разрешается взять либо один камень из какой-то кучки, либо по одному камню сразу из двух кучек. Кто возьмёт последний камень, тот: а) выиграл; б) проиграл. Кто и как может обеспечить себе выигрыш, независимо от ходов соперника: первый игрок или второй?
7. Есть две кучки — в одной 12 камней, а в другой 15. За один ход разрешается взять либо несколько камней из какой-то кучки, либо поровну камней из двух кучек. Кто возьмёт последний камень, тот: а) выиграл; б) проиграл. У кого из игроков есть выигрышная стратегия? В чем она состоит?
8. Двое игроков по очереди берут из кучи камней 1, 2 или 4 камня. Выигравшим считается тот, кто взял последние камни. При каком начальном числе камней в куче начинающий может победить, как бы ни играл его соперник?
9. Игра начинается с числа 60. За ход разрешается уменьшить имеющееся число на любой из его делителей. Проигрывает тот, кто получит ноль. Кто выигрывает при правильной игре?
10. Играют двое. Первый называет произвольное целое число от 2 до 9. Второй умножает это число на произвольное целое число от 2 до 9. Затем первый умножает результат на произвольное целое число от 2 до 9, и т. д. Выигрывает тот, кто первым получит произведение, большее 1000. Кто выигрывает при правильной игре — начинающий или его соперник?
11. Имеется две кучки по 9 камней в каждой. Двое игроков поочерёдно берут либо 1, либо 2 камня из одной кучки, либо по одному камню из каждой кучки. Выигрывает тот, кто берёт последний камень. У кого из игроков есть выигрышная стратегия? В чем она состоит?

12. Есть две кучки, в одной 7 камней, а в другой — 10 камней. Двое по очереди берут любое число камней, но только из одной кучки. При этом после хода каждого игрока не может остаться равного числа камней в кучках (за исключением последнего хода). Выигрывает тот, кто берёт последний камень. Кто выигрывает при правильной игре?
13. Двое игроков по очереди называют натуральные числа, причём следующее число должно быть меньше предыдущего, но не меньше его половины. Проигрывает тот, кто будет вынужден назвать число 1. Первый игрок вначале назвал число 2014. Кто и как теперь может обеспечить себе выигрыш, независимо от ходов соперника: первый игрок или второй?
14. Два игрока двигают фишку на поле $2 \times n$. Вначале она стоит в крайнем правом столбце на одной из двух клеток. За один ход её разрешается сдвинуть либо влево, либо по вертикали на соседнюю клетку. При этом одно и то же поле нельзя проходить дважды. Кто своим ходом сдвинул фишку в самый левый столбик, тот: а) выиграл; б) проиграл. Кто выигрывает при правильной игре — первый или второй игрок?
15. Пусть есть кучка из 2014 камней. За один ход двое игроков по очереди берут 1, 2 или 3 камня, не повторяя при этом последний ход соперника. Кто не сможет сделать ход, тот проиграл. Кто и как может обеспечить себе выигрыш, независимо от ходов соперника: первый игрок или второй?
16. Пусть есть кучка из 2015 камней. За один ход двое игроков по очереди берут СЕБЕ 1, 2 или 3 камня, до тех пор, пока камни в кучке не закончатся. У кого в конце окажется нечётное число камней, тот выиграл. Кто выигрывает при правильной игре — первый или второй игрок?

17. Игра начинается с числа 1000. За один ход один из двух играющих вычитает из имеющегося числа любое, не превосходящее его натуральное число, являющееся степенью двойки (1, 2, 4, 8, 16 и т. д.) Выигрывает тот, кто получит ноль. Кто выигрывает при правильной игре — первый или второй игрок?

18. Есть шоколадка 3×4. За 1 ход игрок выбирает точку на пересечении линий, ограничивающих дольки шоколадки (в том числе на контуре). Далее проводит от выбранной точки разлом вправо — до края и вверх до края, затем съедает отщёлкнутую верхне-правую часть (в ней должна быть хоть одна долька). Кто съест левую нижнюю дольку, тот проиграл. Кто из двух игроков выигрывает при правильной стратегии: начинающий или его соперник?



Занятие 2 Классические текстовые задачи

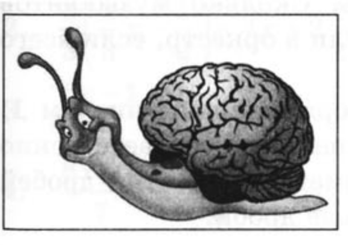
Решение задач — это практическое искусство, подобно плаванию, или катанию на лыжах, или игре на пианино: вы можете научиться этому, только практикуясь... если вы захотите научиться плавать, то вынуждены будете зайти в воду, а если вы захотите стать человеком, хорошо решающим задачи, вы вынуждены их решать.

Д. Пойа, математик и педагог

1. В двух пакетах было по 11 конфет. После того, как из первого пакета взяли в 3 раза больше конфет, чем из второго, в первом пакете осталось в 4 раза меньше конфет, чем во втором. Сколько конфет взяли из каждого пакета?

2. **На 1 плащ и 3 куртки пошло 9 м ткани, а на 2 плаща и 5 курток — 16 м. Сколько ткани требуется на пошив плаща и сколько — на пошив куртки?**
3. **Сумма цифр двузначного числа равна 7. Если эти цифры переставить местами, то получится число, большее данного на 45. Найдите данное число.**
4. **В первый день велосипедист проехал на 30 км больше, чем во второй. Какое расстояние он проехал за два дня, если на весь путь затрачено 5 часов, причём в первый день он ехал со скоростью 20 км/ч, а во второй — 15 км/ч?**
5. **Вася в два раза старше своей сестры Наташи. У Наташи было в три раза больше орехов, чем у Васи. Число орехов у Наташи больше числа лет Васи на 35, а число орехов у Васи больше числа лет Наташи в три раза. Сколько лет Наташе и сколько — Васе?**
6. **Некто согласился работать с условием — получить после года работы новую одежду и 10 флоринов. Но по истечении семи месяцев он прекратил работу и при расчете получил одежду и 2 флорина. Во сколько оценивалась одежда?**
7. **Москва старше Санкт-Петербурга на 556 лет. В 1981 году Москва была втрое старше Санкт-Петербурга. В каком году основана Москва и в каком — Санкт-Петербург?**

☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺



Решай быстрее!

Впереди ещё

мно-о-о-о-о-го задач!!!!!!!!!!!

8. После смешивания трёх растворов соляной кислоты концентрации 20%, 30% и 45% получили 4,5 кг соляной кислоты концентрации 32%. Кислоты концентрации 20% было в 3 раза больше, чем кислоты 30% концентрации. Сколько смешали кислоты каждой концентрации?
9. Трое изобретателей получили премию в размере 1410 руб., причём второй получил 1/3 того, что получил первый, и ещё 60 руб., а третий получил 1/3 денег второго и ещё 30 руб. Какую сумму премиальных получил каждый?
10. Охотничий порох состоит из селитры, серы и угля. Масса серы относится к массе селитры, как $0{,}2 : 1{,}3$, а масса угля должна составлять $11\frac{1}{9}\%$ от массы серы и селитры вместе. Сколько нужно взять каждого вещества, чтобы изготовить 25 кг пороха?
11. Длина Дуная относится к длине Днепра, как $19/3 : 5$, а длина Дона к длине Дуная — как $6{,}5 : 9{,}5$. Найдите длину каждой реки, если Днепр длиннее Дона на 300 км.
12. Музыкальный театр объявил конкурс на приём музыкантов в оркестр. Сначала планировалось, что число мест для скрипачей, виолончелистов и трубачей распределится как $1{,}6 : 1 : 0{,}4$. Затем решили расширить оркестр, и в результате скрипачей было принято на 25% больше, а виолончелистов — на 20% меньше, чем предполагалось. Сколько музыкантов каждой специальности приняли в оркестр, если всего их 32 человека?
13. Числители трёх дробей пропорциональны числам 1, 2, 5, а знаменатели пропорциональны соответственно числам 1, 3, 7. Среднее арифметическое этих дробей равно 200/441. Найдите данные дроби.

Им.п. - Кто? Что?
Р. п. - Кого? х ?
Д.п. - Кому? Чему?

$$X = \frac{\text{Чему} \cdot \text{Кого}}{\text{Кому}} = \text{Чего}$$

☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺

14. Заработные платы работника за октябрь и ноябрь относились, как $3/2 : 4/3$, а за ноябрь и декабрь — как $2 : 8/3$. За декабрь он получил на 150 руб. больше, чем за октябрь. В конце года работник получил премию в размере 20% от его заработка за октябрь, ноябрь и декабрь вместе. Найдите размер премии.

Занятие
3

Линейные уравнения

Решите (простые ☺☺☺) уравнения.

1. $0{,}2(7 - 2y) = 2{,}3 - 0{,}3(y - 6)$.
2. $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}\right) = 4x + 2\frac{1}{2}$.
3. $\frac{5x - 1}{4} - \frac{11 - x}{6} = 5$.
4. $\frac{6x - 4}{7} + \frac{9 - 5x}{6} = x - 2$.

5. $8(1,5-2x)-\frac{32}{33}\left(\frac{11}{16}-16,5x\right)=11\frac{1}{3}$.

6. $4(2,5-x)-\frac{7}{9}\left(\frac{3}{8}-\frac{36}{7}x\right)=2$.

Решите уравнения с параметром (найдите x в зависимости от a).

7. $ax=5$.
8. $(5+a)x=7-4a$.
9. $(a-5)x=5-a$.
10. $(a+2)(a-1)x=a-1$.
11. $(a-2)(a+1)x=a^2-1$.
12. $ax-a=1-x$.

Решите уравнения (посложнее ☹☹☹) двумя способами.

13. $$1993=1+\cfrac{8}{1+\cfrac{8}{1-\cfrac{8}{1+\cfrac{4}{1-\cfrac{4}{1-\cfrac{8}{x}}}}}}$$

14. $$2015=2+\cfrac{3}{2-\cfrac{9}{4+\cfrac{9}{15+\cfrac{9}{2+\cfrac{9}{4+\cfrac{3}{x}}}}}}$$

15. $1+2:(1+32:(1+1024:(1+32:(1+2:(1+2:(1+2:$
$:(1+2:x)))))))=1987$.

Занятие

4

Сравнение по модулю

Главная сила математики состоит в том, что вместе с решением одной конкретной задачи она создаёт общие приёмы и способы, применимые во многих ситуациях, которые даже не всегда можно предвидеть.

М.И. Башмаков, математик и педагог

1. Выполните деление с остатком: а) $45 : 6$; б) $101 : 7$; в) $2002 : 13$; г) $100001 : 9$.
2. Заполните пропуски различными числами:
   $13 \equiv \quad \equiv \quad \equiv \quad \equiv \quad \equiv \quad \equiv \quad \equiv \quad \equiv \quad \equiv \quad \equiv \quad \equiv \quad (\mathrm{mod} 3)$.
3. Изобразите на координатной прямой числа, сравнимые с 1 по модулю 3.
4. Заполните пропуски, получив верные сравнения:
   $7 \equiv \quad \equiv \quad \equiv \quad \equiv \quad \equiv \quad \equiv \quad \equiv \quad \equiv \quad \equiv \quad \equiv \quad \equiv \quad (\mathrm{mod} 4)$.
5. Изобразите на координатной прямой числа, сравнимые с 3 по модулю 4.
6. Изобразите на координатной прямой числа, сравнимые с -1 по модулю 4.
7. Изобразите на координатной прямой числа, делящиеся на 5 без остатка, и числа, сравнимые с 2 по модулю 5. Сделайте вывод.
8. Изобразите на координатной прямой числа, делящиеся на 5 без остатка, и числа, сравнимые с -1 по модулю 5. Сделайте вывод.
9. Заполните пропуски так, чтобы получились верные утверждения: а) $5 \equiv \quad (\mathrm{mod} 3)$; б) $-5 \equiv \quad (\mathrm{mod} 3)$; в) $7 \equiv - \quad (\mathrm{mod} 5)$; г) $15 \equiv \quad (\mathrm{mod} 6)$; д) $1003487 \equiv \quad (\mathrm{mod} 2)$; е) $1001 \equiv \quad (\mathrm{mod} 13)$; ё) $12345678 \equiv \quad (\mathrm{mod} 9)$; ж) $1234987456 \equiv - \quad (\mathrm{mod} 8)$; з) $111111111 \equiv - \quad (\mathrm{mod} 11)$; и) $-12345675 \equiv \quad (\mathrm{mod} 3)$ й) $-12344322 \equiv \quad (\mathrm{mod} 11)$.

10. Найдите остатки от деления на 8 числа: а) 9^{100}; б) 7^{2014}; в) $98765424^{5647382910}$.
11. Найдите остатки от деления на 7 числа: $939058^{2014} \times \times 874^{2013} - 2268^{2015} \cdot 1234567890$.
12. Докажите, что при любом натуральном значении n:

$$\text{а)} \left(n^3 + 2n\right) \vdots 3\text{; б) } \left(n^5 + 4n\right) \vdots 5\text{;}$$

$$\text{в) } \left(n^2 + 1\right) \not\vdots\, 3\text{; г) } \left(n^3 + 4\right) \not\vdots\, 9.$$

13. Докажите, что $n^3 - n$ делится нацело на 24 при любом нечётном значении n.
14. Докажите, что $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)(n + 4)$ кратно 120 при любом целом значении n.
15. Найдите все варианты значений простого числа p, если известно, что числа $p + 10$ и $p + 14$ также являются простыми.
16. Известно, что числа p, $2p + 1$, $4p + 1$ являются простыми. Найдите p.
17. Дано, что числа p и $8p^2 + 1$ — простые. Найдите p.
18. Числа p и $p^2 + 2$ — простые. Может ли $p^3 + 2$ быть составным?
19. Найдите простое число p, если $4p^2 + 1$ и $6p^2 + 1$ также являются простыми.

Немного теории.

Определение. Целые числа a и b называются ***сравнимыми по модулю*** m, если их разность кратна m:

$$a \equiv b \pmod{m} \iff (a - b) \vdots m.$$

Здесь m — натуральное число, не равное 1.

Про целые числа, сравнимые по модулю m, говорят, что они ***дают одинаковые остатки при делении на*** m.

Свойство деления с остатком для натуральных чисел.

Делимое и его остаток от деления сравнимы по модулю делителя:

$$a : b = c(ост.r) \Rightarrow a \equiv r \pmod{b}.$$

Занятие 5 Применение свойств сравнений

Немного арифметики

1. Найдите остаток от деления 3^{2014} на 7.
2. Докажите, что число $2222^{5555}+5555^{2222}$ кратно семи.
3. На какую цифру оканчивается число 777^{777}?
4. Найдите последнюю цифру числа 7^{77}.
5. Докажите, что $30^{99}+61^{100}$ делится нацело на 31.
6. Найдите остаток от деления числа $43^{101}+23^{101}$ на 66.
7. Какое число можно добавить к числу $\left(n^2-1\right)^{1000}\times$ $\times\left(n^2+1\right)^{1001}$, чтобы результат делился нацело на n?

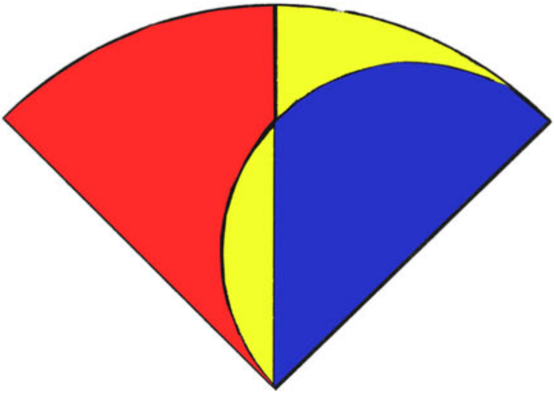
Свойства сравнений

8. Докажите следующие свойства верного сравнения:
   а) $a\equiv b(\bmod m)\ \Rightarrow\ a+c\equiv b+c(\bmod m)$;
   б) $a\equiv b(\bmod m)\ \Rightarrow\ ac\equiv bc(\bmod m)$.
9. Докажите следующие свойства двух верных сравнений:
   а) $a\equiv b(\bmod m),\ \ c\equiv d(\bmod m)\ \Rightarrow\ a+c\equiv b+d(\bmod m)$;
   б) $a\equiv b(\bmod m),\ \ c\equiv d(\bmod m)\ \Rightarrow\ ac\equiv bd(\bmod m)$.
10. Докажите формулу возведения сравнения в степень: $a\equiv b(\bmod m)\ \Rightarrow\ a^n\equiv b^n(\bmod m)$.
11. Обе части сравнения не всегда можно делить на одно и то же число с сохранением верного сравнения:
    а) $ak\equiv bk(\bmod m)$, $a\equiv b(\bmod m)$ — приведите примеры числовых значений a, b, k, m;
    б) $ak\equiv bk(\bmod m), a\not\equiv b(\bmod m)$ — приведите примеры числовых значений a, b, k, m.

Устали от формул?

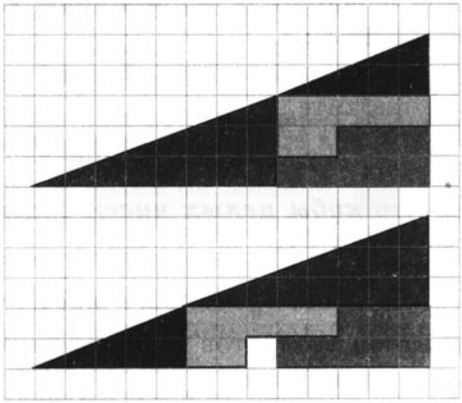
12. Сэр Артур заказал художнику рисунок для своего щита, имеющего форму четверти круга, попросив раскрасить

его в три цвета: жёлтый — цвет щедрости, красный — храбрости и синий — мудрости. Когда художник принёс раскрашенный щит, то оруженосец заметил, что на рисунке храбрости больше, чем мудрости. Однако, художник смог доказать, что это неверно, и что мудрости и храбрости поровну. Как он это сделал?



13. На королевских соревнованиях Франции по фехтованию первые четыре места заняли Атос, Портос, Арамис и Д'Артаньян. Сумма мест, занятых Атосом, Портосом и Д'Артаньяном, равна шести, а сумма мест Портоса и Арамиса тоже равна шести. Какое место занял каждый из мушкетёров, если Портос занял более высокое место, чем Атос?
14. Раскрасьте квадрат 6×6 в четыре цвета так, чтобы любые две клетки, между которыми ровно одна клетка (по вертикали, горизонтали или диагонали), были покрашены в разные цвета.
15. Некоторые клетки квадрата 4×4 белые, а остальные — чёрные. Известно, что у каждой белой клетки ровно три чёрных соседних с ней по стороне клетки, а у каждой чёрной клетки — ровно одна соседняя с ней по стороне клетка белая. Восстановите раскраску квадрата.

16. **Из четырёх фигурок сложили большую фигуру. Затем фигурки переставили, и получили такую же фигуру, но без одной клетки. Как это объяснить?**



Вспоминаем теорию.

Определение. Целые числа a и b называются ***сравнимыми по модулю*** m, если их разность кратна m:

$$a \equiv b(\mathrm{mod}\, m) \ \Leftrightarrow \ (a-b) \ \vdots \ m.$$

Здесь m — натуральное число, не равное 1.

Про целые числа, сравнимые по модулю m, говорят, что они ***дают одинаковые остатки при делении на*** m.

Свойство деления с остатком для натуральных чисел.

Делимое и его остаток от деления сравнимы по модулю делителя:

$$a : b = c(ост.\ r) \ \Rightarrow \ a \equiv r(\mathrm{mod}\, b).$$

Занятие **6**

Удобные модули и диофантовы уравнения

Важные факты

1. Докажите, что ***квадраты целых чисел при делении на 3 дают остатки только 0 и 1.***

2. Докажите, ***квадраты целых чисел при делении на 4 дают остатки только 0 и 1.***
3. Докажите, что ***при делении на 4 квадраты чётных чисел дают остаток 0, а квадраты нечётных чисел дают остаток 1.***
4. ***Квадраты целых чисел по модулю 5 сравнимы с 0; 1 или −1.*** Докажите.
5. ***Кубы целых чисел сравнимы по модулю 7 с 0; 1 или −1.*** Докажите.
6. Докажите, что ***кубы целых чисел сравнимы по модулю 9 с 0; 1 или −1.***

Применение «удобных» модулей

7. Может ли сумма квадратов двух нечётных чисел быть квадратом целого числа?
8. Может ли сумма квадратов трёх нечётных чисел быть квадратом целого числа?
9. Докажите, что сумма квадратов пяти последовательных натуральных чисел не является точным квадратом.
10. Докажите, что число $\overline{1\underbrace{00\ldots00}_{1000}5\underbrace{00\ldots00}_{1000}1}$ не является кубом никакого целого числа.
11. Верно ли, что число 1003003001 является кубом целого числа? Если да — то какого именно, если нет — то почему?
12. Подберите такие целые числа a, b, c так, чтобы выполнялось равенство $a^3 + b^3 + 2 = c^3$.
13. Можно ли подобрать целые числа a, b, c так, чтобы выполнялось равенство $a^3 + b^3 + 4 = c^3$?
14. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы трёх точных кубов.
15. Докажите, что ни одно из чисел вида 10^{3n+1} нельзя представить в виде суммы кубов двух натуральных чисел.

16. Докажите, что число $6n^3 + 3$ не является шестой степенью целого числа ни при каком натуральном n.
17. Известно, что x, y, z — натуральные числа, причём $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите, что $xy \vdots 12$.
18. Эпитафия на могиле Диофанта гласит: «Диофант провел шестую часть жизни в младенчестве и двенадцатую в юношеском возрасте; затем он женился и прожил в бездетном супружестве седьмую часть жизни и ещё пять лет, после чего у него родился сын, достигший только половины возраста отца; отец же пережил сына на четыре года». Сколько лет прожил Диофант?

Диофант
Александрийский
III век н.э.

Вспоминаем теорию.

Определение. Целые числа a и b называются ***сравнимыми по модулю*** m, если их разность кратна m:

$$a \equiv b(\mathrm{mod}m) \Leftrightarrow (a-b) \vdots m.$$

Здесь m — натуральное число, не равное 1.

Про целые числа, сравнимые по модулю m, говорят, что они ***дают одинаковые остатки при делении на*** m.

Свойство деления с остатком для натуральных чисел.

Делимое и его остаток от деления сравнимы по модулю делителя:

$$a : b = c\ (ост.\ r) \Rightarrow a \equiv r(\mathrm{mod}b).$$

Свойства сравнений по модулю.

- $a \equiv b(\mathrm{mod}m) \Rightarrow a + c \equiv b + c(\mathrm{mod}m)$;
- $a \equiv b(\mathrm{mod}m) \Rightarrow ac \equiv bc(\mathrm{mod}m)$.
- $a \equiv b(\mathrm{mod}m),\ c \equiv d(\mathrm{mod}m) \Rightarrow a + c \equiv b + d(\mathrm{mod}m)$;

- $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m),\ c \equiv d(\mathrm{mod}\, m) \Rightarrow ac \equiv bd(\mathrm{mod}\, m)$.
- $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m) \Rightarrow a^n \equiv b^n(\mathrm{mod}\, m)$.

Занятие 7 Диофантовы уравнения

Применяем сравнение по модулю

1. Решите уравнение в целых числах: $x^2 + y^2 = 4z - 1$.
2. Найдите все целочисленные решения уравнения: $15x^2 - 7y^2 = 9$.
3. Найдите все целые корни уравнения: $x^3 + 21y^2 + 5 = 0$.
4. Решите в целых числах диофантово уравнение: $x^2 - 7y = 10$.
5. Решите уравнение в целых числах: $x^2 + y^2 + z^2 = 8t - 1$. *Указание.* Рассмотрите остатки при делении на 8.
6. Решите уравнение в натуральных числах: $105^x + 211^y = 106^z$. *Указание.* При $z \geq 3$ рассмотрите остатки при делении на 8.
7. Решите в целых числах уравнение: $x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_{14}^4 = 2015$. *Указание.* Рассмотрите остатки при делении на 16.
8. Решите уравнение в натуральных числах: $1! + 2! + \ldots + (x + 1)! = y^2$.

   Указание. При $x \geq 4$ рассмотрите остатки при делении на 5.

☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺

Маленький мальчик подходит к папе-математику, сидящему за какой-то работой, и спрашивает:

— Папа, как пишется число "8"?

— Как знак бесконечности, повернутый на угол 90°.

Перебор случаев

9. Решите уравнение в целых числах: $(2x + y)(5x + 3y) = 7$.
10. Решите данное уравнение в целых числах: $(x + y) \times (3x - y) = 15$.
11. Имеются контейнеры двух видов: по 190 кг и по 170 кг. Можно ли полностью загрузить ими грузовик грузоподъёмностью 3 т?
12. Решите в целых числах уравнение: $x^2 + y^2 = 25$.
13. Маугли попросил обезьян принести ему орехов. Обезьяны набрали поровну орехов и понесли их Маугли. По дороге они поссорились, и каждая обезьяна бросила в каждую (кроме себя) по ореху. В результате Маугли досталось только 33 ореха. Известно, что каждая обезьяна принесла больше одного ореха. По сколько орехов собрали обезьяны?
14. Решите уравнение $x + 1/(y + 1/z) = 10/7$ в натуральных числах.
15. Летит над лесом стая сороконожек и трёхголовых драконов. У них всего 26 голов и 298 ног. У каждой сороконожки ровно одна голова. Сколько ног у трёхголового дракона?
16. Пять участников олимпиады стали её победителями, набрав по 15, 14 и 13 баллов и заняв соответственно I, II и III места. Сколько участников завоевали каждое призовое место, если вместе они набрали 69 баллов?
17. Решите уравнение $x! + y! + z! = u!$ в натуральных числах. *Указание.* Используя принцип крайнего, докажите, что $u \leq 3$.

Вспоминаем теорию.

- Квадраты целых чисел при делении на 3 дают остатки только 0 и 1.
- Квадраты целых чисел при делении на 4 дают остатки только 0 и 1.

- При делении на 4 квадраты чётных чисел дают остаток 0, а квадраты нечётных чисел дают остаток 1.
- Квадраты целых чисел по модулю 5 сравнимы с 0; 1 или −1.
- Кубы целых чисел сравнимы по модулю 7 с 0; 1 или −1.
- Кубы целых чисел сравнимы по модулю 9 с 0; 1 или −1.

Занятие 8 Кривые второго порядка

1. Познакомьтесь с кривыми второго порядка (эллипсом, параболой и гиперболой), используя печатные или электронные источники информации, например, интернет-ресурс «Математические этюды»:

   www.etudes.ru

   а) Определение эллипса:

   http://www.etudes.ru/ru/etudes/ellipse/

   б) Оптическое свойство эллипса, оптическое свойство параболы; эллипс, парабола и гипербола, как огибающие; перпендикулярность гиперболы и эллипса; парабола и простые числа; конические сечения:

   http://www.etudes.ru/ru/sketches/

   в) Параболическая антенна:

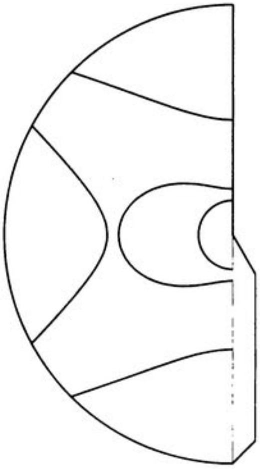
   http://www.etudes.ru/ru/etudes/radio/

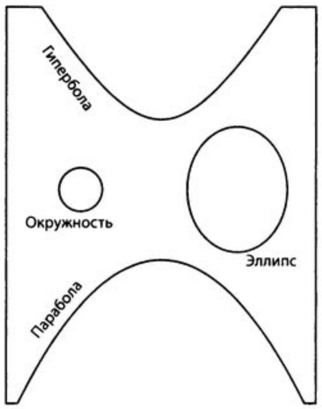
   г) Параболический бильярд:

   http://www.etudes.ru/ru/models/parabolicpool/

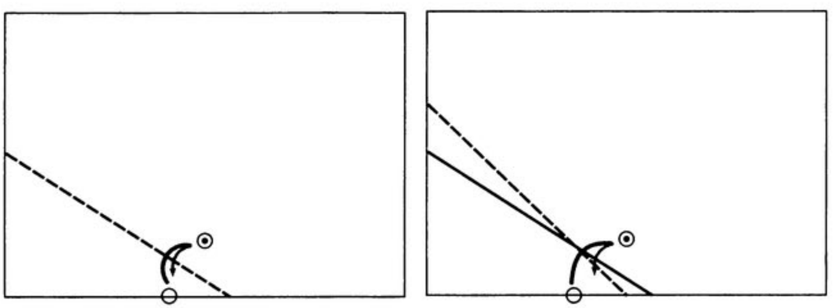
2. Используя досточку, лист бумаги, две кнопки, нитку и карандаш, начертите эллипс.
3. Используя шаблоны из Приложения, склейте боковую поверхность конуса и пересеките её плоскостью так,

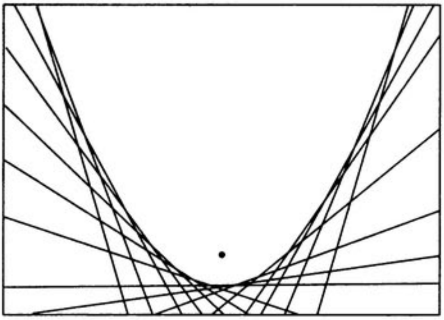
чтобы в сечении получились: а) окружность; б) эллипс; в) парабола; г) гипербола.



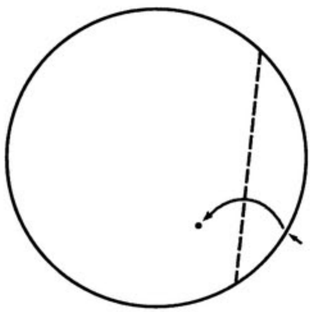


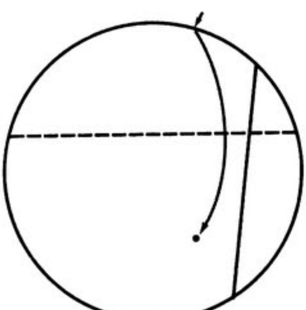
4. *(Парабола как огибающая)* Возьмите прямоугольный лист бумаги и отметьте на нём точку. Согните лист так, чтобы одна из сторон прямоугольника прошла через отмеченную точку. Разогните лист и наведите карандашом полученную при сгибе часть прямой. Повторите эту операцию несколько раз так, чтобы линии сгиба не повторялись. Непогнутая часть листа будет ограничена параболой (см. рис.)

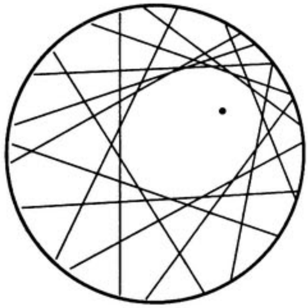




5. *(Эллипс как огибающая)* Возьмите лист бумаги, вырежьте из него круг и отметьте точку внутри круга. Согните круг так, чтобы ограничивающая его окружность прошла через отмеченную точку. Разогните круг и наведите карандашом полученную при сгибе часть прямой. Повторите эту операцию несколько раз так, чтобы линии сгиба не повторялись. Непогнутая часть круга будет ограничена эллипсом (см. рис.)

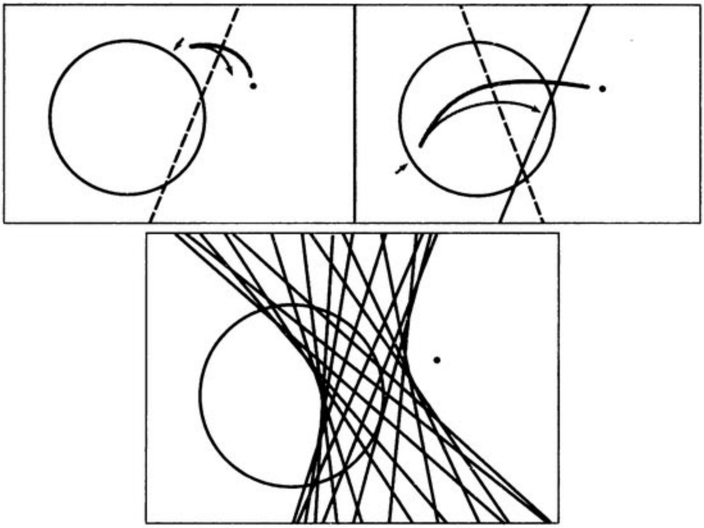






6. *(Гипербола как огибающая)* Возьмите лист бумаги (или кальки), нарисуйте на нём окружность и от-

метьте на листе точку вне ограниченного ею круга. Согните лист так, чтобы нарисованная окружность прошла через отмеченную точку. Разогните лист и наведите карандашом полученную при сгибе часть прямой. Повторите эту операцию несколько раз так, чтобы линии сгиба не повторялись. Непогнутая часть листа будет ограничена гиперболой (см. рис.)



Занятие 9 Декартова прямоугольная система координат

1. В декартовой системе координат отметьте и последовательно соедините точки: а) (–8;–5), (–8;5), (–6;0), (–4;5), (–4;–5); б) (–2;5), (–2;–5), (2;5), (2;–5); в) (4;–5), (4;1), (4;5), (8;3), (4;1). Какое слово у вас получилось?
2. В декартовой системе координат отметьте и последовательно соедините точки: а) (–9;5), (–9;10), (–9;8), (–7;10), (–9;8), (–7;5); б) (–6;5), (–6;8), (–4;9), (–6;10),

(–6;8); в) (–3;5), (–1;5), (–1;10), (–1;8), (–3;8), (–3;10); г) (1;5), (2;8), (1;10), (2;8), (2;10), (2;8), (2;5), (2;8), (3;10), (2;8), (3;5); д) (4;5), (4;10), (6;10), (6;5), (4;5); е) (7;5), (7;10), (7;8), (9;10), (7;8), (9;5); ё) (–9;–5), (–7;–5), (–8;–7), (–8;–10); ж) (–6;–5), (–6;–10), (–6;–7), (–4;–5), (–6;–7), (–4;–10); з) (–3;–10), (–2;–5), (–1;–10); и) (1;–10), (2;–5), (3;–10), ($2\,^3/_5$; –8), ($1\,^2/_5$;–8); й) (6;–5), (4;–5), (4;–10), (6;–10); к) (9;–5), (7;–5), (7;–10), (9;–10). Что у вас получилось?

Рене́ Дека́рт
1596—1650

3. Отметьте на шахматной доске расположение белых пешек: *c*4; *d*3; *e*3; *f*4 и чёрных пешек: *c*5; *d*6; *e*6 *f*5. Отметьте центр симметрии полученного восьмиугольника с вершинами в отмеченных точках. Найдите оси симметрии этого многоугольника при условии, что: а) цвет пешек не важен; б) цвет пешек важен.
4. Даны точки $A(1;4)$, $B(3;1)$, $C(-2;-3)$, $D(6;0)$, $E(7;-2)$. Постройте отрезки BC и DE. Отразите точку A и построенные отрезки симметрично относительно: а) начала координат; б) оси абсцисс; в) оси ординат.
5. Даны точки $A(-4;-2)$, $B(2;4)$, $C(3;-4)$. Постройте треугольник ABC. Отразите его симметрично относительно: а) начала координат; б) оси абсцисс; в) оси ординат.
6. Постройте графики: $x = 1$, $x = -2$, $x = 0$, $x = 6$; $y = -3$, $y = 4$, $y = 0$, $y = 2$.
7. Постройте в декартовой системе координат графики функций: $y = x$, $y = 2x$, $y = -1/2\ x$, $y = 3x + 1$, $y = -2x + 4$.

8. Постройте в декартовой системе координат прямые: $y = 2x$, $y = 2x + 1$, $y = 2x - 3$, $y = 2x + 5$.
9. Постройте в декартовой системе координат графики: $y = |x|$, $|x| + |y| = 2$, $|x| - |y| = 2$, $\big||x| - |y|\big| = 2$.
10. Постройте в декартовой системе координат графики: $y = [x]$, $y = \{x\}$, $y = [x] + \{x\}$, $y = [x] - \{x\}$.[1]
11. Постройте в декартовой системе координат графики: $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \dfrac{1}{x}$.
12. Постройте в декартовой системе координат графики: $(x + y)(x - y) = 0$, $x^2 + y^2 = 0$, $|x| - |y| = 0$, $|x| + |y| = 0$.

Занятие 10 Преобразования графиков в декартовой системе координат

Графики

1. Постройте в одной системе координат графики функций: $y = 3x$, $y = 3x + 2$, $y = 3x + 5$, $y = 3x - 4$.
2. Постройте в одной системе координат графики функций: $y = 1/3x$, $y = 1/3x - 2$, $y = 1/3x - 5$, $y = 1/3x + 4$.
3. Постройте в одной системе координат графики функций: $y = |x|$, $y = |x| - 1$, $y = |x| + 2$, $y = |x| - 5$.
4. Постройте графики функций: $y = |x - 1|$, $y = |x + 2|$.
5. Постройте график функции: $y = \big||x - 1| - 2\big|$.
6. Постройте график функции: $y = \Big|\big||x + 1| - 2\big| - 3\Big|$.
7. Постройте график: $y = |x + 3| + |x - 1|$. Выполните построение разными способами и сравните результаты.

---

[1] $[x]$ — целая часть числа x, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее числа x. $\{x\}$ — дробная часть числа x, т. е. $x - [x]$.

8. Постройте график: $y = |x - 2| + |x + 2|$.

9. Постройте график: $y = |x - 2| - |x + 2|$.

10. Постройте график: $y = |x + 2| + |x - 2| + |x - 5|$. Выполните построение разными способами и сравните результаты.

Такая разная математика

11. Дедушка пошёл с четырьмя внуками в лес за грибами. Через полчаса дед набрал 45 грибов, а внуки прибежали к нему жаловаться — никто ничего не нашёл. Чтобы внуки не огорчались, дед дал каждому несколько грибов, причём раздал всё, что собрал. Потом все снова разбрелись в разные стороны. Один мальчик нашёл два гриба, второй потерял два гриба, третий нашёл столько, сколько получил от деда, а четвёртый потерял половину полученных от деда грибов. Когда дети пришли домой, оказалось, что у всех грибов поровну. Сколько каждый из внуков получил грибов от дедушки и сколько принёс домой?

12. В семье я рос один на свете,
И это правда, до конца.
Но сын того, кто на портрете,
Сын моего отца.

Кто изображён на портрете?

13. В семье я рос один на свете,
И это правда, до конца.
Отец того, кто на портрете,
Сын моего отца.

Кто изображён на портрете в этом случае?

14. Может ли быть 10 простых чисел подряд? А 10 составных чисел подряд? Ответ обоснуйте.

Занятие **11**

Развитие математической культуры

1. В двухходовых шахматах правила такие же, как и в обычных шахматах, но каждый игрок, по своему усмотрению, может сделать один или два хода. Докажите, что при правильной игре начинающий не проиграет.
2. Клетки квадратной таблицы 15×15 раскрашены в красный, синий и зелёный цвета. Докажите, что найдутся по крайней мере две строки, в которых клеток хотя бы одного цвета будет поровну.
3. Саша и Аня купили по одинаковой коробке чая в пакетиках. Известно, что одного пакетика хватает на две чашки крепкого чая или на три не очень крепкого. Саше коробки хватило на 41 чашку, а Ане — на 58. Сколько пакетиков было в коробке? Ответ объясните.
4. Из всех натуральных чисел, которые не превосходят 99, найдите два, наибольший общий делитель которых — максимальный из всех возможных. Ответ объясните.
5. Существует ли трёхзначное число, которое равно произведению своих цифр? Ответ объясните.
6. В магазине продаются Шалтаи и Болтаи, причём 175 Шалтаев стоят дороже, чем 125 Болтаев, но дешевле, чем 126 Болтаев. Докажите, что для покупки 3 Шалтаев и 1 Болтая одного рубля не хватит, если каждый Шалтай и каждый Болтай стоят целое число копеек.
7. За круглым столом сидит поровну математиков и программистов. Некоторые из них всегда говорят правду, а остальные всегда лгут. Известно, что ма-

тематиков-лжецов столько же, сколько программистов-лжецов. Все сидящие за столом утверждают, что их сосед справа — программист. Докажите, что число сидящих за столом делится на 4 без остатка.

8. Саша и Коля живут в разных номерах одной гостиницы. На дверях их номеров написаны числа с такой особенностью: они двузначные и если к сумме цифр номера прибавить квадрат их разности, то снова получится этот номер. Илья хочет жить в другом номере этой гостиницы, но с таким же свойством. Сможет ли администратор выполнить пожелание Ильи? Ответ объясните.
9. На трёх карточках написаны двузначные числа. Известно, что на одной карточке число 79, на второй 23. Все шестизначные числа, составленные из этих карточек, дают в сумме 2989896 (в каждом из таких шестизначных чисел используются все три карточки). Какое число на третьей карточке? Ответ объясните.
10. В хороводе по кругу стоят 15 детей. Справа от каждой девочки стоит мальчик. У половины мальчиков правый сосед тоже мальчик, а у каждого из остальных мальчиков правый сосед — девочка. Сколько мальчиков и сколько девочек в хороводе? Ответ объясните.
11. В Стране Дураков за 2 золотые монеты дают 3 букваря, а за 7 серебряных монет дают 4 букваря. За 33 корочки хлеба дают 24 пиявки, а за 42 серебряные монеты дают 48 пиявок. Сколько корочек хлеба дают за 8 золотых? Ответ объясните.
12. На плацу 20 великанов построились в колонну. У первого великана есть одна палица, у второго — две, у третьего — три и т. д. У какого великана палиц в 5 раз меньше, чем у всех предыдущих великанов, вместе взятых? Ответ объясните.

Занятие 12 Графическое и аналитическое решение уравнений

1. Решите аналитически уравнения: а) $||x-1|-3|=-2$; б) $||x-1|-3|=0$; в) $||x-1|-3|=2$; г) $||x-1|-3|=3$; д) $||x-1|-3|=5$.
2. Постройте график функции $y=||x-1|-3|$. Решите с его помощью уравнения из задания №1.
3. При помощи графика функции $y=||x-1|-3|$ выясните, сколько решений имеет уравнение $||x-1|-3|=a$ в зависимости от значений параметра a.
4. Решите аналитически уравнения: а) $||2x-4|-2|=-3$; б) $||2x-4|-2|=0$; в) $||2x-4|-2|=1$; г) $||2x-4|-2|=2$; д) $||2x-4|-2|=4$.
5. Постройте график функции $y=||2x-4|-2|$. Решите с его помощью уравнения из задания №4.
6. При помощи графика функции $y=||2x-4|-2|$ выясните, сколько решений имеет уравнение $||2x-4|-2|=a$ в зависимости от значений параметра a.
7. Решите аналитически («методом интервалов») уравнения: а) $|x+2|+|x-4|=10$; б) $|x+2|+|x-4|=6$; в) $|x+2|+|x-4|=4$.
8. Постройте график функции $y=|x+2|+|x-4|$. Решите с его помощью уравнения из задания №7.
9. При помощи графика функции $y=|x+2|+|x-4|$ выясните, сколько решений имеет уравнение $|x+2|+|x-4|=a$ в зависимости от значений параметра a.

10. Решите аналитически и графически уравнения: а) $|x+2|-|x-1|=-5$; б) $|x+2|-|x-1|=-3$; в) $|x+2|-|x-1|=0,5$.
11. При помощи графика функции $y=|x+2|-|x-1|$ выясните, сколько решений имеет уравнение $|x+2|-|x-1|=a$ в зависимости от значений параметра a.
12. Решите аналитически и графически уравнения: $|||x-2|-1|-3|=2$; $|x+2|+|x-1|-|x-4|=3$.
13. Постройте график функции $y=|x-1|+|x+2|-|2x+1|$. Сколько решений имеет уравнение $|x-1|+|x+2|-|2x+1|=a$ в зависимости от значений параметра a?
14. На шесть внешне одинаковых гирь, массы которых составляют 1 кг, 2 кг, 3 кг, 4 кг, 5 кг, 6 кг, наклеены таблички «1 кг», «2 кг», ..., «6 кг». Как на чашечных весах за два взвешивания выяснить, правильно ли наклеены таблички? Ответ обоснуйте.
15. Тринадцать различных натуральных чисел дают в сумме 92. Найдите все варианты таких чисел.
16. Число x — натуральное. Из утверждений $2x>70$, $x<100$, $4x>25$, $x>10$ и $x>5$ два верных и три неверных. Чему равно число x? Ответ обоснуйте.

Занятие

13 Инвариант-остаток

1. В прямоугольной таблице $m \times n$ расставлены числа так, что все суммы чисел в любой строчке и любом столбце одинаковы и не равны нулю. Докажите, что $m=n$.
2. На столе стоят 2015 стаканов дном вверх. За один ход разрешается одновременно перевернуть два любых стакана. Можно ли поставить все стаканы дном вниз?

3. На доске записаны числа 1, 2, 3, ..., 2013. За 1 шаг разрешается вытереть с доски любые два числа и вместо них записать их разность. Может ли через 2012 шагов на доске остаться число нуль?
4. В банке лежат чёрные и белые зёрнышки. Наугад берут два из них. Если они одинакового цвета, то вместо них в банку кладут одно чёрное зёрнышко, если разного — то чёрное зёрнышко забирают, а белое кладут обратно в банку. В конце концов, осталось одно зёрнышко. Какого оно цвета, если белых зёрнышек в банке изначально было 2014?
5. У Ивана-Царевича два волшебных меча, один из которых может отрубить Змею Горынычу ровно 21 голову, а второй — ровно 4 головы, но тогда у Змея сразу отрастает 60 голов. Может ли Иван отрубить Змею все головы, если их изначально: а) 7; б) 1001; в) 10 000?
6. Хулиганы Егор и Денис рвут газету, причём Егор рвёт каждый попадающийся ему кусок газеты на 12 частей, а Денис — на 23 части. На следующий день нашли 2015 кусков. Все ли куски найдены?
7. В странах Диллии и Даллии денежными единицами являются диллеры и даллеры соответственно. В Диллии за один диллер дают 10 даллеров, а в Даллии за один даллер дают 10 диллеров. У начинающего финансиста есть только 1 диллер, и он может свободно переезжать из одной страны в другую и менять свои деньги. Может ли у него количество диллеров сравняться с количеством даллеров (финансист не тратит свои деньги до этого момента, а только меняет)?
8. В пробирке находятся марсианские амёбы трёх типов: A, B, C. Две амёбы разных типов, встречаясь, могут слиться в одну амёбу третьего типа. После нескольких таких слияний в пробирке оказалась одна амеба.

Какого она типа, если изначально амёб типа A было 20 штук, типа B — 21 штука, типа C — 22 штуки?

9. В стране Серобуромалин живёт 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Когда два хамелеона двух разных цветов встречаются, то они одновременно приобретают окраску третьего цвета. При встрече хамелеонов одного цвета их окраска не меняется. Может ли оказаться, что через некоторое время все хамелеоны станут одного цвета?

10. В квадрате 3×3 расставлены плюсы и минусы. За 1 ход можно изменить все знаки в любой строке или любом столбце на противоположные. Можно ли за несколько ходов получить таблицу из одних плюсов, если начальная расстановка знаков такова:

а)

+	−	−
−	−	−
−	−	−

б)

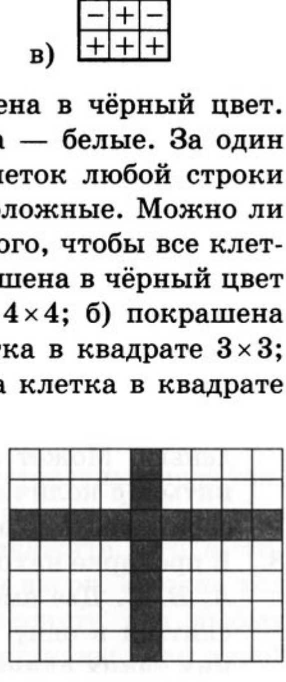
−	+	−
+	−	+
−	+	−

в)

+	−	+
−	+	−
+	+	+

11. В квадрате одна клетка покрашена в чёрный цвет. Остальные клетки этого квадрата — белые. За один ход можно менять цвета всех клеток любой строки или любого столбца на противоположные. Можно ли через несколько ходов добиться того, чтобы все клетки стали чёрными, если: а) покрашена в чёрный цвет одна угловая клетка в квадрате 4×4; б) покрашена в чёрный цвет одна угловая клетка в квадрате 3×3; в) покрашена в чёрный цвет одна клетка в квадрате $n\times n$, где $n\geq2$?

12. В таблице 8×9 в чёрный цвет покрашена ровно одна клетка, остальные — белые. За один ход разрешается перекрашивать все клетки в любом «крестике» (в объединении любой строки и любого столбца) в противопо-



ложный цвет. Можно ли добиться того, чтобы через несколько ходов все клетки стали белыми?

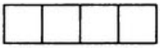
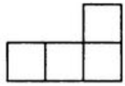
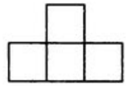
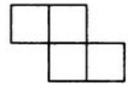
13. Круг разделён на 6 секторов, в каждом из которых стоит фишка. За один ход разрешается сдвинуть любые две фишки в соседние с ними сектора. Может ли через некоторое время оказаться, что все фишки соберутся в одном секторе?
14. Вдоль дороги в ряд растут ёлки с интервалами 10 м. На каждой из них сидит чиж. Известно, что если какой-то чиж перелетает с ёлки на ёлку, то какой-то другой чиж перелетает на столько же метров, но в противоположном направлении. Могут ли все чижи собраться на одной ёлке, если число ёлок: а) 2014; б) 2015?
15. В вершинах правильного 12-угольника расставлены числа +1 и –1 так, что среди них ровно одно число –1. За один шаг разрешается изменить знак в любых k подряд идущих вершинах. Можно ли через несколько ходов добиться того, чтобы –1 «сдвинулась» в соседнюю с начальной вершину, а в остальных вершинах были числа +1, если: а) $k = 3$; б) $k = 4$; в) $k = 6$?
16. На доске записаны многочлены $P(x) = x^2 + 2$ и $Q(x) = x + 1$. Разрешается записать на доску сумму, разность или произведение любых ранее выписанных многочленов. Может ли на доске появиться многочлен $R(x) = x^3 + 2$?

Занятие

14 Инвариант-раскраска

Применяем двухцветные раскраски

1. Докажите, что шахматную доску 8×8 нельзя замостить 15 фигурками вида а) и одной фигуркой вида б).

а)  б)  в)  г) 

2. Докажите, что доску 10×10 нельзя замостить фигурками вида в).
3. Докажите, что фигурками вида а) нельзя замостить доску: а) 10×10; б) 102×102.
4. Дно прямоугольной коробки вымощено плитками 1×4 и 2×2. Плитки высыпали из коробки и одна плитка 2×2 потерялась. Её заменили плиткой 1×4. Удастся ли теперь вымостить дно коробки?
5. Можно ли доску 75×75 разрезать на фигурки, каждая из которых — это либо прямоугольник 2×1, либо «крест» из 5 клеток?
6. Можно ли разрезать доску 10×10 на 25 фигур вида б)?
7. Можно ли разрезать доску 10×10 на 25 фигур вида г)?
8. На доску 100×100 поместили фигуру «верблюд», которая перемещается ходами вида (1;3), в отличие от коня, который перемещается ходами вида (1;2). Может ли «верблюд», стартовав с какого то поля, закончить свой маршрут на поле, соседнем со стартовым?
9. В каждой клетке доски 7×7 сидит жук. В некоторый момент все жуки переползают на соседние (по горизонтали или вертикали) клетки. Докажите, что после этого останется по меньшей мере одна пустая клетка. Может ли такая клетка остаться ровно одна?
10. На каждой клетке доски 9×9 сидит жук. По свистку каждый жук переползает в одну из соседних по диагонали клеток. При этом в некоторых клеточках могут оказаться по несколько жуков, а в некоторых — ни одного. Найдите наименьшее возможное число клеточек, оставшихся пустыми после переползания. Приведите пример соответствующего перемещения жуков и докажите, что меньшего числа незанятых клеток оказаться не может.

11. На каждой клетке доски 8×8 сидят по два жука. По свистку каждый жук переползает в одну из соседних по горизонтали или вертикали клеток так, чтобы два жука, сидевшие в одной клетке, оказались в разных. Докажите, что при этом 24 клеточки могут освободиться. Может ли освободиться большее число клеточек?
12. За какое наименьшее количество выстрелов при игре в морской бой на доске 10×10 можно гарантированно попасть в четырёхпалубный корабль?

Применяем многоцветные раскраски

13. «Дельфин» — фигура, которая ходит на одну клетку вправо, на одну клетку вверх или на одну клетку по диагонали влево-вниз. Может ли дельфин, начав с клетки в левом нижнем углу доски 8×8, обойти всю эту доску, побывав в каждой клетке ровно один раз?
14. На доске 10×10 ходит фигура «лев» — она может ходить на клетку вправо, на клетку вниз и на клетку влево-вверх. Может ли «лев» обойти по одному разу все клетки доски и вернуться последним ходом на исходное поле? А если «лев» возвращается на соседнее от исходного поле (по горизонтали или вертикали)?
15. Можно ли доску размерами $4 \times n$ обойти ходом шахматного коня, побывав на каждой клетке ровно один раз, и последним ходом вернуться на исходное поле?

Занятие 15 Включения-исключения и дополнения

1. В классе 35 учеников. Из них 20 занимаются в математическом кружке, 11 — в физическом, а 10 ребят вообще не посещают кружки. Сколько математиков увлекается физикой?

2. В классе 19 учеников, которые занимаются спортом. Из них 17 умеют ездить на велосипеде, 13 умеют плавать, а 8 — ходить на лыжах. Ни один ученик не владеет тремя видами спорта. Сколько пловцов умеет ходить на лыжах?
3. Сколько детей в семье, если 7 из них любят капусту, 6 — морковь, 5 — горох, 4 — капусту и морковь, 3 — капусту и горох, 2 — морковь и горох, а один любит и капусту, и горох, и морковь? (Известно, что каждый ребёнок в этой семье любит горох, капусту или морковь.)
4. Среди учеников 5-го класса, ходящих на «Физматик», на математику ходит 48 человек, на физику — 37, на информатику — 42, на математику или физику — 75, на математику или информатику — 76, на физику или информатику — 66, на все три предмета — 4. Сколько пятиклассников учится на «Физматике»? Сколько из них посещает кружок только по одному предмету?
5. Докажите формулы включений-исключений:

   а) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$;

   б) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - (n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(B \cap C)) + n(A \cap B \cap C)$;

   в) $n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = n(A_1) + n(A_2) + \ldots + n(A_k) - (n(A_1 \cap A_2) + n(A_1 \cap A_3) + \ldots + n(A_{k-1} \cap A_k)) + (n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \ldots + n(A_{k-2} \cap A_{k-1} \cap A_k)) - \ldots + (-1)^{k-1} n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k)$.
6. Каждый из работающих в фирме «Рога и копыта» знает хотя-бы один иностранный язык (английский, немецкий или французский), причём 6 знают английский, 6 — немецкий, 7 — французский, 4 знают английский и немецкий, 3 — немецкий и французский, 2 — французский и английский. Только один человек знает все три языка. Сколько человек работает

в фирме? Сколько из них знают только английский? Только французский?

7. На пикник поехали 92 человека. Бутерброды с колбасой взяли 47 человек, с сыром — 38 человек, с ветчиной — 42 человека. При этом бутерброды с сыром и бутерброды с колбасой взяли 28 человек, бутерброды с колбасой и бутерброды с ветчиной — 31, бутерброды с сыром и бутерброды с ветчиной — 26 человек. Все три вида бутербродов взяли 25 человек, а некоторые вместо бутербродов взяли пирожки. Сколько человек взяли пирожки?
8. Сколько существует натуральных чисел, не больших 1000, которые: а) кратны 3 или 5; б) не кратны ни 3, ни 5? в) не кратны ни 2, ни 3, ни 5?
9. Каких натуральных чисел от 1 до 2015 больше: тех, которые кратны 8, но не кратны 9, или тех, которые кратны 9, но не кратны 8?
10. На дискотеке 80% времени был выключен свет, 90% времени играла музыка и 50% времени показывали клипы. Какую наименьшую часть времени всей дискотеки в темноте показывали клипы под музыку?
11. Из ста человек 85 знают английский, 80 — испанский, 75 — немецкий. Сколько человек точно знают все три языка?
12. Каждый десятый математик — философ. Каждый сотый философ — математик. Кого больше: философов или математиков, и во сколько раз?
13. Известно, что доля блондинов среди голубоглазых больше, чем доля блондинов среди всех людей. Что больше: доля голубоглазых среди блондинов, или доля голубоглазых среди всех людей?
14. Каждый из трёх игроков записывает 100 слов, после чего записи сравнивают. Если слово встретилось хотя бы у двоих, то его вычёркивают из всех списков. Могло ли так оказаться, что у первого игрока осталось 54 слова, у второго — 75 слов, а у третьего — 80 слов?

15. Ваня, Петя и Оля решили 10 олимпиадных задач. Петя решил 7, Оля — 8, Ваня — 9 задач. Сколько задач могли решить все трое одновременно?

Занятие 16 Геометрическая прогрессия — первое знакомство

1. Одному сыну отец оставил в наследство 3000 руб., второму — в 2 раза больше, третьему — ещё в два раза больше, и т. д. Сколько составляет наследство, доставшееся пятому, последнему из сыновей?
2. В первый год работы предприятие заплатило 2075625 руб. налогов, во второй — в 3 раза меньше, в третий — треть от того, что заплатило во второй, и т. д. Какую сумму налога заплатило предприятие в пятый год?
3. Дана последовательность чисел, из которых каждое последующее равно 2/3 предыдущего. Известно, что третье из них равно 27. Найдите первые 5 членов этой последовательности.
4. Продолжите последовательность: 3; –12; 48; –192; ... Опишите алгоритм нахождения следующего числа через предыдущие. Найдите формулу для n-го члена этой последовательности.

Геометрической прогрессией называется числовая последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же число: $a_{n+1} = a_n \cdot q$.

Число $q = a_{n+1} : a_n$ **называют знаменателем геометрической прогрессии.**

5. Докажите **формулу** n**-го члена геометрической прогрессии:** $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

6. Найдите 11-ый член геометрической прогрессии: 16, 9; −33, 8; ...
7. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии, если $a_2 = 2$, $a_6 = 162$.
8. Первоначальный вклад 400$ банк ежегодно увеличивает на 15%. Каким станет вклад через 4 года?
9. Докажите, что квадрат любого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению предыдущего и последующего членов.
10. Вычислите: а) $1 + 2 + 4 + 8 + ... + 1024$; б) $1111111_2 + 1_2$; в) $2222222_3 + 1_3$; г) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{1024}$.
11. Согласно легенде, раджа был так восхищён шахматами, что предложил создателю этой игры любую награду. Изобретатель шахмат попросил за первую клетку доски 1 рисовое зёрнышко, за вторую — 2, за третью — 4, и т. д. Сколько зёрнышек должен был отдать раджа за последнюю, 64 клетку? Сколько всего зёрнышек хотел получить изобретатель? Оцените их общую массу, считая одно зёрнышко за 1/4 грамма.
12. Выведите **формулу суммы первых n членов не постоянной геометрической прогрессии** (b_n): $S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}$ из равенств: $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n$ и $S_n q = b_2 + b_3 + \ldots + b_n + b_n q$.
13. Найдите сумму первых пяти членов геометрической прогрессии, если $b_3 = -18$, $q = 3$.
14. Найдите сумму: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$. Найдите геометрическую интерпретацию полученного результата.
15. Запишите в виде обыкновенной дроби: а) $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \ldots$; б) 0,1111111...; в) 0,(9); г) 0,(72).

Занятие 17 Числовые неравенства

1. Вычислите: а) 2^0, 2^1, 2^2, ..., 2^{10}; б) 3^0, 3^1, 3^2, ..., 3^6; в) 5^0, 5^1, 5^2, ..., 5^5; г) степени 6 и 7, не превосходящие 1000.
2. Перемножили 3000 двоек. Докажите, что в записи получившегося числа: а) не более 1000 цифр; б) не менее 900 цифр.
3. Что больше: а) 5^{300} или 3^{500}; б) 2^{700} или 5^{300}; в) 2^{300} или 3^{200}?
4. Какое число больше: 31^{11} или 17^{14}?
5. Сравните числа: а) 2^{40} и 3^{28}; б) 5^{44} и 4^{53}.
6. На доске написали 5 чисел. Сложив их попарно, получили числа: 0, 2, 4, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15. Какие числа написали на доске?
7. Сумма нескольких чисел равна 1. Может ли сумма их квадратов быть: а) меньше 0,01; б) больше 2016?
8. Докажите, что $5^{73} > 7^{53}$.
9. Если к числу 100 применить 99 раз операцию «факториал», то получится число A. Если к числу 99 применить 100 раз операцию «факториал», то получится число B. Какое из этих чисел больше?
10. Докажите, что $2^{100} + 3^{100} < 4^{100}$.
11. Найдите все натуральные k, при которых выполнено неравенство $3^k + 4^k \geq 5^k$.
12. Сравните числа:
$$12345678910111213 1415 \cdot 1234567891011121314 17$$
$$\text{и } 1234567891011121314 16^2.$$
На сколько они отличаются?
13. Числа 2^{2015} и 5^{2015} выписаны одно за другим. Сколько всего цифр выписано?
14. Докажите, что $100! < 50^{100}$.

15. Докажите, что $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2015}>6$.

16. Докажите, что $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{10}$.

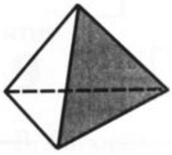
Занятие 18 Правильные многогранники

Правильным многогранником называется выпуклый многогранник, у которого все грани являются равными ***правильными многоугольниками*** (т. е. у них все стороны равны и все углы равны), и в каждой вершине сходится одинаковое число рёбер.

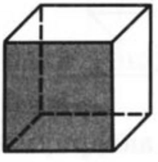
Существует ровно пять видов правильных многогранников.

Правильные многогранники

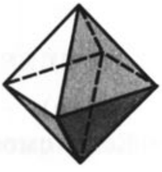
Правильный тетраэдр



Куб (правильный гексаэдр)



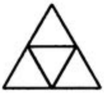
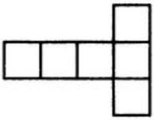
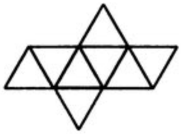
Правильный октаэдр

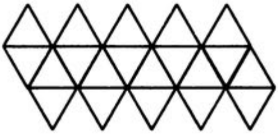


Правильный додекаэдр

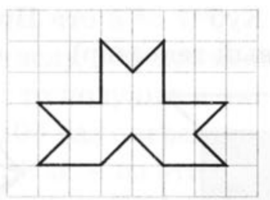
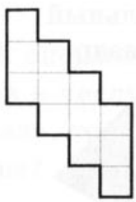
Правильный икосаэдр

1. **Склейте правильные многогранники, используя развёртки из Приложения.**

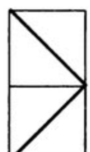
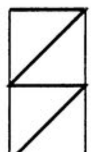

а)

б)

в)

г)

д)

2. **Для каждого из правильных многогранников посчитайте количество граней (Γ), вершин (B) и рёбер (P). Вычислите $B + \Gamma - P$. Попробуйте придумать многогранник, для которого $B + \Gamma - P \neq 2$.**
3. **Нарисуйте 11 развёрток куба (гексамино).**
4. **Можно ли фигурой, изображённой на рисунке, оклеить куб в один слой?**

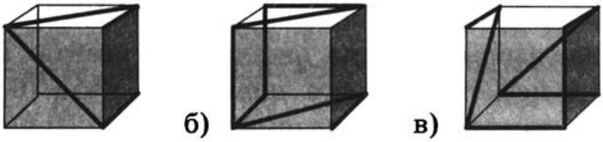

а)

б)

5. **Если смотреть на аквариум спереди, то рыбка проплыла, как показано на рисунке а, а если смотреть справа — то, как на рисунке б. Нарисуйте аквариум (параллелепипед $1 \times 1 \times 2$), и восстановите траекторию рыбки. Нарисуйте вид сверху.**


а)

б)

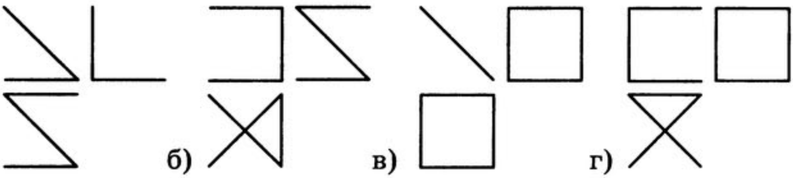
6. **Можно ли из прямоугольных параллелепипедов $1 \times 1 \times 2$ сложить куб $3 \times 3 \times 3$, из которого вынут угловой кубик? А если вынут не угловой кубик, а соседний с ним?**

7. На поверхности стеклянного куба расположена ломаная, вершины которой находятся в вершинах куба. Нарисуйте, как выглядит данная ломаная спереди, сверху и слева.



а) б) в)

8. На рисунке изображён прозрачный куб и ломаная на его поверхности, вершины которой находятся в вершинах куба: вид спереди, сверху и слева. Изобразите куб и ломаную на одном рисунке так, чтобы были видны все её звенья.



а) б) в) г)

Занятие
19 Нестандартные текстовые задачи

1. В бассейн проведены 4 трубы. Когда открыты первая, вторая и третья трубы, бассейн наполняется за 12 минут; когда открыты вторая, третья и четвёртая — за 15 минут; когда открыты только первая и четвёртая — за 20 минут. За какое время наполнится бассейн, если открыть все четыре трубы?
2. За 9 одинаковых книжек заплатили больше, чем 11 долларов, но меньше, чем 12 долларов. За 13 таких книжек заплатили 15 долларов и несколько центов, но меньше 16 долларов. Какова цена одной книжки?

3. Истратив половину денег, я заметил, что осталось вдвое меньше рублей, чем было первоначально копеек, и столько же копеек, сколько было первоначально рублей. Сколько денег я истратил?
4. В некоторых странах температуру измеряют не по шкале Цельсия, а по шкале Фаренгейта. Известно, что в ней температура плавления льда (0°C) равна 32°, а температура кипения воды (100°C) равна 212°. Найдите температуру, числовое значение которой по шкале Цельсия и по шкале Фаренгейта совпадают, если для перевода из одной шкалы в другую служит линейная функция $T_{ф} = kT_{ц} + b$.
5. Дама сдала в багаж рюкзак, чемодан, саквояж и корзину. Чемодан тяжелее, чем рюкзак, саквояж и рюкзак тяжелее, чем корзинка и чемодан, а корзинка и саквояж вместе весят столько, сколько чемодан и рюкзак. Расставьте грузы в порядке возрастания их веса.
6. Два ученика на соревнованиях по стрельбе сделали по 5 выстрелов. При этом они выбили такие результаты: 10, 9, 9, 8, 8, 5, 4, 4, 3, 2 в некотором порядке. Известно, что за первых три выстрела они набрали одинаковую сумму очков. А за три последних выстрела первый ученик набрал в три раза больше очков, чем другой. Сколько очков каждый из учеников набрал при третьем выстреле?
7. Пешеход вышел из пункта A и идёт по прямой дороге, проходя последовательно через пункты $Б$, $В$, $Г$, причём $АВ = 12$ км, $БВ = 21$ км, $ВГ = 6$ км. Пешеход идёт со скоростью 3 км/ч. Найдите последний момент времени, когда сумма расстояний от всех пунктов до пешехода будет наименьшей из возможных.
8. Футбольные команды «Металлист» и «Бавария» принимали участие в двух разных турнирах. В этих турнирах каждая команда встречается с каждым из соперников

ровно один раз. Когда турнир с участием «Металлиста» закончился, в другом турнире было проведено столько же игр, сколько в первом, и до конца осталось три тура (каждой команде осталось сыграть по три игры). Сколько команд участвовало в каждом турнире?

9. В школьной газете сообщается, что процент учеников 7-А класса, повысивших во втором полугодии успеваемость, больше, чем $2{,}9\%$, и меньше, чем $3{,}1\%$. Найдите наименьшее возможное число учеников в этом классе.

10. Тарас и Лена по очереди наполняют из крана лейки, каждая из которых наполняется за 10 сек. Сразу после их наполнения Тарас и Лена поливают цветы, опустошая лейки: Тарас — за 30 сек., Лена — за 45 сек. Потом опять их наполняют водой. Если лейки не подставлены под кран, вода наполняет бочку, которая стоит под краном. Пустая бочка может наполниться за 15 минут. Кто из детей первым подойдёт набирать воду после того, как бочка наполнится?

11. На день рождения фрекен Бок испекла торт. Малыш и торт весили столько же, сколько Карлсон и фрекен Бок. Когда торт съели, Карлсон весил столько, сколько фрекен Бок и Малыш. Доказать, что Карлсон съел кусок торта, весивший столько же, сколько фрекен Бок до дня рождения.

12. Иван, Пётр и Кирилл косили траву. Пётр и Кирилл скосили бы всю траву вдвое быстрее, чем Иван. Иван и Кирилл скосили бы всю траву втрое быстрее, чем Пётр. Во сколько раз быстрее, чем Кирилл, скосили бы всю траву Иван и Пётр?

13. Сулико подошла к роднику с кувшинами вместимостью 5 л и 4 л. Вода из родника текла двумя струями — одна сильнее, другая слабее. Сулико поставила одновременно кувшины под струи и, когда набралась

половина меньшего кувшина, поменяла кувшины местами. Наполнились кувшины одновременно. Во сколько раз одна струя даёт больше воды, чем другая, за одно и то же время?

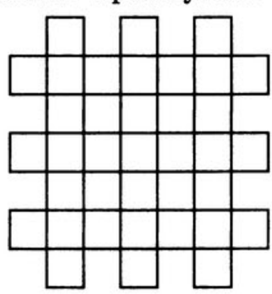
14. Четыре чёрненьких чумазеньких чертёнка чертили чёрными чернилами чертёж четыре часа. Если бы первый чертил вдвое быстрее, а второй вдвое медленнее, то им потребовалось столько же времени. Если бы первый чертёнок чертил вдвое медленнее, а второй вдвое быстрее, то они управились бы за 2 ч 40 мин. За какое время начертили бы чертёж первые три чертёнка без помощи четвёртого?

15. Трое рабочих копали канаву. Сначала первый рабочий проработал половину времени, необходимого двум другим, для того, чтобы вырыть всю канаву. Затем второй рабочий проработал половину времени, необходимого двум другим, для того, чтобы вырыть всю канаву. Наконец, третий рабочий проработал половину времени, необходимого двум другим, для того, чтобы вырыть всю канаву. В результате канава была вырыта. Во сколько раз быстрее была бы вырыта канава, если с самого начала все трое работали совместно?

16. Двое братьев пасли стадо овец, а к зиме его продали. Вырученную сумму стали делить между собой следующим образом: один брат взял 10 пистолей, затем другой взял десять пистолей, потом первый опять взял десять пистолей, и т.д. После того, как первый взял очередные десять пистолей, второму брату не хватило денег, т.к. осталось меньше десяти пистолей. Тогда первый брат добавил к остатку нож, и это составило в сумме десять пистолей. На том делёж и закончился. Сколько стоит нож, если каждая овца была продана за столько пистолей, сколько овец было в стаде?

Занятие 20 Немного поразрезаем вместе...

1. Разрежьте квадрат на два равных пятиугольника.
2. Разрежьте квадрат на два равных шестиугольника.
3. Разрежьте клетчатый квадрат 5×5 с вырезанной центральной клеткой на четыре равные части по линиям клеток — 7 способов.
4. Разрежьте клетчатый квадрат 5×5 по сторонам клеток на 7 попарно различных прямоугольников.
5. Разрежьте клетчатый квадрат 13×13 на 5 прямоугольников по сторонам клеток так, чтобы все 10 чисел, выражающих длины сторон прямоугольников, были различными натуральными числами.
6. Составьте клетчатый прямоугольник 3×5 из трёх различных пентамино (фигур, состоящих из пяти клеток) — 7 способов.
7. Составьте клетчатый квадрат 5×5 из пяти различных пентамино.
8. Требуется разрезать треугольник ABC на 5 треугольников равной площади так, чтобы три из этих треугольников примыкали стороной к отрезку AC, а три треугольника примыкали стороной к отрезку BC.
9. Разрежьте трапецию, у которой два угла, прилежащие к большей из параллельных сторон, острые, на три части, из которых можно сложить прямоугольник. Покажите, как это сделать.
10. На какое наименьшее число прямоугольников можно разрезать по линиям клеток фигуру, изображённую на рисунке? Ответ обоснуйте.



Занятие 21 Сумма углов треугольника

Никто не обнимет необъятного.
Козьма Прутков.
Если нельзя, но очень хочется, то можно.
Шолом-Алейхем.

Сумма углов любого треугольника равна 180°.

1. Угол треугольника равен сумме двух других его углов. Докажите, что треугольник прямоугольный.
2. Докажите, что внешний угол треугольника равен сумме внутренних, с ним не смежных.
3. Докажите, что сумма внешних углов треугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°.
4. Обоснуйте, что сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$. Посчитайте сумму углов выпуклого четырёхугольника, пятиугольника, шестиугольника, восьмиугольника, двенадцатиугольника.
5. Докажите, что сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°.
6. Найдите сумму пяти внутренних острых углов пятиконечной звезды.
7. Биссектриса равнобедренного треугольника, проведённая из вершины угла при основании, равна основанию треугольника. Найдите его углы.
8. Биссектриса внешнего угла при основании равнобедренного треугольника пересекает продолжение боковой стороны под углом, равным углу при основании треугольника. Найдите углы треугольника.
9. В треугольнике ABC биссектрисы углов A и C пересекаются в точке O. Найдите угол AOC, если $\angle B = \beta$.
10. В треугольнике ABC биссектрисы внешних углов при вершинах A и C пересекаются в точке P. Найдите угол APC, если $\angle B = \beta$.

11. Могут ли биссектрисы двух углов треугольника быть взаимно перпендикулярными?
12. Докажите, что высоты треугольника не могут точкой пересечения делиться пополам.
13. Угол между биссектрисой и высотой, проведёнными из вершины одного из углов треугольника, равен половине разности двух других углов треугольника. Докажите.
14. Один из углов треугольника равен α. Найдите угол между прямыми, которые содержат высоты, проведённые из вершин двух других углов.
15. В прямоугольном треугольнике из вершины прямого угла проведены высота, медиана и биссектриса. Докажите, что биссектриса делит пополам угол между высотой и медианой.
16. В равнобедренном треугольнике угол, образованный биссектрисой, проведённой из вершины угла при основании, и высотой, проведённой из той же вершины, равен $30°$. Найдите углы треугольника. Сколько решений имеет задача?
17. На стороне AB квадрата $ABCD$ построен равносторонний треугольник ABM. Найдите угол DMC. Сколько решений имеет задача?
18. Подумайте, как определить треугольник на сфере. Существует ли сферический треугольник, все три угла которого равны по $90°$?

Занятие 22 Многочлены — плодотворные дебютные идеи

Действия с многочленами, распределительный закон умножения

$$a(b + c) = ab + ac; \quad a(b - c) = ab - ac$$

1. Найдите сумму, разность и произведение многочленов: $P(x) = 2x^3 - x + 3$ и $Q(x) = -2x^2 + x$.
2. Вынесите общий множитель за скобки: а) $15x^4y^2 - 10x^3y^3 + 35x^2y - 20x^2y^2$; б) $a(b-5) + 7(5-b)$.
3. Разложите многочлен на множители: $12x^4 - 18x^3 + 24x^2 - 6x$.

Метод группировки

$$ab + ac = a(b + c); \quad ab - ac = a(b - c)$$

4. Представьте многочлен в виде произведения: а) $xa + xb + 5a + 5b$; б) $c^5 + 3c^4 - c - 3$; в) $2(x-y)^2 - 7(y-x)$.
5. Разложите на множители: а) $a^2b - a - ab^2 + b - 2ab + 2$; б) $x^2 + 7x + 10$.
6. Решите уравнение: а) $(x+1)(x-2) + (2-x)(2x+1) = 0$; б) $p^2 - p - 6 = 0$.

Формулы сокращённого умножения

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b); \quad a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2);$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

7. Представьте квадрат двучлена в виде суммы: а) $(x+3)^2$; б) $(2x-5y)^2$.
8. Выделите квадрат суммы или разности: а) $25a^2 - 20ab + 4b^2$; б) $9c^4 + 1 + 6c^2$.
9. Решите уравнение: а) $x^2 - 14x + 49 = 0$; б) $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 17 = 0$.
10. Разложите на множители, используя формулу разности квадратов: а) $a^2 - 25$; б) $(x+2y)^2 - 4y^2$; в) $x^2 - y^2 + 2y - 1$.
11. Упростите выражение: $(1-x)(x+1) + (x+2)^2 - 5$.
12. Решите уравнение: а) $x^2 - 10x + 25 = 0$; б) $x^2 - 10x + 24 = 0$.
13. Используя формулу суммы или разности кубов, упростите выражение: $x^3 + 7y^3 + (x-2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$.
14. Разложите на множители выражения: а) $125 - a^3$; б) $a^3 + 4a + b^3 + 4b$.

Деление многочленов и теорема Безу

$$P(x) : (x - a) = Q(x)(ост.\ R) \Rightarrow R = P(a),$$

$$\text{в частности, } P(x) \vdots (x - a) \Leftrightarrow P(a) = 0$$

15. Выполните деление натуральных чисел с остатком: а) $235 : 8$; б) $5005 : 55$.
16. Выполните деление многочленов с остатком:
    а) $(x^2 - 5x - 6) : (x + 5)$;
    б) $(x^3 + 4x^2 - x + 15) : (x^2 - 2x + 3)$;
    в) $(16x^4 - 25) : (4x^2 + 5)$.
17. Используя теорему Безу, разложите на множители выражения: а) $x^2 - 3x + 2$; б) $5x^2 - x - 18$; в) $2t^3 + 5t^2 - 3t - 4$.
18. Сократите дробь: $\dfrac{2x^2 - 3x - 5}{3x^2 - 2x - 5}$.
19. Докажите формулы:
    а) $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + y^{n-1})$;
    б) $x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots + y^{n-1})$, где n — нечётное.

Занятие 23 Многочлены и диофантовы уравнения

Действия с многочленами

1. Представьте в виде произведения: а) $a^4 - 2a^3 + a^2 - 1$; б) $a^4 - a^3 - a - 1$.
2. Решите уравнение: а) $x^2 - 9x + 14 = 0$; б) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$.
3. Сократите дробь: а) $\dfrac{a^4 + a^3 + a^2 + a + 1}{a^5 - 1}$; б) $\dfrac{x^2 + x - 1}{x^3 - 2x + 1}$; в) $\dfrac{y^3 - 5y + 2}{y^3 + 2y^2 - y}$.

4. Найдите:

а) наименьшее значение выражения $x^2 + 6x + 2015$;

б) наибольшее значение выражения $-2t^2 + 5t - 23$.

5. Докажите тождество: $(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{15}$.

6. Докажите «неравенство трёх квадратов»: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$. Когда в нём достигается равенство?

Диофантовы уравнения

7. Найдите все пары целых чисел x, y, являющиеся решением уравнения $x^2 + xy = 5$.

8. Решите уравнения в целых числах:

а) $xy - x - y + 1 = 4$;

б) $ab = a + b + 3$;

в) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 7$.

9. Найдите все варианты целых чисел x, y, удовлетворяющих уравнению:

а) $x^2 - y^2 = 31$;

б) $x^2 = 14 + y^2$;

в) $x^3 - 91 = y^3$.

10. Решите уравнения в целых числах:

а) $x^2 + y^2 = x + y + 2$;

б) $x^2 - xy + y^2 = x + y$.

11. Решите уравнение в целых неотрицательных числах: $3^m + 7 = 2^n$.

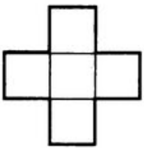
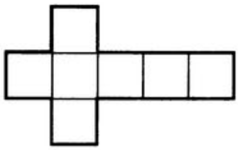
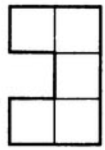
12. Сумма номеров всех домов квартала, расположенного вдоль улицы Дружбы, равна 235. Найдите номера домов, образующих этот квартал.

13. В целых числах решите систему уравнений:

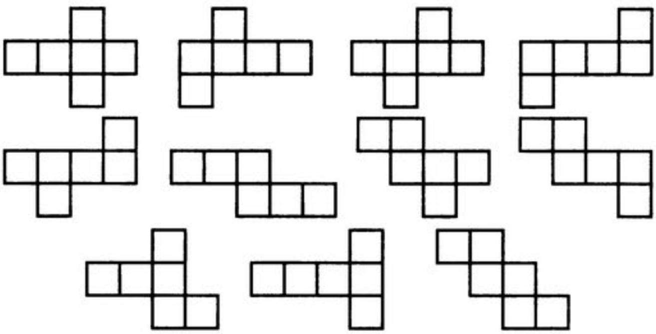
$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy - z^2 = 1. \end{cases}$$

Занятие
24 Многогранники, развертки, паркеты и замощения

1. Замостите плоскость без наложений и просветов: а) крестиками; б) крестами; в) скобками.

а) 
б) 
в) 

2. Покажите, как любой из 11 различных разверток куба можно замостить плоскость.



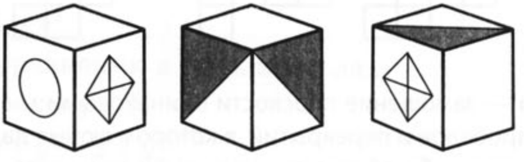
Паркет — замощение плоскости одинаковыми многоугольниками без пробелов и перекрытий, в котором любые два многоугольника имеют либо общую сторону, либо только общую вершину, либо вовсе не имеют общих точек.

3. (*Правильные паркеты*) При каких значениях p можно построить паркет из правильных p-угольников? Нарисуйте соответствующие замощения.

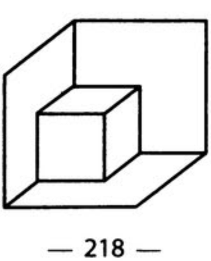
4. (*Архимедовы паркеты*) Постройте на плоскости паркет из: а) квадратов и правильных треугольников (2 способа); б) квадратов и правильных 8-угольников;

в) правильных треугольников и 6-угольников (2 способа), так, чтобы вокруг каждой вершины многоугольники располагались одинаковым образом.

5. Замостите плоскость одинаковыми: а) 5-угольниками; б) 7-угольниками; в) 9-угольниками.
6. Нарисуйте произвольный треугольник и покажите, как им замостить всю плоскость.
7. Можно ли произвольным четырёхугольником замостить плоскость?
8. Правильный треугольник, одна сторона которого отмечена, отражается симметрично относительно одной из своих сторон. Полученный треугольник в свою очередь отражается и т. д., пока на некотором шаге треугольник не придёт в первоначальное положение. Доказать, что при этом отмеченная сторона также займёт исходное положение.
9. Придумайте раскраску граней кубика, чтобы в трёх различных положениях он выглядел, как показано на рисунке. (Укажите, как раскрасить невидимые грани, или нарисуйте развёртку.)



10. Что изображено на рисунке: маленький куб в углу или большой куб с маленьким вырезом?



Занятие 25 Алгоритм Евклида и линейные диофантовы уравнения с двумя переменными

1. **Если $a > b$, то НОД(a;b) = НОД(b;$a-b$).** Докажите.
2. Найдите наибольший общий делитель чисел: а) 15 и 22; б) 44 и 28; в) $2n$ и $4n + 2$; г) $30n + 25$ и $20n + 15$.
3. Докажите, что дробь несократима ни при каком натуральном значении n: а) $\dfrac{12n+1}{30n+2}$; б) $\dfrac{14n+3}{21n+4}$.
4. Ряд чисел Фибоначчи 1;1;2;3;5;8;13;21;... определяется так: $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Докажите, что соседние члены ряда Фибоначчи — взаимно-простые числа.
5. **Если $a > b$, и $a : b = c$ (ост. r), причём $r \neq 0$, то НОД(a; b) = = НОД(b; r).** Докажите.
6. Найдите наибольший общий делитель чисел: а) 21 и 5; б) 195 и 34; в) 1071 и 462.
7. Используя алгоритм Евклида, найдите пару целых чисел x; y, удовлетворяющих уравнению: а) $21x + 5y = 1$; б) $195x + 34y = 1$; в) $1071x + 462y = 21$.
8. Докажите: а) ***теорему о разложении единицы***: для взаимно-простых целых чисел a; b найдутся целые числа x; y, такие, что $ax + by = 1$; б) для любых целых ненулевых чисел a; b найдутся целые числа x; y, такие, что $ax + by = НОД(a;b)$.
9. Решите в целых числах уравнения: а) $21x + 5y = 1$; б) $195x - 34y = 1$; в) $462x - 1071y = 42$.
10. Найдите все решения диофантового уравнения: а) $63x + 15y = 3$; б) $390x - 68y = 17$; в) $1990x + 173y = 11$.
11. Приведите примеры линейного диофантового уравнения с двумя переменными, которое: а) имеет бесконечно много решений; б) не имеет решений; в) имеет ровно одно решение.

12. Даны шаблоны углов 25° и 36°. Как построить угол в 1°?
13. Даны отрезки длиной 34 см и 21 см. Как построить отрезок длиной: а) 1 см; б) 5 см; в) 50 см?
14. Имеются контейнеры двух видов: по 190 кг и по 170 кг. Сколькими способами можно ими полностью загрузить машину грузоподъёмностью 3 т?

Алгоритм Евклида

Пусть даны два натуральных числа a и b, причём $a > b$. Тогда:

$$\begin{cases} a = bq_0 + r_1, & 0 < r_1 < b; \\ b = r_1q_1 + r_2, & 0 < r_2 < r_1; \\ r_1 = r_2q_2 + r_3, & 0 < r_3 < r_2; \\ \dots & \\ r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n, & 0 < r_n < r_{n-1}; \\ r_{n-1} = r_nq_n. & \end{cases} \Rightarrow \quad r_n = НОД(a;b).$$

Евклид
Александрийский
IV–III век до н.э.

Мухаммад ибн Мусса
аль-Хорезми
783–850 г.г. н.э.

Диофант
Александрийский
III век н.э.

Занятие 26 Алгоритм Евклида, линейные диофантовы уравнения и цепные дроби

1. Используя алгоритм Евклида, найдите НОД следующих чисел: а) 17 и 53; б) 119 и 165; в) 35; 91 и 5005; г) $2^{40} - 1$ и $2^{30} - 1$.
2. Решите уравнения в целых числах: а) $14x + 21y = 25$; б) $17x + 53y = 1$; в) $17x + 53y = 11$; г) $119x - 165y = 53$.
3. Решите диофантовы уравнения: а) $44a - 13b = 7$; б) $19p + 8q = 2015$.
4. Один мастер делает на длинной ленте от начала пометки синим карандашом через каждые 36 см, а другой — красным карандашом, тоже от начала, через каждые 25 см. Когда впервые синяя метка окажется на расстоянии 1 см от красной?
5. Решите уравнение $x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}} = \dfrac{10}{7}$: а) в натуральных числах; б) в целых числах.
6. Проверьте равенство: $\dfrac{40}{31} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}}}$ (разложение в цепную дробь $[1;3;2;4]$). Используя алгоритм Евклида, найдите НОД чисел 40 и 31. Найдите набор чисел $[q_0;q_1;q_2;q_3]$.
7. Представьте числа в виде цепных дробей. Проверьте полученный результат, используя алгоритм Евклида: а) $\dfrac{53}{17}$; б) $\dfrac{165}{119}$; в) $\dfrac{100}{63}$.
8. Решите в целых числах уравнение $12x + 15y + 20z = 181$.

9. Решите уравнение $2x + 3y + 5z = 11$:
а) в натуральных числах; б) в целых числах.
10. На одной из клеток бесконечной в обе стороны полоски шириной в одну клетку стоит фишка. За один ход она может перемещаться на m полей вправо и на n полей влево. При каких m и n она сможет за несколько ходов переместится в соседнюю справа клетку?
11. *(Старинная китайская задача)* Сколько можно купить на 100 монет петухов, кур и цыплят, если всего надо купить 100 птиц, причём петух стоит 5 монет, курица — 4, а 4 цыплёнка — одну монету?
12. На складе имеются гвозди, упакованные в ящики по 16 кг, 17 кг и 40 кг. Как кладовщику отпустить 140 кг гвоздей, не вскрывая ни одного ящика? Сколько у него есть способов это сделать?
13. Ряд чисел Фибоначчи 1;1;2;3;5;8;13;21;... определяется так: $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Докажите, что $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{1}}}}$, где количество дробных чёрточек равно $n - 1$.

Алгоритм Евклида

Пусть даны два натуральных числа $\boldsymbol{a}$ **и** $\boldsymbol{b}$, причём $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$. Тогда:

$$\begin{cases} a = bq_0 + r_1, & 0 < r_1 < b; \\ b = r_1q_1 + r_2, & 0 < r_2 < r_1; \\ r_1 = r_2q_2 + r_3, & 0 < r_3 < r_2; \\ \qquad \dots & \\ r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n, & 0 < r_n < r_{n-1}; \\ r_{n-1} = r_nq_n. & \end{cases} \Rightarrow \quad r_n = НОД(a;b)$$

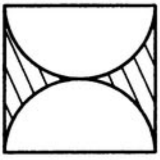
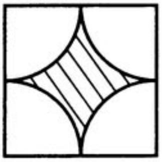
Разложение в цепную (непрерывную) дробь

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_n}}}} = [q_0; q_1; q_2; \ldots; q_n]$$

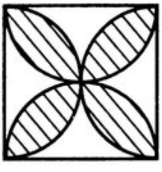
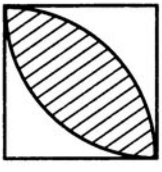
Занятие **27**

Длина окружности и площадь круга

1. Найдите длину окружности с диаметром 3 см.
2. Площадь круга равна 625π. Найдите её радиус.
3. Колёса автомобиля имеют диаметр 65 см. Он движется с такой скоростью, что колёса делают 6 оборотов в секунду. Найдите скорость автомобиля в километрах в час. Ответ округлите до целых.
4. Пользуясь данным рисунком, найдите площадь заштрихованной фигуры (сторона квадрата равна 8 см):

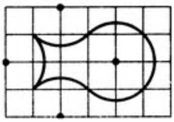
а)  б) 

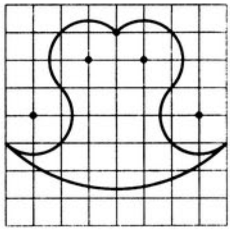
5. Используя формулу включений-исключений, найдите площадь заштрихованной на рисунке фигуры (сторона квадрата равна 8 см):

а)  б) 

6. Радиусы окружностей в стрелковой мишени равны 1, 2, 3, 4. Найдите площадь каждого из трёх колец мишени.

7. На сетке из квадратов, диагонали которых равны 1, изображены фигуры, состоящие из дуг окружностей с заданными центрами. Найдите их периметры.

а) 

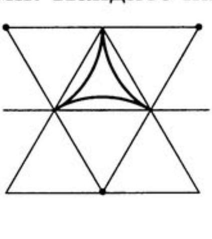
б) 

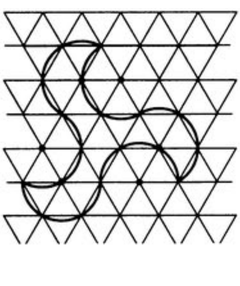
8. На сетке из квадратов, стороны которых равны 1, изображены фигуры, ограниченные дугами окружностей. Найдите их площади.

а) 

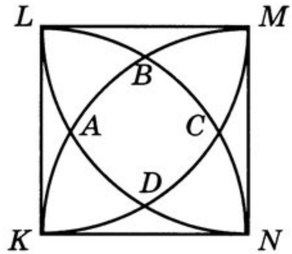
б) 

9. На сетке из равносторонних треугольников со стороной 1 изображены фигуры, состоящие из дуг окружностей с заданными центрами. Найдите их периметры.

а) 

б) 

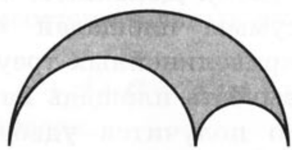
10. Сторона квадрата $KLMN$ равна a см. Каждая вершина этого квадрата является центром окружности радиуса a см. Найдите периметр криволинейного четырёхугольника $ABCD$.



11. Великий древнегреческий учёный Архимед открыл множество свойств фигуры ***арбелос*** (сапожный нож, см. рис. а). Фигура эта ограничена тремя полуокружностями, центры которых лежат на одной прямой (см. рисунок б). Найдите периметр арбелоса, у которого радиус большей из ограничивающих его полуокружностей равен R (рис. в).

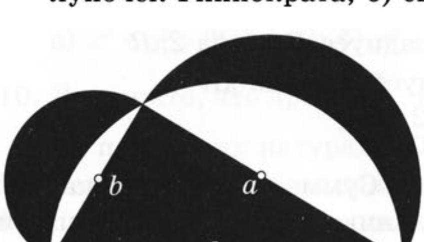
а) 

б)

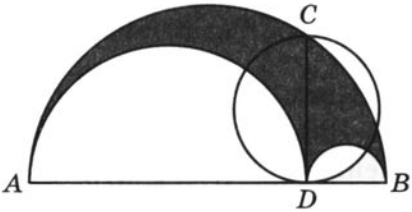


в)

12. Пользуясь теоремой Пифагора, докажите: а) свойство луночек Гиппократа; б) свойство площади арбелоса.



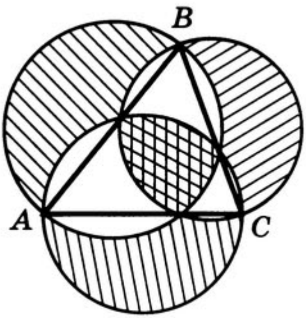
а) сумма площадей луночек, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади этого треугольника



б) площадь арбелоса равна площади круга с диаметром CD

13. Определите длины дуг, которые описывают в течение двух часов концы стрелок на здании Харьковского национального университета им. Каразина, если длина часовой стрелки равна 2,4 м, а длина минутной — 3,2 м.

14. На сторонах остроугольного треугольника как на диаметрах построены окружности (см. рисунок). Докажите, что если из суммы площадей «внешних» криволинейных треугольников вычесть площадь внутреннего, то получится удвоенная площадь исходного треугольника.



Немного теории

- Длина окружности радиуса R равна $2\pi R$
- Площадь круга радиуса R равна πR^2
- $\pi \approx 3{,}1415927$; $\pi \approx \dfrac{22}{7}$
- *(Теорема Пифагора)* Сумма квадратов катетов прямоугольного треугольника равна квадрату его гипотенузы

Занятие
28

Метод спуска и диофантовы уравнения

Пьер де Ферма́
1601—1665

1. Решите в целых числах уравнение: а) $9x^3 + 3y^3 = z^3$; б) $x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$.
2. Имеет ли уравнение $2x^4 + 4y^4 + 8z^4 = t^4$ решения в натуральных числах?
3. Существует ли четвёрка целых чисел, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, удовлетворяющая уравнению $3x^4 + 9y^4 + 27z^4 = t^4$?
4. Найдите все целочисленные решения уравнения $x^2 + y^2 = 3z^2$.
5. Докажите, что существует только одна тройка целых чисел, являющаяся решением уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = x^2y^2$.
6. Решите уравнение в целых неотрицательных числах: $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$.
7. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2xyzt$ не имеет решений в натуральных числах.
8. Найдите все целые решения уравнения $x^3 + 3y^3 + 9z^3 = 9xyz$.
9. Найдите все решения диофантового уравнения: а) $x^2 + y^2 = 3(z^2 + t^2)$; б) $x^2 + y^2 = 7(z^2 + t^2)$.
10. Докажите, что дробь $\dfrac{m^2}{2n^2}$ не принимает значение 2015 ни при каких натуральных m и n.
11. Решите уравнение в целых числах: $5x^3 + 11y^3 + 13z^3 = 0$.
12. Сколько решений в целых числах имеет уравнение $13x^3 + 1331y^3 + 31z^3 = 0$?

Занятие 29 Бином Ньютона — первое знакомство

1. Представьте в виде многочлена: а) $(x+y)^2$; б) $(x+y)^3$; в) $(a+b)^4$; г) $(x+1)^6$.
2. Возведите в степень двучлен: а) $(x+2)^3$; б) $(a^2+1)^5$; в) $(b+2)^4$.
3. Представьте в виде степени двучлена:
   а) $x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$;
   б) $x^3+15x^2+75x+125$; в) $1000+300y+30y^2+y^3$.
4. Упростите выражение: а) $(a+2b)^3-6b(a+b)^2$; б) $(a-1)^4+4(a-1)^3+6(a-1)^2+4(a-1)+1$.
5. Запишите в виде многочлена: а) $(x-y)^2$; б) $(x-1)^3$; в) $(a-2)^5$; г) $(b^2-2b)^4$.
6. Представьте в виде степени бинома: а) $x^2-6xy+9y^2$; б) $8x^3-12x^2+6x-1$.
7. Упростите выражение:
   а) $(d+1)^3+(d-1)^3$; б) $(a-2)^5+(a+2)^5$;
   в) $(c-1)^5-(c+1)^5$; г) $(x+1)^3-3(x+1)^2+3(x+1)-1$;
   д) $(b+2)^5-10(b+2)^4+40(b+2)^3-80(b+2)^2+80(b+2)-32$.
8. Докажите тождество: а) $(a+b)^4=a^4+b^4+4ab(a+b)^2-2a^2b^2$; б) $(x-1)^6-3(x-1)^4+3(x-1)^2-1=x^3(x-2)^3$.
9. Найдите в многочлене, тождественно равном $(x-1)^2+(x-1)^3+(x-1)^4+(x+1)^5$, коэффициент при: а) x^2; б) x^3.
10. Докажите, что значение выражения: а) 82^4-2 кратно 79; б) $141^{10}+88$ кратно 139; в) $2^{32}-9$ кратно 13.
11. Разложите на множители: а) $8x^3+y^3+6y^2+12y+8$; б) $2x^3+3x^2+3x+1$.
12. Упростите выражение и найдите его числовое значение:
    $64x^3-144x^2y+108xy^2-27y^3$ при $x=0{,}75$ и $y=1\frac{1}{3}$.
13. Используя формулу возведения двучлена в степень, докажите: а) количество способов выбрать несколько

предметов (может быть, и 0) из n различных предметов равно 2^n; б) количество способов выбрать чётное число предметов (может быть, и 0) из n различных предметов равно количеству способов выбрать из тех же n предметов нечётное их количество, и равно 2^{n-1}.

14. Докажите двумя способами, что: а) сумма всех элементов в n-ой строке треугольника Паскаля равна 2^n; б) количество подмножеств (включая пустое) в множестве из n элементов равно 2^n.
15. В треугольнике Паскаля количество способов добраться в данную ячейку из левой верхней равно числу в данной ячейке, если разрешено двигаться только вниз или вправо-вниз. Докажите.

Числа сочетаний (биномиальные коэффициенты)

Сочетанием из n элементов по k называется любой неупорядоченный набор из k элементов ($0 \le k \le n$), которые выбираются из данных различных n элементов.

Исаак Ньютон
1642 — 1727

Блез Паскаль
1623 — 1662

Формула числа сочетаний из n элементов по k:

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}, \text{ где } n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n;\ 1! = 1;\ 0! = 1.$$

Бином Ньютона

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1}y + C_n^2 x^{n-2}y^2 + C_n^3 x^{n-3}y^3 + \ldots + \\ + C_n^k x^{n-k}y^k + \ldots + C_n^{n-1}xy^{n-1} + C_n^n y^n$$

$$(x-y)^n = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1}y + C_n^2 x^{n-2}y^2 - C_n^3 x^{n-3}y^3 + \ldots + \\ +(-1)^k C_n^k x^{n-k}y^k + \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1}xy^{n-1} + (-1)^n C_n^n y^n$$

Арифметический треугольник (треугольник Паскаля)

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

a	b
	$a+b$

		k
		...
n	...	C_n^k

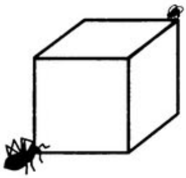
- $C_n^0 = C_n^n = 1$
- $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$
- $C_n^k = C_n^{n-k}$
- $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$

Занятие
30 Неравенство треугольника

1. В треугольнике длина одной стороны равна 3,8 см, второй — 0,6 см. Найдите длину третьей стороны,

если известно, что она составляет целое число сантиметров.

2. У треугольника, длины сторон которого — целые числа, длина одной стороны равна 5, а другой — 1. Чему равна длина третьей стороны?
3. На листе бумаги поставили 5 точек: A, B, C, D, E. Расстояние от A до B — 2 см, от B до C — 4 см, от C до D — 15 см, от D до E — 6 см, от E до A — 3 см. Найдите расстояние от E до B.
4. В противоположных вершинах куба сидят паук и муха. Каким кратчайшим путём паук может доползти до мухи по поверхности куба?

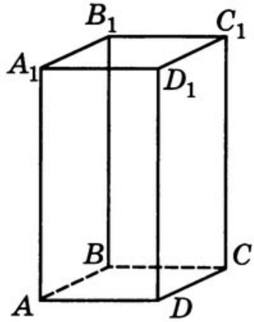


5. В стране 4 города: A, B, C, D. Два самолёта одновременно вылетели из города A и летели с одинаковыми скоростями по маршрутам: $A-B-D-C-A-D-B-C-A$ и $A-B-C-D-A-B-C-D-A-B-C-D-A$. Кто из самолётов раньше закончит свой маршрут, если скорости самолётов одинаковые, и суммарное время, проведённое ими в аэропортах, тоже одинаковое?
6. Дан четырёхугольник, диагонали которого пересекаются. Найдите внутри него точку, у которой сумма расстояний до всех вершин четырёхугольника минимальна.
7. Дан четырёхугольник, диагонали которого пересекаются. Докажите, что сумма длин диагоналей больше полупериметра и меньше периметра этого четырёхугольника.

8. Докажите, что длина медианы треугольника меньше полусуммы сторон, между которыми она проведена, и больше их полуразности.

9. Докажите, что сумма длин медиан треугольника не превосходит его периметра.

10. В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат со стороной, равной 4 см. Большее ребро параллелепипеда равно 15 см. Найдите кратчайшее расстояние по поверхности параллелепипеда от середины ребра BC до середины ребра A_1D_1. (19 см — неправильный ответ ☹)



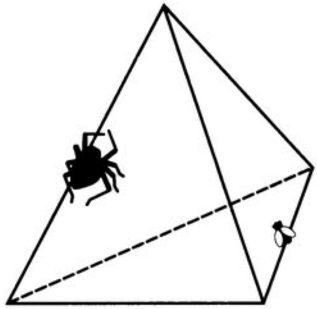
11. Грибник выходит из леса в заданной точке. Ему надо дойти до шоссе, которое представляет собой прямую линию, и зайти обратно в лес в другой заданной точке. Как ему это сделать, пройдя по самому короткому пути?

12. Полуостров представляет собой острый угол, внутри которого находится дом лесника. Как леснику, выйдя из дома, добраться до одного берега полуострова, затем до другого и вернуться домой, пройдя при этом по самому короткому пути?

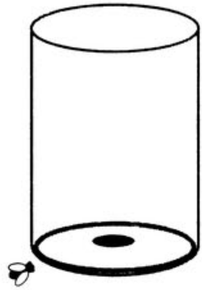
13. Другой лесник живёт на полуострове, который представляет собой прямой угол. Лесник выходит из дома, добирается до одного берега полуострова, затем до другого, и возвращается домой. Докажите, что он прошёл не меньше, чем удвоенное расстояние от своего дома до вершины прямого угла между берегами полуострова.

14. Паук сидит на середине ребра молочного пакета в виде правильного тетраэдра. Как ему по поверхности

пакета добраться быстрее всего до середины противоположного ребра, где сидит муха? Скорость паука считаем постоянной.



15. Другая муха сидит на внешней поверхности цилиндрического стакана. Ей нужно перебраться в другую точку на внутренней поверхности стакана. Найдите кратчайший путь мухи (рассмотрите различные варианты начального и конечного её положений).



16. Две деревни находятся по разные стороны от реки, берега которой — параллельные прямые. В каком месте реки нужно построить мост, перпендикулярный берегам так, чтобы длина пути из одной деревни в другую была наименьшей?

Неравенства треугольника

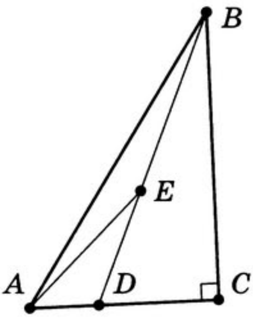
- Сумма двух сторон треугольника больше третьей его стороны.

- Разность двух сторон треугольника меньше его третьей стороны.

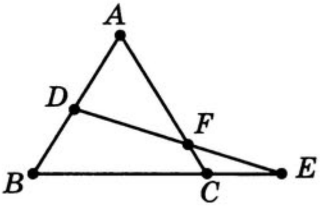
- Для любых трёх точек *A, B, C* верно неравенство: $AB + BC \geq AC$.

Занятие 31 Неравенства в треугольнике

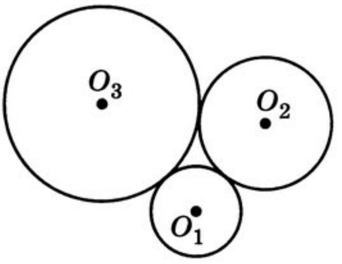
1. Может ли сторона треугольника составлять половину его периметра?
2. Докажите, что хорда окружности не больше диаметра, и равна диаметру только тогда, когда проходит через центр окружности.
3. В равнобедренном треугольнике одна сторона равна 16 см, а другая — 5 см. Найдите длину основания треугольника.
4. Докажите, что сумма высот треугольника меньше его периметра.
5. Докажите, что медиана BM треугольника ABC больше, чем $\dfrac{AB+BC-AC}{2}$.
6. Докажите, что *хорда треугольника* (отрезок, соединяющий любые две точки, лежащие на сторонах треугольника), не больше максимальной стороны.
7. Докажите, что *чевиана треугольника* (отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой на противолежащей стороне), меньше его полупериметра.
8. Может ли внутри треугольника лежать треугольник с периметром бо́льшим, чем у данного?
9. Точка X находится внутри треугольника ABC. Докажите, что $AX + BX < AC + BC$.
10. Точка X находится внутри треугольника ABC. Оцените сверху и снизу сумму $AX + BX + CX$ через периметр треугольника ABC.
11. На рисунке угол C — прямой, а D — произвольная точка стороны AC. Докажите, что $AB > AE$.



12. На рисунке $AB = AC$. Докажите, что $AF > AD$.



13. Три окружности с центрами O_1, O_2, O_3 разных радиусов $(r_1 < r_2 < r_3)$ попарно касаются внешним образом. Докажите, что $\angle O_2O_1O_3$ больше, чем $60°$.



14. Центры трёх непересекающихся кругов расположены на одной прямой. Докажите, что радиус окружности, касающейся всех трёх кругов, больше радиуса одного из них.

15. Докажите, что из отрезков с длинами a, b, c треугольник можно составить тогда и только тогда, когда найдутся такие положительные числа x, y, z, что $a = x + y$, $b = x + z$, $c = y + z$.

Неравенства в треугольнике

- Сумма двух сторон треугольника больше третьей его стороны.
- В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, и наоборот, против большего угла лежит большая сторона.
- Наибольшая сторона прямоугольного треугольника — это его гипотенуза.
- Наибольшая сторона тупоугольного треугольника лежит против тупого угла.

Краткий методический комментарий

5 класс

Занятие 1. Арифметика. Занятие для первого знакомства. Арифметические задачи и ребусы. Разряды числа в десятичной записи. Знакомство с римскими цифрами.

Занятие 2. Десятичная система счисления. Задачи о натуральных числах. Ребусы и уравнения на использование свойств десятичной системы счисления. Представленный материал избыточен, может служить либо основой для двух занятий, либо для решения части наиболее подходящих, по мнению преподавателя, заданий на одном занятии. Дополнительные задачи (№21, №23).

Занятие 3. Развитие комбинационных способностей. Разноплановые задачи на смекалку, комбинации различных логических и геометрических вариантов. Самая сложная и нестандартная задача — №8. Небольшое по объёму задание подобрано с учётом значительного времени, которое может понадобиться на разбор домашнего задания по занятию 2. Многие задачи можно оставить для домашнего самостоятельного разбора.

Занятие 4. Последовательности. Предлагается продолжить несколько последовательностей, в том числе классические: квадраты и кубы чисел, факториалы и бифакториалы, числа Фибоначчи и другие. Хотя задание «продолжить последовательность» далеко не однозначно с математической точки зрения, всё же исследование закономерностей и выдвижение гипотез для простых ситуаций вполне посильно и полезно пятиклассникам.

Занятие 5. Последовательности 2. Продолжение темы «последовательности». Здесь нужно найти математическую или логическую закономерность в построении последовательностей букв, слов или рисунков.

Занятие 6. Системы счисления. Знакомство с позиционными системами счисления. Двоичная и троичная системы и арифметические действия в них. Перевод из десятичной системы счисления и обратно. Использование систем счисления в задачах на взвешивания с гирями. Занятие предполагает небольшой рассказ преподавателя с демонстрацией примеров. Материал занятия избыточен, и предполагает выбор наиболее подходящих заданий преподавателем. Самая сложная и нестандартная задача — №13.

Занятие 7. Системы счисления 2. Является непосредственным продолжением темы «системы счисления». Позиционные системы счисления. Уравновешенная троичная система счисления (удобно разобрать задачу №13 из предыдущего занятия). Шестнадцатеричная система счисления. Классическая римская нумерация (предполагается небольшой рассказ преподавателя с демонстрацией примеров).

Занятие 8. Переливания. Классические задачи на переливания и перекладывания. Преподавателю стоит показать аккуратную табличную запись решения таких задач.

Занятие 9. Чётность 1. Знакомство со свойствами и применением чётных и нечётных чисел. Идея чередования. Задание №1 является базовым, его стоит обсудить подробно: в группе послабее — на примерах, в группе посильнее — с доказательством, основанном на переместительном, сочетательном и распределительном свойствах действий с натуральными числами. Полезные обозначения для решения задач: ч (чётное число), н (нечётное число), $2n$ (произвольное чётное число), $2m+1$ (произвольное нечётное число).

Занятие 10. Чётность 2. Является непосредственным продолжением темы «чётность 1». Применение свойств чётных и нечётных чисел. Чередование. Разбиение на пары. Простейшие свойства шахматной раскраски и их применение.

Занятие 11. От чётности к инварианту. Продолжает идеи двух предыдущих занятий. Готовит учеников к понятию «инварианта» и его применению. Чётность как инвариант. Идея: при чередовании объектов двух видов их количества отличаются не более, чем на единицу.

Занятие 12. Сравнения и взвешивания. Классические задачи на сравнение масс при помощи двухчашечных весов без гирь. Задачи на использование стрелочных (или электронных) весов. Задачи на определение фальшивой монеты. Задачи на упорядочение предметов. Помимо самостоятельной ценности, занятие является небольшим перерывом в череде относительно сложных занятий на чётность и инвариант. Завершают цикл занятий на инвариант для пятиклассников следующие два занятия.

Занятие 13. Инвариант. Инвариант и идеи его применения. Инвариант «говорит нет». Приведение примеров для случая «нечто возможно» и доказательство при помощи инварианта, что «нечто невозможно». Занятие для пятиклассников идейно сложное, поэтому задач на инвариант предлагается немного. Для смены видов деятельности предусмотрены дополнительные задачи №№ 9—14.

Занятие 14. Инвариант и раскраски. Знакомство с классическими двухцветными раскрасками: шахматной, матрасной (в полоску), диагональной, крупношахматной (чередуются квадраты 2×2 двух цветов), матрасно-шахматной (один столбец покрашен в шахматную раскраску, один — целиком, один — в шахматную раскраску, один — целиком и т. д.) Предполагается небольшой рассказ преподавателя о классических двухцветных раскрасках и их применении с демонстрацией примеров. Приведение примеров для случая «нечто возможно» и доказательство при помощи раскраски, что «нечто невозможно». Дополнительная задача: №13.

Занятие 15. Переправы. Классические задачи о переправах с ограничениями. Преподавателю стоит показать аккуратную схематичную запись решения таких задач. Наиболее сложная и нестандартная задача, по идее решения примыкающая к задачам на переправы, — №9.

Занятие 16. Развитие комбинационных способностей 2. Серия заданий на комбинацию логических, арифметических и геометрических вариантов, создание примеров конструкций с требуемыми свойствами. В отдельных заданиях требуется доказать, что необходимая конструкция не существует. Наиболее сложные задачи: №1, №3, №4, №7, №9.

Занятие 17. Комбинаторика 1. Классические задачи на комбинаторные правила суммы и произведения. Разбиение задачи на случаи. Нахождение необходимых множителей. Применение степени. Количество необходимых вариантов равно разности количества всех вариантов и количества ненужных вариантов. Дерево случаев (преподаватель может разобрать решение задания №14, п. а).

Занятие 18. Комбинаторика 2. Является непосредственным продолжением темы «комбинаторика 1». Применение факториалов. Перестановки с повторениями (без общих формул). Наиболее сложные задачи: №10, №11. Дополнительные задачи: №15, №16.

Занятие 19. Комбинаторика 3. Завершает цикл занятий по комбинаторике для пятиклассников. Основная цель — тренировка навыков по распознаванию различных типов классических комбинаторных задач, с применением суммы, произведения, степени, факториалов. Наиболее сложные задачи: №9, №11, №12. Дополнительные задачи: №№ 13—15.

Занятие 20. Математическая логика 1. Знакомство с математической логикой на примере задач Рэймонда М. Смаллиана о рыцарях и лжецах и им аналогичным. В каждой задаче требуется аккуратный разбор всех возможных случаев. Наиболее сложные и нестандартные задачи — №7 (б), №12, №17.

Занятие 21. Математическая логика 2. Продолжение серии задач о правдивых и ложных высказываниях, в том числе о персонажах книг Р. М. Смаллиана.

Занятие 22. Математическая логика 3. Завершает цикл занятий по математической логике для пятиклассников. Задачи об истинных и ложных высказываниях, в том числе из книги Р. М. Смаллиана «Принцесса или тигр». Наиболее сложная и нестандартная задача — №10.

Занятие 23. Повторяем школьную программу, иляи дроби 1. Классические задания на части и дроби, сравнение дробей. Основное свойство дроби. Во всех задачах есть возможность решения, не использующего приведение дробей к общему знаменателю. Дополнительные задачи: №№ 16—19.

Занятие 24. Развитие комбинационных способностей 3. Занятие продолжает цикл по развитию способностей к созданию и анализу нестандартной конструкции. В некоторых заданиях требуется доказать, что решение невозможно. Сравнительно небольшой объём задачного материала предполагает возможность детального обсуждения домашнего задания по занятию 23.

Занятие 25. Повторяем школьную программу, или дроби 2. Продолжение повторения темы «обыкновенные дроби». Удобно во многих задачах сопоставить арифметические и алгебраические решения. Наиболее сложные и нестандартные задачи: №8, №15. Дополнительная задача — №16.

Занятие 26. Геометрическая смесь 1. Набор задач для знакомства с треугольником, квадратом, прямоугольником, параллелограммом, кругом, прямоугольным параллелепипедом, кубом. Идеи: неравенство треугольника, симметрия, свойство Эйлеровых графов. Задачу №6 преподавателю целесообразно разобрать с учениками. Задачу №1 можно решить в простой версии (луг большой, колышек вбит в центр), а для домашнего задания предложить решить эту задачу без дополнительных ограничений (рассмотреть все возможные случаи).

Занятие 27. Геометрическая смесь 2. Периметры, площади, объёмы. Единицы измерения площадей и объёмов. Площадь треугольника. Медиана делит треугольник на два равновеликих. Аддитивность площадей и объёмов. Пропедевтика перед аккуратным изложением соответствующих разделов геометрии в школе.

Занятие 28. Математические игры. Представлены задачи на классические идеи стратегий в математических играх — дополнение (хода соперника), симметрия, исследование разных вариантов дебютов. Также приведены игры-шутки. Занятие можно легко приспособить как к личным, так и к командным соревнованиям. По каждой задаче полезно подводить краткие итоги: кто выигрывает при правильной стратегии, в чём она состоит, почему ведёт к выигрышу независимо от ходов соперника. Наиболее сложная и нестандартная задача — №13.

Занятие 29. Среднее арифметическое и средняя скорость. На примере первых четырёх задач удобно познакомить учеников с понятием средней скорости и его использования. Остальные задачи служат для возможности творческого применения понятия «среднее арифметическое». Полезно остановиться с учениками на сравнении средней скорости в первых трёх задачах со средним арифметическим скоростей на разных этапах пути. Наиболее сложные и нестандартные задачи: №8, №12, №15.

Занятие 30. Проценты 1. Задачи на повторение и творческое применение понятия «процент». Предлагаемый набор задач содержит как совсем простые упражнения, так и заслуживающие большего внимания сюжеты. На примере задач №8, №9 можно рассказать кратко о кругах Эйлера. Для задач №11, №12 целесообразно сравнить арифметические и алгебраические решения, обсудить с учениками аккуратное использование процентов от разных величин. Дополнительные задачи: №№13–15.

Занятие 31. Проценты 2. Является непосредственным продолжением темы «проценты 1». Содержит задачи на проценты от разных величин, сложные проценты, задачи на составление уравнений и неравенств. Наиболее сложные и нестандартные задачи: №№11–15. Дополнительные задачи: №№16–18.

6 класс

Занятие 1. Математическая солянка. Задания для математической разминки в начале учебного года. Ребусы, нестандартные конструкции, задачи на составление уравнений и перебор вариантов, логические задачи, проблема четырёх красок.

Занятие 2. Делимость 1. Признаки делимости на 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13. Свойства остатков при делении на 2^n, 5^n, 10^n, 3, 7, 9, 11, 13, 1001. Применение делимости к решению задач. Делимость чисел, записанных в десятичной системе счисления. В занятии представлены краткие теоретические сведения по всем используемым понятиям и фактам.

Занятие 3. Делимость 2. Непосредственное продолжение темы «делимость 1». Доказательства признаков делимости и свойств деления с остатком на некоторые числа. Задачи на использование свойств деления на 7, 11, 13, 1001. Сумма цифр и деление на 9. Дополнительная задача: №11.

Занятие 4. Делимость 3. Завершающее занятие для шестиклассников по делимости. Свойства деления с остатком. Общие делители и кратные. НОД, НОК и их применение для решения задач. Круги Эйлера, делители, НОД и НОК (предполагается короткий рассказ преподавателя с демонстрацией примеров применения кругов Эйлера для решения задач НОД и НОК).

Занятие 5. Метод доказательства «от противного». Классические базовые задачи для овладения методом доказательства «от противного». Предполагается короткий рассказ преподавателя с демонстрацией примеров применения метода и его аккуратной реализации. Подготовка к занятиям по теме «принцип Дирихле».

Занятие 6. Шифровки. Игровое знакомство с идеями шифрования и классическими шифрами. Азбука Морзе. Пляшущие человечки. Шифр Цезаря. Шифрующая таблица. Магический шифровальный квадрат. Частотный анализ. Шифровальный шаблон (вращение квадрата). Относительно небольшое по объёму задание подобрано с учётом времени, которое может понадобиться на разбор домашнего задания по занятию 5.

Занятие 7. Принцип Дирихле — первое знакомство. Знакомство с принципом Дирихле в простой формулировке («в одной из клеток окажется не менее двух кроликов»). Решение задач на применение принципа Дирихле. Выбор «кроликов» и «клеток». Предполагается короткий рассказ преподавателя с демонстрацией примеров применения принципа Дирихле и аккуратной записи решения. Худший случай. Нахождение максимума (минимума) — доказательство плюс пример. Решение заданий из занятия 5 другим способом. Наиболее сложные и нестандартные задачи: №7, №10, №12.

Занятие 8. Принцип Дирихле на шахматной доске. Классические задачи о размещении на шахматной доске наибольшего количества фигур, не бьющих друг друга: ладьи, короли, слоны, кони, ферзи, магараджи (ферзь + конь). Идея решения : «гипотеза, доказательство, пример». Наиболее сложная и нестандартная задача: №7.

Занятие 9. Обобщённый принцип Дирихле. Принцип Дирихле в общей формулировке. Задачи на применение принципа Дирихле. Задача Рамсея. Пропедевтика «графов с цветными рёбрами». Решение заданий из занятия 5 другим способом. Наиболее сложные и нестандартные задачи: №№9, 15—19.

Занятие 10. Математика: в шутку и всерьёз. Логические задачи с элементами математики. Задачи-шутки. Занятие служит своеобразной разминкой после относительно трудного блока занятий на доказательства. Задания для занятия подобраны несложные, с коротким решением, с учётом значительного времени, которое может понадобиться на разбор домашнего задания по занятию 9. Значительную часть задач можно оставить для домашнего самостоятельного разбора.

Занятие 11. Арифметическая прогрессия. Первое знакомство с арифметической прогрессией. Задачи на применение прогрессий. Свойства арифметической прогрессии. Метод Гаусса. Сумма арифметической прогрессии. Суммирование первых нескольких чётных (нечётных) натуральных чисел. Пропедевтика школьного материала по прогрессиям.

Занятие 12. Квадраты и прямоугольники. Периметр и площадь прямоугольника и квадрата. Разбиение прямоугольника на квадраты. Составление уравнений в задачах о прямоугольниках и квадратах. Наиболее сложные и нестандартные задачи: №№9—12.

Занятие 13. Последние цифры, остатки и циклы. Задачи на нахождение последних цифр чисел. Идея выделения цикла. Задачи о степенях натуральных чисел. Перевод обыкновенной дроби в периодическую десятичную.

Занятие 14. Обратный ход. Задачи на решение «от конца к началу». Использование делимости, дробей, уравнений. Наиболее сложные и нестандартные задачи: №5; №13, №16.

Занятие 15. Повторяем школьную программу: дроби, пропорции, уравнения. Задачи на применение дробей и пропорций. Свойства пропорций. Прямо и обратно пропорциональные величины. Решение задач при помощи уравнений, в т.ч. с параметрами. Дополнительные задачи: №№14—16.

Занятие 16. Принцип крайнего 1. Знакомство с идеей решения задач путём выбора «крайнего элемента». Варианты «крайнего элемента»: наибольший, наименьший, самый левый, самый верхний и т.д. Выбор пары «крайних элементов»: два самых больших, два самых верхних, два наименее отличающиеся и т.д. С учётом относительной сложности материала для учеников в занятии подобрано всего 10 задач по теме. Наиболее сложные и нестандартные задачи: №7, №9, №10. Дополнительные задачи: №№ 11—18.

Занятие 17. Принцип крайнего 2. Непосредственное продолжение темы «принцип крайнего 1». Принцип крайнего в геометрических задачах. Наименьшее (наибольшее) расстояние, наименьший (наибольший) угол треугольника. Касающиеся круги. Наиболее сложные и нестандартные задачи: №№ 7, 10, 11, 13, 14. Дополнительные задачи: №№ 15—17.

Занятие 18. Интеллектуальная разминка. Необычные игровые задачи. Арифметические, логические, лингвистические игры. Занятие служит своеобразной разминкой после трудного блока заданий на доказательство и применение алгебраических приёмов, и может быть легко превращено в командное или личное соревнование. Небольшое по объёму задание подобрано с учётом значительного времени, которое может понадобиться на разбор домашнего задания по занятию 17.

Занятие 19. Взаимно-однозначное соответствие. Задачи на установление взаимно-однозначного соответствия между множеством объектов и их свойствами. Решение задач при помощи таблиц. Предполагается совместная работа над задачами всех учеников под руководством преподавателя. В таблицах удобно нумеровать шаги решения для их подробного (возможно, устного) обсуждения. Наиболее сложные и нестандартные задачи: №№ 8—10.

Занятие 20. Соответствия. Задачи, в которых соответствие между объектами и их свойствами не является взаимно-однозначным. Решение задач при помощи таблиц. Предполагается совместная работа над задачами всех учеников под руководством преподавателя. В таблицах удобно нумеровать шаги решения для их подробного обсуждения и записи. Наиболее сложная и нестандартная задача: №6.

Занятие 21. Комбинаторика — это просто! Факториалы, перестановки, размещения, сочетания. В занятии представлены краткие теоретические сведения по всем используемым понятиям и фактам. Классические задачи на применение основных формул комбинаторики в сочетании с правилами суммы и произведения. Занятие является продолжением темы «комбинаторика», начатой в занятиях 17—19 для 5 класса. Наиболее сложные и нестандартные задачи: №20, №21.

Занятие 22. Комбинаторика — это просто? Непосредственное продолжение темы «комбинаторика — это просто!». Более сложные задания на применение различных комбинаторных формул и приёмов. Наиболее сложные и нестандартные задачи: №10, №11, №12, №14, №16.

Занятие 23. Шахматные турниры. Решение задач о шахматных турнирах при помощи турнирных таблиц. Алгебра турниров. Предполагается совместная работа над задачами всех учеников под руководством преподавателя. В таблицах удобно нумеровать шаги решения для их подробного (возможно, устного) обсуждения. Наиболее сложные и нестандартные задачи: №3, №5, №6, №7.

Занятие 24. Футбольные турниры. Решение задач о футбольных турнирах при помощи турнирных таблиц. Алгебра турниров (старые и новые правила начисления очков в футбольных матчах). Предполагается совместная работа над задачами всех учеников под руководством преподавателя. В таблицах удобно нумеровать шаги решения для их подробного (возможно, устного) обсуждения. Наиболее сложные и нестандартные задачи: №5, №10, №11.

Занятие 25. Шары и перегородки. Решение задач о разделении одинаковых шаров по ящикам (непустым или с возможностью пустых ящиков). Сведение комбинаторных задач к задачам о ящиках и перегородках. Сочетания с повторениями. Наиболее сложные и нестандартные задачи: №№ 14—16.

Занятие 26. Повторяем школьную программу: модуль числа, уравнения, неравенства. Повторение и расширение школьной программы по теме «модуль числа». Свойства модуля, геометрическая интерпретация модуля. Графическое решение уравнений и неравенств с модулем. Геометрическая интерпретация модуля разности и её применение. Уравнения с «вложенными модулями». Решение уравнений и неравенств с суммой модулей при помощи геометрической интерпретации. Использование неравенства треугольника для чисел, неотрицательности модуля выражения.

Занятие 27. Повторяем школьную программу: уравнения и задачи. Уравнения и задачи на составление уравнений. Количество решений линейного уравнения. Уравнения и задачи с обыкновенными и десятичными дробями. Наиболее сложные и нестандартные задачи: №14, №15, №18. Дополнительные задачи: №№ 16, 17.

Занятие 28. Графы 1. Задачи на определение графа. Вершины и рёбра. Полный граф. Степень вершины. Чётные и нечётные вершины. Теорема о чётности числа нечётных вершин. Предполагается короткий рассказ преподавателя с демонстрацией примеров применения графов и теоремы о чётном количестве нечётных вершин.

Занятие 29. Графы 2. Непосредственное продолжение темы «графы 1». Более сложные задачи о графах. Связные и несвязные графы. Компоненты связности. Теорема Эйлера о свойстве графов, которые можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя по линии дважды. Предполагается короткий рассказ преподавателя с демонстрацией примеров применения компонент связности и теоремы Эйлера. Наиболее сложная и нестандартная задача: №4.

Занятие 30. Уникурсальные кривые и теорема Эйлера. Непосредственное продолжение темы «графы 2». Уникурсальные кривые. Возможность нарисовать подтверждается примером, невозможность доказывается при помощи теоремы Эйлера, методом «от противного». Две нечётные вершины в эйлеровом графе — старт и финиш маршрута. Наиболее сложные и нестандартные задачи: №6; №11.

Занятие 31. Математическая завалинка. Алгебраические софизмы. Математика в стихах. Логические задачи. Примеры необычных наборов целых и дробных чисел. Занятие служит для интеллектуальной разминки после относительно сложного блока занятий. Не смотря на это, содержит в доступной форме несколько важных математических идей.

7 класс

Занятие 1. Поиск выигрышных позиций в математических играх — анализ с конца. Задачи об играх двух соперников. Исследование выигрышных и проигрышных позиций. Анализ игры «с конца». Нахождение выигрышной стратегии для одного из соперников. Наиболее сложные и нестандартные задачи: №12, №14, №15, №16, №18. Представленный материал избыточен, может служить либо основой для двух занятий, либо для решения части наиболее подходящих, по мнению преподавателя, заданий на одном занятии.

Занятие 2. Классические текстовые задачи. Классические школьные задачи на составление уравнений. Математические сюжеты: движение, задачи на пропорции, задачи с процентами, пропорциональное деление чисел, «было...стало». Все задачи подобраны так, чтобы их можно было решить с использованием уравнения с одной переменной. Наиболее сложные и нестандартные задачи: №5, №8, №12, №13, №14.

Занятие 3. Линейные уравнения. Линейные уравнения. Уравнения, сводящиеся к линейным. Количество корней линейного уравнения. Линейные уравнения с параметром. Сложные уравнения, сводящиеся к линейным. Наиболее сложные и нестандартные задачи: №№13 — 15.

Занятие 4. Сравнение по модулю. Введение в классический раздел математики — сравнение по модулю (обобщённые остатки). Задачи на использование определения. Геометрический смысл сравнения по модулю (на координатной прямой). Связь остатка от деления натуральных чисел и сравнения чисел по модулю. Интуитивное применение свойств сравнений для решения задач о нахождении остатков при делении «больших» чисел. Задачи о простых числах. Предполагается короткий рассказ преподавателя с демонстрацией примеров применения сравнения по модулю. В занятии представлены краткие теоретические сведения по теме. Наиболее сложные и нестандартные задачи: №13, №14.

Занятие 5. Применение свойств сравнений. Непосредственное продолжение темы «сравнение по модулю». Задачи на доказательства свойств сравнений. Применение сравнений по модулю для нахождений остатков и решение задач о делимости. Сравнительно небольшое количество задач по основной теме связано с трудностями у многих учеников в её усвоении и успешном применении соответствующих приёмов. Дополнительные задачи: №№12—16.

Занятие 6. Удобные модули и диофантовы уравнения. Продолжение занятий №4, №5. Свойства остатков степеней при сравнении по модулям 3, 4, 5, 7, 9. Применение свойств остатков для решения задач о целых числах, в т.ч. диофантовых уравнений. Наиболее сложная и нестандартная задача: №17. Дополнительная задача: №18.

Занятие 7. Диофантовы уравнения. Уравнения в целых числах. Два основных метода решения — использование сравнения по модулю и перебор случаев. Важные свойства сравнений и «удобные» модули приведены в части «вспоминаем теорию». Наиболее сложные и нестандартные задачи: №№ 5—8, 17 (во всех заданиях этого блока указания приведены непосредственно после условий).

Занятие 8. Кривые второго порядка. Кривые второго порядка: круг, эллипс, парабола, гипербола. Их свойства и применение. Кривые второго порядка как огибающие. Кривые второго порядка как конические сечения. Практические задания по рисованию эллипса и получению эллипса, параболы и гиперболы в результате сгибаний листа бумаги (огибающие).

Занятие 9. Декартова система координат. Простейшие задания на координаты точек. График линейной функции. Знакомство с параллельностью и перпендикулярностью прямых в координатах. Симметрия в координатах. Графики классических функций: модуль, целая часть, дробная часть. Квадратичная и кубическая параболы, гипербола. Знакомство с графиками уравнений. Наиболее сложные и нестандартные задачи: №9, №10, №12.

Занятие 10. Преобразования графиков. Задания на параллельный перенос графиков. Применение преобразования «модуль функции». Графики суммы и разности модулей: метод интервалов, сложение графиков, построение по ключевым точкам. Предполагается рассказ преподавателя с демонстрацией примеров построения и преобразования графиков. Сравнительно небольшое количество задач по основной теме связано с трудностями у многих учеников в её усвоении и успешном применении соответствующих приёмов. Дополнительные задачи: №№ 11—14.

Занятие 11. Развитие математической культуры. Задачи на различные математические и логические идеи и методы, такие, как перебор, оценка, доказательство от противного и др. Занятие служит для интеллектуальной разминки после относительно сложного блока занятий. Небольшое по объёму задание подобрано с учётом значительного времени, которое может понадобиться на разбор домашнего задания по занятию 10. Наиболее сложные и нестандартные задачи: №6, №10.

Занятие 12. Графическое и аналитическое решение уравнений. Решение уравнение с модулями и параметрами. Использование свойств модулей, метода интервалов. Графическое решение уравнений с модулями. Дополнительные задачи: №№ 14—16.

Занятие 13. Инвариант-остаток. Занятие продолжает и развивает набор идей по использованию инварианта (занятия №9, №10, №11, №13 за 5 класс) и свойств сравнений по модулю. В качестве инварианта используется остаток от деления на некоторое число (в том числе при делении на 2 — чётность/нечётность). Некоторые более простые задачи полностью или частично взяты из занятий за 5 класс. Наиболее сложные и нестандартные задачи: №№ 15—16.

Занятие 14. Инвариант — раскраска. Занятие продолжает и развивает набор идей по использованию раскрасок (занятие №14 за 5 класс). Отдельно выделены задачи, для решения которых достаточно двухцветных раскрасок (шахматной, матрасной, диагональной, крупношахматной, матрасно-шахматной). Некоторые наиболее простые задачи полностью или частично взяты из занятия за 5 класс. Приведены несколько задач, для которых требуется раскраска в 3, 4 и т. д. цвета. Наиболее сложные и нестандартные задачи: №№13—15.

Занятие 15. Включения-исключения и дополнения. Знакомство с заданиями о множествах, кругами Эйлера, формулой включений-исключений, методом перехода к дополнению множества. Оценка количества элементов и приведение примеров. Наиболее сложные и нестандартные задачи: №№ 10—15.

Занятие 16. Геометрическая прогрессия — первое знакомство. Задачи на определение и свойство геометрической прогрессии. Сумма элементов геометрической прогрессии. Геометрическая прогрессия и системы счисления. Применение геометрической прогрессии для работы с обыкновенными и десятичными периодическими дробями. Пропедевтика школьного материала по прогрессиям.

Занятие 17. Числовые неравенства. Задачи на сравнение чисел: «что больше, а что меньше». Использование степеней и факториалов, их свойств. Применение формул сокращённого умножения к задачам на неравенства. Наиболее сложные и нестандартные задачи: №6, №№ 13—16.

Занятие 18. Правильные многогранники. Знакомство с правильными многогранниками, их свойствами и развёртками. Практические задания по склейке правильных многогранников из их развёрток. Задачи о кубе и прямоугольном параллелепипеде.

Занятие 19. Нестандартные текстовые задачи. Задачи на составление уравнений, неравенств и их систем. Использование диофантовых уравнений, действий с системами уравнений, сравнения по модулю. Наиболее сложные и нестандартные задачи: №№ 13—16.

Занятие 20. Немного поразрезаем вместе... Задачи о разрезании клетчатых фигур. Задачи о разрезании геометрических фигур. Использование раскрасок в задачах на разрезание. Небольшое по объёму задание подобрано с учётом значительного времени, которое может понадобиться на разбор домашнего задания по занятию 19. Наиболее сложные и нестандартные задачи: №№ 8—10.

Занятие 21. Сумма углов треугольника. Задачи на классическую школьную тему: от относительно простых, до достаточно сложных. Применение свойств медиан, биссектрис, высот, внешних углов, свойств и признаков равнобедренных треугольников. Сумма внутренних углов выпуклых многоугольников. Наиболее сложные и нестандартные задачи: №№ 15—18.

Занятие 22. Многочлены — плодотворные дебютные идеи. Арифметические действия с многочленами. Разложение на множители и упрощение целых выражений. Применение распределительного закона, метода группировки, формул сокращённого умножения. Решение нелинейных уравнений. Деление многочлéнов и теорема Безу (предполагается рассказ преподавателя о теореме Безу с демонстрацией примеров её применения).

Занятие 23. Многочлены и диофантовы уравнения. Непосредственное продолжение занятия «многочлены — плодотворные дебютные идеи». Задачи разбиты на два блока: 1) действия с многочленами и их применение; 2) использование действий с многочленами для решения диофантовых уравнений. Наиболее сложные и нестандартные задачи: №6, №9(в), №№ 10—13.

Занятие 24. Многогранники, развёртки, паркеты и замощения. Задачи, посвящённые паркетам и другим замощениям плоскости, в т. ч. развёртками куба. Творческие задачи на замощение плоскости произвольными треугольниками и четырёхугольниками. Наиболее сложные и нестандартные задачи : №№ 6—8. Дополнительные задачи: №№ 9, 10.

Занятие 25. Алгоритм Евклида и линейные диофантовы уравнения с двумя переменными. Алгоритм Евклида поиска НОД двух чисел и его применение. Решение линейных диофантовых уравнений с двумя переменными. Поиск частного решения (с использованием алгоритма Евклида). Поиск общего решения. Количество решений линейных диофантовых уравнений с двумя переменными.

Занятие 26. Алгоритм Евклида, линейные диофантовы уравнения и цепные дроби. Непосредственное продолжение занятия «алгоритм Евклида и линейные диофантовы уравнения с двумя переменными». Линейные диофантовы уравнения с двумя и тремя переменными, их решение и применение. Цепные дроби и их связь с алгоритмом Евклида. Наиболее сложные и нестандартные задачи: №5, №№ 8—13.

Занятие 27. Длина окружности и площадь круга. Задачи на длину окружности и её дуги, площадь круга и его частей. Пропедевтика школьного материала по длине окружности и площади круга. В занятии кратко приведена необходимая теория. Наиболее сложные и нестандартные задачи: №10, №12, №14.

Занятие 28. Метод спуска и диофантовы уравнения. Задачи на применение метода спуска (конечного или бесконечного). Идея сведения задачи к аналогичной. Применение свойств сравнений и «удобных модулей». Сравнительно небольшое количество предлагаемых в теме задач связано с трудностями у многих учеников в её усвоении и успешном применении соответствующих приёмов. Предполагается рассказ преподавателя о методе спуска с демонстрацией примеров его применения. Наиболее сложные и нестандартные задачи: №5, №11, №12.

Занятие 29. Бином Ньютона — первое знакомство. Бином Ньютона. Упрощение целых выражений и разложение их на множители. Применение бинома Ньютона к задачам на делимость. Треугольник Паскаля. Свойства биномиальных коэффициентов и треугольника Паскаля. Предполагается рассказ преподавателя о биноме Ньютона и треугольнике Паскаля с демонстрацией примеров их применения. Наиболее сложные и нестандартные задачи: №№ 13—15.

Занятие 30. Неравенство треугольника. Стандартные и нестандартные задачи на применение неравенства треугольника. Повторение и углубление школьной программы по геометрии. Использование неравенства треугольника вместе с дополнительными построениями. Метод симметрии. Пропедевтика стереометрии. Наиболее сложные и нестандартные задачи: №№ 10—16.

Занятие 31. Неравенства в треугольнике. Применение неравенства треугольника и «против большего угла лежит большая сторона, а против большей стороны лежит больший угол». Хорда и чевиана треугольника, их свойства. Оценки периметров многоугольников. В занятии кратко приведена необходимая теория. Наиболее сложные и нестандартные задачи : №№ 5—10, №№ 13—15.

Ответы, указания, решения[1]

5.1.1. 8. **5.1.6.** Определите сначала, где стоит цифра 0, затем — где стоит цифра 1. Теперь определите, где стоят цифры 8 и 9. **5.1.8.** Посчитайте, сколько различных букв используется в условии ребуса. **5.1.12.** 27. **5.1.13.** 301.

5.2.1. На страницы 1—9 пойдёт 9 цифр, на страницы 10—99 пойдёт $90 \cdot 2 = 180$ цифр, итого 189 цифр. Но это больше, чем 100 цифр. Значит, страниц с трёхзначными номерами не будет вовсе, а на страницы с двузначными номерами должно пойти $100 - 9 = 91$ цифра. Но 91 не делится нацело на 2. Значит, для нумерации страниц в книге не может быть использовано ровно 100 цифр. **5.2.5.** 450 и 45. **5.2.7.** Обозначим цифру единиц данного числа через x, тогда цифра десятков равна $3x$. Значит, по условию $\overline{3x\ x} - \overline{x\ 3x} = 36$, т.е. $(30x + x) - (10x + 3x) = 36$, откуда $18x = 36$; $x = 2$. Итак, искомое число равно 62. **5.2.10.** Обозначим данное трёхзначное число через x, тогда при приписывании к нему слева цифры 3 оно увеличится на 3000. Значит, по условию $9x = 3000 + x$, откуда $8x = 3000$, $x = 375$. Итак, искомое число равно 375. **5.2.20.** 666 руб.

5.3.1. Таня. **5.3.7.** Подумайте, где находится дверь для водителя, и учтите, что в России правостороннее движение. **5.3.8.** Проследите за первыми буквами в словах из условия задачи.

5.4.3. Найдите два объяснения данной последовательности. Подумайте, почему они приводят к одинаковому результату. **5.4.14.** Рассмотрите 1^1; 2^2; 3^3; 4^4;... **5.4.15.** Каждое следующее число описывает количество каждой из используемых в записи предыдущего числа цифр. **5.4.20.** Вспомните о единицах измерения длины.

5.5.3. Проследите за порядковыми номерами данных букв в русском алфавите. **5.5.7.** Вспомните о днях недели. **5.5.11.** Вспомните о нотах. **5.5.18.** Проследите за вторыми буквами данных четырёхбуквенных слов.

---

[1] Используется тройная нумерация задач: класс, занятие, задача. Например, **5.12.13.** означает 13 задача из занятия №12 за 5 класс.

5.6.5. Запишите числа из условия. Представьте, что это некоторые числа, записанные в двоичной системе счисления. Переведите их в десятичную систему. **5.6.7.** 15; 128. **5.6.8.** Один из возможных алгоритмов такой. Нужно попросить ведущего перевести загаданное число в двоичную систему, а затем спрашивать: Стоит ли 0 в разряде единиц? Стоит ли 0 в разряде двоек? Стоит ли 0 в разряде четвёрок? ... За 7 вопросов мы выясним все цифры в двоичной записи числа, а значит, легко найдём и само число. Например, если ведущий ответит да, да, нет, нет, нет, нет, да, то задуманное число равно $0111100_2 = 111100_2 = 60_{10}$. Попробуйте придумать другой алгоритм отгадывания задуманного числа.

5.7.1. в) 2202_3. **5.7.2.** в) $10\bar{1}1\bar{1}$. **5.7.4.** д) Цифры: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a (10), b (11), c (12), d (13), e (14), f (15). Разряды: 1, 16, 256, 4096, 65536, ... **5.7.11.** По условию, основание системы счисления равно q. Значит, $6q + 3 = 3q + 2q + 1 + 5 + 4$, при этом q не меньше семи. Решаем уравнение: $q = 7$ — соответствует условию. Итак, счёт вёлся в семеричной системе счисления. Тогда яблонь было $3 \cdot 7 = 21$, груш $2 \cdot 7 + 1 = 15$, слив 5, вишен 4.

5.8.1.

3 л	0	3	0	2	2	3
5 л	5	2	2	0	5	4

5.8.9.

Бочка	x	$x-9$	$x-9$	$x-4$	$x-4$	$x-13$	$x-13$	$x-8$
9-ведёрная	0	9	4	4	0	9	8	8
5-ведёрная	0	0	5	0	4	4	5	0

5.8.15. (22, 14, 12)→(8, 28, 12)→(8, 16, 24)→(16, 16, 16). **5.8.17.** 1) Переставляем 4, 7 : 1, 2, 6, 10, 3, 4, 7, 8, 9, 5. 2) Переставляем 6, 10 : 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 5, 6, 10. 3) Переставляем 5, 6 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Значит, требуемая перестановка возможна.

5.9.3. Все три числа не могут быть нечётными, иначе их сумма будет нечётной. Значит, одно из них точно чётно. Но тогда его произведение с двумя оставшимися будет чётным. **5.9.9.** За один ход меняется цвет поля, на котором стоит фишка. Значит, если фишка вначале стоит на чёрном поле, то после 1-го хода она будет стоять на белом, после 2-го — на чёрном, после 3-го — на белом, ..., после 15-го — будет стоять на белом поле. **5.9.13.** Независимо от ходов обоих игроков значение полученного выражения будет нечётным, и выиграет Костя.

5.10.2. Каждая доминошка закрывает ровно одну чёрную и ровно одну белую клетку. Значит, всего чёрных и белых клеток должно быть поровну, а это не так. **5.10.5.** Предположим, что утверждение задачи неверно. Пронумеруем всех детей по кругу числами 1, 2, 3, ..., 50. Тогда соседи у 2 — разного пола. Пусть 1 — мальчик (М), а 3 — девочка (Д). Поскольку соседи у 4 — тоже разного пола по предположению, то 5 — М. Поскольку соседи у 6 разного пола, то 7 — Д. Аналогично, 9 — М, 11 — Д, 13 — М, ..., 47 — Д, 49 — М. (Всего людей с нечётными номерами 25 — число нечётное, и они чередуются М-Д-М-Д.... Значит, последний из них — мальчик). Значит, у 50 оба соседа — мальчики. Противоречие. Аналогично разбирается случай, если 1 — Д. Значит, у кого-то из сидящих оба соседа одного пола. **5.10.13.** Всего пятёрок будет 8, в доминошках 5-0, 5-1, 5-2, 5-3, 5-4, 5-5, 5-6. Внутри цепочки они идут парами (по правилам домино). Значит, внутри цепочки пятёрок будет чётное количество (а именно 6), и на концах — тоже чётное количество (а именно 2). Значит, на втором конце цепочки тоже 5. **5.10.15.** а) нет; б) да; в) нет.

5.11.1. Количество стаканов, стоящих дном вверх, за один ход либо не меняется, либо меняется сразу на 2. Значит, если оно вначале было нечётным (7), то всегда будет оставаться нечётным (инвариант). Поэтому поставить все стаканы дном вниз не удастся (ведь тогда дном вверх будет стоять 0 стаканов — чётное число). **5.11.5.** При ходах верблюда сохраняется цвет поля, на котором тот стоит, а соседние клетки шахматной доски разного цвета. **5.11.6.** При данных ходах чередуются вершины куба и центры граней. Значит, их количества должны отличаться максимум на 1, что не так. Поэтому требуемый обход невозможен. **5.11.10.** Используйте «шахматную» раскраску. При этом получится 15 чёрных залов и 10 белых. При требуемом обходе чёрные и белые залы чередуются, поэтому их количества могут отличаться максимум на 1. Поэтому рыцарь сможет посетить не более, чем $10 + (10 + 1) = 21$ зал.

5.12.1. Известно, что 6 яблок и 3 груши весят столько, сколько 3 яблока и 5 груш. Уберём по 3 яблока и 3 груши. Получится, что 3 яблока весят как 2 груши. Значит, 3 яблока легче, чем 3 груши. Отсюда 1 яблоко легче, чем 1 груша. **5.12.6.** Разделим монеты на 3 группы по 3 монеты, и взвесим первую группу со второй. Если группы оказались в равновесии, то фальшивая монета находится в третьей группе. Если какая-то группа перевесила, то она и содержит фальшивую монету. Итак, после первого взвешивания мы установили группу из трёх монет, в которой находится фальшивая. Взвешиваем теперь между собой две монеты из этой группы. Если они в равновесии, то оставшаяся из этой группы — фальшивая. Если же нет, то более тяжёлая монета и есть фальшивая. **5.12.13.** Положите на весы одну монету из первого мешка и две из второго. **5.12.17.** Положите на весы 10000 монет из первого мешка, 1000 — из второго, 100 — из третьего, 10 из четвёртого, 1 — из пятого.

5.13.3. а) да; б) да; в) нет, поскольку остаток от количества голов змея при делении на 7 не меняется (инвариант), а числа 100 и 0 имеют разные остатки при делении на 7 (2 и 0 соответственно). **5.13.5.** *В*. **5.13.6.** а) нет; б) да; в) нет. **5.13.10.** (см. рис.)

*			*
		*	*
*		*	
	*		

К 5.13.10

5.14.1. Используйте «матрасную» раскраску. **5.14.4.** Используйте «матрасно-шахматную» раскраску. **5.14.11.** Раскрасим доску в два цвета шахматным образом (см. рис. 1). Тогда жук с чёрной клетки переползает на белую, а с белой — на чёрную. Но белых клеток 24, а чёрных 25. Значит, хотя бы одна чёрная клетка останется пустой. Пример, когда ровно одна клетка останется пустой, возможен (см. рис. 2).

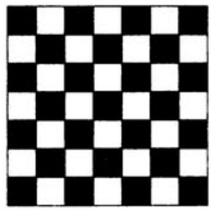


Рис. 1 к 5.14.11

На рис.2 жук из клетки 1 переползает в клетку 2, из клетки 2 — в клетку 3, ..., из клетки 48 — в клетку 49, а из клетки 49 — в клетку 36. Тогда клетка 1 останется пустой.

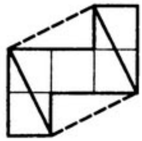
1	2	3	4	5	6	7
14	13	12	11	10	9	8
15	16	17	18	19	20	21
28	27	26	25	24	23	22
29	30	31	32	33	34	35
42	41	40	39	38	37	36
43	44	45	46	47	48	49

Рис. 2 к 5.14.11

5.15.1.

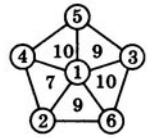
Кр., В., К., Кап., лодка	В., Кап.	Кр., В., Кап., лодка	Кап.	Кр., К., Кап., лодка	К.	Кр., К., лодка	-----
----	Кр., К., лодка	К.	Кр., В., К., лодка	В.	Кр., В., Кап., Лодка	В., Кап.	Кр., В., К., Кап., лодка

5.15.4. Вначале переходят папа и мама, папа с фонариком возвращается. Затем переходят бабушка и малыш, мама с фонариком возвращается. Затем переходят папа и мама. **5.15.9.** Подсказка: перчатки можно выворачивать и надевать одни перчатки на другие.



К 5.16.4

5.16.1. Ладьи на $a2$ и $b4$, слоны на $c1$ и $d1$, король на $d3$. **5.16.4.** (см. рис.). **5.16.10.** (см. рис.). **5.16.13.** Правильно.



К 5.16.10

5.17.3. 34. **5.17.6.** 120. **5.17.8.** 3612. **5.17.13.** 16. **5.17.16.** 2500. **5.17.18.** 86875.

5.18.3. 120. **5.18.7.** 120. **5.18.12.** 40320. **5.18.14.** 1260. **5.18.16.** Да.

5.19.3. 252. **5.19.8.** 45. **5.19.9.** 105. **5.19.12.** 35.

5.20.2. A — лжец, B — рыцарь, C — лжец. **5.20.6.** 1. **5.20.12.** а) Ровно 8 лжецов могло быть (см. рис. 1). б) Менее 8 лжецов быть не могло. Действительно, рассмотрим 8 выделенных не закрашенных зон на рис. 2. Если в какой-то из них нет лжеца, то у парламентария в этой зоне, отмеченного звёздочкой, все соседи рыцари. Но тогда он сам лжец, что противоречит нашему предположению. Значит, в каждой такой зоне есть лжец, поэтому лжецов не менее восьми. **5.20.17.** «Это моё утверждение ложно».

Р	Л	Р	Р	Р	Л	Р	Р
Р	Р	Р	Л	Р	Р	Р	Л
Л	Р	Р	Р	Л	Р	Р	Р
Р	Р	Л	Р	Р	Р	Л	Р

Рис.1 к 5.20.12

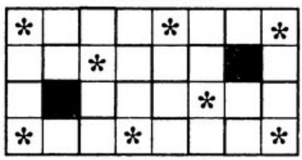


Рис.2 к 5.20.12

5.21.2. 6. **5.21.5.** Мартовский заяц. **5.21.9.** Четверг. **5.21.13.** Человек, который говорит про себя «я существую», наверняка говорит правду.

5.22.1. Во второй комнате. **5.22.7.** В первой комнате принцесса, а во второй тигр. **5.22.9.** Утверждение №99. **5.22.10.** В тетради или 0, или 1 истинное утверждение, однозначно по данным задачи определить невозможно.

5.23.3. Поровну (по одной чашке). **5.23.5.** Половина суммы, внесённой остальными, — это треть от общей суммы; треть от суммы, внесённой остальными, — это четверть от общей суммы;

и т. д. **5.23.12.** Первые две овцы за день съедают $1+\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}$ копны сена. Остальные овцы за день съедают $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)<$ $<\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)=1+\frac{3}{6}=1\frac{1}{2}$. Значит, копну сена быстрее съедят первые две овцы. **5.23.15.** Эту задачу удобно решать «с конца».

Рис. 1 к 5.24.11

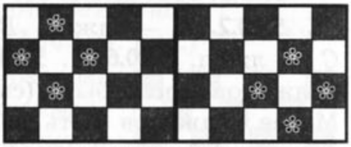


Рис. 2 к 5.24.11

5.24.1. Да, например 02.02.2020. **5.24.7.** В качестве слагаемых нужно взять пятьдесят двоек и одно число 11. **5.24.11.** а) Могут (см. рис. 1); б) Не могут. Разделим доску на две половинки 4×5. Слонов на полях одного из цветов (например, чёрного) не более трёх, из них на одной из половинок — не более одного. Отметим 4 чёрных поля на этой половинке (см. рис. 2). Слоны, стоящие на другой половинке поля, этих полей не бьют, а один слон с данной половинки все 4 отмеченные поля бить не может.

5.24.14. «Длины» можно перенумеровать числами, делящимися на 3 без остатка, «ширины» — числами, дающими при делении на 3 остаток 1, «высоты» — числами, дающими при делении на 3 остаток 2.

5.25.2. 36. **5.25.5.** 15 км/ч. **5.25.8.** Площадь уменьшится на $\frac{1}{36}$ часть. **5.25.15.** Так как все сыновья получили поровну, то $\frac{1}{8}$ часть каждого остатка была на 1000 рублей меньше $\frac{1}{8}$ части предыдущего остатка. Значит, весь новый остаток был на 8000 рублей меньше предыдущего. Так как все деньги были полностью поделены, то остаток после получения младшим нескольких тысяч стал равным нулю. Тогда предыдущий остаток был 8000 рублей. Из него предпоследний сын получил $\frac{1}{8}$ часть, а остальные 7000 получил младший брат. Поскольку первый получил 1000 рублей и $\frac{1}{8}$ остатка, второй — 2000 рублей и $\frac{1}{8}$ остатка, ..., младший — 7000 рублей и $\frac{1}{8}$ нулевого остатка, то всего сыновей было семеро. Значит, завещание было в семь раз больше доли каждого, т.е. 49000 рублей. Итак, было 7 сыновей, а завещание составляло 49000 рублей.

5.26.2. 4 м х 4 м. **5.26.3.** 5. **5.26.5.** Используйте развёртку куба. **5.26.8.** Залы, в которых нечётное число дверей, соответствуют началу и концу маршрута. **5.26.15.** На 2 дня.

5.27.1. 3 м 50 см. **5.27.5.** Вычтите из площади прямоугольника 6×8 площади трёх прямоугольных треугольников с катетами 4 и 6, 2 и 6, 2 и 8 соответственно. **5.27.6.** а) сравните высоты треугольников с площадями S и x, проведённые к равным сторонам. **5.27.9.** Найдите высоту данного бассейна. **5.27.13.** Используйте шахматную раскраску.

5.28.1. Ход соперника всегда можно дополнить до пяти. **5.28.4.** Если первый игрок пойдёт первым ходом пятёрку в центр, то легко выиграет уже при следующем своём ходе. **5.28.12.** В любом случае выигрывает второй игрок. Свои первым ходом он сможет разделить ромашку на две симметричные части. **5.28.15.** Пусть кот разделит монеты на две кучки, состоящие из a и b монет, причём $a \le b$. Тогда Алиса может разделить вторую кучку на две, содержащие 1 и $b-1$ монет, а первую — примерно поровну (т.е. на две части, которые отличаются не более, чем одной монетой). Тогда Алиса обеспечит себе не менее, чем b монет. Но $a \le b$, а всего монет 10. Значит, Алиса получит не менее пяти монет при такой стратегии. Предположим, Базилио разделит монеты на две равные кучки. Тогда при любом действии Алисы ей достанется пять монет, а остальные пять — коту. Итак, каждому достанется по 5 монет.

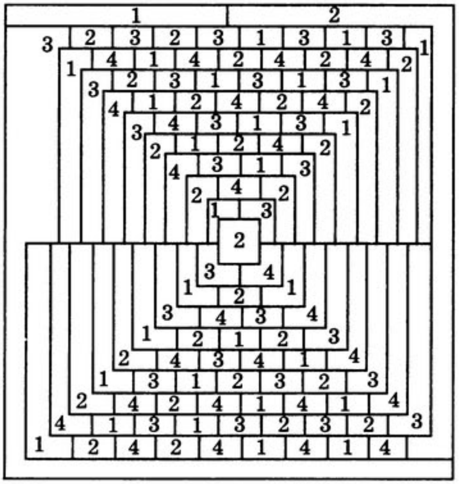
5.29.1. Пусть первую половину пути лошадь прошла за t часов, тогда половина пути — это $12t$ км. Тогда вторую половину пути лошадь прошла за время $12t : 4 = 3t$ часов. Поэтому её средняя скорость равна всему пути, делённому на всё потраченное время: $24t : (t + 3t) = 24 : 4 = 6$ км/ч. **5.29.6.** 32 года. **5.29.9.** Сеня — 20 копеек, Саша — 5 копеек. **5.29.12.** Сумма возрастов членов первой команды увеличилась на $12 \cdot 1 = 12$ недель, второй команды — на $12 \cdot 2 = 24$ недели, вместе — на 36 недель.

Значит, сумма возрастов третьей команды уменьшилась на 36 недель, и в ней было $36 : 4 = 9$ человек. **5.29.13.** 50°С.

5.30.5. 1000 самолётов. **5.30.8.** 60% . **5.30.11.** После снижения цены картофель стал стоить дешевле на 4% от исходной цены. **5.30.13.** 12.

5.31.1. На 20%. **5.31.5.** На 48,8%. **5.31.6.** Похудел на 2,8% от начальной массы. **5.31.9.** 50 кг. **5.31.13.** 1р. 50коп. **5.31.15.** На 70%.

6.1.1. Прямоугольнички, ограниченные нечётным числом звеньев сетки, — содержат начало и конец линии. **6.1.5.** Проследите за единицами измерения при умножении. **6.1.6.** Докажите, что среди множителей точно есть нуль. **6.1.13.** 17160. **6.1.16.** Предвидя действия Кащея, Иван мог выпить сначала воды из источника №1, а затем выпить воду, предложенную Кащеем, как противоядие. Таким образом, Иван остался жив. Подумайте, как ему удалось умертвить Кащея — какую воду он для этого мог ему предложить? **6.1.19.** (см. рис.).



К 6.1.19

6.2.1. Число 1180 не кратно трём. **6.2.4.** 2970; 6975. **6.2.5.** 9. **6.2.8.** Пусть купюр по 1000 анчуров будет a, по 100 анчуров — b, по 10 анчуров — c, по 1 анчуру — d. Тогда $1000a + 100b + 10c + d = 1000000$, а $a + b + c + d = 500000$. Вычитая из первого равенства второе, получим: $999a + 99b + 9c = 500000$. Но левая часть последнего равенства кратна девяти, а правая — нет. Значит, заплатить миллион анчуров, используя полмиллиона купюр, невозможно. **6.2.13.** Если квадрат натурального числа кратен трём, то он должен быть кратен и девяти.

6.3.7. Воспользуйтесь сначала делимостью на 4, а затем признаками делимости на 8 и на 7. **6.3.9.** Разложите число

105 в произведение трёх натуральных множителей всеми возможными способами, а затем выберите требуемый вариант. **6.3.11.** Даже если бы черепахи умели говорить, их высказывания могли бы быть ложными. **6.3.15.** Сравните остатки левой и правой частей равенства при делении на 9.

6.4.3. Если при делении на однозначное число в остатке получили 8, то делитель равен 9. **6.4.5.** Данное число после увеличения на единицу будет кратно числам 2, 3, 4, 5, 6. **6.4.12.** 65 мест в автобусе, 15 автобусов или 13 мест в микроавтобусе, 75 микроавтобусов. **6.4.14.** 7; 70 или 14; 35.

6.5.1. Решение можно начать так: «Пусть в доме не живут никакие два одноклассника. Тогда все ученики в этом доме из разных классов. Значит, классов в школе должно быть хотя бы 23», или так: «Пусть в доме не живут никакие два одноклассника. Тогда все ученики в этом доме из разных классов. Значит, учеников школы в доме живёт не более, чем 20». **6.5.6.** Пусть среди данных монет нет семи одного достоинства, тогда монет в 1, 2, 3, 5 пиастров будет не более, чем по 6 штук. Значит, всего монет будет не более, чем $6 \cdot 4 = 24$, но их по условию 25. Противоречие. Итак, монет какого-то достоинства будет хотя бы 7 (т.е. 7 или больше). При этом может оказаться, что никаких монет не будет ровно 7 (например, 1 монета в 1 пиастр, 2 монеты в 2 пиастра, 3 монеты в 3 пиастра, 19 монет в 5 пиастров). **6.5.16.** Для решения удобно разбить всех сидящих на 50 пар, причём в каждую входят двое людей, сидящих друг напротив друга.

6.6.1. А) Два плюс три. Б) Пять умножить на три. **6.6.2.** А) Пять минус два. Б) Сто плюс один. **6.6.3.** А) Четыре плюс два. Б) Семь умножить на восемь. В) Кто расшифровал тот молодец. **6.6.4.** А) Четыре минус три (таблица 4×4, два «ъ» в конце для маскировки). Б) Восемь минус пять (таблица 3×5, записывать в строки).

6.6.5.

7, т	12, с	1, д	**14, я**
2, в	13, п	**8, ь**	11, ю
16, ь	**3, а**	10, л	5, ц
9, п	6, а	15, т	4, д

А) Двадцать плюс пять

16, ь	3, с	2, е	13, в
5, ь	10, т	11, д	**8, с**
9, я	6, д	**7, е**	**12, е**
4, т	**15, т**	**14, я**	**1, ш**

Б) Шестьдесят девять

6.6.6. А) Продавайте соль по одному фертингу. Б) Дорогие папа и мама! У нас мороз сорок один градус! Кот Матроскин.

6.7.2. Пусть ёлки — это «кролики» (их 1000000), а варианты количества иголок на ёлке — «клетки» (их 600001 — на ёлке может быть 0 иголок, 1 иголка, 2 иголки, ..., 600000 иголок). Поскольку «кроликов» больше, чем «клеток», то, по принципу Дирихле, найдётся «клетка», в которой не менее двух «кроликов». Значит, найдётся не менее двух ёлок с одинаковым числом иголок. **6.7.5.** Шесть носков точно хватит. Действительно, если носки — кролики (их 6), а цвета — клетки (их 5), то, по принципу Дирихле, найдутся два кролика из одной клетки, т.е. 2 носка одного цвета. А пяти носков может не хватить (в худшем случае может оказаться 1 красный, 1 белый, 1 синий, 1 зелёный и 1 чёрный). Значит, наименьшее число носков, которое нужно вытащить вслепую, чтобы гарантировать два носка одного цвета, равно шести. **6.7.7.** Докажите сначала, что из чисел, записываемых единицами, у двух будет одинаковый остаток при делении на 2013. **6.7.9.** 4.

6.8.2. 16. **6.8.3.** 14. **6.8.4.** 32. **6.8.5.** 8. **6.8.6.** 4. **6.8.7.** 8.

6.9.1. Пусть ящики — это «кролики» (их 25), а сорта — это «клетки» (их 3). Поскольку $25 : 3 = 8$ (ост. 1), то, по обобщённому принципу Дирихле, в одной из «клеток» будет минимум $8 + 1 = 9$ «кроликов». Значит, найдётся, по крайней мере, 9 ящиков с яблоками одного сорта. **6.9.7.** Перевезенные футболисты — «кролики», команды — «клетки». **6.9.15.** Пусть компания состоит из A, B, C, D, E, F. Рассмотрим отношения A с остальными. Таких отношений — 5, и, по обобщённому принципу Дирихле, 3 из них однотипны (либо «дружба», либо «не дружба»). Пусть A дружит с B, C, D. Если кто-то из них дружит между собой (например, B и C), то будет трое дружащих: A, B, C. Если же среди B, C, D друзей нет, то будет трое не дружащих (B, C, D). Остальные случаи рассматриваются аналогично. **6.9.17.** Если все ученики дружат между собой, то у каждого будет 24 друга. Если же двое не дружат между собой, то хотя-бы у одного из них будет не менее 12 друзей. **6.9.18.** Нет. Если бы требуемая развозка была возможна, то, по обобщённому принципу Дирихле, на одной из машин было бы не менее восьми камней, а это минимум $370 + 372 + 374 + 376 + 378 + 380 + 382 + 384 = 3016$ кг.

6.10.1. Дать одному ребенку яблоко в корзине. **6.10.2.** 15 км/ч. **6.10.3.** 6. **6.10.4.** Завтракали дед, отец, внук. **6.10.5.** В одном кошельке лежит монета и кошелек с другой монетой. **6.10.6.** Перелить воду из второго стакана в пятый. **6.10.7.** Там нет стоп-кранов. **6.10.8.** Разыгрывать на обеих досках одну и ту же партию. **6.10.9.** Никогда. **6.10.10.** Вытащив один листик, порвать его, и попросить короля взглянуть на оставшийся. **6.10.11.** Одинаково. **6.10.12.** Профессор — женщина, сын отца — её брат, отец сына — её муж. **6.10.13.** Наша Таня громко плачет... **6.10.14.** Раскрыть 3 кольца из одной цепи и соединить с их помощью 4 оставшихся. **6.10.15.** За пять дней. **6.10.16.** Запятую. **6.10.17.** 15 ям. **6.10.18.** 19 999 999 999 900. **6.10.19.** 163. **6.10.20.** Поровну, т.к. $Д = Д^{+} + Д^{-} = Д^{+} + М^{+} = У^{+}$. **6.10.21.** В воскресенье. **6.10.22.** а) 45; б) 36. **6.10.23.** 1. **6.10.24.** Нужно переложить крайнюю спичку так, чтобы та, что была в середине, перестала быть средней. **6.10.25.** Вертикально вверх. **6.10.26.** 8; 10; 10. **6.10.27.** Большой зелёный подземный камнеед ☺☺☺. **6.10.28.** Ковбой икал.

6.11.2. 67. **6.11.9.** $\frac{1}{2}; \frac{11}{24}; \frac{10}{24}; \frac{9}{24}; \frac{1}{3}$. **6.11.19.** 2027091. **6.11.21.** n^2.

6.12.1. 18 см. **6.12.3.** 7. **6.12.7.** Если Шарик отдаст Матроскину все свои кусочки, то он заплатит ему $(0,3 \cdot 0,5 + 0,03 \times \times 5 + 0,4 \cdot 2) \cdot 16000 = 17600\$$. Если Матроскин вернёт Шарику первый и третий из своих кусочков, то сумма возврата составит $(0,02 \cdot 3 + 2 \cdot 0,7) \cdot 12000 = 17520\$$. Значит, Шарик вернёт Матроскину долг в $17600 - 17520 = 80\$$, и сможет расплатиться. **6.12.9.** 21 квадрат; убрать можно: первую точку в верхней строке, первую точку во второй строке, вторую точку в третьей строке, четвёртую точку в четвёртой строке, шестую точку в четвёртой строке и вторую точку в пятой строке. **6.12.11.** Рассмотрите примыкание квадратов к самому маленькому квадрату. **6.12.12.** Нет.

6.13.1. 0. **6.13.8.** 2. **6.13.12.** Да; нет. **6.13.18.** Цикл из 6 действий робота соответствует цепочке: пищит — кивает — моргает — топает — хлопает — трещит, затем все повторяется. Но $40 = 6 \cdot 6 + 4$, значит, робот через 36 мин пищит, а через 40 мин — хлопает. **6.13.20.** Большой.

6.14.3. 150. **6.14.5.** Поскольку число и его сумма цифр дают при делении на 9 одинаковые остатки, то после первого, второго,

..., одиннадцатого вычитаний полученные результаты будут кратны девяти. Но натуральные числа из первой сотни, кратные девяти, имеют сумму цифр 9 (кроме числа 99 с суммой цифр 18). Поэтому цепочка результатов вычитаний, записанных в обратном порядке, имеет вид: $0 \xleftarrow{11} 9 \xleftarrow{10} 18 \xleftarrow{9} 27 \xleftarrow{8} 36 \xleftarrow{7} 45 \xleftarrow{6} 54 \xleftarrow{5} 63 \xleftarrow{4} 72 \xleftarrow{3} 81$. Если при втором вычитании тоже вычли 9, то тогда после первого вычитания получилось 90. Но такое вычитание невозможно. Если же при втором вычитании вычли 18, то после первого вычитания получилось 99. А это возможно для начальных чисел: 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, и только для них. **6.14.11.** Мама купила 27 яблок; справедливо дать Нине ещё 3 яблока, а Мише — 5 яблок. **6.14.13.** Пусть количество орехов равно x. Попробуем найти такое значение x, чтобы каждый из моряков имел бы перед собой одинаковое количество орехов: $\frac{4}{5}(x-1)=x$. Отсюда $x=-4$. Ясно, что такое число не годится по смыслу задачи. Но если прибавить число, кратное 5^6, то свойства остатков при делении на 5 сохранится. Наименьшее такое число орехов равно $-4+5^6=15621$. Количество орехов менялось так: $15621 \xrightarrow{1} 12496 \xrightarrow{2} 9996 \xrightarrow{3} 7996 \xrightarrow{4} 6396 \xrightarrow{5} 5116 \xrightarrow{6} 4092$.

6.15.3. 5 дней и 20 часов. **6.15.5.** При любых равных a и b, кроме 0 и 3. **6.15.9.** Приведите дроби к общему знаменателю. Если полученная дробь равна 1, то числитель равен знаменателю. Отсюда числитель и знаменатель должны иметь одинаковую чётность. **6.15.11.** На 40 дней. **6.15.12.** 8 лошадей, 30 дней. **6.15.16.** Две соседних клетки одного цвета не могут находиться в одной части, а поэтому между ними проходит линия разреза.

6.16.1. Пусть требуемая расстановка возможна и число a — минимальное. Тогда $a \le b$. Но $a=b+c+e>b$. Противоречие. Значит, такая расстановка невозможна. **6.16.2.** Да. **6.16.5.** Пусть среди данных чисел есть различные. Рассмотрите два из них с минимальной положительной разностью. Их среднее арифметическое будет вдвое ближе к каждому из них, чем они сами друг к другу. **6.16.9.** Пусть расстояние между астероидами A и B — минимальное. Тогда астрономы с A и B наблюдают друг друга. Если за кем-то из них наблюдает астроном с астероида C, то тогда на 2011 оставшихся кроме A и B астероидов остаётся 2010 наблюдателей, и всё доказано. Если же за A и B больше никто не наблюдает, то задача сводится к аналогичной, но для меньшего на 2 числа астероидов. **6.16.17.** Фамилия одного из участников трапезы — Каждый.

6.17.4. Воспользуйтесь результатом задачи №1. **6.17.7.** Рассмотрите самую правую из всех самых верхних монет. **6.17.9.** 20 минут. **6.7.11.** Рассмотрим город A, *из которого* ведёт наибольшее число дорог (n дорог в города A_1, A_2, ..., A_n). Тогда из него можно добраться в любой город не более, чем с одной пересадкой. Действительно, пусть из него нельзя добраться таким образом в город B. Тогда *из города B* выходит дорога в A (иначе из A в B можно было бы добраться без пересадок). Также *из города B* выходят дороги в города A_1, A_2, ..., A_n (иначе из A в B можно было бы добраться с одной пересадкой — в одном из городов A_1, A_2, ..., A_n). Но получается, что *из города B* ведёт больше дорог, чем из A. Противоречие. **6.17.13.** $\frac{1}{2}$.

6.19.2. Молоко в кувшине, квас в банке, лимонад в бутылке, вода в стакане. **6.19.6.** Есть два варианта, удовлетворяющие условию задачи. **6.19.9.** Валентин не муж Лены (Лена танцевала не со своим мужем), не муж Наташи (Аня танцевала с мужем Наташи), не муж Ани (с мужем Ани танцевала Оля). Значит, Валентин — муж Оли. Владимир танцевал с женой Валентина, т.е. с Олей. Но Оля танцевала с мужем Ани. Значит, Владимир — муж Ани. Николай танцевал с женой Владимира, т.е. с Аней. Но Аня танцевала с мужем Наташи. Значит, Николай — муж Наташи. Алексей — муж Лены. Итак, пары муж-жена: Валентин — Оля, Владимир — Аня, Николай — Наташа, Алексей — Лена; танцевальные пары: Валентин — Лена, Николай — Аня, Владимир — Оля, Алексей — Наташа. **6.19.10.** Лодка «Шмель» принадлежала Виктору.

6.20.1. Салал — армянский, греческий; Абдул — армянский, персидский; Мохаммед — турецкий, греческий; Юсуф — персидский, греческий. **6.20.2.** Физик — французский, итальянский; историк — русский, итальянский; биолог — английский, французский; математик — английский, итальянский. **6.20.3.** Борисов и Васильев — майор и капитан артиллерии, Александров и Григорьев — лейтенанты танковых войск.

6.20.4. Джон — парикмахер и игрок в гольф; Дик — трубач и писатель; Роджер — водитель и инженер. **6.20.5.** Белая коробочка — красный и зеленый; черная коробочка — зеленый и синий; зеленая коробочка — белый и синий; синяя коробочка — черный и красный; красная коробочка — белый и черный. **6.20.6.** Иван — персики, яблоки, вишня, розы. Александр — вишня, лук, розы, тюльпаны. Павел — морковь, тыква, лук, розы. Пётр — астры, розы, тюльпаны, лилии. Алексей — персики, орехи, тыква, петрушка.

6.21.6. $7! = 5040$. **6.21.7.** $7! : 7 = 720$. **6.21.8.** $7! : 7 : 2 = 360$. **6.21.9.** $A_5^3 = 60$. **6.21.15.** $C_5^3 = 10$. **6.21.20.** $C_{10}^5 : 2 = 126$.

6.22.4. $C_6^2 = 15$. **6.22.6.** *Первый способ.* Первого члена комиссии можно выбрать восемью способами, второго — шестью, третьего — четырьмя. Итого $8 \cdot 6 \cdot 4 = 192$ способа. При этом мы каждую комиссию посчитали столько раз, сколько можно троих человек поменять друг с другом местами, т.е. $3! = 6$ раз. Значит, возможных комиссий $192 : 6 = 32$. *Второй способ.* Три семейных пары, делегирующие своего представителя в комиссию, можно выбрать $C_4^3 = 4$ способами. В каждой из них делегируется либо муж, либо жена (2 способа). Итого: $C_4^3 \cdot 2^3 = 32$ способа составить комиссию. **6.22.10.** $C_{12}^4 \cdot C_8^4 \cdot C_4^4 : 3! = 5775$ способов. **6.22.13.** $4 \cdot C_5^2 \cdot 5^5 + 5 \cdot C_5^2 \cdot 5^5 = 281250$. **6.22.16.** $C_{10}^0 + C_{10}^1 + C_{10}^2 + \ldots + C_{10}^{10} = 1024 = 2^{10}$.

6.23.1. Шахматист E занял 1ое место с тремя очками, шахматист $Д$ занял 6ое место с двумя очками, а остальные разделили места со 2-го по 5-ое, набрав по 2,5 очка. **6.23.3.** Можно доказать, что шахматист, занявший второе место, набрал 6 очков. **6.23.5.** Если есть n игроков, то число матчей между ними будет равно $C_n^2 = n \cdot (n-1) : 2$. Например, последние три игрока сыграли между собой $3 \cdot 2 : 2 = 3$ матча. При каждом матче их суммарный счёт повышался на единицу, поэтому за счет игр между собой три последних игрока получили в сумме 3 очка. Каждый участник турнира, включая и саму последнюю троицу, получает половину своих очков от игры с последними тремя участниками. Значит, раз последние трое набрали в сумме 3 очка, играя между собой, они набрали вместе ещё 3 очка, играя с остальными участниками. Посмотрим теперь, сколько очков набрали остальные игроки, игравшие с последней троицей. Пусть полное число участников P. У нас есть две группы — последняя троица и $P - 3$ остальных. Между этими группами было сыграно $3 \cdot (P - 3)$ матчей. Действительно, для каждого такого матча мы сначала выбираем одного из трёх последних игроков, а потом $(P - 3)$ способами выбираем второго игрока. Раз было сыграно $3 \cdot (P - 3)$ матчей между этими группами, то их суммарный счет увеличился на $3 \cdot (P - 3)$. Однако мы уже выяснили, что из этого полного числа очков три очка "взяли" три последних участника. Значит, все остальные участники, играя с последними тремя, получили в сумме $3 \cdot (P - 3) - 3$ очка. Сама же последняя троица, играя между собой, получила ещё 3 очка. Итак, все P игроков, играя с последней троицей, получили $3(P - 3) - 3 + 3 = 3(P - 3)$ очка.

Полное число матчей (а значит и полное число очков), сыгранных на турнире с P участниками, составило $P(P - 1) : 2$. Но в точности половина этого числа, $P(P - 1) : 4$, получена в игре с последними тремя. Как мы видели, это число равно также $3(P - 3)$. Отсюда получаем уравнение $P(P - 1) : 4 = 3(P - 3)$. Значит, $P = 9$ или $P = 4$. Случай $P = 4$ не подходит, т.к первый участник в матчах с последними 3, набрал $3(4 - 3) - 3 = 0$ очков и не мог занять первое место. Итак, игроков было 9. Такая ситуация возможна: см. турнирную таблицу ниже.

	А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	Сумма
А		0	0	1	1	1	1	1	1	6
Б	1		0	0	1	1	1	1	1	6
В	1	1		0	0	1	1	1	1	6
Г	0	1	1		0	0	0	1	1	4
Д	0	0	1	1		0	1	0	1	4
Е	0	0	0	1	1		1	1	0	4
Ё	0	0	0	0	1	0		0,5	0,5	2
Ж	0	0	0	0	1	0	0,5		0,5	2
З	0	0	0	0	0	1	0,5	0,5		2

6.24.1. Можно однозначно определить, какая команда играла в каком туре, а после этого выяснить результат каждой игры.

6.24.2.	Динамо	Спартак	Труд	Шахтёр	Очки	Места
Динамо		0 : 0	1 : 0	1 : 0	5	2 : 0
Спартак	0 : 0		3 : 3	0 : 0	3	3 : 3
Труд	0 : 1	3 : 3		2 : 1	3	5 : 5
Шахтёр	0 : 1	0 : 0	1 : 2		1	1 : 3

6.24.5. Пусть команда «Заучки» забила команде «Киндер-сюрпризы» x голов, тогда остальные $60-x$ голов команда «Заучки» забила в ворота «Дровосеков». Но «Дровосеки» пропустили 80 голов, значит, остальные $20+x$ им забила команда «Киндер-сюрпризы». Поэтому «Киндер-сюрпризы» пропустили тоже не менее, чем $20+x$ голов. Из них x голов забила команда «Заучки». Значит, не менее 20 голов в ворота «Киндер-сюрпризов» забили «Дровосеки». Значит, в игре «Дровосеки» — «Киндер-сюрпризы» было забито не менее, чем $20+x+20$, т. е. не менее, чем 40 голов.

6.25.1. $C_9^5=126$. **6.25.2.** $C_{15}^5=3003$. **6.25.7.** Каждое слагаемое можно представить в виде суммы единиц. **6.25.8.** а) $C_{21}^9=293930$; б) $C_{17}^9=24310$; в) $C_{10}^8=45$. **6.25.14.** $\left(C_8^2\right)^2=784$. **6.25.16.** $C_8^5=56$.

6.26.5. е) нет корней; ж) $x=0$. **6.26.11.** Используйте результат задания №8. **6.26.12.** б) $x=0$; г) $x=1{,}5$.

6.27.9. Нужно рассмотреть два случая: поезда не доехали до встречи 35 км, или, разминувшись, проехали после встречи ещё 35 км. **6.27.13.** 125 км. **6.27.14.** 50 л, 40 л, 30 л. **6.27.16.** 13 столбцов. **6.27.18.** 60 км.

6.28.4. Да. **6.28.5.** Нет. **6.28.9.** Да. **6.28.10.** Нет. **6.28.12.** Рассмотрим тропинки между корытами. Всего их $C_{10}^2=45$. Но если каждый из 20 поросят перебегал не более двух раз, то тропинок было бы не более 40.

6.29.4. $57\cdot 3+5=176$. **6.29.8.** Если из Столицы нельзя добраться до города Дальний, то они находятся в разных компонентах связности. Но тогда в каждой из них будет ровно по одной нечётной вершине. **6.29.14.** Рассмотрите граф с четырьмя вершинами (два берега и два острова), в котором мосты играют роль рёбер. **6.29.17.** Начало и конец маршрута — залы №5 и №7.

6.30.1. Дядя Фёдор живёт в домике №5. **6.30.6.** 3 раза. **6.30.11.** Маршрут машины представляет собой граф, в котором перекрёстки — вершины, а части улиц между ними, — рёбра. Тогда в этом графе 8 нечётных вершин со степенью 3 каждая (см. рисунок 1). Рассмотрим часть маршрута машины до тех пор, пока рёбра в графе не повторяются. Это будет эйлеров граф, значит, в нём не более двух нечётных вершин. Рассмотри следующую часть маршрута машины, которая начинается с повтора какого-то ребра из первой части, до тех пор, пока рёбра во второй части не повторяются. Это снова будет эйлеров граф, и в нём не более двух нечётных вершин, и т.д. Каждая такая часть пути машины, в которой рёбра не повторяются, эйлеров граф, и в нём не более двух нечётных вершин. При объединении этих частей в один граф (весь маршрут машины) нечётных вершин должно стать 8, причём к каждой примыкает хотя бы одна нечётная вершина из какой-то части (иначе суммарное количество выходящих из этой вершины рёбер будет равно сумме чётных чисел, т. е. вершина будет чётной). Значит, эйлеровых графов (частей маршрута) минимум $8 : 2 = 4$, а «стыковок» между ними, т.е. повторяющихся рёбер, минимум 3. Таким образом, машина проедет минимум 24 ребра (все рёбра графа) и ещё 3, т. е. 27 рёбер по 100 м каждое. Итого, 2700 м. Такой маршрут существует — см. рисунок 2.

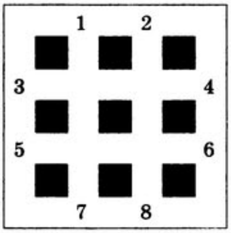


Рис. 1 к 6.30.11

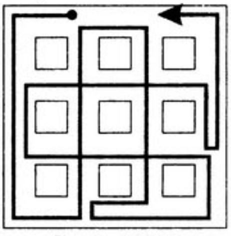


Рис. 2 к 6.30.11

6.31.4. Пик из племени тими, Пош — мимитик, Ил — мимон. **6.31.5.** Птиц — 2, животных — 5, жуков — 3. **6.31.6.** Верю: 0,5 и −1. **6.31.7.** Фрол Фомич. **6.31.8.** Пили — алмаз, Ели — топаз, Спали — медный таз. **6.31.9.** Все 9 — хоббиты. **6.31.10.** Найдутся, например 6, 10 и 15. **6.31.11.** Да, например, 1, 3, 2, −1, −3, −2. **6.31.12.** Да, например, 9! **6.31.13.** Например, $2{,}75 \cdot 8$ или $2{,}6 \cdot 5$.

7.1.1. Чтобы иметь возможность последним ходом гарантированно получить 40, предпоследним нужно получить 35. Чтобы иметь возможность гарантированно получить 35, нужно получить 30, и т.д. Значит, нужно получать выигрышные позиции $40 \xleftarrow{8} 35 \xleftarrow{7} 30 \xleftarrow{6} 25 \xleftarrow{5} 20 \xleftarrow{4} 15 \xleftarrow{3} 10 \xleftarrow{2} 5 \xleftarrow{1} 0$, дополняя ход соперника до пяти. Поскольку первый игрок не может сразу получить 5, то выигрывает второй игрок (через 8 ходов каждого). **7.1.2.** Чтобы иметь возможность последним ходом гарантированно получить 100, предпоследним нужно получить 89. Чтобы иметь возможность гарантированно получить 89, нужно получить 78, и т. д. Значит, нужно получать выигрышные позиции $100 \xleftarrow{10} 89 \xleftarrow{9} 78 \xleftarrow{8} 67 \xleftarrow{7} 56 \xleftarrow{6} 45 \xleftarrow{5} 34 \xleftarrow{4} 23 \xleftarrow{3} 12 \xleftarrow{2} 1 \xleftarrow{1}$, дополняя ход соперника до одиннадцати. Поскольку первый игрок может сразу получить 1, то он и выигрывает при правильной игре (через 10 своих ходов). **7.1.5.** Найдите все выигрышные позиции на поле в виде квадрата 9×9. Ход соответствует приближению к левому нижнему углу по горизонтали или вертикали. Выигрышная позиция — такова, что с неё любой ход соперника ведёт к проигрышу. Проигрышная позиция такова, что с неё соперник сможет пойти на выигрышную. **7.1.15.** Рассмотрите игру на прямоугольном поле 2015×3. Номер столбика обозначает текущее количество камней в кучке, номер строки — последний ход СОПЕРНИКА. Исследуя игру с конца, найдите все выигрышные позиции. **7.1.17.** Выигрышные позиции соответствуют числам, кратным трём. **7.1.18.** Выигрывает начинающий. Первый ход — отщёлкнуть квадрат 2×2.

7.2.1. 9 конфет, 3 конфеты. **7.2.2.** Куртка — 2 м, плащ — 3 м. **7.2.3.** 16 **7.2.4.** 90 км. **7.2.5.** 5 лет Наташе, 10 лет Васе. **7.2.6.** 9,2 флорина. **7.2.7.** Москва — 1147 год, Санкт-Петербург — 1703 год. **7.2.8.** 20% — 1,95 кг; 30% — 0,65 кг; 45% — 1,9 кг. **7.2.9.** 900 руб., 360 руб., 150 руб. **7.2.10.** Сера — 3 кг, селитра — 19,5 кг, уголь — 2,5 кг. **7.2.11.** Дунай — 2850 км, Днепр — 2250 км, Дон — 1950 км. **7.2.12.** Скрипачей — 20, виолончелистов — 8, трубачей — 4. **7.2.13.** 4/7, 8/21, 20/49. **7.2.14.** 498 руб.

7.3.5. Ответом является любое число. **7.3.6.** Решений нет. **7.3.9.** При $a = 5$ ответом является любое число, при $a \neq 5$ единственным ответом является $x = -1$. **7.3.13.** 9. **7.3.14.** $\frac{3}{4}$. **7.3.15.** $x = -1$.

7.4.13. Докажите, что данное выражение кратно трём и восьми. **7.4.14.** Докажите, что данное выражение делится без остатка на 3, 5, 8. **7.4.15.** Рассмотрите числа p, $p + 10$ и $p + 14$ по модулю 3.

7.5.1. $3^{2014} \equiv (3)^{671} \cdot 3 \equiv 27^{671} \cdot 3 \equiv (-1)^{671} \cdot 3 \equiv -3 \equiv 4 (\mathrm{mod} 7)$. **7.5.3.** Найдите остаток при делении данного выражения на 10. **7.5.9.** б) $ac - bd \equiv ac - bc + bc - bd \equiv c(a-b) + b(c-d) \equiv c \cdot 0 + b \cdot 0 \equiv 0 (\mathrm{mod} m)$. **7.5.16.** Фигуры на рисунках представляют собой не треугольник и такой же треугольник без одной клетки, как может показаться на первый взгляд. Первая фигура — это невыпуклый четырёхугольник, а вторая — выпуклый четырёхугольник без одной клетки.

7.6.7. Воспользуйтесь результатом №3. **7.6.10.** Воспользуйтесь результатом №6. **7.6.16.** Воспользуйтесь результатом №5. **7.6.17.** Поскольку квадраты чисел при делении на 3 дают остатки 0 и 1, то левая часть при делении на 3 должна дать остаток 0 или 1. Значит, одно из двух слагаемых кратно трём. Но 3 — простое число, значит, x или y кратно трём. Тогда их произведение кратно трём. Докажем, что оно кратно и четырём тоже. Если x и y кратны двум, то их произведение делится на 4. Если же оба нечётны, то их квадраты при делении на 4 дают остатки 1, значит, правая часть при делении на 4 даст остаток два, что невозможно (квадраты чисел при делении на 4 дают остатки 0 и 1). Если же одно чётно, а второе нечётно, то при делении на 8 квадрат нечётного числа даст в остатке 1, а чётного 0 или 4. Но правая часть при делении на 8 может дать только остатки 0, 1, 4. Значит, чётное слагаемое в левой части кратно восьми. Но тогда до возведения в квадрат оно было кратно четырём. Тогда произведение x и y кратно четырём и трём. Итак, оно делится нацело на 12.

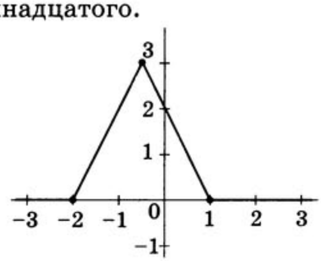
7.9.1. Рассмотрите остатки при делении левой и правой частей уравнения на 4. **7.9.12.** Очевидно, что $|x| \le 5$. Рассмотрите все возможные варианты для $|x|$: целые числа от 0 до 5. Для каждого из них решите получившееся уравнение для y в целых числах. **7.9.13.** По 13 орехов. **7.9.14.** $x = 1$; $y = 2$; $z = 3$. **7.9.15.** 14. **7.9.16.** Один — первое, два — второе и два — третье. **7.9.9.** Рассмотрите для каждого модуля случаи, при которых выражение под модулем неотрицательно, а также, когда это выражение отрицательно. **7.9.12.** Две прямые: $y = x$ и $y = -x$; одна точка — начало координат; две прямые: $y = x$ и $y = -x$; одна точка — начало координат.

7.10.11. Пусть каждый из внуков принёс по x грибов. Тогда они собрали $x - 2$, $x + 2$, $\frac{x}{2}$, $2x$ грибов. Составляем уравнение:

$(x-2)+(x+2)+\dfrac{x}{2}+2x=45$, откуда $x=10$. Значит, внуки получили 8, 12, 5 и 20 грибов, и каждый принёс домой по 10 грибов. **7.10.12.** Я (автор стихотворения). **7.10.13.** Мой сын (сын автора стихотворения). **7.10.14.** Десять простых чисел подряд быть не может, поскольку пять из них будут чётными. Но есть только одно чётное простое число — 2. Десять составных чисел подряд может быть, например, $11!+2$, $11!+3$, $11!+4$, ..., $11!+11$. Первое из них делится на 2, второе на 3, третье на 4, ..., одиннадцатое — на 10.

7.11.1. Предположим противное — при любой стратегии первый игрок проигрывает, т.е. у второго есть выигрышная стратегия. Тогда первый может пойти одним из коней и сразу же вернуть его на исходную позицию. Тогда начальная расстановка фигур не поменялась, но второй игрок теперь начинает и при правильной игре первого проигрывает по нашему предположению. Противоречие. Значит, при правильной игре первый не проиграет. **7.11.2.** Предположим противное. Тогда клеток каждого цвета минимум $0+1+2+...+14=105$, а всего минимум 315. Но их $15\cdot15=225$. Противоречие. **7.11.3.** Если пакетиков в коробке больше 20, то Саша выпил бы не меньше, чем $21\cdot2=42$ чашки. Если бы пакетиков было меньше 20, то Аня выпила бы не больше, чем $19\cdot3=57$ чашек. Значит, пакетиков могло быть только 20. Тогда Саша использовал $38:2+3:3=20$, а Аня тоже использовала $54:3+4:2=20$ пакетиков. Итак, в коробке было 20 пакетиков.**7.11.4.** Если НОД двух чисел не меньше, чем 50, то одно из них не меньше, чем 50, а другое не менее, чем трёхзначное. Значит, НОД двух двузначных чисел не больше, чем 49. Но если НОД $=49$, то только для чисел 49 и 98, т.к. меньшее из этих чисел не менее 49 и меньше 98. Поэтому данные числа 49 и 98. **7.11.5.** Если первая цифра числа равна a, то число не меньше, чем $100a$. Но произведение трёх его цифр не больше, чем $81a$. Противоречие. Значит, такого числа не существует. **7.11.6.** Обозначим цену Шалтая в копейках через Ш, а цену Болтая в копейках через Б. Тогда $125Б<175Ш<126Б$. 1) Из условия следует, что $5Б<7Ш$, $15Б<21Ш$, $15/7Б<3Ш$, $22/7Б<3Ш+1Б$. Поэтому достаточно доказать, что $22/7Б>100$, а для этого достаточно выполнения условия $Б \geq 32$. 2) Т.к. $125Б < 175Ш$, а 125 и 175 кратны 25, то $175Ш - 125Б \geq 25$. Далее, т.к. $175Ш < 126Б$, а 175 и 126 кратны 7, то $126Б - 175Ш \geq 7$. Значит, $Б = 126Б - 125Б \geq 25 + 7 = 32$. Итак, $Б \geq 32$, значит $3Ш + 1Б > 100$, ч.т.д. **7.11.7.** Пусть математиков и программистов за столом по x человек. Тогда ровно у x из всех сидящих правый сосед — программист. Значит, ровно x человек солгали. Но лжецов-математиков и лжецов-программистов поровну, значит, x — чётно. Но тогда общее число человек равно $2x$ и делится нацело на 4. **7.11.8.** Пусть цифры десятков и единиц числа с данным свойством равны соответственно x и y. Тогда $(x + y) + (x - y)^2 = 10x + y$, откуда $(x - y)^2 = 9x$. Значит, x — точный квадрат, т.е. равен 1, 4 или 9 (0 не может быть первой цифрой). Перебирая эти три варианта, находим, что при $x = 4$ решений нет, а при $x = 1$ и $x = 9$ искомые номера 14 и 90. Значит, во всей гостинице таких номеров всего два, и они уже заняты. Поэтому администратор не сможет выполнить пожелание Ильи. **7.11.9.** Каждая карточка оказывается на первом месте ровно 2 раза. Точно также по 2 раза каждая карточка окажется и на втором, и на третьем местах. Значит, в общую сумму каждая карточка входит $2000 + 200 + 2 = 20202$ раза. Поэтому искомое число равно $2989896 : 20202 - (79 + 23) = 46$. **7.11.10.** Составим пары: девочка и стоящий от неё справа мальчик. Ровно половина мальчиков останется вне пар. Если таких мальчиков x, то пар тоже x, а всего детей $3x$. Тогда $3x = 15$, $x = 5$. Значит, мальчиков 10, а девочек 5. Ответ: 10 мальчиков и 5 девочек. **7.11.11.** 33. **7.11.12.** У одиннадцатого.

7.12.4. а) Нет решений; б) 1;3; в) 0,5; 1,5; 2,5; 3,5; г) 0; 2; 4; д) −1; 5. **7.12.13.** При $x \leq -2$ $y = -x + 1 - x - 2 + 2x + 1 = 0$; при $-2 < x < -\frac{1}{2}$ $y = -x + 1 + x + 2 + 2x + 1 = 2x + 4$; при $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ $y = -x + 1 + x + 2 - 2x - 1 = -2x + 2$; при $x > 1$ $y = x - 1 + x + 2 - 2x - 1 = 0$. Значит, прямая $y = a$ пересечёт график функции: при



$a < 0$ или $a > 3$ 0 раз, при $a = 3$ 1 раз, при $0 < a < 3$ 2 раза, при $a = 0$ бесконечно много раз. **7.12.14.** Первое взвешивание: гири с надписями 1, 2, 3 кладём на одну чашу весов, а с надписью 6 — на другую. Если весы не в равновесии, то какая-то из табличек 1, 2, 3, 6 наклеена неправильно. Если же они в равновесии, то табличка 6 наклеена правильно, но внутри набора 1, 2, 3 таблички могут быть перепутаны. Второе взвешивание: гири с надписями 1 и 6 кладём на одну чашу весов, а с надписями 3 и 5 — на вторую. Вторая чаша перевесит лишь тогда, когда таблички перепутаны. **7.12.16.** Утверждение $x > 10$ неверно, так как иначе было бы три верных утверждения: $4x > 25$, $x > 10$ и $x > 5$. Значит, $x \le 10$. Но тогда утверждение $2x > 70$ неверно, а утверждение $x < 100$ верно.

7.13.4. При данных операциях количество белых зёрнышек в банке либо не меняется, либо уменьшается на 2. Значит, остаток при делении на 2 количества белых зёрнышек в банке не меняется — инвариант. Вначале этот остаток равен нулю (число 2014 — чётное), значит, и в конце он равен нулю. Если останется белое зёрнышко, то этот остаток равен 1, а если чёрное — 0. Значит, осталось чёрное зёрнышко. **7.13.6.** Количество кусков меняется на число, кратное одиннадцати. **7.13.9.** Нет. Рассмотрите в качестве инварианта остаток при делении на 3 от разности количеств серых и бурых хамелеонов. Для ситуации (13; 15; 17) он равен –2, а для ситуаций (45; 0; 0), (0; 45; 0) и (0; 0; 45) он равен 0. **7.13.12.** За один ход свой цвет меняют 16 клеток. Если x из них — чёрные, а $(16 - x)$ — белые, то после хода среди затронутых клеток чёрных станет $(16 - x)$. Тогда количество чёрных клеток во всей таблице 8×9 изменится на $(16 - x) - x = 16 - 2x$, т.е. на чётное число. Значит, остаток при делении на 2 количества чёрных клеток в таблице не меняется — инвариант. Вначале он равнялся 1, значит, в конце не может стать нулём (число $8 \cdot 9 = 72$ — чётное). **7.13.16.** Нет. Рассмотрите остаток при делении на 3 значения каждого из получающихся многочленов при $x = -1$.

7.14.10. Рассмотрим «матрасную» раскраску доски 9×9. При переползании по диагонали каждый жук меняет цвет клетки, на которой находится. Изначально было 45 чёрных и 36 белых (см. рис.1). Значит, на чёрные клетки переползут только те жуки, которые были на белых. Поэтому не менее, чем $45 - 36 = 9$ чёрных клеток останутся пустыми. Значит, и на всей доске останется минимум 9 незанятых клеток. Возможна ситуация, когда таких клеток ровно 9 (см. рис. 2; жуки, сидевшие на клетках с одинаковым названием, меняются местами).

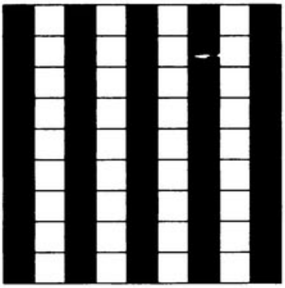


Рис. 1 к 7.14.10

1	а	**2**	й	**3**	ъ	**4**	ы	**5**
а	б	й	к	ъ	щ	ы	ь	э
б	в	к	л	щ	ш	ь	э	ю
в	г	л	м	ш	ц	ч	ю	я
г	д	м	н	ц	у	**6**	я	А
д	е	н	о	у	ф	х	А	Б
е	ж	о	у	ф	х	**7**	Б	В
ж	з	и	п	р	с	т	В	Г
з	и	п	р	с	т	**8**	Г	**9**

Рис. 2 к 7.14.10

7.14.12. 24. Используйте диагональную раскраску. **7.14.13.** Нет. Рассмотрим диагональную раскраску в три цвета, как указано на рисунке. Тогда цвета клеток при ходах дельфина будут чередоваться в такой последовательности: 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1... Поскольку клеток всего 64, то будет 22 «1», 21 «2» и 21 «3». Но на самом деле есть 21 «1», 22 «2», 21 «3». Значит, требуемый обход невозможен.

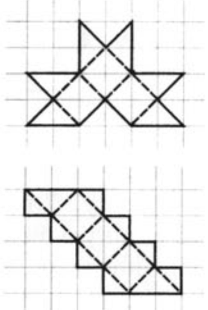
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2

7.15.1. 6. **7.15.2.** 2. **7.15.3.** 10. **7.15.4.** 94; 65. **7.15.6.** 11; 1; 3. **7.15.7.** 25. **7.15.8.** 467; 533; 266. **7.15.10.** 20%. **7.15.11.** 40. **7.15.12.** Философов, в 10 раз. **7.15.14.** Нет, т.к. $46 > 25 + 20$. **7.15.15.** От 4 до 7, все эти варианты возможны.

7.16.1. 48000 руб. **7.16.2.** 25625 руб. **7.16.3.** $60\frac{3}{4}$, $40\frac{1}{2}$, 27, 18, 12. **7.16.6.** 17305,6. **7.16.8.** 699,6 \$. **7.16.13.** –242. **7.16.15.** а) $\frac{1}{2}$; б) 1/9; в) 1; г) 8/11.

7.17.2. а) $2^3 < 10^1 \Rightarrow 2^{3000} < 10^{1000}$; б) $2^{10} > 10^3 \Rightarrow 2^{3000} > 10^{900}$. **7.17.7.** а) Да, например, для чисел $\underbrace{\frac{1}{101}, \frac{1}{101}, \ldots, \frac{1}{101}}_{101\text{ число}}$; б) Да, например, для чисел $\underbrace{1;-1;1;\ldots;-1;1}_{2017\text{ чисел}}$. **7.17.11.** Разделите обе части неравенства на 5^k и воспользуйтесь тем, что при $k=2$ неравенство из данной задачи превращается в равенство. **7.17.13.** Пусть число 2^{2015} содержит x цифр, а число 5^{2015} содержит y цифр. Поскольку натуральные степени 10 не являются натуральными степенями 2 или 5, то: $10^{x-1} < 2^{2015} < 10^x$, а $10^{y-1} < 5^{2015} < 10^y$. Перемножим два полученных неравенства и получим: $10^{x+y-2} < 10^{2015} < 10^{x+y}$, откуда $x+y-2 < 2015 < x+y$. Поэтому $x+y = 2016$. Значит, всего выписано 2016 цифр.

7.18.2. Для всех правильных многогранников $В + Г - Р = 2$ (Формула Эйлера, выполняется для всех выпуклых многогранников). **7.18.4.** Да (см. рис.). **7.18.6.** Да; нет (используйте шахматную раскраску в пространстве).



К7.18.4

7.19.1. 10 минут. **7.19.2.** 1 доллар 23 цента. **7.19.3.** 49 рублей 99 копеек. **7.19.4.** –40°. **7.19.5.** Корзина, рюкзак, чемодан, саквояж. **7.19.6.** 10; 2. **7.19.7.** 11 часов после выхода из А. **7.19.8.** 4; 6. **7.19.9.** 33. **7.19.10.** Лена. **7.19.12.** В 1,4 раза.

7.19.13.	Первый родник	Второй родник	Время
	y л	x л	1 час
Вначале	$\frac{2}{x}\cdot y$ л	2 л	$\frac{2}{x}$ часа
Затем	2 л	$\frac{2}{y}\cdot x$ л	$\frac{2}{y}$ часа

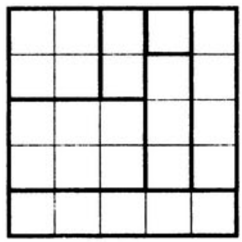
Поскольку пятилитровый кувшин наполнился до верху одновременно с четырёхлитровым, составляем уравнение: $\frac{2}{x}\cdot y + \frac{2}{y}\cdot x = 5$, откуда $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} = 2{,}5$. Пусть $\frac{x}{y} = t$, тогда $t + \frac{1}{t} = 2{,}5$, или же $t^2 - 2{,}5t + 1 = 0$. Имеем: $t^2 - 2t - 0{,}5t + 1 = 0$; $t(t-2) - 0{,}5(t-2) = 0$; $(t-2)(t-0{,}5) = 0$, т.е. $t = 2$ или $t = 0{,}5$. Значит, $\frac{x}{y} = 2$ или $\frac{x}{y} = 0{,}5$. При этом в любом случае выходит, что одна струя даёт в 2 раза больше воды, чем вторая, за 1 час. **7.19.14.** 4 часа. **7.19.15.** В 2,5 раза. **7.19.16.** Пусть в стаде было x овец, братья брали часть денег (10 пистолей или некоторое количество пистолей и нож) по y раз каждый, а нож стоил z пистолей. Тогда получаем диофантово уравнение: $x^2 = 20y - z$. Рассмотрим остатки левой и правой частей этого уравнения по модулю 20, учитывая, что нож стоит больше 0 и меньше 10 пистолей. Имеем равенство (см. рис.).

$$\left[\begin{array}{l}0\\1\\4\\9\\-4\\5\end{array}\right. \equiv \left[\begin{array}{l}-1\\-2\\-3\\-4\\-5\\-6\\-7\\-8\\-9\end{array}\right. \pmod{20}$$

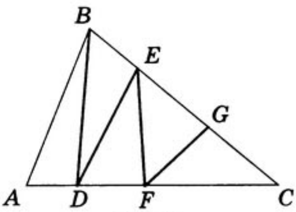
К 7.19.16

Единственный возможный вариант равенства по модулю 20 соответствует числу -4, т.е. случаю, когда нож стоит 4 пистоля.

7.20.4. См. рис. **7.20.8.** На рисунке площадь каждого из пяти «маленьких» треугольников равна $\frac{1}{5}$ площади треугольника ABC. **7.20.9.** Проведите разрезы через середины боковых сторон трапеции, перпендикулярно её основаниям. **7.20.10.** Используйте шахматную раскраску.



К 7.20.4



К 7.20.8

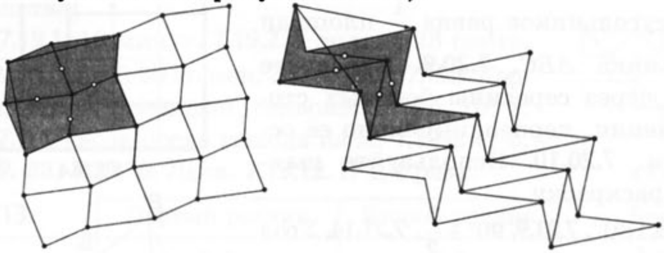
7.21.6. $180°$. **7.21.9.** $90° + \frac{\beta}{2}$. **7.21.14.** Угол между прямыми равен α для случая $\alpha \le 90°$, и $180° - \alpha$ для случая $\alpha > 90°$. **7.21.16.** Два решения: 80°, 80°, 20° и 40°, 40°, 100°. **7.21.17.** Два решения: 150° и 30°.

7.22.5. б) Представьте слагаемое $7x$ в виде суммы $5x + 2x$. **7.22.9.** Воспользуйтесь тождественным преобразованием $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 17 = (x-4)^2 + (y-1)^2$. **7.22.17.** б) По теореме Безу, $(5x^2 - x - 18) \,\vdots\, (x - 2)$, поскольку $5 \cdot 2^2 - 2 - 18 = 0$. **7.22.18.** Числитель и знаменатель дроби кратны $x - 1$.

7.23.2. Используйте метод группировки. **7.23.3.** Воспользуйтесь делением многочленов. **7.23.6.** Домножьте обе части равенства на

2 и выделите три квадрата разности. **7.23.8.** б) Преобразуем данное уравнение: $ab = a + b + 3$; $ab - a - b = 3$; $ab - a - b + 1 = 3 + 1$; $a(b - 1) - (b - 1) = 4$; $(a - 1)(b - 1) = 4$. Итак, произведение двух целых чисел равно 4. Это выполняется только в таких случаях: $2 \cdot 2 = 4 \cdot 1 = 1 \cdot 4 = -2 \cdot (-2) = -4 \cdot (-1) = -1 \cdot (-4) = 4$. Отсюда получаем набор ответов: (3;3), (5;2), (2;5), (–1;–1), (–3;0), (0;–3). **7.23.12.** Возможны два случая: квартал образует один дом №235 или пять домов с номерами 43, 45, 47, 49, 51. **7.23.13.** Поскольку $xy = z^2 + 1 \geq 1 > 0$, то целые числа x и y одного знака, но $x + y = 2 > 0$. Значит, обе переменные принимают целые положительные значения. Но тогда из равенства $x + y = 2$ следует, что $x = 1$, $y = 1$. Поэтому $z^2 = xy - 1 = 0$, и $z = 0$. Получаем единственное решение системы в целых числах: (1;1;0).

7.24.7. Да. Идею замощения см. рисунки (для выпуклых и невыпуклых четырёхугольников).



7.25.4. Из результата задания №1 и определения чисел Фибоначчи следует цепочка равенств для наибольших общих делителей: $(a_{n+2};a_{n+1}) = (a_{n+1};a_n) = \ldots = (8;5) = (5;3) = (3;2) = (2;1) = 1$. **7.25.9.** а) Пара чисел $(x_0;y_0) = (1;-4)$ явлется решение данного уравнения. Тогда уравнение $21x + 5y = 1$ равносильно системе $\begin{cases} 21x + 5y = 1, \\ 21x_0 + 5y_0 = 1 \end{cases}$. Вычитая из первой строки (данное уравнение) вторую (тождество), получим уравнение $21(x - x_0) + 5(y - y_0) = 0$, равносильное исходному. Поскольку числа 21 и 5 взаимно простые, то $(y - y_0)$ кратно 21, т.е. $y - y_0 = 21k$, где k — любое целое число. Отсюда $21(x - x_0) + 5(21k) = 0$, т.е. $x - x_0 = -5k$. Итак, $\begin{cases} x = x_0 - 5k \\ y = y_0 + 21k \end{cases}$. Окончательно получаем, что уравнение $21x + 5y = 1$ имеет в целых числах бесконечное количество решений, задаваемых формулами $\begin{cases} x = 1 - 5k \\ y = -4 + 21k \end{cases}$, где k — любое целое число.

7.26.1. г) Поскольку $(2^{4n} - 1) : (2^{3n} - 1) = 2^n(\textit{ост.}\ (2^n - 1))$, то из алгоритма Евклида получаем: $НОД(2^{4n} - 1,\ 2^{3n} - 1) = НОД(2^{3n} - 1,\ 2^n - 1)$. Из формулы разности кубов получаем, что $(2^{3n} - 1,\ 2^n - 1) = (2^n - 1)(2^{2n} + 2^n + 1)$, поэтому $НОД(2^{3n} - 1, 2^n - 1) = 2^n - 1$. Значит, $НОД(2^{40} - 1,\ 2^{30} - 1) = НОД(2^{30} - 1; 2^{10} - 1) = 2^{10} - 1 = 1023$. **7.26.12.** Пусть ящиков по 16 кг было x шт., по 17 кг — y шт., по 40 кг — z шт. Ясно, что числа x, y, z — целые и неотрицательные, причём $z \le 3$. При $z = 3$ имеем $16x + 17y = 20$ — решений в целых неотрицательных числах нет. При $z = 2$ имеем $16x + 17y = 60$ — линейное диофантово уравнение. Его решения в целых числах задаются формулами $x = -60 - 17k$, $y = 60 + 16k$, где k — любое целое число. Но x, y — числа неотрицательные, поэтому $k \le -4$, $k \ge -3$. Итак, решений в этом случае нет. При $z = 1$ имеем линейное диофантово уравнение $16x + 17y = 100$, решения которого в целых числах задаются формулами $x = -100 - 17k$, $y = 100 + 16k$, где k — любое целое число. Но x, y — числа неотрицательные, поэтому $k \le -6$, $k \ge -6$. Итак, $k = -6$, откуда $x = 2$, $y = 4$. При $z = 0$ аналогично получаем: $16x + 17y = 140$, $x = -140 - 17k$, $y = 140 + 16k$, $k \le -9$, $k \ge -8$ — решений нет. Итак, есть только один способ: 2 ящика по 16 кг, 4 ящика по 17 кг, 1 ящик по 40 кг. **7.26.13.** Примените к числам Фибоначчи алгоритм Евклида. Затем разложите $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ в цепную дробь. Наконец, замените $q_n = 2$ на $1 + \frac{1}{1}$.

7.27.5. а) $S = 4S_{\textit{полукруга}} - S_{\textit{квадрата}} = 2S_{\textit{круга}} - S_{\textit{квадрата}} = 2 \cdot \pi \cdot 4^2 - 8^2 = 32\pi - 64$ (см^2). **7.27.9.** Нужно учесть, что углы правильных треугольников равны по 60°. **7.27.10.** Треугольники NAM, KBN, LCK, LDM являются равносторонними со стороной, равной a. Поэтому их углы равны по 60°. Значит, по формуле включений-исключений $\angle ANB = \angle AMD = \angle DLC = \angle BKC = 60° + 60° - 90° = 30°$. Поэтому криволинейный четырёхугольник $ABCD$ состоит из четырёх одинаковых дуг окружности радиуса a, содержащих по $30°$. Поэтому его периметр равен $4 \cdot 2\pi a \cdot \frac{30}{360} = \frac{2\pi a}{3}$. **7.27.11.** $2\pi R$.

7.28.1. а) Пусть $(x_0; y_0; z_0)$ — тройка целочисленных решений данного уравнения. Поскольку $9x_0^3$ и $3y_0^3$ кратны 3, то и z_0^3 кратно 3. Но число 3 — простое, и поэтому z_0 кратно 3, т.е. $z_0 = 3z_1$, где z_1 — число целое. Получаем: $9x_0^3 + 3y_0^3 = 27z_1^3$, т.е. $3x_0^3 + y_0^3 = 9z_1^3$. Аналогично получаем, что y_0 кратно 3, т.е. $y_0 = 3y_1$, где y_1 — число целое. Значит, $3x_0^3 + 27y_1^3 = 9z_1^3$, т.е. $x_0^3 + 9y_1^3 = 3z_1^3$. Отсюда $x_0 = 3x_1$, где x_1 — целое число. Имеем: $27x_1^3 + 9y_1^3 = 3z_1^3$, т.е. $9x_1^3 + 3y_1^3 = z_1^3$. Значит, тройка целых чисел $(x_1; y_1; z_1) = \left(\frac{x_0}{3}; \frac{y_0}{3}; \frac{z_0}{3}\right)$ является решением данного уравнения. Аналогично можно показать, что все тройки целых чисел вида $(x_n; y_n; z_n) = \left(\frac{x_0}{3^n}; \frac{y_0}{3^n}; \frac{z_0}{3^n}\right)$ также являются решениями данного уравнения. Но тогда при любом натуральном n числа $\frac{x_0}{3^n}$, $\frac{y_0}{3^n}$, $\frac{z_0}{3^n}$ являются целыми, что возможно только при $(x_0; y_0; z_0) = (0; 0; 0)$. Остаётся заметить, что эта тройка действительно является решением данного диофантового уравнения. **7.28.4.** Докажите, что числа x и y, удовлетворяющие данному диофантовому уравнению, принимают значения, кратные 3. **7.28.6.** Докажите, что числа x, y и z, удовлетворяющие данному диофантовому уравнению, принимают значения, кратные 2. **7.28.11.** Докажите, что числа x и y, удовлетворяющие данному диофантовому уравнению, принимают значения, кратные 13.

7.29.8. б) Сверните левую часть тождества в виде куба разности. **7.29.10.** а) Воспользуйтесь равенством $82 = 79 + 3$. **7.29.11.** Представьте слагаемое $2x^3$ в виде $x^3 + x^3$. **7.29.14.** *Первый способ.* Используя бином Ньютона, получим равенство: $(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n$. С другой стороны, $(1+1)^n = 2^n$, откуда и получаем требуемый результат. *Второй способ.* Количество способов выбрать несколько элементов из данных n различных элементов равно $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n$. С другой стороны, каждую такую выборку можно однозначно описать так: берём или не берём первый элемент (2 варианта), берём или не берём второй элемент (два варианта), и т. д. Значит, всего таких выборок $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n} = 2^n$, откуда и получаем требуемый результат.

7.30.1. Нужно использовать тот факт, что $2 + 4 + 6 + 3 = 15$ и доказать, что все точки A, B, C, D, E лежат на одной прямой. **7.30.8.** Используйте метод «удвоения медианы». **7.30.10.** Рассмотрите различные развёртки данного параллелепипеда. **7.30.12.** Отразите точку A, соответствующую дому лесника, относительно прямых, содержащих стороны данного угла. Получатся точки A_1 и A_2. Пусть B и C — точки пересечения прямой A_1A_2 со сторонами угла. Тогда наиболее короткий маршрут лесника: $A \to B \to C \to A$. **7.30.15.** Рассмотрите развёртки внешней и внутренней боковых поверхностей стакана — два равных прямоугольника с общей стороной.

7.31.3. Рассмотрите два случая, соответствующие основанию длиной 16 см и основанию длиной 5 см. Проверьте, будет ли для полученных сторон выполняться неравенство треугольника. **7.31.9.** Воспользуйтесь результатом №8 для треугольника AXC, лежащего внутри треугольника ABC. **7.31.11.** Докажите, что угол AEB — тупой. **7.31.15.** Рассмотрите треугольник со сторонами a, b, c. Если вписать в него окружность, то она разделит стороны на отрезки $a = x + y$, $b = x + z$, $c = y + z$ по свойству равенства отрезков касательных, проведённых из одной точки.

Список использованной литературы

1. Александров А.Д. Геометрия для 8–9 классов: Учеб. Пособие для учащихся шк. и кл. с углубл. Изуч. Математики / Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. — 3-е изд. — М.: Просвещение, 1996. — 415 с.
2. Басанько А.М. За лаштунками підручника з математики / Басанько А.М., Романенко А.О. — Киев: Генеза, 2007. — 160 с.
3. Берлов С.Л. Петербургские математические олимпиады. 3-е изд., стер. / Берлов С.Л., Иванов С.В., Кохась К.П. — Спб.: Лань, 2005. — 608 с.
4. Весенний турнир Архимеда / [Чулков П.В., Новодворская Е.А., Пчелинцев Ф.А. и др.]; под ред. П.В. Чулкова. — М.: МЦНМО, 2009. — 416 с.
5. Вороний О.М. Готуємось до олімпіад з математики / Вороний О.М. — Харків: Основа, 2008. — 255 с.
6. Галкин Е.В. Задачи с целыми числами. 7–11 классы: пособие для учащихся общеобразоват. Учреждений / Галкин Е.В. — М.: Просвещение, 2012. — 269 с.
7. Гейдман Б.П. Подготовка к математической олимпиаде. Начальная школа. 2-4 классы / Гейдман Б.П., Мишарина И.Э. — М.: Айрис-пресс, 2007. — 128 с.
8. Генкин С.А. Ленинградские математические кружки / Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. — Киров: АСА, 1994. — 272 с.
9. Голобородько В.В. Решение задач по математике для 5–6 классов / Голобородько В.В., Крижановский А.Ф. — Харьков: Гимназия, 2001. — 144 с.
10. Горбачёв Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике / Горбачёв Н.В. — М.: МЦНМО, 2004. — 560 с.
11. Григоренко П.М. Збірник задач другого та третього рівнів з математики / Григоренко П.М. — Харків: Олант, 2000. — 112 с.
12. Евдокимов М.А. От задачек к задачам / Евдокимов М.А. — М.: МЦНМО, 2004. — 72 с.
13. Екимова М.А. Задачи на разрезание. Издание второе, стереотипное / Екимова М.А., Кукин Г.П. — М.: МЦНМО, 2005. — 120 с.

14. Ершова А.П. Вся школьная математика в самостоятельных и контрольных работах. 5-6 кл., 2-е изд., испр. / Ершова А.П., Голобородько В.В. — М.: Илекса, 2010. — 480 с.
15. Ершова А.П. Вся школьная математика в самостоятельных и контрольных работах. Алгебра 7–11 кл. / Ершова А.П., Голобородько В.В. — М.: Илекса, 2010. — 640 с.
16. Задачи для внеклассной работы по математике в V–VI классах. Пособие для учителей / сост. Сафонова В.Ю. — М.: МИРОС, 1995. — 76 с.
17. Зив Б.Г. Задачи по геометрии: Пособие для учащихся 7–11 кл. общеобразоват. учреждений / Зив Б.Г., Мейлер В.М., Баханский А.Г. — 2-е изд. — М.: Просвещение, 1997. — 271 с.
18. Калинин Д.А. Интернет-карусели. «Весна 2009». Математика. Сборник задач / Калинин Д.А. — М.: ЦДО «Дистантное обучение», 2009. — 18 с.
19. Коваль С. От развлечения к знаниям. Математическая смесь / Коваль С. — Варшава: WYDAWNICTWA NAUKOWO-TECHNICZNE, 1972. — 540 с.
20. Конфорович А.Г. Математика лабиринта / Конфорович А.Г. — Киев: Радянська школа, 1987. — 136 с.
21. Крижановский А.Ф. Школьная математика: От контрольных работ до олимпиад. 3–6 классы / Крижановский А.Ф. — М.: ИЛЕКСА, 2014. — 144 с.
22. Лётчиков А.В. Принцип Дирихле / Лётчиков А.В. — Ижевск: Издательство Удмуртского университета, 1992. — 108 с.
23. Лихтарников Л.М. Задачи мудрецов / Лихтарников Л.М. — М.: Просвещение, 1996. — 112 с.
24. Мадера А. Г. Математические софизмы : Правдоподобные рассуждения, приводящие к ошибочным утверждениям : Кн. для учащихся 7—11 кл. / А. Г. Мадера, Д. А. Мадера.— М. : Просвещение, 2003.— 112 с.
25. Математика. Наглядная геометрия. 5-6 классы: учеб. Пособие для учащихся общеобразоват. Учреждений / [В.А. Панчищина, Э.Г. Гельфман, В.Н. Ксенева и др.]. 3-е изд. — М.: Просвещение, 2012. — 175 с.
26. Мітельман І.М. Розфарбуємо клітчасту дошку / Мітельман І.М. — Львів: Каменяр, 2001. — 48 с.
27. Петров Н.Н. Математические игры / Петров Н.Н. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. — 192 с.

28. Раскина И.В. Логические задачи / Раскина И.В., Шноль Д.Э. — М: МЦНМО, 2014. — 120 с.
29. Савин А.П. Занимательные математичекие задачи / Савин А.П. — М.: АСТ, 1995. — 176 с.
30. Сагайдакова Н. Нестандартные задачи для младших школьников с решениями / Сагайдакова Н., Ямпольская Л. — Харьков: Гимназия, 1999. — 128 с.
31. Сарана О.А. Математичні олімпіади. Просте і складне поруч: Навчальний посібник. Друге видання, доповнене / Сарана О.А. — Тернопіль: Навчальна книга — Богдан, 2011. — 400 с.
32. Смаллиан Р.М. Как же называется эта книга? / Смаллиан Р.М. — М.: Мир, 1981. — 260 с.
33. Смаллиан Р.М. Принцесса или тигр? / Смаллиан Р.М. — М.: Мир, 1987. — 264 с.
34. Смаллиан Р.М. Алиса в стране смекалки / Смаллиан Р.М. — М. Мир, 1987. — 256 с.
35. Спивак А.В. Тысяча и одна задача по математике / Спивак А.В. — М.: Просвещение, 2002. — 207 с.
36. Федак І.В. Методи розв'язування олімпіадних завдань з математики і не тільки їх / Федак І.В. — Чернівці: Зелена Буковина, 2002. — 340 с.
37. Шапиро А.Д. Зачем нужно решать задачи? [Кн. для учащихся] / Шапиро А.Д. — М.: Просвещение, 1996. — 96 с.
38. Шаповалов А.В. Как построить пример? / Шаповалов А.В. — М.: МЦНМО, 2013. — 80 с.
39. Шарыгин И.Ф. Математика. Задачи на смекалку / Шарыгин И.В., Шевкин А.В. — М.: Просвещение, 1996. — 80 с.
40. Шарыгин И.Ф. Наглядная геометрия. Учебное пособие для V–VI классов / Шарыгин И.Ф., Ерганжиева Л.Н. — М.: МИРОС, 1992. — 208 с.
41. Ященко И.В. Приглашение на математический празник. 3-е изд., испр. и доп. / Ященко И.В. — М.: МЦНМО, 2009. — 140 с.

Приложения

Математическая карусель

Математическая карусель — это командное соревнование по решению задач. Побеждает в нём команда, которая набирает наибольшее количество очков. Задачи решаются на двух рубежах — выводном и зачётном, но очки начисляются только за задачи, решённые на зачётном рубеже. В начале игры все члены команды располагаются на своём выводном рубеже, им присваиваются номера с 1 по 6. По сигналу ведущего команды получают задачу и начинают её решать.

Если команда считает, что задача решена, то её представитель с номером 1 показывает ответ судье. Если ответ верный, игрок с номером 1 переходит на зачётный рубеж и получает задачу там, а члены команды, которые остались на выводном рубеже, тоже получают новую задачу. В дальнейшем группы членов команды, которые находятся на выводном и зачётном рубежах, решают разные задачи независимо одна от другой.

Чтобы понять следующую часть правил, необходимо представить себе, что на каждом из рубежей игроки, которые на нём находятся, выстроены в очередь. Перед началом игры на выводном рубеже они идут в порядке возрастания номеров. Если члены команды, которые находятся на одном из двух рубежей, считают, что они решили очередную задачу, ответ к судье приносит игрок, который стоит в очереди первым. Если ответ верный, то с выводного рубежа этот игрок переходит на зачётный (в конец очереди), а на зачётном рубеже возвращается на своё место в очереди. Если ответ неверный, то на выводном рубеже игрок возвращается на своё место в очереди, а с зачётного переходит на выводной (в конец очереди). На обоих рубежах команда в любой момент может отказаться от решения определённой задачи. В такой ситуации задача считается нерешённой.

После того, как часть команды, которая находится на каком-то из двух рубежей, сдала ответ или отказалась от решения данной задачи, она получает новую задачу. Если на рубеже в этот момент нет ни одного участника, задачу начинают решать, когда на рубеже появится хотя бы один игрок.

За первую верно решённую на зачётном рубеже задачу команда получает 3 балла. Если команда на зачётном рубеже верно решает несколько задач подряд, то за каждую следующую задачу она получает на 1 балл больше, чем за предыдущую. Если же очередная задача № n решена неверно, то за следующую задачу № $n+1$ баллы начисляются следующим образом. Если задача № n должна была принести команде больше 6 баллов, то правильный ответ к задаче № $n+1$ приносит 5 баллов. Если задача № n должна была принести команде 4, 5 или 6 баллов, то правильный ответ к задаче № $n+1$ приносит на 1 балл меньше. Если задача № n должна была принести команде 3 балла, то правильный ответ к задаче № $n+1$ также приносит 3 балла.

Игра для команды заканчивается, если:

а) закончилось отведённое время или

б) закончились задачи на зачётном рубеже или

в) закончились задачи на выводном рубеже, а на зачётном нет ни одного игрока.

Время игры, количество выводных и зачётных задач оговаривается заранее.

Методический комментарий

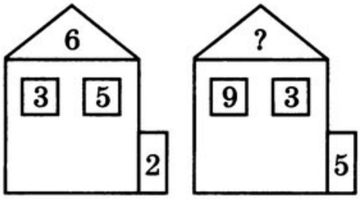
В некоторых ситуациях приведенные классические правила стоит несколько упростить. Например, если у учителя (руководителя кружка) нет помощников для проведения игры, можно разбить класс (группу кружковцев) на 3 команды (не обязательно по 6 человек), отменить правило о жёсткой слежке за тем, кто именно из *очереди игроков приносит ответ. Преподаватель может в таком случае самостоятельно справиться с ролями ведущего, судьи и счётчика одновременно. Также иногда имеет смысл упростить приведенную схему начисления очков и пользоваться такими правилами: верный ответ на зачётном рубеже даёт возможность получить за задачу на 1 балл больше, чем за предыдущую, неверный ответ снижает «стоимость» следующей задачи до 3 баллов.*

Конечно, все правила тщательно обговариваются с учениками заранее, преподаватель готовит комплекты карточек с заданиями по числу команд, для судьи — лист с ответами, для счётчиков — таблицу на определённое количество команд и заданий.

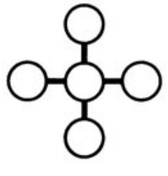
Ниже приведен вариант математической карусели для учеников 5 класса, рассчитанный на одно занятие (90 минут).

Выводной рубеж

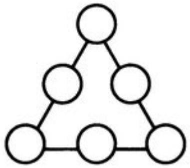
I–1. Решите математический ребус:



I–2. Внутри кружков разместите натуральные числа от 1 до 5 так, чтобы числа, расположенные на одной линии, в сумме всегда составляли 9.

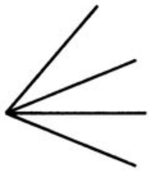


I–3. Внутри кружков разместите натуральные числа от 1 до 6 так, чтобы числа, расположенные вдоль каждой стороны треугольника, в сумме составляли 10.

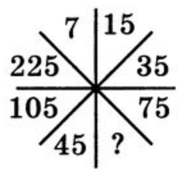


I–4. Встретились трое друзей и решили сыграть в шахматы. Договорились, что каждый сыграет с каждым только 1 раз. Сколько всего было сыграно партий?

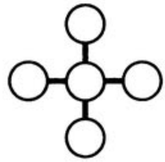
I–5. Сколько углов, больших, чем 0°, и меньших, чем 180°, изображено на рисунке?



I–6. В сектора вписаны числа по определённому правилу. Найдите это правило и впишите число в пустой сектор.



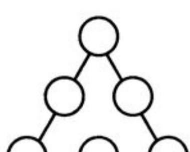
I–7. Внутри кружков разместите числа 2; 5; 8; 11; 14 так, чтобы числа, расположенные на одной линии, в сумме всегда составляли 24.



I–8. Лист бумаги разрезали на 3 части, потом одну из этих частей — ещё на 3 части, и т. д. Всего — 40 раз. Сколько в конце концов получилось частей?

I–9. Найдите 2 целых числа, сумма которых больше их произведения.

I–10. Внутри кружков разместите натуральные числа от 1 до 6 так, чтобы числа, расположенные вдоль каждой стороны треугольника, в сумме составляли 11.



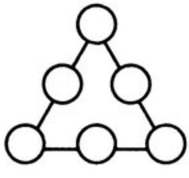
I–11. Внутри кружков разместите натуральне числа от 1 до 7 так, чтобы числа, расположенные на одной линии, в сумме всегда составляли 12.

I–12. В семье четверо детей, им 5, 8, 13, 15 лет. Детей зовут Марина, Борис, Вера и Галя. Сколько лет каждому ребёнку, если одна девочка ходит в детский сад, Марина старше Бориса, сумма возрастов Марины и Веры делится на 3 без остатка?

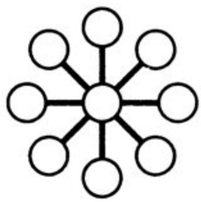
I–13. В таблицу вписаны числа по определённому правилу. Найдите это правило и впишите число, которого не хватает.

1	5	6	11	?	28

I–14. Внутри кружков разместите натуральне числа от 1 до 6 так, чтобы числа, расположенные вдоль каждой стороны треугольника, в сумме составляли 12.



I–15. Внутри кружков разместите натуральне числа от 1 до 9 так, чтобы числа, расположенные на одной линии, в сумме всегда составляли 15.



I–16. Бидон с молоком весит 30 кг, полупустой — 15 с половиной килограмм. Сколько весит пустой бидон?

I–17. Какой цифрой заканчивается сумма

$$16 \cdot 17 \cdot 18 + 31 \cdot 32 \cdot 33\ ?$$

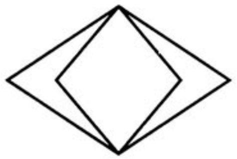
I–18. Внутри кружков разместите числа 1; 5; 9; 13; 17; 21; 25 так, чтобы числа, расположенные вдоль одной линии, в сумме всегда составляли 39.

I–19. На одной прямой через равные промежутки поставили 10 точек. Расстояние между крайними оказалось l. На другой прямой через такие же промежутки поставили 100 точек. Расстояние между крайними оказалось L. Во сколько раз L больше, чем l?

I–20. Шесть футбольних команд провели турнир, в котором каждая сыграла с каждой 1 раз. Сколько всего было сыграно игр?

Зачётный рубеж

II–1. Сколько четырёхугольников изображено на рисунке?

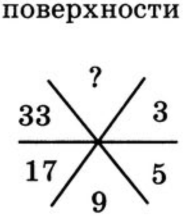


II–2. Мальчик купил 6 шариков: 2 белых, 2 синих и 2 красных. Сколькими способами он сможет составить из них два подарка по три шарика (какой из подарков первый, а какой второй — не имеет значения)?

II–3. Дедушка сказал внукам: «Вот вам 130 орехов. Разделите их на 2 части так, чтобы меньшая часть, увеличенная в 4 раза, равнялась большей, уменьшенной в 3 раза». Как внукам разделить орехи?

II–4. Куб с ребром 1 м разрезали на кубики с ребром 1 дм. Во сколько раз площадь поверхности всех образованных кубиков больше площади поверхности данного куба?

II–5. Какое число нужно вписать в пустой сектор?

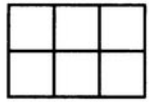


II–6. Разрежьте прямоугольник 9×4 на две равные части, из которых можно составить квадрат.

II–7. На озере росли кувшинки. Каждый день они занимали площадь вдвое большую, чем в предыдущий За 20 дней заросло всё озеро. За сколько дней заросла четверть озера?

II–8. Запишите выражение при помощи трёх пятёрок, знаков действий и скобок, такое, чтобы его значение равнялось единице.

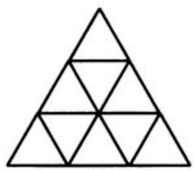
II–9. Сколько на рисунке изображено прямоугольников?



II–10. Двенадцать человек, среди которых были мужчины, женщины и дети, несли 12 хлебов. Каждый мужчина нёс 2 хлеба, каждая женщина — полхлеба, — каждый ребёнок — четверть хлеба. Сколько было мужчин, женщин и детей?

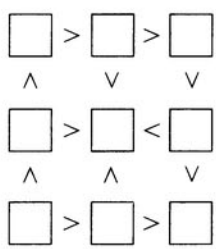
II–11. Четыре ученика — Алексей, Борис, Иван и Григорий — состязались в беге. На следующий день они так прокомментировали результаты. Алексей: «Я не был ни первым, ни последним». Борис: «Я не был последним». Иван: «Я был первым». Григорий: «Я был последним». Известно, что только один из них сказал неправду. Кто именно?

II–12. Сколько треугольников на рисунке?

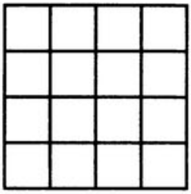


II–13. В жаркий день 6 косарей выпили бочонок кваса за 8 часов. Сколько косарей за 3 часа выпьют такой же бочонок кваса?

II–14. Впишите в пустые квадратики цифры от 1 до 9 так, чтобы выполнялись все неравенства:



II–15. В 1987 году возраст старшего брата равнялся сумме цифр года рождения младшего, а возраст младшего — сумме цифр года рождения старшего. Сколько лет исполнилось им в 2015 году, если один старше другого на 7 лет?



II–16. Сколько квадратов изображено на рисунке?

II–17. Сколько прямых можно провести через какую нибудь пару из n точек, если никакие три из них не лежат на одной прямой?

II–18. Грани куба с ребром 4 см, покрасили в красный цвет. Потом куб разрезали на кубики с объёмом 1 см^3 каждый. Сколько получили кубиков с одной, двумя, тремя покрашенными гранями? Сколько кубиков вовсе не имеют покрашенных граней?

II–19. Николай и Виктор живут в одном доме. На каждом этаже во всех подъездах по 4 квартиры. Николай живёт на пятом этаже, в квартире №83, а Виктор — на третьем этаже в квартире №169. Сколько этажей в доме?

II–20. Трое друзей решили пообедать. Один выставил на общий стол 3 блюда, другой — 5 блюд. Третий — ничего, но он дал первым двум 8 монет. Потом все съели по трети каждого блюда. Как должны разделить деньги первый и второй, если стоимость всех блюд одинакова?

Ответы к задачам (выводной рубеж)

I–1.	7	**I–2.**	5-3-1 / 4-3-2
I–3.	3-6-1/3-2-5/1-4-5	**I–4.**	3
I–5.	6	**I–6.**	21
I–7.	2-8-14 / 5-8-11	**I–8.**	81
I–9.	1 и x, 0 и x	**I–10.**	2-5-4/2-3-6/4-1-6

I–11. 7-4-1/6-4-2/5-4-3

I–12. Вера — 5 лет,
Борис — 8 лет,
Марина — 13 лет,
Галя — 15 лет

I–13. 17

I–14. 6-1-5/6-2-4/5-3-4

I–15. 1-5-9/7-5-8/3-5-7/4-5-6

I–16. 1 кг

I–17. 2

I–18. 1-13-25/5-13-21/9-13-17

I–19. В 11 раз

I–20. 15

Ответы к задачам (зачётный рубеж).

II–1. 6

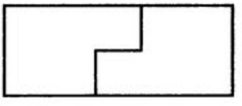
II–2. 4

II–3. 10 и 120

II–4. В 10 раз

II–5. 65 или 2

II–6.



II–7. 18

II–8. 5^{5-5} или $(5:5)^5$

II–9. 18

II–10. 5;1;6

II–11. Иван

II–12. 13

II–13. 16

II–14. 7-6-5/8-1-4/9-3-2

II–15. 53 года и 46 лет

II–16. 30

II–17. $n(n-1):2$

II–18. 24; 24; 8; 8

II–19. 8

II–20. 1 и 7 монет

Математико́

Математико́ — это итальянская логическая игра. Правила её довольно просты. В игре могут принимать участие неограниченное количество человек.

Готовится набор из 52 карточек, на которых записаны числа от 1 до 13, причём карточки с каждым из этих чисел встречаются четырежды. У каждого игрока имеется квадратное поле 5×5. Ведущий берёт колоду приготовленных карточек с числами, растасовывает её (или раскладывает карточки на столе, числами вниз), затем открывает первую карточку и объявляет написанное на ней число. Каждый из играющих записывает это число в одну из клеток на своем поле. Затем ведущий объявляет число, написанное на следующей карточке, играющие опять вписывают его в любую из свободных клеток своего листа и т. д. Так продолжается до тех пор, пока не будут заполнены все клетки квадрата.

Результат игрока оценивается числом набранных им очков, зависящим от способа размещения чисел в клетках квадрата. Победителем считается тот, кто набирает наибольшее количество очков. Подсчёт очков производится по следующей таблице:

Комбинации чисел	В ряду или столбце	По диагонали
За 2 одинаковых числа	10 очков	20 очков
За 2 пары одинаковых чисел	20 очков	30 очков
За 3 одинаковых числа	40 очков	50 очков
За 3 одинаковых числа и два других одинаковых числа	80 очков	90 очков
За 4 одинаковых числа	160 очков	170 очков

Комбинации чисел	В ряду или столбце	По диагонали
За 5 последовательных чисел, но не обязательно по порядку расположенных	50 очков	60 очков
За три раза по 1 и два раза по 13	100 очков	110 очков
За числа 1, 13, 12, 11 и 10, но не обязательно расположенных по порядку	150 очков	160 очков
За 4 единицы	200 очков	210 очков

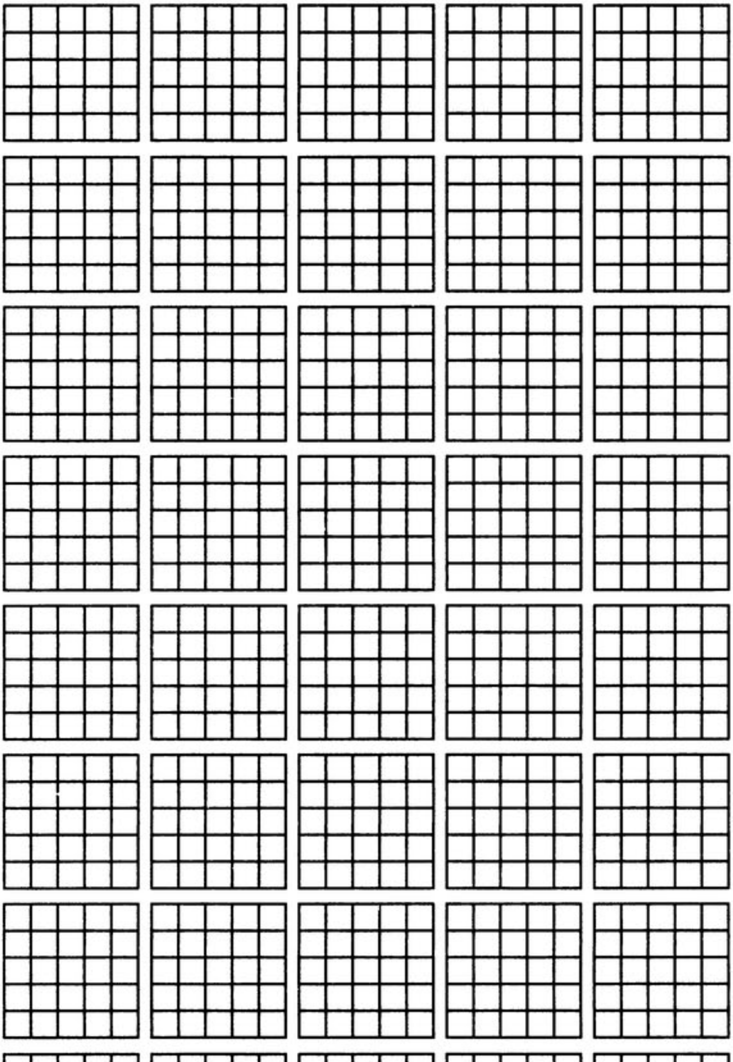
Пример подсчёта очков:

	1	1	7	1	7	(80)
	2	10	2	13	2	(40)
	5	12	13	5	7	(10)
	3	3	3	11	3	(160)
	4	12	4	13	12	(20)
(20)	(50)	(10)		(10)	(10)	(160)

Итого: 80+40+10+160+20+50+10+0+10+10+20+160 = 570.

Методический комментарий

Правила игры можно варьировать. Например, предложить участникам сначала записать 25 названных чисел на черновик, а потом заполнить таблицу, или заполнять параллельно две таблицы. Также можно предложить ученикам самим заполнить таблицу, используя любые 25 чисел из данных 52, по своему усмотрению. Итоги можно подводить как в каждом виде соревнований, так и по сумме.



1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4
5	5	5	5
6	6	6	6
7	7	7	7
8	8	8	8
9	9	9	9
10	10	10	10
11	11	11	11
12	12	12	12
13	13	13	13

Математический аукцион

Математический аукцион — это соревнование команд (обычно с численностью 3—6 человек). В каждой команде есть капитан.

В начале аукциона каждая команда получает кредит — 100 тугриков, и набор задач для решения (например, на 45 минут). По прошествии времени, отведённого для решения задач, начинается игра — аукцион, на котором разыгрывается несколько лотов. В каждом лоте ведущим аукциона выставляется на торги одна задача. В нашем аукционе цена каждой задачи 20 тугриков (столько получает команда, которая выигрывает лот).

Каждый раз, когда какая-нибудь команда желает предъявить свой ответ, происходят торги за право написать ответ на доске. Начальная цена 1 тугрик. Заявка на торг и предлагаемая цена выслушивается ведущим только от капитана команды и только в том случае, если он поднял руку, а ведущий указал на него. Как только возможность написать ответ на доске «продана», с команды снимаются заплаченные ею за эту возможность тугрики, и один из членов команды пишет свой ответ. Далее команды могут начать торги заново, если они считают, что у них есть ответ лучше.

Если на доске появляется неверный ответ, командам об этом не сообщается до окончательного подведения итогов по данной задаче.

Выигравшей лот считается та команда, которая последней сделала результативный ход, т. е. предъявила «наилучший» из верных ответов на задачу, причём такой, который не был ранее предъявлен другими командами. Если же ни одна команда не хочет более принимать участие в торгах по данной задаче, ведущий переходит к следующему лоту.

Аукцион заканчивается, когда заканчиваются все задачи или когда подходит к концу занятие.

На аукционе запрещается пользоваться мобильными телефонами и калькуляторами. Штраф — 50 тугриков.

Методический комментарий. *В более строгой версии правил: если ни одна команда не сумела сделать результативного хода по задаче, то со счёта каждой команды снимается 20 тугриков. Если задача предполагает точный ответ, то только он и приносит 20 тугриков команде, правильно решившей задачу. Ниже приводится пример набора задач для математического аукциона в 6 классе.*

1. В 9 утра из двух городов, находящихся друг от друга на расстоянии 280 км, одновременно навстречу друг другу (вдоль дороги между этими городами) выехали два поезда со скоростями 75,75 км/ч и 64,25 км/ч. В котором часу поезда будут находиться друг от друга на расстоянии 35 км?
2. Нарисуйте два четырёхугольника так, чтобы вышло как можно больше частей плоскости.
3. Первая труба наполняет бассейн за половину того времени, за которое вторая труба наполняет $\frac{2}{3}$ этого бассейна. Вторая труба отдельно наполняет бассейн на 6 часов дольше первой, если та работает одна. Сколько времени наполняет бассейн каждая труба в отдельности?
4. Придумайте как можно меньшее число, большее десяти, равное сумме факториалов его цифр.
5. Между пунктами A и B автобус ездит через возвышенность. При подъёме он едет со скоростью 25 км/ч, а при спуске 50 км/ч. От A до B он едет 3,5 часа, а от B до A — 4 часа. Найти расстояние AB.
6. Запишите число 2015, используя только четвёрки, и обойдясь при этом как можно меньшим количеством

цифр. Можно использовать любые математические операции, их количество не ограничивается.

7. Имеется три сосуда общей вместимостью 120 л. Если первый наполнить полностью, а затем перелить в два других, то либо третий будет полным, а второй заполнится наполовину, либо второй будет полным, а третий заполнится на треть. Найдите вместимость каждого сосуда.
8. В строку 1 2 3 4 5 6 7 вставьте несколько знаков сложения или вычитания так, чтобы значение полученного выражения равнялось 55. Найдите как можно больше решений.
9. Для содержания лошадей был сделан запас корма на определённое время. Если бы лошадей было на две меньше, то сена хватило бы ещё на 10 дней, а если бы их было на 2 больше, то не хватило бы на 6 дней. Сколько было лошадей, и на сколько дней был сделан запас?
10. Расшифруйте следующее высказывание основателя Московского университета.

Сълндпсдх молы энъ поъпамнмэца поъррыруъэяъм.

Т.Э.Уртрсрнрэ.

11. Когда автомобиль проехал часть пути от A до B, то оказалось, что он проехал столько километров, сколько минут ему придется ехать оставшуюся часть. Но когда он проехал и эту часть пути, то оказалось, что её длина составляет столько километров, сколько минут он затратил на первую часть пути. Сколько километров проезжает автомобиль за один час?
12. На доске 10×10 расставьте как можно меньшее количество магарадж (фигура, которая бьёт как ферзь и как конь) так, чтобы вся доска оказалась под боем.

13. В дремучем лесу вот уже более 1000 лет растёт Волшебная ёлка. Известно, что каждое утро на ней вырастают 100 иголок и каждая иголка живёт ровно 4 года, а затем отмирает. Сколько сейчас иголок на Волшебной ёлке?
14. На деревянной линейке нанесите как можно меньшее число меток так, чтобы любое расстояние в целое число сантиметров, не большее 15, можно было бы отложить при помощи каких-то двух меток.
15. Собираясь в школу, Миша нашёл под подушкой, под диваном, на столе и под столом всё необходимое: тетрадь, шпаргалку, плеер и кроссовки. Под столом он нашёл не тетрадь и даже не плеер. Миша не клал кроссовки ни на стол, ни под подушку, а его шпаргалки не валяются на полу. Плеера не оказалось ни на столе, ни под диваном. Что где лежало?

Ответы к задачам математического аукциона

1. 10 ч 45 мин или 11 ч 15 мин
3. 3 часа; 9 часов
4. 145
5. 125 км
7. 50 л, 40 л, 30 л
8. 123+4-5-67=55; 1-2-3-4+56+7=55; 12-3+45-6+7=55; 1+2+34+5+6+7.
9. 8 лошадей, 30 дней
10. «Неусыпный труд все препятствия преодолевает». М. В. Ломоносов.
11. 60 км
13. 146100 иголок
15. Тетрадь под диваном, шпаргалка на столе, плеер под подушкой, кроссовки под столом.

Математическая драка

«Математическая драка» — это личное игра-соревнование по решению задач. Каждый участник получает список задач, которые можно решать в произвольном порядке, и начальный капитал — 100 тугриков. Ученик, который считает, что решил задачу, поднимает руку. По команде ведущего он пишет ответ (на доске или на специальном бланке).

Первоначальная цена каждой задачи — 10 тугриков. Если участник дал неверный ответ, из его капитала вычитается 10 тугриков, а текущая цена соответствующей задачи увеличивается на 5 тугриков. Игрок, который первым верно решил задачу, увеличивает свой капитал на цену задачи, а прием ответов по этой задаче прекращается.

Если у участника драки закончились тугрики, он выбывает из игры. Математическая драка заканчивается, если решены все задачи или истекло отведенное на неё время (оно объявляется в начале).

Победителем считается участник, у которого на момент окончания драки на счету больше всего тугриков. При равном числе тугриков у нескольких учеников лучшими считаются те, которые дали больше верных ответов.

Методический комментарий

Игру можно сделать более динамичной, если увеличивать число очков за задачу не 10-15-20-25 и т.д., а 1-2-4-8-16-32-64 и т.д. Также, систему штрафов можно сделать «прогрессивной» — вычитать у давшего неправильный ответ игрока не 10 очков, а текущую «цену» задачи. Кроме того, задачи можно обсуждать не в произвольном порядке, а по возрастанию номеров. В этом случае целесообразно предоставлять приоритетное пра-

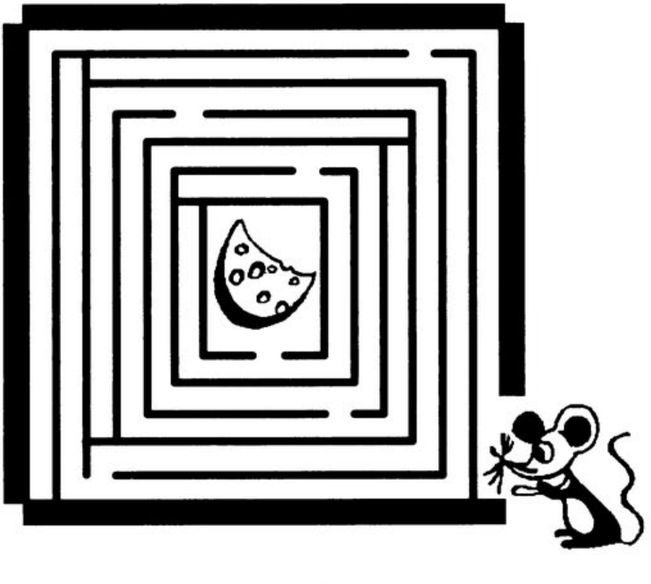
во на ответ участнику, который получил баллы за предыдущую задачу. В случае, если он в течение 3 минут не воспользуется этим правом, ведущий приглашает для ответа того ученика, кто первым поднял руку. Ниже приводится вариант списка задач для математической драки на тему «лабиринты», рассчитанный на одно занятие (90 минут). В ней могут принимать участие ученики 5-7 классов.

Лабиринты

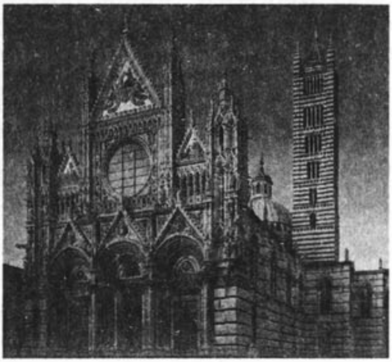
Предмет математики настолько серьёзен, что полезно не упускать случая сделать его немного занимательным.

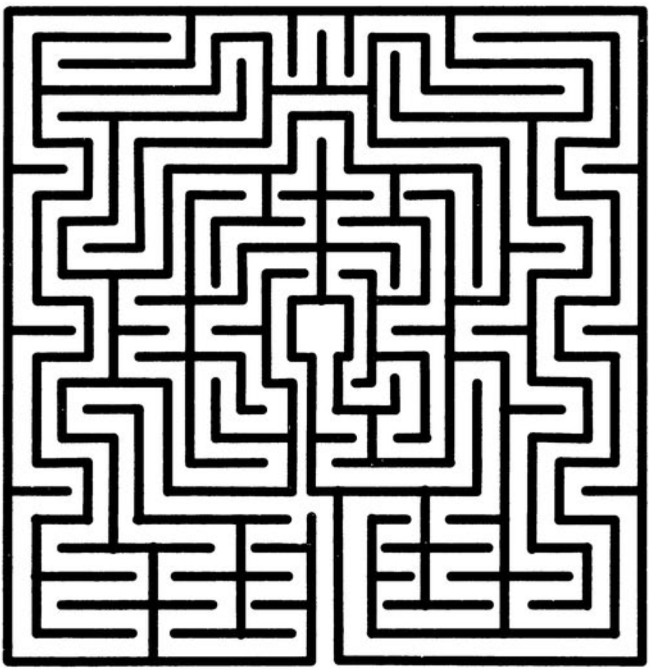
Блез Паскаль

1. Помогите мышке пройти к сыру.



2. Пол средневекового собора в городе Сиена (Италия) украшен лабиринтом. Пройдите его от входа до центра.



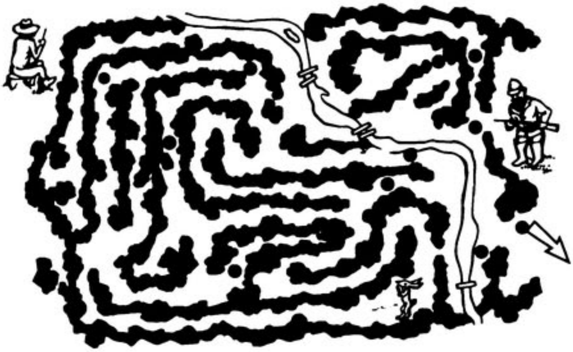


3. У этого лабиринта 3 входа. Как попасть в центр лабиринта через каждый из них?

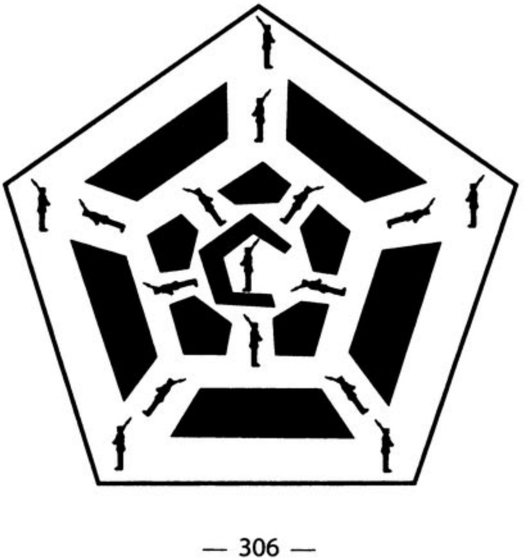
4. Проложите маршруты в центры карнавальных масок-лабиринтов.

5. Помогите заблудившейся девочке выйти из лабиринта.

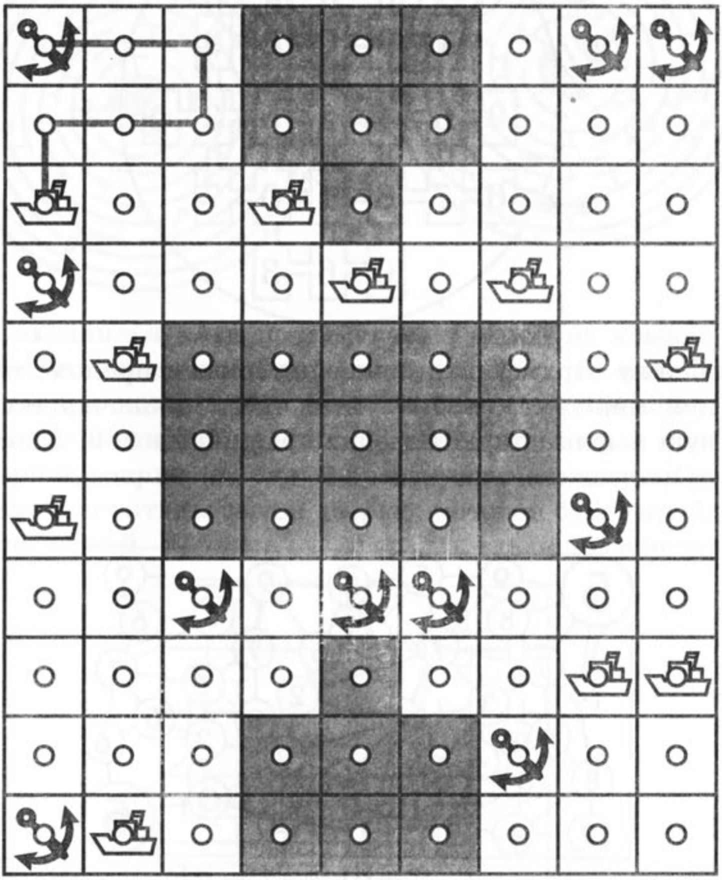
6. **Помогите зайцу избежать охотничьих ловушек и выйти к месту, отмеченному стрелкой.**



7. **Комендант крепости выходит из центрального помещения и проверяет, как несут службу солдаты на постах. При этом он, обходя все посты, не проходит дважды ни по одному участку маршрута и на каждом посту бывает ровно один раз. Каков маршрут коменданта?**

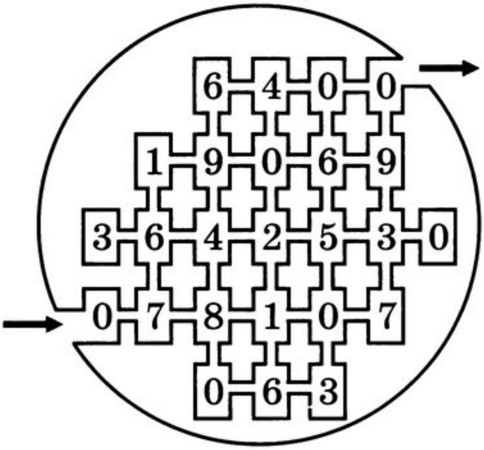


8. **Соедините каждый корабль со своим якорем, как это сделано в верхнем левом углу. Через каждый квадратик должна проходить лишь одна линия, и никакие линии не должны пересекаться или заходить в выделенные зоны.**

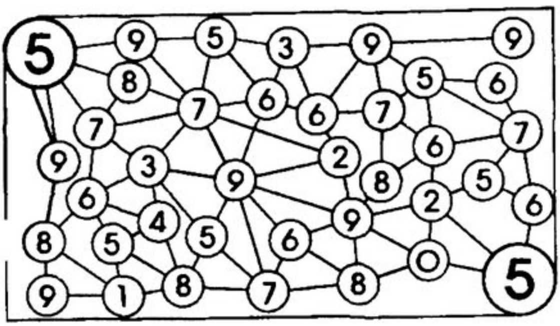


9. **Найдите в этом лабиринте такой маршрут, чтобы сумма всех «собранных» на перекрёстках чисел рав-**

нялась 40. Через каждый перекрёсток можно проходить только один раз.

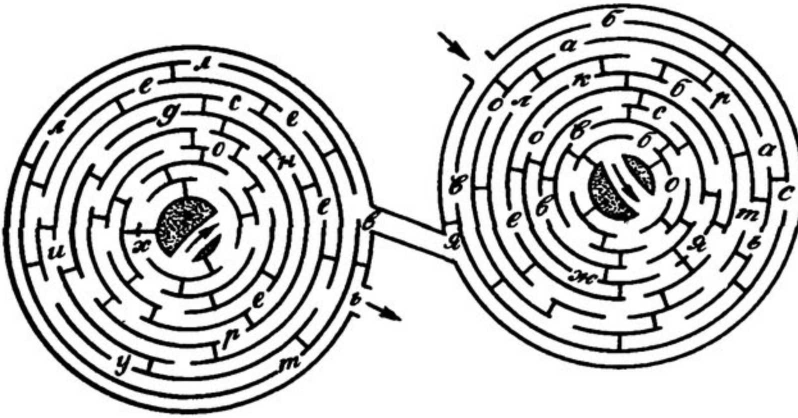


10. Между верхней и нижней пятёрками проложите такой маршрут, чтобы сумма чисел, включая стартовую и финишную пятёрки, равнялась 100. Каждый пункт можно посетить не более одного раза.

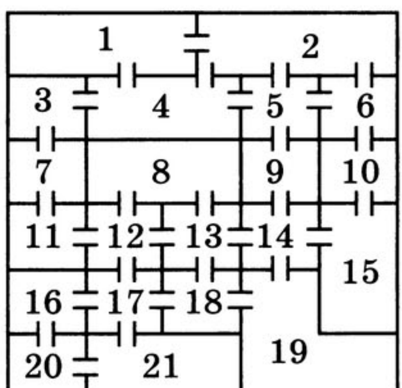


11. Старт, финиш и некоторые этапы пути в этом спаренном лабиринте обозначены стрелками. Если вы пра-

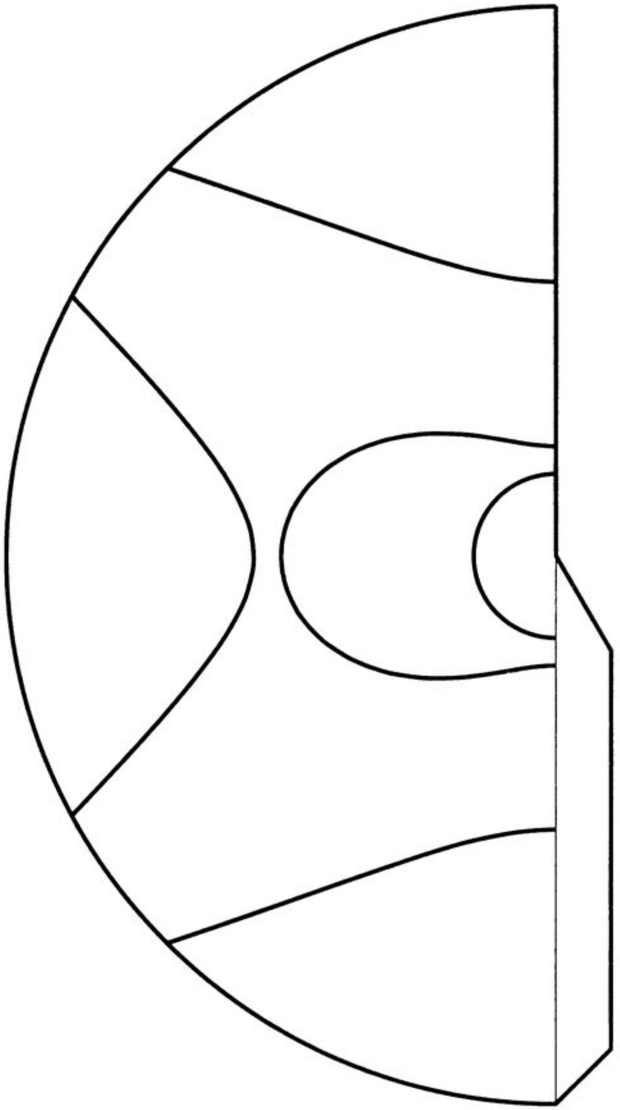
вильно пройдёте лабиринт, то из букв на вашем пути соберётся известная поговорка. Какая?

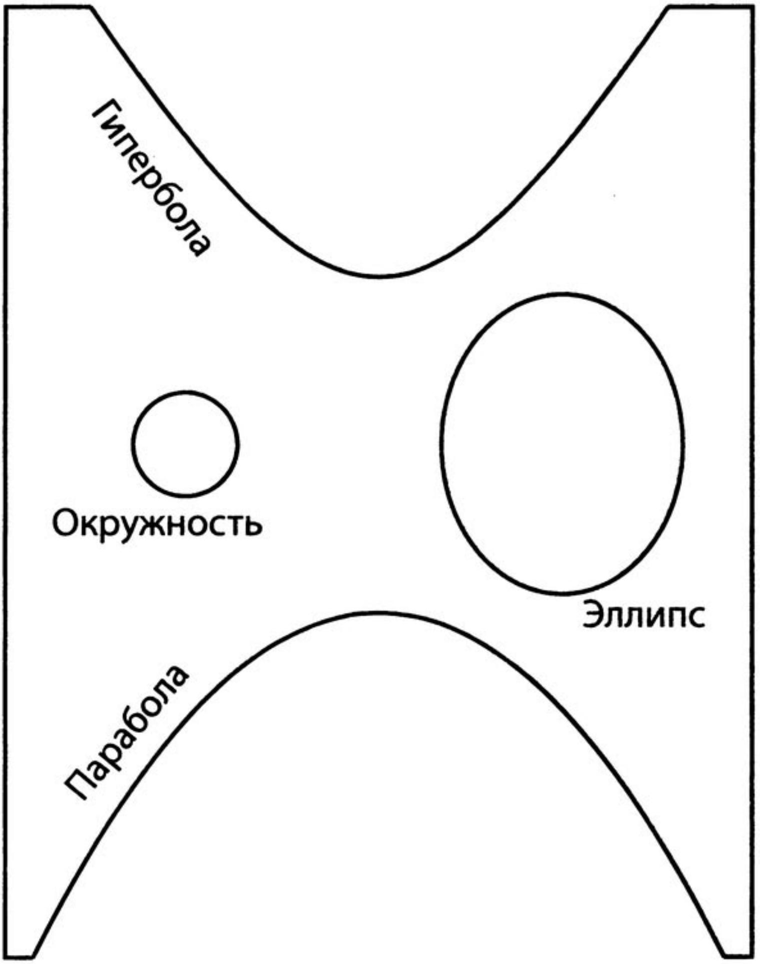


12. Сохранился план подземелья, в одной из комнат которого спрятаны сокровища рыцаря. В завещании рыцаря сказано, что для отыскания сокровищ нужно войти в одну из крайних комнат подземелья, пройти, причём только по одному разу, через все двери. Сокровища спрятаны за той дверью, которая будет пройдена последней. Найдите эту дверь на плане подземелья.

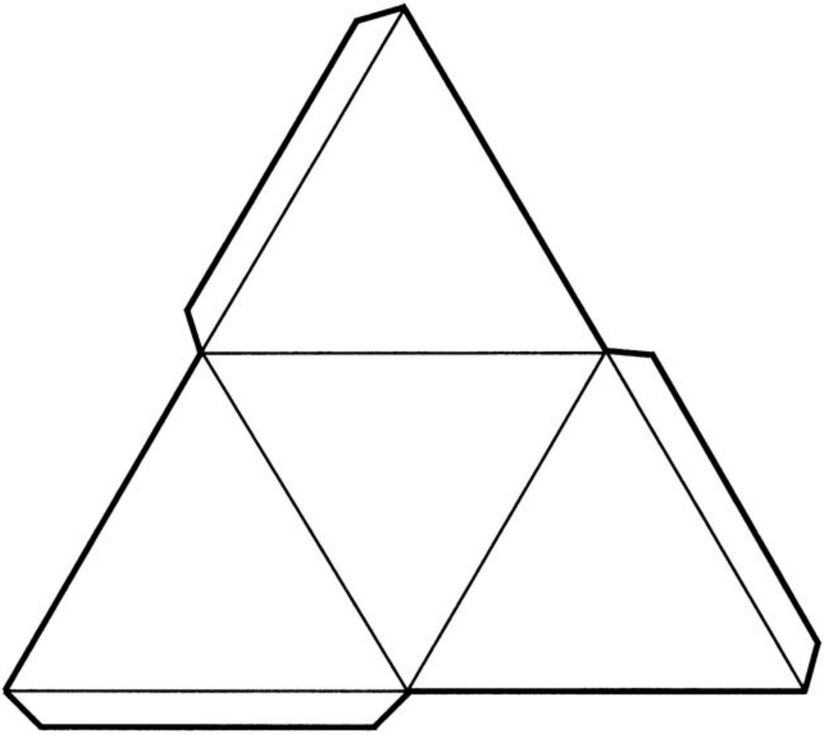


Кривые второго порядка

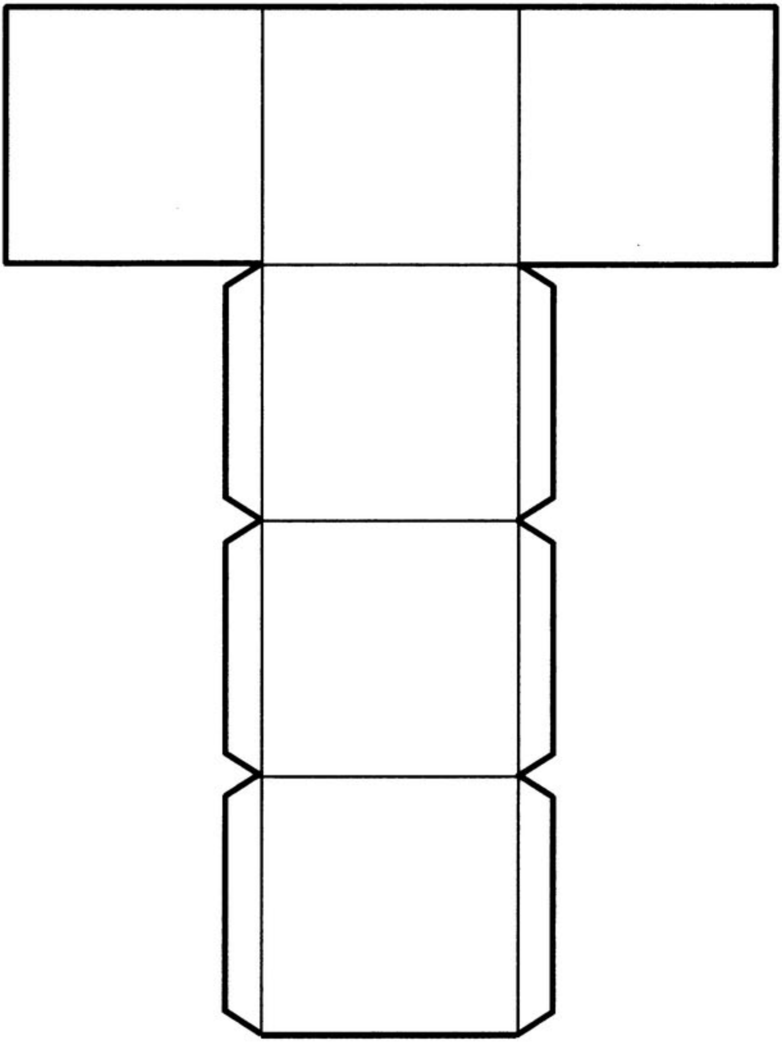



Гипербола
Окружность
Эллипс
Парабола

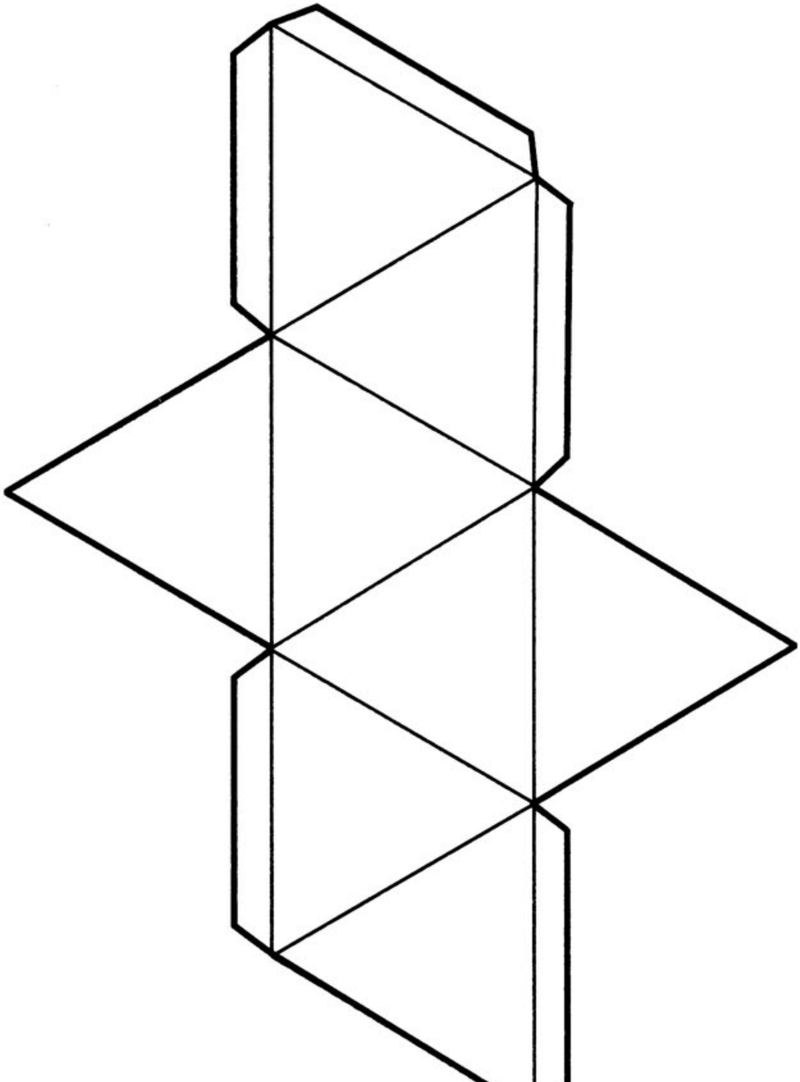
Правильные многогранники



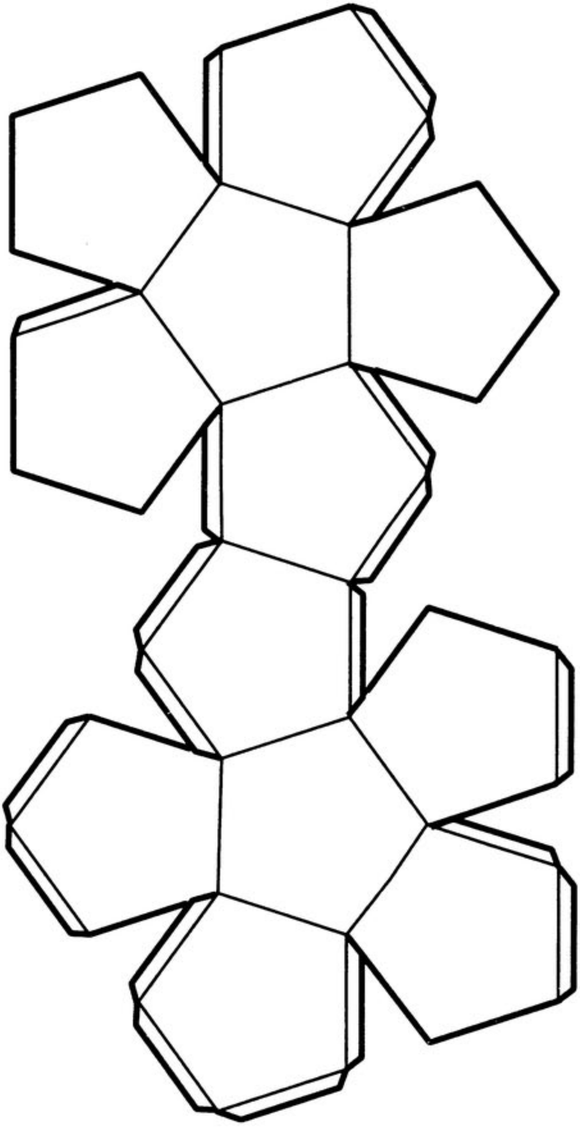
а)



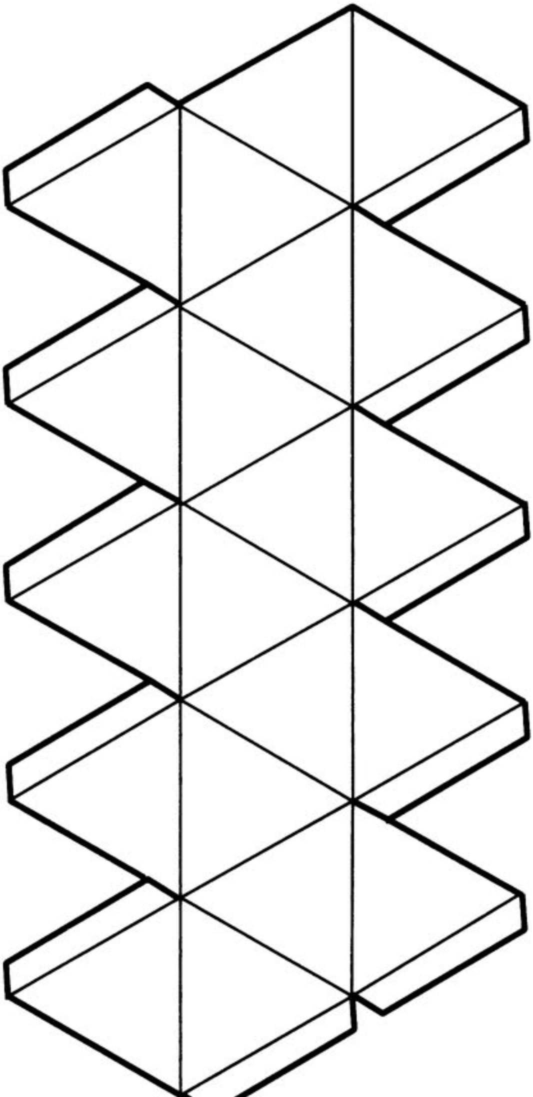
б)



в)



г)



д)

Содержание

Для детей старше шести лет.
В соответствии с Федеральным законом
от 29 декабря 2010 г. №436-ФЗ.

Учебное издание

Крижановский Александр Феликсович

Математические кружки. 5–7 классы

Подписано в печать 12.05.2016.
Формат 60x88/16. Усл. печ. л. 19,56.
Тираж 1500 экз. Заказ 2611.

ООО «Илекса», 107023, г. Москва, ул. Буженинова, д.30, стр. 4,
сайт: www.ilexa.ru, E-mail: real@ilexa.ru,
телефон 8(495) 964-35-67

Отпечатано в ООО «Типография «Миттель Пресс».
г. Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6.
Тел./факс +7 (495) 619-08-30, 647-01-89.
E-mail: mittelpress@mail.ru