

М.Л. КРАСНОВ
А.И. КИСЕЛЕВ
Г.И. МАКАРЕНКО



ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ



ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ
И СТУДЕНТОВ ВТУЗОВ

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

М. Л. КРАСНОВ
А. И. КИСЕЛЕВ
Г. И. МАКАРЕНКО

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

*Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия для студентов
высших технических учебных заведений*



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1978

517.2
К 78
УДК 517

Векторный анализ. М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», М., 1978, 160 стр.

Как и другие книги авторов, вышедшие в серии «Избранные главы высшей математики для инженеров и студентов втузов», книга «Векторный анализ» предназначена в основном для студентов технических вузов, а также для инженеров, решивших освежить в памяти такой важный раздел высшей математики, каким является векторный анализ.

В начале каждого параграфа приводится сводка основных теоретических положений, определений и формул, а также дается подробное решение примеров и задач.

В книге содержится около 300 задач и примеров для самостоятельного решения. Все они снабжены ответами или указаниями к решению. Многочисленные чертежи должны способствовать усвоению материала.

Илл. 42. Библ. 12.

К $\frac{20203-138}{053(02)-78}$ 21-78

© Главная редакция
физико-математической литературы
издательства «Наука», 1978

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Глава I. Вектор-функция скалярного аргумента . . .	7
§ 1. Годограф вектор-функции	7
§ 2. Предел и непрерывность вектор-функции скалярного аргумента	9
§ 3. Производная вектор-функции по скалярному аргументу	11
§ 4. Интегрирование вектор-функции скалярного аргумента	15
§ 5. Первая и вторая производные вектора по длине дуги кривой. Кривизна кривой. Главная нормаль	23
§ 6. Соприкасающаяся плоскость. Бинормаль. Кручение. Формулы Френе	26
Глава II. Скалярное поле	30
§ 7. Примеры скалярных полей. Поверхности и линии уровня	30
§ 8. Производная по направлению	33
§ 9. Градиент скалярного поля	37
Глава III. Векторное поле	45
§ 10. Векторные линии. Дифференциальные уравнения векторных линий	45
§ 11. Поток векторного поля. Способы вычисления потока	50
§ 12. Поток вектора через замкнутую поверхность. Теорема Гаусса — Остроградского	71
§ 13. Дивергенция векторного поля. Соленоидальное поле	74
§ 14. Линейный интеграл в векторном поле. Циркуляция векторного поля	81
§ 15. Ротор (вихрь) векторного поля	91
§ 16. Теорема Стокса	93
§ 17. Независимость линейного интеграла от пути интегрирования. Формула Грина	97
Глава IV. Потенциальное поле	102
§ 18. Признаки потенциальности поля	102
§ 19. Вычисление линейного интеграла в потенциальном поле	104

Г л а в а V. Оператор Гамильтона. Дифференциальные операции второго порядка. Оператор Лапласа	
§ 20. Оператор Гамильтона «набла»	110
§ 21. Дифференциальные операции второго порядка. Оператор Лапласа	114
§ 22. Векторный потенциал	123
Г л а в а VI. Криволинейные координаты. Основные операции векторного анализа в криволинейных координатах	
§ 23. Криволинейные координаты	128
§ 24. Основные операции векторного анализа в криволинейных координатах	131
§ 25. Оператор Лапласа в ортогональных координатах	148
Ответы	151
Приложение I	157
Приложение II	158
Литература	160

ПРЕДИСЛОВИЕ

Хорошая математическая подготовка современного инженера безусловно способствует новым достижениям техники в различных ее направлениях. Одной из математических дисциплин, имеющих большое значение в математическом образовании инженера, является векторный анализ, который в настоящее время включен в обязательную вузовскую программу курса высшей математики.

Предлагаемый сборник задач по векторному анализу содержит необходимый минимум задач и упражнений по курсу векторного анализа в объеме вузовской программы.

В начале каждого параграфа приводятся основные теоретические сведения и даются подробные решения достаточно большого числа типовых задач. В тексте разобрано 100 примеров, и для самостоятельного решения дается 314 задач. В книге имеется некоторое количество задач прикладного характера, которые выбраны так, чтобы их разбор не требовал от читателя дополнительных сведений из специальных дисциплин. Материал шестой главы, посвященный криволинейным координатам и основным операциям векторного анализа в криволинейных координатах, внесен в книгу из тех соображений, чтобы дать читателю хотя бы минимальное количество задач для приобретения необходимых навыков.

Методика изложения материала в сборнике близка к той, которая принята на кафедре высшей математики Московского энергетического института.

Книгу можно рассматривать как краткий курс векторного анализа, в котором сообщаются без доказательства основные факты с иллюстрацией их на конкретных примерах. Поэтому предлагаемый задачник может быть использован, с одной стороны, для повторения основ векторного анализа, а с другой — как учебное пособие

для лиц, которые, не вдаваясь в доказательства тех или иных предложений и теорем, хотят овладеть техникой операций векторного анализа.

При составлении задачника авторы использовали материал, содержащийся в имеющихся курсах векторного исчисления и сборниках задач. Значительная часть задач составлена самими авторами.

Сборник задач рассчитан на студентов дневных и вечерних отделений технических вузов, а также для студентов-заочников, знакомых с векторной алгеброй и математическим анализом в объеме первых двух курсов вуза.

Мы выражаем нашу искреннюю благодарность профессору В. П. Громову (МПИ им. Н. К. Крупской), профессору А. В. Ефимову и доцентам И. М. Петрову, Б. И. Фридлендеру, В. Н. Земскову (МИЭТ) за их тщательный просмотр рукописи книги и за ценные и полезные советы и замечания, которые нами были учтены при окончательном редактировании.

Все замечания и пожелания, направленные на улучшение книги, будут приняты нами с благодарностью.

Москва — Дубна, 1977 г.

*М. Л. Краснов
А. И. Киселев
Г. И. Макаренко*

**ВЕКТОР-ФУНКЦИЯ
СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА**

§ 1. Годограф вектор-функции

О п р е д е л е н и е 1. Вектор r называется *вектор-функцией* скалярного аргумента t , если каждому значению скаляра из области допустимых значений соответствует определенное значение вектора r . Будем это записывать так:

$$r = r(t).$$

Если вектор r является функцией скалярного аргумента t

$$r = r(t),$$

то координаты x, y, z вектора r также будут функциями аргумента t :

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Обратно, если координаты вектора r являются функциями t , то функцией t будет и сам вектор r :

$$r = x(t)i + y(t)j + z(t)k.$$

Таким образом, задание вектор-функции $r(t)$ равносильно заданию трех скалярных функций $x(t), y(t), z(t)$.

О п р е д е л е н и е 2. *Годографом* вектор-функции $r(t)$ скалярного аргумента называется геометрическое место точек, которое описывает конец вектора $r(t)$ при изменении скаляра t , когда начало вектора $r(t)$ помещено в фиксированную точку O пространства (рис. 1).

Годографом радиуса-вектора $r = r(t)$ движущейся точки будет сама траектория L этой точки. Годографом скорости $v = v(t)$ этой точки будет некоторая другая линия L_1 (рис. 2). Так, если материальная точка движется по окружности с постоянной скоростью $|v| = \text{const}$, то ее годограф скорости также представляет собой окружность с центром в точке O_1 и с радиусом, равным $|v|$.

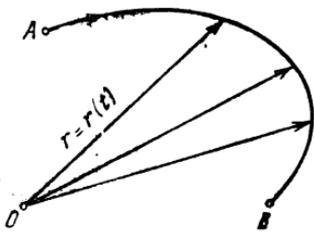


Рис. 1.

П р и м е р 1. Построить годограф вектора $r = ti + tj + t^2k$.

Решение. 1°. Это построение можно вести по точкам, составляя таблицу:

t	0	1	2	3	4
r	0	$i+j+k$	$2i+2j+4k$	$3i+3j+9k$	$4i+4j+16k$

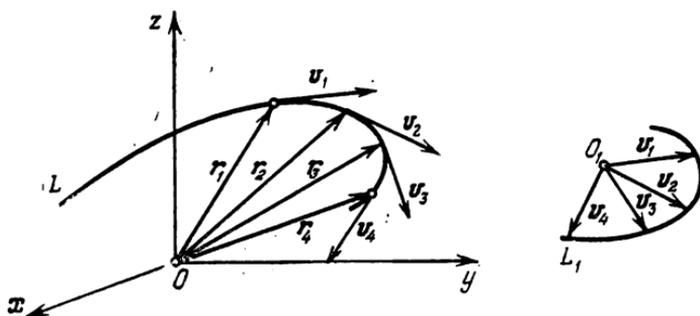


Рис. 2.

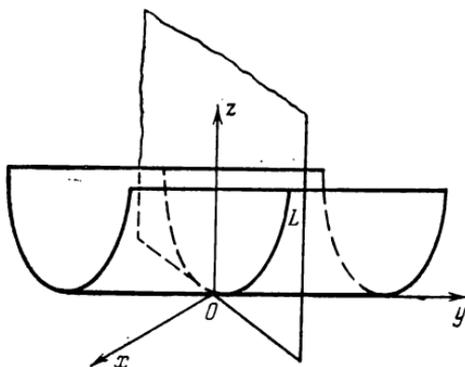


Рис. 3.

2°. Можно поступить и так. Обозначив через x, y, z координаты вектора r , будем иметь

$$x = t, \quad y = t, \quad z = t^2.$$

Исключая из этих уравнений параметр t , получим уравнения поверхностей $y = x, z = x^2$, линия пересечения L которых и определит годограф вектора $r(t)$ (рис. 3).

1. Построить годографы векторов:

а) $r = 2i + t^2j - t^2k$.

б) $r = \frac{t^2 + 1}{(t + 1)^2} i + \frac{2t}{(t + 1)^2} j$.

в) $r = \cos t \cdot i + \sin t \cdot j + k$.

г) $r = ti + \frac{1}{3}t^2j + \frac{1}{9}t^3k$.

д) $r = \frac{2ti + 2tj + (t^2 - 2)k}{t^2 + 2}$.

§ 2. Предел и непрерывность вектор-функции скалярного аргумента

Пусть вектор-функция $r = r(t)$ скалярного аргумента t определена в некоторой окрестности значения t_0 аргумента t , кроме, быть может, самого значения t_0 .

О п р е д е л е н и е 1. Постоянный вектор A называется *пределом* вектора $r(t)$ при $t \rightarrow t_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $t \neq t_0$, удовлетворяющих условию $|t - t_0| < \delta$, выполняется неравенство

$$|r(t) - A| < \varepsilon.$$

Как и в обычном анализе, пишут $\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = A$.

Геометрически это означает, что вектор $r(t)$ при $t \rightarrow t_0$ стремится к вектору A как по длине, так и по направлению (рис. 4).

О п р е д е л е н и е 2. Вектор $\alpha(t)$ называется *бесконечно малым* при $t \rightarrow t_0$, если $\alpha(t)$ имеет предел при $t \rightarrow t_0$ и этот предел равен нулю:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = 0,$$

или, что то же, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $t \neq t_0$, удовлетворяющих условию $|t - t_0| < \delta$, выполняется неравенство $|\alpha(t)| < \varepsilon$.

П р и м е р 1. Показать, что вектор $\alpha(t) = ti + \sin tj$ есть бесконечно малый вектор при $t \rightarrow 0$.

Р е ш е н и е. Имеем

$$|\alpha(t)| = |ti + \sin tj| \leq |t| + |\sin t| \leq 2|t|,$$

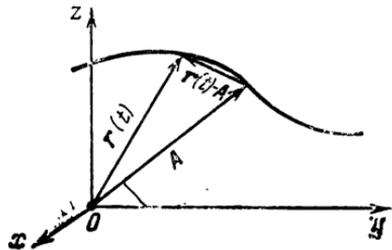


Рис. 4.

откуда видно, что если для всякого $\varepsilon > 0$ взять $\delta = \varepsilon/2$, то при $|t - 0| < \delta = \varepsilon/2$ будем иметь $|\alpha(t)| < \varepsilon$. Согласно определению это означает, что $\alpha(t)$ есть бесконечно малый вектор при $t \rightarrow 0$.

2. Показать, что предел модуля вектора равен модулю его предела, если последний предел существует.

3. Доказать, что для того, чтобы вектор-функция $r(t)$ имела при $t \rightarrow t_0$ предел A , необходимо и достаточно, чтобы $r(t)$ можно было представить в виде

$$r(t) = A + \alpha(t),$$

где $\alpha(t)$ — бесконечно малый при $t \rightarrow t_0$ вектор.

4. Показать, что если вектор-функции $a(t)$ и $b(t)$ имеют при $t \rightarrow t_0$ пределы

$$\lim_{t \rightarrow t_0} a(t) = A, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} b(t) = B,$$

то их сумма $a(t) + b(t)$ и разность $a(t) - b(t)$ также имеют пределы при $t \rightarrow t_0$, причем

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [a(t) \pm b(t)] = A \pm B.$$

5. Пусть

$$\lim_{t \rightarrow t_0} a(t) = A, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} b(t) = B.$$

Доказать, что

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (a(t), b(t)) = (A, B),$$

где $(a(t), b(t))$ — скалярное произведение вектор-функций $a(t)$ и $b(t)$.

6. Пусть

$$r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k, \quad A = a_1i + a_2j + a_3k.$$

Показать, что если $\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = A$, то

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a_1, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = a_2, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = a_3.$$

Найти следующие пределы:

$$7. \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t} i + \frac{\cos t - 1}{2t} j + e^{t^2} k \right).$$

$$8. \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \sqrt{t}}{1 - t} i + \frac{t}{1 + t} j + k \right).$$

9. $\lim_{t \rightarrow \pi} \left(\frac{\sin t}{t} i + \cos t \cdot j + \frac{k}{t + \pi} \right)$.
10. $\lim_{t \rightarrow \pi} \left(\frac{\sin t}{t - \pi} i + \frac{1 + \cos t}{t} j + \frac{t}{\pi} k \right)$.
11. $\lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{e^t - e}{t - 1} i + \frac{\ln t}{1 - t} j + 2k \right)$.

О п р е д е л е н и е 3. Вектор-функция $r = r(t)$, определенная в некоторой окрестности значения $t = t_0$, называется *непрерывной* при $t = t_0$, если

$$\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = r(t_0).$$

Иными словами, $r = r(t)$ непрерывна при $t = t_0$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех t , удовлетворяющих условию $|t - t_0| < \delta$, верно неравенство $|r(t) - r(t_0)| < \varepsilon$.

Годографом непрерывной вектор-функции скалярного аргумента является непрерывная кривая.

12. Исходя из известного неравенства $|a - b| \geq \geq ||a| - |b||$, показать, что непрерывность векторной функции влечет за собой непрерывность ее модуля. Верно ли обратное предложение?

13. Показать, что если $a(t)$ и $b(t)$ непрерывны при $t = t_0$, то вектор-функция $a(t) \pm b(t)$ также непрерывна при $t = t_0$.

14. Вектор-функция $a(t) + b(t)$ непрерывна при $t = t_0$. Следует ли отсюда, что векторы $a(t)$ и $b(t)$ также непрерывны при $t = t_0$?

15. Доказать, что если $a(t)$ и $b(t)$ — непрерывные вектор-функции, то их скалярное произведение $(a(t), b(t))$ и векторное произведение $[a(t), b(t)]$ также непрерывны.

§ 3. Производная вектор-функции по скалярному аргументу

Пусть вектор-функция $r = r(t)$ определена для всех t из интервала (t_0, t_1) . Возьмем некоторое значение $t \in (t_0, t_1)$, дадим t приращение Δt такое, чтобы $t + \Delta t \in (t_0, t_1)$, и найдем соответствующее приращение $\Delta r = r(t + \Delta t) - r(t)$ вектор-функции $r(t)$. Рассмотрим далее отношение $\frac{\Delta r}{\Delta t}$.

О п р е д е л е н и е. Если при $\Delta t \rightarrow 0$ отношение $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ имеет предел, то этот предел называется *производной* вектор-функции $r = r(t)$ по скалярному аргументу t при данном значении t

аргумента и обозначается $\frac{dr(t)}{dt}$ (а также $r'(t)$ или $\dot{r}(t)$). Таким образом,

$$\frac{dr(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t}.$$

В этом случае вектор-функция $r = r(t)$ называется *дифференцируемой*.

16. Показать, что если вектор-функция $r = r(t)$ имеет производную при некотором значении t аргумента, то она непрерывна при этом значении t .

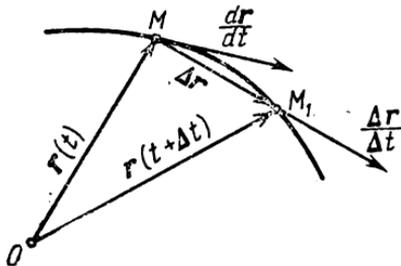


Рис. 5.

Производная вектор-функции $r(t)$ скалярного аргумента t есть вектор, направленный по касательной к годографу исходного вектора в рассматриваемой точке (рис.5).

При этом вектор $\frac{dr}{dt}$ направлен в ту сторону, куда перемещается конец вектора $r(t)$ по годографу, когда параметр t растет.

Пусть $r = r(t)$ есть радиус-вектор движущейся точки. Тогда вектор $v = \frac{dr}{dt}$ есть вектор скорости этой точки.

Пусть

$$r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k,$$

где функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ дифференцируемы в точке t . Тогда существует $\frac{dr}{dt}$ при этом значении t и

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{dt}k. \quad (1)$$

Пример 1. Найти $\frac{dr}{dt}$, если $r = ia \cos t + jb \sin t$ (точка движется по эллипсу).

Решение. По формуле (1)

$$\frac{dr}{dt} = -ia \sin t + jb \cos t.$$

По аналогии с дифференциалом скалярной функции *дифференциал вектор-функции* $r = r(t)$ есть вектор dr , определяемый

равенством

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot dt,$$

где $dt = \Delta t$ — приращение скалярного аргумента t .
Как и для скалярных функций,

$$\Delta \mathbf{r} = d\mathbf{r} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \Delta t,$$

где $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(t, \Delta t) \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$.

Основные правила дифференцирования вектор-функций

Предположим, что все рассматриваемые функции (как скалярные, так и векторные) непрерывны и дифференцируемы.

1°. Если \mathbf{c} — постоянный вектор, то $\frac{d\mathbf{c}}{dt} = 0$.

2°. Производная суммы вектор-функций равна сумме производных слагаемых

$$\frac{d(\mathbf{a}(t) + \mathbf{b}(t))}{dt} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{b}}{dt}.$$

3°. Пусть вектор-функция $\mathbf{a}(t)$ умножается на скалярную функцию $m(t)$ того же скалярного аргумента. Тогда

$$\frac{d(m\mathbf{a})}{dt} = m \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{dm}{dt} \mathbf{a}.$$

$$4^\circ. \quad \frac{d(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{dt} = \left(\mathbf{a}, \frac{d\mathbf{b}}{dt} \right) + \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}, \mathbf{b} \right).$$

$$5^\circ. \quad \frac{d[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{dt} = \left[\frac{d\mathbf{a}}{dt}, \mathbf{b} \right] + \left[\mathbf{a}, \frac{d\mathbf{b}}{dt} \right].$$

(В этой формуле в правой части надо соблюдать тот же порядок множителей \mathbf{a} и \mathbf{b} , что и в левой части.)

Докажем, например, формулу 4°. Положим $\varphi(t) = (\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t))$. Дадим t приращение Δt ; будем иметь в силу распределительного свойства для скалярного произведения

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t) = (\mathbf{a} + \Delta \mathbf{a}, \mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}) - (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \\ &= (\Delta \mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \Delta \mathbf{b}) + (\Delta \mathbf{a}, \Delta \mathbf{b}). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta t}, \mathbf{b} \right) + \left(\mathbf{a}, \frac{\Delta \mathbf{b}}{\Delta t} \right) + \left(\frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta t}, \Delta \mathbf{b} \right). \quad (2)$$

По условию функции $\mathbf{a}(t)$ и $\mathbf{b}(t)$ имеют производные при значении t аргумента и, значит, непрерывны при этом значении t . Поэтому

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{a}}{dt}, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{b}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{b}}{dt}, \quad \text{а} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \mathbf{b} = 0.$$

Переходя в (2) к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим

$$\frac{d(a, b)}{dt} = \left(\frac{da}{dt}, b \right) + \left(a, \frac{db}{dt} \right).$$

17. Дано $r = r(t)$. Найти производные

$$\text{а) } \frac{d}{dt}(r^2); \quad \text{б) } \frac{d}{dt} \left(r, \frac{dr}{dt} \right); \quad \text{в) } \frac{d}{dt} \left[r, \frac{dr}{dt} \right].$$

18. Доказать, что если модуль $|r|$ вектор-функции $r = r(t)$ остается постоянным для всех значений t , то $\frac{dr}{dt} \perp r$. Каков геометрический смысл этого факта?

19. Доказать, что если e — единичный вектор направления вектора E , то

$$[e, de] = \frac{[E, dE]}{|E|^2}.$$

20. Пусть

$$u = u_1(x, y, z, t)i + u_2(x, y, z, t)j + u_3(x, y, z, t)k,$$

где u_1, u_2, u_3 — непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов, а x, y, z — непрерывно дифференцируемые функции от t . Показать, что

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

21. Найти траекторию движения, для которого радиус-вектор $r(t)$ движущейся точки удовлетворяет условию $\frac{dr}{dt} = [a, r]$, где a — постоянный вектор.

Производная $\frac{dr}{dt}$ вектор-функции $r(t)$ скалярного аргумента является вектор-функцией того же аргумента. Если существует производная от $\frac{dr}{dt}$, то она называется *производной второго порядка* и обозначается $\frac{d^2r}{dt^2}$. Вообще

$$\frac{d^n r}{dt^n} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d^{n-1} r}{dt^{n-1}} \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

22. Дан радиус-вектор движущейся в пространстве точки

$$\mathbf{r} \{a \sin t, -a \cos t, bt^2\}$$

(t — время, a и b — постоянные). Найти годографы скорости и ускорения.

23. Дано: $\mathbf{r} = a \cos \omega t + b \sin \omega t$, где ω , a , b — постоянные. Доказать, что

$$1) \quad \left[\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right] = [\omega a, b],$$

$$2) \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \omega^2\mathbf{r} = 0.$$

24. Показать, что если $\mathbf{r} = a e^{\omega t} + b e^{-\omega t}$, где a и b — постоянные векторы, то $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - \omega^2\mathbf{r} = 0$.

25. Показать, что модуль дифференциала радиуса-вектора точки равен дифференциалу длины дуги, описываемой этой точкой.

26. Пусть $\mathbf{a} = \mathbf{a}(u)$ есть вектор-функция скаляра u , где u в свою очередь есть некоторая скалярная функция от основного скаляра t . Предполагая $\mathbf{a}(u)$ и $u = u(t)$ дифференцируемыми нужное число раз, найти выражение для производных сложной функции $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$, $\frac{d^2\mathbf{a}}{dt^2}$.

§ 4. Интегрирование вектор-функции скалярного аргумента

Определение 1. Будем называть вектор-функцию $A(t)$ *первообразной функцией* для вектор-функции $\mathbf{a}(t)$ при $t_0 < t < t_1$, если $A(t)$ дифференцируема и

$$\frac{dA}{dt} = \mathbf{a}(t), \quad t \in (t_0, t_1).$$

Определение 2. *Неопределенным интегралом* от вектор-функции скалярного аргумента $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ называется совокупность всех первообразных для $\mathbf{a}(t)$. Неопределенный интеграл от вектор-функции, как и в интегральном исчислении, обозначается знаком \int . Имеем

$$\int \mathbf{a}(t) dt = A(t) + C,$$

где $A(t)$ — какая-нибудь из первообразных для $\mathbf{a}(t)$, \mathbf{C} — произвольный постоянный вектор.

Для интегралов от вектор-функций справедливы следующие свойства:

$$1^\circ. \int \alpha \mathbf{a}(t) dt = \alpha \int \mathbf{a}(t) dt \quad (\alpha - \text{числовая постоянная}).$$

$$2^\circ. \int (\mathbf{a}(t) \pm \mathbf{b}(t)) dt = \int \mathbf{a}(t) dt \pm \int \mathbf{b}(t) dt.$$

27. Показать, что если \mathbf{c} — постоянный вектор, $\mathbf{a}(t)$ — переменный вектор, то

$$\int (\mathbf{c}, \mathbf{a}(t)) dt = \left(\mathbf{c}, \int \mathbf{a}(t) dt \right),$$

$$\int [\mathbf{c}, \mathbf{a}(t)] dt = \left[\mathbf{c}, \int \mathbf{a}(t) dt \right].$$

Если

$$\mathbf{a}(t) = a_1(t)\mathbf{i} + a_2(t)\mathbf{j} + a_3(t)\mathbf{k},$$

то

$$\int \mathbf{a}(t) dt = \mathbf{i} \int a_1(t) dt + \mathbf{j} \int a_2(t) dt + \mathbf{k} \int a_3(t) dt, \quad (1)$$

т. е. интегрирование векторной функции сводится к трем обычным интегрированиям.

Пример 1. Найти неопределенный интеграл для векторной функции $\mathbf{a}(t) = \mathbf{i} \cos t + \mathbf{j} e^{-t} + \mathbf{k}$.

Решение. Согласно формуле (1)

$$\int \mathbf{a}(t) dt = \mathbf{i} \int \cos t dt + \mathbf{j} \int e^{-t} dt + \mathbf{k} \int dt = \mathbf{i} \sin t - \mathbf{j} e^{-t} + \mathbf{k}t + \mathbf{c},$$

где \mathbf{c} — произвольный постоянный вектор.

Найти интегралы от следующих вектор-функций:

$$28. \mathbf{a}(t) = t e^t \mathbf{i} + \sin^2 t \mathbf{j} - \frac{\mathbf{k}}{1+t^2}.$$

$$29. \mathbf{a}(t) = \frac{t \mathbf{i}}{1+t^2} + t e^{t^2} \mathbf{j} + \cos t \mathbf{k}.$$

$$30. \mathbf{a}(t) = \cos t e^{\sin t} \cdot \mathbf{i} - t \cos t^2 \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

$$31. \mathbf{a}(t) = \frac{1}{2} t^2 \mathbf{i} - t \sin t \cdot \mathbf{j} + 2^t \mathbf{k}.$$

Пусть вектор-функция $\mathbf{a}(t)$ определена и непрерывна на некотором отрезке $[t_0, T]$ изменения аргумента t .

Определение 3. *Определенным интегралом* от вектор-функции $\mathbf{a}(t)$ на отрезке $[t_0, T]$ называется предел векторных интегральных сумм

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{a}(\tau_k) \Delta t_k, \quad \tau_k \in [t_k, t_{k+1}],$$

при стремлении к нулю длины Δt наибольшего из отрезков $[t_k, t_{k+1}]$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$), на которые разбит отрезок $[t_0, T]$:

$$\int_{t_0}^T \mathbf{a}(t) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{a}(\tau_k) \Delta t_k.$$

Справедлива формула

$$\int_{t_0}^T \mathbf{a}(t) dt = A(T) - A(t_0), \quad (2)$$

где $A(t)$ — какая-нибудь первообразная для функции $\mathbf{a}(t)$ на $[t_0, T]$.
Если

$$\mathbf{a}(t) = a_1(t)\mathbf{i} + a_2(t)\mathbf{j} + a_3(t)\mathbf{k},$$

то

$$\int_{t_0}^T \mathbf{a}(t) dt = \mathbf{i} \int_{t_0}^T a_1(t) dt + \mathbf{j} \int_{t_0}^T a_2(t) dt + \mathbf{k} \int_{t_0}^T a_3(t) dt. \quad (3)$$

Пример 2. Вычислить $\int_0^{\pi/2} \mathbf{a}(t) dt$, где $\mathbf{a}(t) = \mathbf{i} \cos t - \mathbf{j} \sin^2 t$.

Решение. В силу формулы (3)

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \mathbf{a}(t) dt &= \mathbf{i} \int_0^{\pi/2} \cos t dt - \mathbf{j} \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = \\ &= \mathbf{i} \sin t \Big|_0^{\pi/2} - \mathbf{j} \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \mathbf{i} - \frac{\pi}{4} \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Вычислить следующие интегралы:

$$32. \int_0^{\pi} \mathbf{a}(t) dt, \text{ где } \mathbf{a} = \sin^2 t \cos t \cdot \mathbf{i} + \cos^2 t \cdot \sin t \cdot \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

$$33. \int_0^1 \mathbf{a}(t) dt, \text{ где } \mathbf{a} = \frac{\mathbf{i}e^{-1/2}}{2} + \frac{\mathbf{j}e^{t/2}}{2} + \mathbf{k}et.$$

$$34. \int_0^1 \mathbf{a}(t) dt, \text{ где } \mathbf{a} = 3\pi \cos \pi t \cdot \mathbf{i} - \frac{\mathbf{j}}{1+t} + 2t\mathbf{k}.$$

$$35. \int_0^{\pi} \mathbf{a}(t) dt, \text{ где } \mathbf{a} = (2t + \pi)\mathbf{i} + t \sin t \cdot \mathbf{j} + \pi\mathbf{k}.$$

Пример 3. Электрический ток силы I течет снизу вверх по бесконечному проводу, совпадающему с осью Oz . Найти вектор \mathbf{H} напряженности магнитного поля, создаваемого этим током в произвольной точке $M(x, y, z)$ пространства (рис. 6).

Решение. Рассмотрим достаточно малый элемент $PP_1 = d\xi$ оси Oz . По закону Био — Савара напряжение $d\mathbf{H}$ магнитного

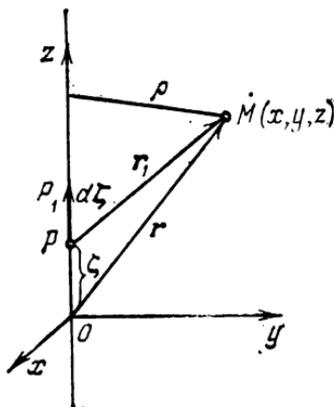


Рис. 6.

поля, создаваемого в точке M током, протекающим по элементу провода $d\xi$, совпадает по направлению с векторным произведением $[d\xi, \mathbf{r}_1]$, где $d\xi = \vec{PP}_1$, $|d\xi| = d\xi$, $\mathbf{r}_1 = \vec{PM}$ (см. рис. 6). По этому же закону модуль вектора $d\mathbf{H}$ равен

$$|d\mathbf{H}| = \frac{I}{r_1^2} \sin(d\xi, \hat{\mathbf{r}}_1) d\xi,$$

где $(d\xi, \hat{\mathbf{r}}_1)$ — угол, образованный векторами $d\xi$ и \mathbf{r}_1 . Поскольку

$$|[d\xi, \mathbf{r}_1]| = r_1 d\xi \sin(d\xi, \hat{\mathbf{r}}_1),$$

можно написать

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{r_1^3} [d\xi, \mathbf{r}_1]. \quad (4)$$

Чтобы получить искомый вектор \mathbf{H} в точке M , нужно просуммировать все векторы $d\mathbf{H}$, относящиеся к различным элементам PP_1 провода, т. е. проинтегрировать выражение (4) по всей оси Oz :

$$\mathbf{H} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I}{r_1^3} [d\xi, \mathbf{r}_1]. \quad (5)$$

Имеем

$$\mathbf{r}_1 = \vec{OM} - \vec{OP}.$$

Но

$$\vec{OM} = xi + yj + zk, \quad \vec{OP} = \zeta k,$$

поэтому

$$\mathbf{r}_1 = xi + yj + (z - \zeta)k,$$

так что

$$r_1 = |\mathbf{r}_1| = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - \zeta)^2} = \sqrt{\rho^2 + (z - \zeta)^2},$$

где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ — расстояние точки M до оси провода.
Для векторного произведения $[d\zeta, \mathbf{r}_1]$ имеем

$$[d\zeta, \mathbf{r}_1] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & d\zeta \\ x & y & z - \zeta \end{vmatrix} = -iy d\zeta + jx d\zeta,$$

и формула (5) принимает вид (точка $M(x, y, z)$ фиксирована, $I = \text{const}$)

$$\mathbf{H} = I(-yi + xj) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\zeta}{[\rho^2 + (z - \zeta)^2]^{3/2}}. \quad (6)$$

Для вычисления интеграла в правой части (6) сделаем подстановку

$$\zeta - z = \rho \operatorname{tg} t, \quad d\zeta = \frac{\rho dt}{\cos^2 t}.$$

Будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\zeta}{[\rho^2 + (z - \zeta)^2]^{3/2}} &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\rho dt}{\cos^2 t [\rho^2 + \rho^2 \operatorname{tg}^2 t]^{3/2}} = \\ &= \frac{1}{\rho^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t dt = \frac{2}{\rho^2}. \end{aligned}$$

Итак, вектор напряженности \mathbf{H} магнитного поля в нашем случае определяется формулой

$$\mathbf{H} = \frac{2I}{\rho^2} (-yi + xj).$$

или

$$H = \frac{2}{\rho^2} [I, r],$$

где $I = I \cdot k$ — вектор тока, r — радиус-вектор точки $M(x, y, z)$ поля, ρ — расстояние точки M до оси провода.

Пример 4. Движение электрона в однородном магнитном поле.

1° Пусть в какой-либо области пространства создано магнитное поле H , постоянное по величине и направлению (однородное поле).

Пусть в момент времени $t = t_0$ в это поле попадает электрон с начальной скоростью v_0 . Определить траекторию электрона.

Решение. Предположим сначала, что вектор v_0 перпендикулярен к H и что начальное положение электрона — в точке M_0 . Выберем начало O в произвольной точке плоскости P , проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору H (рис. 7).

Начальный радиус-вектор \vec{OM}_0 пусть будет r_0 и пусть r — радиус-вектор электрона в текущий момент времени t , а v — мгновенная скорость

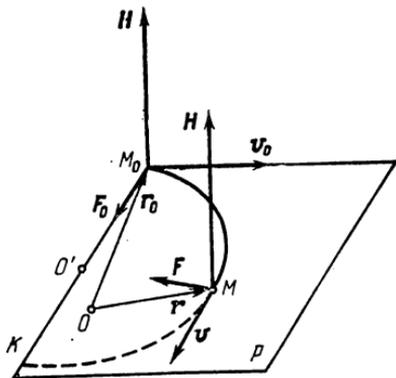


Рис. 7.

в этот момент. Основное дифференциальное уравнение движения

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = F.$$

Сила F , действующая в момент t на электрон со стороны магнитного поля, как известно, равна

$$F = -e_0 [H, v],$$

где e_0 — абсолютная величина заряда электрона. Таким образом,

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = e_0 [v, H]. \quad (7)$$

Сила F в каждый момент t перпендикулярна к направлению скорости и к направлению поля H ; она будет заставлять электрон в каждый момент уклоняться от прямолинейного пути и описывать некоторую криволинейную траекторию.

Перепишем уравнение (7) в виде

$$m \frac{dv}{dt} = e_0 \left[\frac{dr}{dt}, H \right]$$

и проинтегрируем его по t от t_0 до t . Получим

$$mv - mv_0 = e_0[r, H] - e_0[r_0, H]$$

или

$$mv = e_0[r, H] + (mv_0 - e_0[r_0, H]). \quad (8)$$

Выберем теперь начало координат O' так, чтобы обратилось в нуль слагаемое, стоящее в круглых скобках в правой части (8), т. е. чтобы

$$e_0[r_0, H] = mv_0. \quad (9)$$

Из (9) следует, что начальный вектор r_0 должен быть перпендикулярен к вектору v_0 и лежать на прямой M_0K , перпендикулярной к плоскости векторов v_0 и H . Модуль вектора r_0 в силу (9) должен удовлетворять соотношению

$$e_0|r_0| \cdot |H| = m|v_0|,$$

откуда

$$|r_0| = \frac{m|v_0|}{e_0|H|}. \quad (10)$$

Этим положением нового начала O' определено. Относительно него уравнение (8) перепишется так:

$$mv = e_0[r, H] \quad (11)$$

или

$$m \frac{dr}{dt} = e_0[r, H] \quad (12)$$

Из уравнения (11) вытекает, что траекторией электрона будет плоская кривая, лежащая в плоскости P , так как вектор v в каждый момент времени перпендикулярен к H . Умножим теперь обе части уравнения (12) скалярно на r :

$$m \left(r, \frac{dr}{dt} \right) = e_0(r, [r, H]). \quad (13)$$

Смешанное произведение в правой части (13) равно нулю, так что

$$\left(r, \frac{dr}{dt} \right) = 0.$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt}(r^2) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt}(r^2) = 0, \quad \text{т. е.} \quad r^2 = \text{const.}$$

Это — уравнение окружности, лежащей в плоскости P , с центром в выбранной нами точке O' . Радиус этой окружности определяется формулой (10), поскольку начальная точка M_0 также должна лежать

на этой окружности. Итак, окончательно

$$r = r_0 = \frac{m |v_0|}{e_0 |H|}. \quad (10)$$

Таким образом, если электрон попадает в однородное магнитное поле H с начальной скоростью v_0 , перпендикулярной к H , то он будет описывать в этом поле круговую траекторию, лежащую в плоскости P , перпендикулярной к H и проходящей через начальную точку. Радиус этой окружности определяется формулой (10), а ее центр O' лежит на прямой, перпендикулярной к плоскости векторов v_0 и H , причем из точки O' , поворот от v_0 к H должен быть виден против часовой стрелки.

Из формулы (10) видно, что радиус r_0 окружности обратно пропорционален $|H|$. Таким образом, чем сильнее напряженность магнитного поля, тем больше кривизна траектории.

Из формулы (11)

$$mv = e_0 [r, H]$$

видно, что если r постоянен по модулю и все время перпендикулярен к H , то и скорость v точки будет постоянна по величине:

$$|v| = v_0 = \text{const},$$

так что электрон движется по орбите равномерно. Период обращения T равен

$$T = \frac{2\pi r_0}{v_0} = 2\pi \frac{m}{e_0 |H|}. \quad (14)$$

В эту формулу не входит начальная скорость v_0 . Таким образом, с какой бы начальной скоростью v_0 , перпендикулярной к H , ни попал электрон в однородное магнитное поле H , он будет совершать один оборот по орбите всегда в одно и то же время T , независимо от величины v_0 .

2°. Пусть теперь электрон попадает в однородное магнитное поле H с какой-либо начальной скоростью V , которая не перпендикулярна вектору H . Тогда эту скорость V можно разложить на две составляющие: вектор v_0 , направленный перпендикулярно полю, и вектор v_1 , направленный вдоль магнитного поля.

Из формулы

$$F = e [V, H] = e_0 [v_0, H]$$

видно, что «закручивающая» сила F будет определяться только перпендикулярной составляющей v_0 и она сообщит электрону вра-

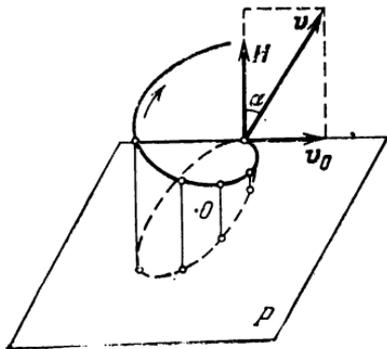


Рис. 8.

щательное движение по кругу (с центром в O' , рассмотренному выше. Что касается второй составляющей v_1 , то электрон сохранит ее по инерции и будет, кроме кругового равномерного движения, перемещаться еще прямолинейно и равномерно вдоль направления H со скоростью $v_1 = |V| \cos \alpha$. Сочетание этих движений даст винтовую линию с осью, параллельной вектору H и проходящей через точку O' (рис. 8).

§ 5. Первая и вторая производные вектора по длине дуги кривой. Кривизна кривой. Главная нормаль

Рассмотрим в пространстве некоторую линию L . Выберем на ней какую-либо точку M_0 в качестве начала отсчета и выберем также какое-либо направление вдоль линии L , которое будем считать по-

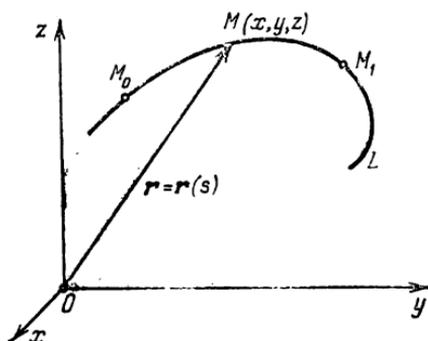


Рис. 9.

ложительным. В качестве параметра возьмем длину дуги s , отсчитываемую от точки M_0 кривой (рис. 9). Тогда радиус-вектор точки M кривой будет

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s).$$

При таком выборе параметра

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \boldsymbol{\tau}^0,$$

где $\boldsymbol{\tau}^0$ — единичный вектор, направленный по касательной к линии L в сторону возрастания параметра s .

Если вектор \mathbf{r} задан координатами:

$$\mathbf{r} = xi + yj + zk,$$

то

$$\boldsymbol{\tau}^0 = \frac{dx}{ds} \mathbf{i} + \frac{dy}{ds} \mathbf{j} + \frac{dz}{ds} \mathbf{k},$$

причем

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} = 1.$$

Так как $|\tau^0| = 1$, то вектор $\frac{d\tau^0}{ds}$ ортогонален вектору τ^0 .

Модуль вектора $\frac{d\tau^0}{ds}$

$$\left|\frac{d\tau^0}{ds}\right| = K.$$

Здесь K — кривизна линии L в точке M .

Прямая, имеющая направление вектора $\frac{d\tau^0}{ds}$ и проходящая через точку M кривой, называется *главной нормалью* кривой в точке M . Обозначая единичный вектор этого направления через n^0 , будем иметь

$$\frac{d\tau^0}{ds} = Kn^0. \quad (1)$$

Величина, обратная кривизне кривой в данной точке, называется *радиусом кривизны* кривой в этой точке и обозначается через R :

$$R = \frac{1}{K}.$$

Поэтому формулу (1) можно переписать так:

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{d\tau^0}{ds} = \frac{n^0}{R}.$$

Отсюда

$$K = \frac{1}{R} = \left|\frac{d^2r}{ds^2}\right|$$

или

$$K = \frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}. \quad (2)$$

Формула (2) позволяет вычислить кривизну линии в любой точке, если эта линия задана параметрическими уравнениями, в которых параметром является длина дуги s .

В частном случае плоской кривой — окружности радиуса a

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \frac{s}{a}, \\ y &= a \sin \frac{s}{a} \end{aligned} \right\}$$

имеем

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{1}{a} \cos \frac{s}{a}, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{1}{a} \sin \frac{s}{a},$$

и формула (2) дает

$$K = \frac{1}{R} = \sqrt{\frac{1}{a^2} \cos^2 \frac{s}{a} + \frac{1}{a^2} \sin^2 \frac{s}{a}} = \frac{1}{a},$$

т. е. что кривизна окружности радиуса a постоянна и равна величине обратной радиусу окружности.

Если линия L определяется векторно-параметрическим уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, где параметр t — произвольный, то

$$K = \frac{1}{R} = \frac{\left| \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right] \right|}{\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|^3}. \quad (3)$$

Формула (3) дает возможность вычислить кривизну кривой в любой ее точке при произвольном параметрическом задании этой кривой.

Пример 1. Вычислить кривизну винтовой линии

$$\mathbf{r} = a \cos t \cdot \mathbf{i} + a \sin t \cdot \mathbf{j} + ht\mathbf{k}.$$

Решение. Так как

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -a \sin t \cdot \mathbf{i} + a \cos t \cdot \mathbf{j} + h\mathbf{k},$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -a \cos t \cdot \mathbf{i} - a \sin t \cdot \mathbf{j},$$

то векторное произведение

$$\left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a \sin t & a \cos t & h \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \end{vmatrix} = ah \sin t \cdot \mathbf{i} - ah \cos t \cdot \mathbf{j} + a^2\mathbf{k}.$$

Следовательно,

$$\left| \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right] \right| = a \sqrt{a^2 + h^2}, \quad \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \sqrt{a^2 + h^2}.$$

В силу формулы (3)

$$K = \frac{1}{R} = \frac{a}{a^2 + h^2}$$

или

$$R = \frac{a^2 + h^2}{a} = \text{const.}$$

Таким образом, винтов я линия имеет постоянный радиус кривизны.

Найти радиус кривизны данных линий:

$$36. \mathbf{r} = \ln \cos t \cdot \mathbf{i} + \ln \sin t \cdot \mathbf{j} + \sqrt{2t} \cdot \mathbf{k}.$$

$$37. \mathbf{r} = t^2 \mathbf{i} + 2t^3 \mathbf{j}.$$

$$38. \mathbf{r} = 3t^2 \mathbf{i} + (3t - t^3) \mathbf{j} + 2t \mathbf{k} \text{ при } t = 1.$$

$$39. \mathbf{r} = a (\cos t + t \sin t) \mathbf{i} + a (\sin t - t \cos t) \mathbf{j} \text{ при } t = \pi/2.$$

$$40. \mathbf{r} = a \operatorname{ch} t \cdot \mathbf{i} + a \operatorname{sh} t \cdot \mathbf{j} + at \mathbf{k} \text{ в любой точке } t.$$

§ 6. Соприкасающаяся плоскость. Бинормаль. Кручение. Формулы Френе

Плоскость, проходящая через касательную прямую и главную нормаль к данной кривой L в точке M , называется *соприкасающейся плоскостью* в точке M .

Для плоской кривой соприкасающаяся плоскость совпадает с плоскостью кривой.

Если вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ имеет непрерывную производную $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ в окрестности точки t_0 и, кроме того, вторую производную $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}(t_0)$ такую, что

$$\left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0), \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}(t_0) \right] \neq 0,$$

то в точке $t=t_0$ существует соприкасающаяся плоскость к кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, векторное уравнение которой

$$\left(\rho - \mathbf{r}(t_0), \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0), \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}(t_0) \right] \right) = 0,$$

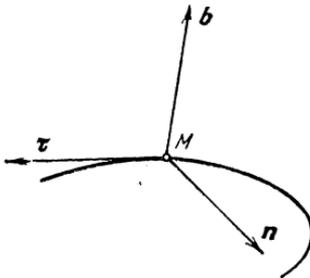


Рис. 10.

где $\rho = \rho(t)$ — радиус-вектор текущей точки плоскости.
Нормаль к кривой в точке M , перпендикулярная к соприкасающейся плоскости кривой в этой точке, называется *бинормалью* кривой в данной точке M .
Обозначим через \mathbf{b}^0 единичный вектор бинормали, ориентированный так, чтобы векторы $\tau^0, \mathbf{n}^0, \mathbf{b}^0$ образовывали правую тройку (рис. 10). Тогда

$$\mathbf{b}^{0^2} = 1, \quad \mathbf{b}^0 = [\tau^0, \mathbf{n}^0].$$

Для производной $\frac{db^0}{ds}$ получаем

$$\frac{db^0}{ds} = \left[\tau^0, \frac{dn^0}{ds} \right].$$

Вектор $\frac{db^0}{ds}$ перпендикулярен и вектору τ^0 , и вектору b^0 , т. е. он коллинеарен вектору n^0 . Положим

$$\left| \frac{db^0}{ds} \right| = \frac{1}{T},$$

тогда будем иметь

$$\frac{db^0}{ds} = \frac{1}{T} n^0.$$

Величина $\frac{1}{T}$ называется *кручением* данной кривой, а величину T называют *радиусом кручения* кривой.

Кручение кривой определяется формулой

$$\frac{1}{T} = R^2 \left(\frac{dr}{ds}, \frac{d^2r}{ds^2}, \frac{d^3r}{ds^3} \right),$$

где символ (a, b, c) обозначает смешанное произведение векторов a, b, c , т. е. $(a, b, c) = (a, [b, c])$.

В случае, когда кривая задана векторно-параметрическим уравнением $r = r(t)$, имеем

$$\frac{1}{T} = \frac{\left(\frac{dr}{dt}, \frac{d^2r}{dt^2}, \frac{d^3r}{dt^3} \right)}{\left| \left[\frac{dr}{dt}, \frac{d^2r}{dt^2} \right] \right|^2}. \quad (1)$$

Пример 1. Найти кручение винтовой линии

$$r = a \cos t \cdot i + a \sin t \cdot j + ht k.$$

Решение. Находим производные данного вектора

$$\frac{dr}{dt} = -a \sin t \cdot i + a \cos t \cdot j + hk,$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -a \cos t \cdot i - a \sin t \cdot j,$$

$$\frac{d^3r}{dt^3} = a \sin t \cdot i - a \cos t \cdot j.$$

Смешанное произведение этих векторов

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} \right) = \begin{vmatrix} -a \sin t & a \cos t & h \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \\ a \sin t & -a \cos t & 0 \end{vmatrix} = a^2 h.$$

В примере 1, § 5 найдено, что

$$\left| \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right] \right|^2 = a^2 (a^2 + h^2).$$

Применяя формулу (1), получим для кручения

$$\frac{1}{T'} = \frac{h}{a^2 + h^2}.$$

Таким образом, кручение винтовой линии во всех ее точках одно и то же.

Пример 2. Написать уравнение соприкасающейся плоскости в точке $t = 0$ винтовой линии

$$\mathbf{r} = a \cos t \cdot \mathbf{i} + a \sin t \cdot \mathbf{j} + ht\mathbf{k}.$$

Решение. Находим значения производных данного вектора и его производных $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ и $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ в точке $t = 0$:

$$\mathbf{r}(0) = a\mathbf{i}, \quad \frac{d\mathbf{r}(0)}{dt} = a\mathbf{j} + h\mathbf{k}, \quad \frac{d^2\mathbf{r}(0)}{dt^2} = -a\mathbf{i}.$$

Следовательно (см. пример 1, § 5),

$$\left[\frac{d\mathbf{r}(0)}{dt}, \frac{d^2\mathbf{r}(0)}{dt^2} \right] = -ah\mathbf{j} + a^2\mathbf{k}.$$

Векторное уравнение соприкасающейся плоскости

$$\left(\rho - \mathbf{r}(0), \frac{d\mathbf{r}(0)}{dt}, \frac{d^2\mathbf{r}(0)}{dt^2} \right) = 0$$

или

$$(\rho - a\mathbf{i}, -ah\mathbf{j} + a^2\mathbf{k}) = 0.$$

Так как радиус-вектор текущей точки соприкасающейся плоскости $\rho = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, то, переходя к координатной записи, получим уравнение искомой плоскости в виде $hy - az = 0$.

Формулы, выражающие производные векторов τ^0 , \mathbf{b}^0 , \mathbf{n}^0 , называются *формулами Френе*:

$$\frac{d\tau^0}{ds} = \frac{1}{R} \mathbf{n}^0, \quad \frac{d\mathbf{b}^0}{ds} = \frac{1}{T} \mathbf{n}^0, \quad \frac{d\mathbf{n}^0}{ds} = -\frac{1}{R} \tau^0 - \frac{1}{T} \mathbf{b}^0.$$

41. Написать уравнение соприкасающейся плоскости в точке $t = 2$ кривой

$$r = ti - tj + \frac{1}{2}t^2k.$$

42. Написать уравнение соприкасающейся плоскости в точке $t = 0$ кривой

$$r = e^ti + e^{-t}j + \sqrt{2}tk.$$

43. Найти кручение в точке $t = 0$ кривой

$$r = e^t \cos t \cdot i + e^t \sin t \cdot j + e^t k.$$

44. Найти кручение в любой точке t кривой

$$r = a \operatorname{ch} t \cdot i + a \operatorname{sh} t \cdot j + at \cdot k.$$

§ 7. Примеры скалярных полей. Поверхности и линии уровня

О п р е д е л е н и е. Если в каждой точке пространства или части пространства определено значение некоторой величины, то говорят, что задано *поле* данной величины.

Поле называется *скалярным*, если рассматриваемая величина скалярна, т. е. вполне характеризуется своим числовым значением.

Пример скалярных полей дает поле температур, электростатическое поле.

Задание скалярного поля осуществляется заданием скалярной функции точки M

$$u = f(M).$$

Если в пространстве введена декартова система координат x, y, z , то

$$u = f(x, y, z).$$

Геометрической характеристикой скалярного поля служат поверхности уровня — геометрическое место точек, в которых скалярная функция поля принимает одно и то же значение. Поверхность уровня данного поля определяется уравнением

$$f(x, y, z) = C, \text{ где } C = \text{const.}$$

В случае поля температур, создаваемого в однородной и изотропной среде точечным источником тепла, поверхности уровня будут сферами с центром в источнике (центрально-симметричное поле).

В случае бесконечной равномерно нагретой нити поверхностями уровня (изотермическими поверхностями) будут круговые цилиндры, ось которых совпадает с нитью.

П р и м е р 1. Построить поверхности уровня скалярного поля

$$u = x + 2y + 3z.$$

Р е ш е н и е. Поверхности уровня определяются уравнением

$$x + 2y + 3z = C, \text{ где } C = \text{const.}$$

Это есть однопараметрическое семейство параллельных плоскостей.

Пример 2. Найти поверхности уровня скалярного поля

$$u = x^2 + y^2 - z^2.$$

Решение. Поверхности уровня определяются уравнением

$$x^2 + y^2 - z^2 = C, \text{ где } C = \text{const.}$$

При $C = 0$ получаем круговой конус. При любом $C > 0$ получаем однополостные гиперboloиды вращения с осью, совпадающей с осью Oz . При $C < 0$ получаем двуполостный гиперboloид вращения.

Пример 3. Найти поверхности уровня скалярного поля

$$u = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Решение. Область определения данного скалярного поля находится из неравенства

$$\left| \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq 1, \text{ т. е. } 0 \leq \frac{z^2}{x^2 + y^2} \leq 1,$$

откуда $0 \leq z^2 \leq x^2 + y^2$. Это двойное неравенство показывает, что поле определено вне кругового конуса $z^2 = x^2 + y^2$ и на нем самом, кроме его вершины $O(0, 0, 0)$.

Поверхности уровня определяются уравнением

$$\arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = C, \text{ где } -\frac{\pi}{2} \leq C \leq \frac{\pi}{2},$$

т. е. $\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin C$ или $z^2 = (x^2 + y^2) \sin^2 C$. Это есть семейство круговых конусов, расположенных вне конуса $z^2 = x^2 + y^2$ с общей осью симметрии Oz и общей вершиной $O(0, 0, 0)$, в которой данное поле не определено, причем сам конус $z^2 = x^2 + y^2$ также входит в это семейство.

Пример 4. Найти поверхности уровня скалярного поля

$$u = e^{(\mathbf{a}, \mathbf{r})},$$

где \mathbf{a} — постоянный вектор, \mathbf{r} — радиус-вектор точки.

Решение. Здесь

$$\mathbf{r} = \{x, y, z\} = xi + yj + zk,$$

и пусть

$$\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\} = a_1i + a_2j + a_3k.$$

Тогда скалярное произведение

$$(\mathbf{a}, \mathbf{r}) = a_1x + a_2y + a_3z.$$

Уравнение поверхностей уровня будет

$$e^{(a, r)} = C, \quad C > 0.$$

Отсюда

$$(a, r) = \ln C$$

или

$$a_1x + a_2y + a_3z = \ln C.$$

Это есть семейство параллельных плоскостей.

Найти поверхности уровня следующих скалярных полей:

$$45. \quad u = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16}.$$

$$46. \quad u = x^2 + y^2 - z.$$

$$47. \quad u = \frac{x^2 + y^2}{z}.$$

$$48. \quad u = 2y^2 + 9z^2.$$

$$49. \quad u = 3x + 2y - z.$$

$$50. \quad u = \frac{(a, r)}{(b, r)} \quad (a, b \text{ — постоянные векторы}).$$

$$51. \quad u = \ln |r|.$$

$$52. \quad u = e^{(a, b, r)} \quad (a, b \text{ — постоянные векторы}).$$

Скалярное поле называется *плоским*, если существует некоторая плоскость такая, что во всех плоскостях, параллельных указанной, скалярное поле будет одним и тем же.

Если эту плоскость принять за плоскость xOy , то скалярное поле определится скалярной функцией

$$u = f(x, y),$$

т. е. не будет зависеть от z .

Примером плоского скалярного поля может служить поле температур бесконечной равномерно нагретой нити.

Геометрической характеристикой плоских скалярных полей служат линии уровня — геометрические места точек, в которых скалярная функция имеет одно и то же значение.

Пример 5. Найти линии уровня скалярного поля

$$u = x^2 - y^2.$$

Решение. Линии уровня определяются уравнениями

$$x^2 - y^2 = C, \quad C = \text{const.}$$

При $C = 0$ получаем пару прямых

$$y = x, y = -x.$$

При $C \neq 0$ получаем семейство гипербол (рис. 11).

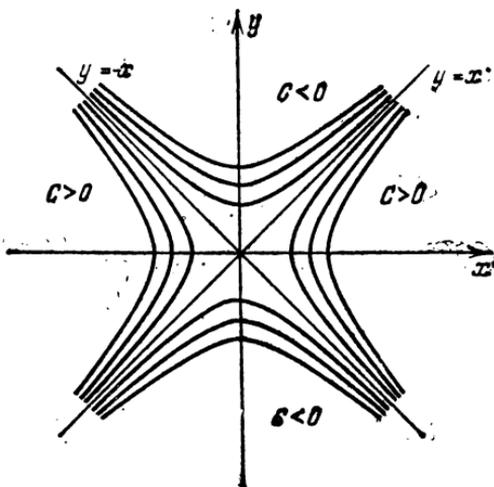


Рис. 11.

Найти линии уровня следующих плоских полей:

53. $u = 2x - y.$

54. $u = \ln \sqrt{\frac{y}{2x}}.$

55. $u = \frac{y^2}{x}.$

56. $u = e^{x^2 - y^2}.$

57. Найти линии уровня скалярного поля u , заданного неявно уравнением

$$u + x \ln u + y = 0.$$

§ 8. Производная по направлению

Пусть имеем скалярное поле, определяемое скалярной функцией

$$u = f(M).$$

Возьмем в поле точку M_0 и выберем некоторое направление, определяемое вектором l . Возьмем в поле другую точку M так,

чтобы вектор $\vec{M_0M}$ был параллелен вектору l . Обозначим через Δu разность

$$\Delta u = f(M) - f(M_0),$$

а через Δl — длину вектора $\vec{M_0M}$. Отношение $\frac{\Delta u}{\Delta l}$ определяет среднюю скорость изменения скалярного поля на единицу длины по данному направлению. Будем стремиться точку M к точке M_0 так, чтобы вектор $\vec{M_0M}$ оставался все время коллинеарен вектору l . При этом $\Delta l \rightarrow 0$.

О п р е д е л е н и е. Если существует при $\Delta l \rightarrow 0$ предел отношения $\frac{\Delta u}{\Delta l}$, то его называют *производной* функции $u = f(M)$ в данной точке M_0 по направлению l и обозначают символом $\frac{\partial u}{\partial l}$, так что по определению

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\Delta l}, \quad \vec{M_0M} \parallel l.$$

Это определение производной по направлению носит инвариантный характер, т. е. не связано с выбором системы координат.

Пусть в пространстве введена декартова система координат и пусть функция $f(M) = f(x, y, z)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{M_0} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{M_0} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{M_0} \cos \gamma, \quad (1)$$

где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ — направляющие косинусы вектора

$$l = a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

— находятся по формулам

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{|l|}, \quad \cos \beta = \frac{a_2}{|l|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_3}{|l|},$$

$$|l| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$

символы $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{M_0}, \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{M_0}, \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{M_0}$ означают, что частные производные берутся в точке M_0 .

Для плоского поля $u = f(x, y)$ производная по направлению l в точке $M_0(x_0, y_0)$ будет равна

$$\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{M_0} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{M_0} \sin \alpha, \quad (2)$$

где α — угол, образованный вектором l с осью Ox .

З а м е ч а н и е. Сами частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ являются производными функции u по направлению координатных осей Ox , Oy , Oz соответственно.

Формула (1) для вычисления производной по направлению в данной точке остается в силе и в том случае, когда точка M стремится к точке M_0 по кривой, для которой вектор l является касательным в точке M_0 .

П р и м е р 1. Найти производную скалярного поля

$$u = xyz$$

в точке $M_0(1, -1, 1)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(2, 3, 1)$.

Р е ш е н и е. Находим направляющие косинусы вектора $\vec{M_0M_1} = \{1, 4, 0\}$, длина которого равна $|\vec{M_0M_1}| = \sqrt{17}$. Имеем

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}, \quad \cos \beta = \frac{4}{\sqrt{17}}, \quad \cos \gamma = 0.$$

Значения частных производных функции $u = xyz$ в точке $M_0(1, -1, 1)$ равны

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} = -1,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} = 1, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} = -1.$$

Используя формулу (1), получим

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} &= -\frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{17}} - \\ &= -1 \cdot 0 = \frac{3}{\sqrt{17}}. \end{aligned}$$

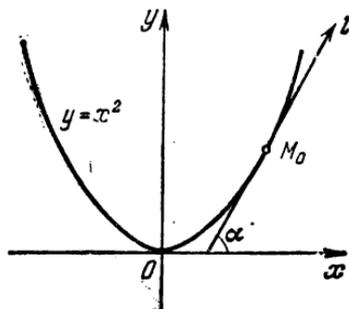


Рис. 12.

Тот факт, что $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} > 0$, означает, что скалярное поле в точке M_0 в данном направлении возрастает.

П р и м е р 2. Вычислить производную скалярного поля

$$u = \operatorname{arctg} xy$$

в точке $M_0(1, 1)$, принадлежащей параболе $y = x^2$, по направлению этой кривой (в направлении возрастания абсциссы).

Р е ш е н и е. Направлением l параболы $y = x^2$ в точке $M_0(1, 1)$ считается направление касательной к параболе в этой точке (рис. 12).

Пусть касательная l к кривой в точке M_0 образует с осью Ox угол α . Имеем

$$y' = 2x; \quad \operatorname{tg} \alpha = y'|_{x=1} = 2,$$

откуда направляющие косинусы касательной

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos \beta = \sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Значения частных производных данной функции $u(x, y)$ в точке $M_0(1, 1)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{M_0} = \frac{y}{1+x^2y^2} \Big|_{M_0} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{M_0} = \frac{x}{1+x^2y^2} \Big|_{M_0} = \frac{1}{2}.$$

Подставляя найденные величины в формулу (2), получим

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2\sqrt{5}}.$$

Пример 3. Найти производную скалярного поля $u = xz^2 + 2yz$ в точке $M_0(1, 0, 2)$ вдоль окружности

$$\left. \begin{aligned} x &= 1 + \cos t, \\ y &= \sin t - 1, \\ z &= 2. \end{aligned} \right\}$$

Решение. Векторное уравнение окружности имеет вид

$$\mathbf{r}(t) = (1 + \cos t)\mathbf{i} + (\sin t - 1)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Находим вектор $\boldsymbol{\tau}$, касательный к ней в любой точке M . Имеем

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\sin t \cdot \mathbf{i} + \cos t \cdot \mathbf{j}.$$

Данная точка $M_0(1, 0, 2)$ находится в плоскости xOz в первом октанте, и ей соответствует значение параметра $t = \frac{\pi}{2}$. В этой точке будем иметь

$$\boldsymbol{\tau} \Big|_{M_0} = -\sin \frac{\pi}{2} \cdot \mathbf{i} + \cos \frac{\pi}{2} \cdot \mathbf{j} = -\mathbf{i}.$$

Отсюда получаем, что направляющие косинусы касательной к окружности равны $\cos \alpha = -1$, $\cos \beta = 0$, $\cos \gamma = 0$. Значения частных производных данного скалярного поля в точке $M_0(1, 0, 2)$ равны

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{M_0} = z^2 \Big|_{M_0} = 4, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{M_0} = 2z \Big|_{M_0} = 4, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{M_0} = \\ = (2xz + 2y) \Big|_{M_0} = 4, \end{aligned}$$

Следовательно, искомая производная

$$\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}} \Big|_{M_0} = 4 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = -4.$$

В следующих задачах найти для данных функций производную в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ по направлению к точке $M_1(x_1, y_1, z_1)$.

58. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $M_0(1, 1, 1)$, $M_1(3, 2, 1)$.

59. $u = x^2y + xz^2 - 2$, $M_0(1, 1, -1)$, $M_1(2, -1, 3)$.

60. $u = xe^y + ye^x - z^2$, $M_0(3, 0, 2)$, $M_1(4, 1, 3)$.

61. $u = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$, $M_0(1, 1)$, $M_1(4, 5)$.

62. Найти производную скалярного поля

$$u = \ln(x^2 + y^2)$$

в точке $M_0(1, 2)$ параболы $y^2 = 4x$ по направлению этой кривой.

63. Найти производную скалярного поля $u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ в точке $M_0(2, -2)$ окружности $x^2 + y^2 - 4x = 0$ вдоль дуги этой окружности.

64. Найти производную скалярного поля $u = x^2 + y^2$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ окружности $x^2 + y^2 = R^2$ по направлению этой окружности.

65. Найти производную скалярного поля $u = 2xy + y^2$ в точке $(\sqrt{2}, 1)$ эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ по направлению внешней нормали к эллипсу в этой точке.

66. Найти производную скалярного поля $u = x^2 - y^2$ в точке $(5, 4)$ гиперболы $x^2 - y^2 = 9$ по направлению этой кривой.

67. Найти производную скалярного поля

$$u = \ln(xy + yz + xz)$$

в точке $M_0(0, 1, 1)$ по направлению окружности $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 1$.

68. Найти производную скалярного поля $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точке M_0 , соответствующей значению параметра $t = \frac{\pi}{2}$ по направлению винтовой линии $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $z = at$.

§ 9. Градиент скалярного поля

Пусть имеем скалярное поле, определяемое скалярной функцией

$$u = f(x, y, z),$$

где функция f предполагается дифференцируемой.

О п р е д е л е н и е. *Градиентом* скалярного поля u в данной точке M называется вектор, обозначаемый символом $\text{grad } u$ и определяемый равенством

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (1)$$

Используя формулу (1) из § 8 для производной по направлению, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\text{grad } u, \mathbf{l}^0), \quad (2)$$

где \mathbf{l}^0 — единичный вектор в направлении \mathbf{l} , т. е.

$$\mathbf{l}^0 = \frac{\mathbf{l}}{|\mathbf{l}|} = \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \cos \beta + \mathbf{k} \cos \gamma.$$

С в о й с т в а г р а д и е н т а.

1. Градиент направлен по нормали к поверхности уровня (или к линии уровня, если поле плоское).

2. Градиент направлен в сторону возрастания функции поля.

3. Модуль градиента равен наибольшей производной по направлению в данной точке поля:

$$\max \frac{\partial u}{\partial l} = |\text{grad } u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Эти свойства дают инвариантную характеристику градиента. Они говорят о том, что вектор $\text{grad } u$ указывает направление и величину наибольшего изменения скалярного поля в данной точке.

П р и м е р 1. Найти градиент скалярного поля

$$u = x - 2y + 3z.$$

Р е ш е н и е. Согласно формуле (1) имеем

$$\text{grad } u = 1 \cdot \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}.$$

Поверхностями уровня данного скалярного поля являются плоскости $x - 2y + 3z = C$; вектор $\text{grad } u = \{1, -2, 3\}$ есть нормальный вектор плоскостей этого семейства.

П р и м е р 2. Найти наибольшую крутизну подъема поверхности $u = x^y$ в точке $M(2, 2, 4)$.

Р е ш е н и е. Имеем

$$\text{grad } u = yx^{y-1}\mathbf{i} + x^y \ln x \mathbf{j}, \quad \text{grad } u|_M = 4\mathbf{i} + 4 \ln 2 \mathbf{j},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{\max} = |\text{grad } u| = 4\sqrt{1 + (\ln 2)^2}.$$

П р и м е р 3. Найти единичный вектор нормали к поверхности уровня скалярного поля $u = x^2 + y^2 + z^2$.

Р е ш е н и е. Поверхности уровня данного скалярного поля — сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = C \quad (C > 0).$$

Градиент направлен по нормали к поверхности уровня, так что $\text{grad } u = 2x \cdot i + 2y \cdot j + 2z \cdot k$ определяет вектор нормали к поверхности уровня в точке $M(x, y, z)$. Для единичного вектора нормали получаем выражение

$$n^0 = \frac{\text{grad } u}{|\text{grad } u|} = \frac{xi + yj + zk}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{r}{|r|}.$$

П р и м е р 4. Найти градиент поля $u = (a, b, r)$, где a и b — постоянные векторы, r — радиус-вектор точки.

Р е ш е н и е. Пусть

$$a = \{a_1, a_2, a_3\}, \quad b = \{b_1, b_2, b_3\}, \quad r = \{x, y, z\}.$$

Тогда

$$u = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

По правилу дифференцирования определителя *) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

*) Пусть дан определитель $D(t)$, элементами a_{ij} которого являются дифференцируемые функции от t

$$D(t) = \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

Тогда производная определителя $D'(t)$ находится по формуле

$$D'(t) = \begin{vmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) & \dots & a'_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) & \dots & a'_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} + \dots \\ \dots + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{n1}(t) & a'_{n2}(t) & \dots & a'_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \text{grad } u &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k = \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = [a, b]. \end{aligned}$$

Пример 5. Найти градиент расстояния

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2},$$

где $P(x, y, z)$ — изучаемая точка поля, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ — некоторая фиксированная точка.

Решение. Имеем

$$\text{grad } r = \frac{\partial r}{\partial x} i + \frac{\partial r}{\partial y} j + \frac{\partial r}{\partial z} k = \frac{(x-x_0)i + (y-y_0)j + (z-z_0)k}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} = r^0$$

— единичный вектор направления $\vec{P_0P}$.

Пример 6. Рассмотрим скалярную функцию

$$u = r_1 + r_2,$$

где r_1, r_2 — расстояния некоторой точки $P(x, y)$ плоскости до двух фиксированных точек F_1 и F_2 плоскости.

Линии уровня этой функции — эллипсы. Имеем (см. пример 5)

$$\text{grad } (r_1 + r_2) = r_1^0 + r_2^0.$$

Это показывает, что градиент равен диагонали ромба, построенного на ортах радиусов-векторов, проведенных к точке P из фокусов

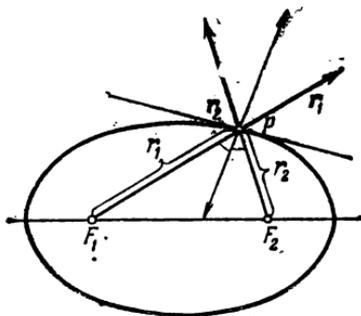


Рис. 13.

F_1 и F_2 (рис. 13). Следовательно, нормаль к эллипсу в какой-либо его точке делит пополам угол между радиусами-векторами, проведенными в эту точку.

Физическая интерпретация: луч света, вышедший из одного фокуса, попадает в другой фокус.

Пример 7. Найти угол Θ между градиентами функций

$$u = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{и} \quad v = x + y + 2\sqrt{xy}$$

в точке $M_0(1, 1)$.

Решение. Находим градиенты данных функций в точке $M_0(1, 1)$. Имеем

$$\text{grad } u \Big|_{M_0} = \frac{xi + yj}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Big|_{M_0} = \frac{i + j}{\sqrt{2}},$$

$$\text{grad } v \Big|_{M_0} = \left[\left(1 + \sqrt{\frac{y}{x}}\right) i + \left(1 + \sqrt{\frac{x}{y}}\right) j \right] \Big|_{M_0} = 2i + 2j.$$

Угол Θ между $\text{grad } u$ и $\text{grad } v$ в точке M_0 определяется из равенства

$$\cos \Theta = \frac{(\text{grad } u, \text{grad } v) \Big|_{M_0}}{|\text{grad } u \Big|_{M_0} \cdot |\text{grad } v \Big|_{M_0}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}}{1 \cdot 2\sqrt{2}} = 1.$$

Отсюда

$$\Theta = 0.$$

Пример 8. Найти производную по направлению радиуса-вектора r для функции $u = \sin r$, где $r = |r|$.

Решение. По формуле (2) производная данной функции по направлению радиуса-вектора r равна

$$\frac{\partial u}{\partial r} = (\text{grad } \sin r, r^0). \quad (3)$$

Находим градиент этой функции:

$$\begin{aligned} \text{grad } \sin r &= \frac{\partial(\sin r)}{\partial x} i + \frac{\partial(\sin r)}{\partial y} j + \frac{\partial(\sin r)}{\partial z} k = \\ &= \frac{d(\sin r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} i + \frac{d(\sin r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial y} j + \frac{d(\sin r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial z} k = \\ &= \left(\frac{\partial r}{\partial x} i + \frac{\partial r}{\partial y} j + \frac{\partial r}{\partial z} k \right) \cos r = r^0 \cos r. \quad (4) \end{aligned}$$

Подставляя (4) в (3), получим

$$\frac{\partial u}{\partial r} = (r^0 \cos r, r^0) = (r^0, r^0) \cos r = \cos r.$$

Пример 9. Найти производную скалярного поля $u = f(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ линии l , заданной системой

уравнений

$$\left. \begin{aligned} f(x, y, z) &= a, \\ \varphi(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad a = \text{const}$$

по направлению этой линии.

Решение. Направление линии l определяется направлением ее касательного вектора τ , который, по определению, есть вектор, касательный к поверхности $f(x, y, z) = a$. Поверхность $f(x, y, z) = a$ есть поверхность уровня данного скалярного поля $u = f(x, y, z)$. Поскольку

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\text{grad } u, l^0) = (\text{grad } u, \tau^0)$$

и вектор $\text{grad } u$ перпендикулярен к поверхности уровня $f(x, y, z) = a$, то $\text{grad } u$ перпендикулярен и орту τ^0 , и потому

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} = (\text{grad } u, \tau^0)|_{M_0} = 0.$$

Пример 10. Найти в точке $M_0(1, 1, 1)$ направление наибольшего изменения скалярного поля $u = xy + yz + zx$ и величину этого наибольшего изменения в этой точке.

Решение. Направление наибольшего изменения поля указывается вектором $\text{grad } u(M)$. Находим его:

$$\text{grad } u(M) = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (y + x)\mathbf{k}$$

и, значит, $\text{grad } u(M_0) = 2(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$. Этот вектор определяет направление наибольшего возрастания данного поля в точке $M_0(1, 1, 1)$. Величина наибольшего изменения поля в этой точке равна

$$\max \frac{\partial u}{\partial l} = |\text{grad } u(M_0)| = 2\sqrt{3}.$$

69. Найти градиент скалярного поля

$$u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$$

в точке $M_0(1, 1, -1)$.

70. Найти градиент скалярного поля $u = ze^{x^2+y^2+z^2}$ в точке $O(0, 0, 0)$.

71. Найти угол φ между градиентами функции $u = \arctg \frac{x}{y}$ в точках $M_1(1, 1)$ и $M_2(-1, -1)$.

72. Найти угол φ между градиентами функции $u = (x + y)e^{x+y}$ в точках $M_1(0, 0)$ и $M_2(1, 1)$.

73. Найти угол φ между градиентами функций $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и $v = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ в точке $M_0(0, 0, 1)$.

74. Найти точки, в которых градиент скалярного поля $u = \sin(x + y)$ равен $i + j$.

75. Найти точки, в которых модуль градиента скалярного поля $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ равен единице.

76. Пусть $u = u(x, y, z)$ и $v = v(x, y, z)$ — дифференцируемые в точке $M(x, y, z)$ функции. Показать, что

$$\text{a) } \text{grad}(\lambda u) = \lambda \text{grad} u, \quad \lambda = \text{const};$$

$$\text{б) } \text{grad}(u \pm v) = \text{grad} u \pm \text{grad} v;$$

$$\text{в) } \text{grad}(uv) = v \text{grad} u + u \text{grad} v;$$

$$\text{г) } \text{grad}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \text{grad} u - u \text{grad} v}{v^2}, \quad v \neq 0.$$

77. Показать, что

$$\text{grad} u(\varphi) = \frac{du}{d\varphi} \text{grad} \varphi,$$

где $\varphi = \varphi(x, y, z)$ — дифференцируемая функция, а $u = u(\varphi)$ имеет производную по φ .

Найти градиенты следующих скалярных полей, если

$$\mathbf{r} = xi + yj + zk, \quad r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

\mathbf{a} и \mathbf{b} — постоянные векторы.

$$78. u = \ln r.$$

$$79. u = (\mathbf{a}, \mathbf{r}).$$

$$80. u = (\mathbf{a}, \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{b}, \mathbf{r}).$$

$$81. u = |[\mathbf{a}, \mathbf{r}]|^2.$$

82. Показать, что

$$(\text{grad} u(\mathbf{r}), \mathbf{r}) = u'(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}.$$

83. Показать, что

$$[\text{grad} u(\mathbf{r}), \mathbf{r}] = 0.$$

84. Пусть $w = f(u, v)$, где $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$. Доказать, что

$$\text{grad} w = \frac{\partial f}{\partial u} \text{grad} u + \frac{\partial f}{\partial v} \text{grad} v,$$

если f , u , v — дифференцируемые функции.

85. Пусть G — выпуклая область в пространстве (т. е. такая область, что если две точки M и N принадлежат области G , то и весь отрезок MN принадлежит этой

области). Пусть в области G задано скалярное поле $u(M)$, имеющее во всех точках градиент, непрерывный и ограниченный в G :

$$|\text{grad } u(M)| \leq A, \quad M \in G, \quad A = \text{const.}$$

Доказать, что для любых точек M и N области G имеет место неравенство

$$|u(N) - u(M)| \leq A |\overrightarrow{MN}|.$$

86. Найти производную функции $u = \frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} + \frac{z^3}{c^3}$ в произвольной точке $M(x, y, z)$ в направлении радиусавектора r этой точки.

87. Найти производную функции $u = \frac{1}{r}$, где $r = |r|$, в направлении вектора $l = \cos \alpha \cdot i + \cos \beta \cdot j + \cos \gamma \cdot k$. При каком условии эта производная равна нулю?

88. Найти производную функции $u = \frac{1}{r}$, где $r = |r|$, в направлении ее градиента.

89. Найти производную функции $u = yze^x$ в точке $M_0(0, 0, 1)$ по направлению ее градиента.

90. Найти производную скалярного поля

$$u = u(x, y, z)$$

по направлению градиента скалярного поля

$$v = v(x, y, z).$$

При каком условии она равна нулю?

91. Для следующих скалярных полей найти направление и величину наибольшего изменения в данных точках M_0 :

а) $u(M) = x^2y + y^2z + z^2x$; $M_0(1, 0, 0)$.

б) $u(M) = xyz$; $M_0(2, 1, -1)$.

**§ 10. Векторные линии.
Дифференциальные уравнения
векторных линий**

О п р е д е л е н и е 1. Если в каждой точке M пространства или части пространства определена векторная величина $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$, то говорят, что задано *векторное поле*.

Если в пространстве введена декартова система координат, то задание векторного поля $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$ равносильно заданию трех скалярных функций точки $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$, так что

$$\mathbf{a}(M) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

О п р е д е л е н и е 2. *Векторной линией* векторного поля \mathbf{a} называется кривая, в каждой точке M которой вектор \mathbf{a} направлен по касательной к этой кривой.

Пусть векторное поле определяется вектором

$$\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k},$$

где

$$P = P(x, y, z), \quad Q = Q(x, y, z), \quad R = R(x, y, z)$$

— непрерывные функции от x , y , z , имеющие частные производные первого порядка.

Тогда дифференциальные уравнения векторных линий имеют вид

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}, \tag{1}$$

Интегрирование системы двух дифференциальных уравнений (1) дает систему двух конечных уравнений

$$\varphi_1(x, y, z) = C_1, \quad \varphi_2(x, y, z) = C_2,$$

которые, рассматриваемые в совокупности, определяют двухпараметрическое семейство векторных линий

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(x, y, z) &= C_1, \\ \varphi_2(x, y, z) &= C_2. \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

Если в некоторой области G для системы (1) выполнены условия теоремы существования и единственности решения, то через каждую точку $M_0(x_0, y_0, z_0) \in G$ проходит единственная векторная линия

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(x, y, z) &= \Phi_1(x_0, y_0, z_0), \\ \Phi_2(x, y, z) &= \Phi_2(x_0, y_0, z_0). \end{aligned} \right\}$$

Пример 1. Найти векторные линии векторного поля

$$\mathbf{a} = [c, \mathbf{r}],$$

где c — постоянный вектор.

Решение. Имеем

$$c = c_1 i + c_2 j + c_3 k, \quad r = xi + yj + zk,$$

так что

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = [c, \mathbf{r}] &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \\ &= (c_2 z - c_3 y) i + (c_3 x - c_1 z) j + (c_1 y - c_2 x) k. \end{aligned}$$

Дифференциальные уравнения векторных линий

$$\frac{dx}{c_2 z - c_3 y} = \frac{dy}{c_3 x - c_1 z} = \frac{dz}{c_1 y - c_2 x}. \quad (3)$$

Домножим числитель и знаменатель первой дроби на x , второй — на y , третьей — на z и сложим почленно. Используя свойство пропорций, получим

$$\frac{dx}{c_2 z - c_3 y} = \frac{dy}{c_3 x - c_1 z} = \frac{dz}{c_1 y - c_2 x} = \frac{x dx + y dy + z dz}{0}.$$

Отсюда

$$x dx + y dy + z dz = 0,$$

а значит,

$$x^2 + y^2 + z^2 = A_1, \quad A_1 = \text{const} > 0.$$

Домножив теперь числитель и знаменатель первой дроби (3) на c_1 , второй — на c_2 , третьей — на c_3 и сложив почленно, получим

$$\frac{dx}{c_2 z - c_3 y} = \frac{dy}{c_3 x - c_1 z} = \frac{dz}{c_1 y - c_2 x} = \frac{c_1 dx + c_2 dy + c_3 dz}{0},$$

откуда

$$c_1 dx + c_2 dy + c_3 dz = 0$$

и, следовательно,

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z = A_2, \quad A_2 = \text{const}.$$

Искомые уравнения векторных линий

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= A_1, \\ c_1x + c_2y + c_3z &= A_2. \end{aligned} \right\}$$

Эти уравнения показывают, что векторные линии получаются в результате пересечения сфер, имеющих общий центр в начале координат, с плоскостями, перпендикулярными вектору $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$. Отсюда следует, что векторные линии являются окружностями, центры которых находятся на прямой, проходящей через начало координат в направлении вектора \mathbf{c} . Плоскости окружностей перпендикулярны указанной прямой (рис. 14).

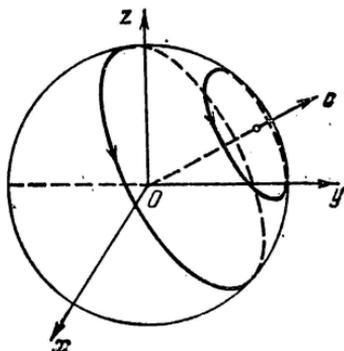


Рис. 14.

Пример 2. Найти векторную линию поля!

$$\mathbf{a} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + b\mathbf{k},$$

проходящую через точку $(1, 0, 0)$.

Решение. Дифференциальные уравнения векторных линий

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{b}.$$

Отсюда находим

$$x^2 + y^2 = C_1, \quad C_1 > 0,$$

или, если ввести параметр t , то будем иметь

$$x = \sqrt{C_1} \cos t, \quad y = \sqrt{C_1} \sin t.$$

В этом случае уравнение

$$\frac{dy}{x} = \frac{dz}{b}$$

принимает вид

$$\frac{\sqrt{C_1} \cos t \, dt}{\sqrt{C_1} \cos t} = \frac{dz}{b} \quad \text{или} \quad dz = b \, dt,$$

откуда находим

$$z = bt + C_2.$$

Итак, параметрические уравнения векторных линий будут

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{C_1} \cos t, \\ y &= \sqrt{C_1} \sin t, \\ z &= bt + C_2. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Точке $(1, 0, 0)$ соответствует значение параметра t , равное нулю. Полагая $t = 0$ в системе (4), получим

$$\left. \begin{aligned} 1 &= \sqrt{C_1}, \\ 0 &= \sqrt{C_1} \cdot 0, \\ 0 &= C_2, \end{aligned} \right\}$$

откуда находим $C_1 = 1, C_2 = 0$, и значит, параметрические уравнения векторной линии, проходящей через точку $(1, 0, 0)$, будут

$$\left. \begin{aligned} x &= \cos t, \\ y &= \sin t, \\ z &= bt. \end{aligned} \right\}$$

Это — винтовая линия.

Найти векторные линии следующих векторных полей:

92. $r = xi + yj + zk$.

93. $a = a_1i + a_2j + a_3k$, где a_1, a_2, a_3 — постоянные.

94. $a = (z - y)i + (x - z)j + (y - x)k$.

95. Найти векторную линию поля

$$a = x^2i - y^2j + z^2k,$$

проходящую через точку $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$.

Векторное поле называется *плоским*, если все векторы a расположены в параллельных плоскостях и поле одно и то же в каждой из этих плоскостей.

Если в какой-либо из этих плоскостей ввести декартову систему координат xOy , то векторы поля не будут содержать компоненты по оси Oz и координаты вектора не будут зависеть от z , т. е.

$$a = P(x, y)i + Q(x, y)j.$$

Дифференциальные уравнения векторных линий плоского поля будут иметь вид

$$\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)} = \frac{dz}{0}$$

или

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}, \\ z &= \text{const.} \end{aligned} \right\}$$

Отсюда видно, что векторные линии плоского поля являются плоскими кривыми, лежащими в плоскостях, параллельных плоскости xOy .

Пример 3. Найти векторные линии магнитного поля бесконечного проводника тока.

Решение. Будем считать, что проводник направлен по оси Oz и в этом же направлении течет ток I . Вектор напряженности H магнитного поля, создаваемого током, равен

$$H = \frac{2}{\rho^2} [I, r], \quad (5)$$

где $I = I \cdot k$ есть вектор тока, r — радиус-вектор точки $M(x, y, z)$, ρ — расстояние от оси провода до точки M . Раскрывая векторное произведение (5), получим

$$H = -\frac{2Iy}{\rho^2} i + \frac{2Ix}{\rho^2} j.$$

Дифференциальные уравнения векторных линий:

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0},$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= R^2, \\ z &= C, \end{aligned} \right\}$$

т. е. векторные линии являются окружностями с центрами на оси Oz (рис. 15).

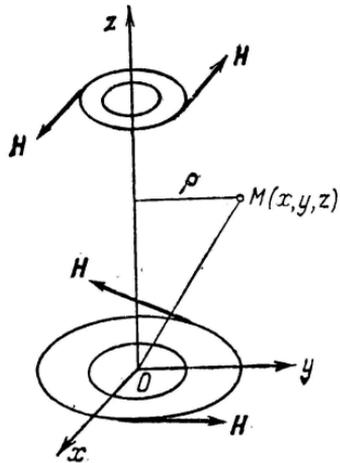


Рис. 15.

Найти векторные линии следующих плоских векторных полей:

96. $a = xi + 2yj.$

97. $a = xi + zk.$

98. $a = xi - yj.$

99. $a = 2zj + 4yk.$

100. $a = x^2i + y^2j.$

101. $a = zj - yk.$

Дифференциальные уравнения векторных линий

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

могут быть записаны так:

$$\frac{dx}{dt} = P, \quad \frac{dy}{dt} = Q, \quad \frac{dz}{dt} = R$$

или в векторной форме:

$$\frac{dr}{dt} = a(M), \quad (6)$$

Эта форма уравнений векторных линий оказывается удобной при решении ряда задач.

Пример 4. Найти векторные линии поля $a = [c, r]$, где c — постоянный вектор.

Решение. Применяя соотношение (6), получим

$$\frac{dr}{dt} = [c, r]. \quad (7)$$

Умножая обе части (7) скалярно на c и используя свойства смешанного произведения, находим

$$\left(c, \frac{dr}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(c, r) = 0. \quad (8)$$

Аналогично, умножая обе части (7) скалярно на r , получим

$$\left(r, \frac{dr}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(r, r) = 0. \quad (9)$$

Из уравнения (8) следует, что

$$(c, r) = \text{const},$$

а из уравнения (9) следует, что

$$(r, r) = \text{const}.$$

Векторные линии являются линиями пересечения плоскостей $(c, r) = \text{const}$ со сферами $r^2 = \text{const}$.

Найти векторные линии следующих векторных полей:

102. $a = f(r) \cdot r$.

103. $a = (a_0, r)b_0$, где a_0, b_0 — постоянные векторы.

§ 11. Поток векторного поля.

Способы вычисления потока:

I. Поток векторного поля. Пусть имеем векторное поле

$$a(M) = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k,$$

где координаты $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ вектора $a(M)$ непрерывны (поле $a(M)$ непрерывно) в некоторой области G . Пусть S — некоторая гладкая или кусочно гладкая двусторонняя поверхность, у которой выбрана определенная сторона (ориентированная поверхность).

Определение. *Потоком* Π векторного поля $a(M)$ через ориентированную поверхность S называется поверхностный интеграл первого рода по поверхности S от проекции вектора $a(M)$ на нормаль $n(M)$ к этой поверхности:

$$\Pi = \int_S \int \text{пр}_n a \, dS = \int_S \int (a, n^0) \, dS,$$

где n^0 — единичный вектор (орт) нормали n к выбранной стороне поверхности S ; dS — элемент площади поверхности S .

В случае замкнутой поверхности будем всегда выбирать внешнюю нормаль n , которая направлена вовне области, ограниченной поверхностью S .

Если α , β , γ — углы, которые образует с осями координат Ox , Oy , Oz нормаль n к поверхности S , то поток можно выразить через поверхностный интеграл второго рода

$$\Pi = \int_S \int (a, n^0) dS = \int_S \int [P(x, y, z) \cos \alpha + \\ + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] dS$$

или

$$\Pi = \int_S \int (a, n^0) dS = \int_S \int P(x, y, z) dy dz + \\ + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy,$$

где

$$\cos \alpha dS = dy dz, \quad \cos \beta dS = dx dz, \quad \cos \gamma dS = dx dy.$$

Основные свойства потока векторного поля

а) Поток меняет знак на обратный с изменением ориентации поверхности (т. е. с изменением ориентации нормали n к поверхности S):

$$\int_{S^+} \int (a, n^0) dS = - \int_{S^-} \int (a, n^0) dS,$$

где S^+ — сторона поверхности S , на которой выбрана нормаль n , а S^- — сторона поверхности S , на которой берется нормаль $-n$ (см. [6]).

б) Свойство линейности:

$$\int_S \int (\lambda a + \mu b, n^0) dS = \lambda \int_S \int (a, n^0) dS + \mu \int_S \int (b, n^0) dS,$$

где λ и μ — постоянные числа.

в) Свойство аддитивности: если поверхность S состоит из нескольких гладких частей S_1, S_2, \dots, S_m , то поток векторного поля $a(M)$ через S равен сумме потоков вектора $a(M)$ через поверхности S_1, S_2, \dots, S_m :

$$\Pi = \sum_{k=1}^m \int_{S_k} \int (a, n^0) dS.$$

Это свойство позволяет распространить понятие потока на кусочно гладкие поверхности.

Пример 1. Найти поток вектора $\mathbf{a} = \mathbf{i}$ через площадку, перпендикулярную оси Ox , имеющую форму прямоугольника со сторонами, равными 1 и 2 (рис. 16), в положительном направлении оси Ox .

Решение. Согласно определению потока вектора через поверхность S , будем иметь

$$\Pi = \iint_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) dS,$$

В нашем случае $\mathbf{a} = \mathbf{i}$, $\mathbf{n}^0 = \mathbf{i}$, так что $(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) = (\mathbf{i}, \mathbf{i}) = 1$. Учитывая то, что площадь прямоугольника равна 2, получим

$$\Pi = \iint_S 1 dS = 2.$$

Замечание. Выбрав единичный вектор (орт) нормали к площадке S так, что $\mathbf{n}^0 = -\mathbf{i}$, получили бы $\Pi = -2$.

Пример 2. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{a} = \mathbf{r}$, где \mathbf{r} — радиус-вектор, через прямой круговой цилиндр с высотой h , радиусом основания R и осью Oz .

Решение. Поверхность S состоит из боковой поверхности σ_1 , верхнего основания σ_2 и нижнего основания σ_3 цилиндра.

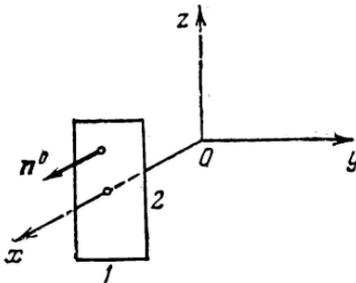


Рис. 16.

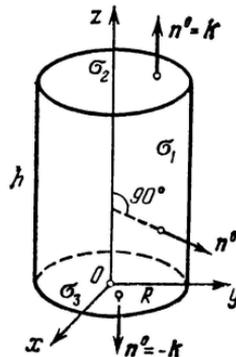


Рис. 17.

Искомый поток Π в силу свойства аддитивности будет равен $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3$, где Π_1, Π_2, Π_3 — потоки данного поля через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ соответственно.

На боковой поверхности σ_1 цилиндра внешняя нормаль \mathbf{n}^0 параллельна плоскости xOy , и поэтому

$$(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) = (\mathbf{r}, \mathbf{n}^0) = \text{пр}_{\mathbf{n}^0} \mathbf{r} = R$$

(см. рис. 17). Следовательно,

$$\Pi_1 = \iint_{\sigma_1} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) dS = R \iint_{\sigma_1} dS = R \cdot 2\pi R h = 2\pi R^2 h,$$

На верхнем основании σ_2 нормаль n^0 параллельна оси Oz , и поэтому можно положить $n^0 = k$ (рис. 17). Тогда

$$(a, n^0) = (r, k) = \text{пр}_{Oz} r = h,$$

и значит,

$$\Pi_2 = \iint_{\sigma_2} (a, n^0) dS = h \iint_{\sigma_2} dS = h \cdot \pi R^2 = \pi R^2 h.$$

На нижнем основании σ_3 вектор $a = r$ перпендикулярен к нормали $n^0 = -k$. Поэтому $(a, n^0) = (r, -k) = 0$ и

$$\Pi_3 = \iint_{\sigma_3} (a, n^0) dS = 0.$$

Искомый поток будет равен

$$\Pi = \oiint_S (a, n^0) dS = 3\pi R^2 h.$$

Пример 3. Найти поток векторного поля

$$a = \frac{r}{|r|^3}$$

через сферу радиуса R с центром в начале координат.

Решение. Так как нормаль n к сфере коллинеарна радиусу-вектору r , то можно взять $n^0 = r^0 = \frac{r}{|r|}$. Поэтому

$$(a, n^0) = \left(\frac{r}{|r|^3}, \frac{r}{|r|} \right) = \frac{1}{|r|^4} (r, r) = \frac{|r|^2}{|r|^4} = \frac{1}{|r|^2}.$$

Но на сфере S имеем $|r| = R$, поэтому $(a, n^0) = \frac{1}{R^2}$.

Искомый поток Π будет равен

$$\Pi = \oiint_S (a, n^0) dS = \frac{1}{R^2} \oiint_S dS = 4\pi,$$

так как площадь всей сферы S равна $\oiint_S dS = 4\pi R^2$.

104. Вычислить поток вектора $a = 3j$ через площадку, имеющую форму треугольника с вершинами в точках $M_1(1, 2, 0)$, $M_2(0, 2, 0)$, $M_3(0, 2, 2)$, в сторону, где расположено начало координат.

105. Найти поток вектора

$$a = \alpha i + \beta j + \gamma k,$$

где α , β , γ — постоянные, через площадку, перпендикулярную оси Oz и имеющую форму круга радиуса R , в положительном направлении оси Oz .

106. Найти поток вектора $\mathbf{a} = \mathbf{r}$ через внешнюю сторону кругового конуса, вершина которого находится в начале координат, радиус основания равен R и высота равна h (ось конуса идет по оси Oz).

107. Найти поток вектора $\mathbf{a} = f(|\mathbf{r}|)\mathbf{r}$ через сферу радиуса R с центром в начале координат.

II. Способы вычисления потока вектора.

1°. Метод проектирования на одну из координатных плоскостей. Пусть незамкнутая поверхность S проектируется взаимно однозначно на плоскость xOy в область D_{xy} . В этом случае поверхность S можно задать уравнением $z = f(x, y)$, и так как элемент площади dS этой поверхности равен

$$dS = \frac{dx dy}{|\cos \gamma|},$$

то вычисление потока Π через выбранную сторону поверхности S сводится к вычислению двойного интеграла по формуле

$$\Pi = \iint_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) dS = \iint_{D_{xy}} \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)}{|\cos \gamma|} \Big|_{z=f(x,y)} dx dy. \quad (1)$$

Здесь орт \mathbf{n}^0 нормали к выбранной стороне поверхности S находится по формуле

$$\mathbf{n}^0 = \pm \frac{\text{grad}[z - f(x, y)]}{|\text{grad}[z - f(x, y)]|} = \pm \frac{-\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}}, \quad (2)$$

а $\cos \gamma$ равен коэффициенту при орте \mathbf{k} в формуле (2):

$$\cos \gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}}. \quad (3)$$

Если угол γ между осью Oz и нормалью \mathbf{n}^0 острый, то в формулах (2) и (3) берется знак «+», если же угол γ тупой, то берется знак «-». Символ

$$\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)}{|\cos \gamma|} \Big|_{z=f(x,y)}$$

означает, что в подынтегральной функции вместо z надо подставить $f(x, y)$.

Если оказывается удобным проектировать поверхность S на координатные плоскости yOz или xOz , то для вычисления потока Π пользуются соответственно формулами:

$$\Pi = \iint_{D_{yz}} \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)}{|\cos \alpha|} \Big|_{x=\varphi(y, z)} dy dz \quad (4)$$

или

$$\Pi = \iint_{D_{xz}} \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)}{|\cos \beta|} \Big|_{y=\psi(x, z)} dx dz. \quad (5)$$

Формула (4) применяется в случае, когда поверхность S проектируется взаимно однозначно в область D_{yz} плоскости yOz , а значит, ее можно задать уравнением $x = \varphi(y, z)$; $\cos \alpha$ находится как коэффициент при орте \mathbf{i} в формуле

$$\mathbf{n}^0 = \pm \frac{\text{grad}[x - \varphi(y, z)]}{|\text{grad}[x - \varphi(y, z)]|} = \pm \frac{\mathbf{i} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}},$$

т. е.

$$\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}}.$$

Знак «+» берется в случае, если угол α между осью Ox и нормалью \mathbf{n}^0 острый, если же α — тупой угол, то берут знак «-».

Формула (5) применяется при взаимно однозначном проектировании поверхности S на плоскость xOz ; в этом случае S можно задать уравнением $y = \psi(x, z)$ и тогда

$$\mathbf{n}^0 = \pm \frac{\text{grad}[y - \psi(x, z)]}{|\text{grad}[y - \psi(x, z)]|} = \pm \frac{-\frac{\partial \psi}{\partial x} \mathbf{i} + \mathbf{j} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2}};$$

$\cos \beta$ есть коэффициент при орте \mathbf{j} в последней формуле, т. е.

$$\cos \beta = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2}}.$$

Если угол β между осью Oy и нормалью \mathbf{n}^0 острый, то берут знак «+», если же угол β тупой, то берут знак «-».

З а м е ч а н и е. В случае, когда поверхность S задана неявно уравнением $\Phi(x, y, z) = 0$, единичный вектор нормали

$$n^0 = i \cos \alpha + j \cos \beta + k \cos \gamma$$

находится по формуле

$$n^0 = \pm \frac{\text{grad } \Phi(x, y, z)}{|\text{grad } \Phi(x, y, z)|} = \pm \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x} i + \frac{\partial \Phi}{\partial y} j + \frac{\partial \Phi}{\partial z} k}{\sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2}},$$

где знак в правой части определяется выбором нормали к поверхности S .

Для вычисления потока Π векторного поля a через поверхность S надо ее спроектировать взаимно однозначно на какую-либо из координатных плоскостей xOy , xOz , yOz , что возможно сделать, если уравнение $\Phi(x, y, z) = 0$ однозначно разрешимо соответственно относительно $z(z = f(x, y))$, $y(y = \psi(x, z))$ или $x(x = \varphi(y, z))$, после чего можно воспользоваться одной из формул (1), (4), (5).

П р и м е р 4. Найти поток векторного поля

$$a = (x - 2z)i + (x + 3y + z)j + (5x + y)k$$

через верхнюю сторону треугольника ABC с вершинами в точках $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$.

Р е ш е н и е. Уравнение плоскости, в которой лежит треугольник ABC , имеет вид $x + y + z = 1$, откуда $z = 1 - x - y$. Треугольник ABC проектируется взаимно однозначно на плоскость xOy в область D_{xy} , которой является треугольник OAB (рис. 18).

По условию нормаль n^0 к плоскости, в которой лежит треугольник ABC , образует острый угол γ с осью Oz , поэтому в формуле (2) берем знак плюс и получаем

$$n^0 = \frac{\text{grad } (x + y + z - 1)}{|\text{grad } (x + y + z - 1)|} = \frac{1}{\sqrt{3}} i + \frac{1}{\sqrt{3}} j + \frac{1}{\sqrt{3}} k. \quad (6)$$

Находим скалярное произведение

$$\begin{aligned} (a, n^0) &= (x - 2z) \frac{1}{\sqrt{3}} + (x + 3y + z) \frac{1}{\sqrt{3}} + (5x + y) \frac{1}{\sqrt{3}} = \\ &= \frac{7x + 4y - z}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Из формулы (6) получаем, что $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$, значит,

$$dS = \frac{dx dy}{\cos \gamma} = \sqrt{3} dx dy.$$

Применяя формулу (1), вычисляем искомый поток:

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) dS = \iint_{D_{xy}} (7x + 4y - z) \Big|_{z=1-x-y} dx dy = \\ &= \iint_{D_{xy}} (8x + 5y - 1) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (8x + 5y - 1) dy = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Пример 5. Найти поток вектора $\mathbf{a} = y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через часть поверхности $z = x^2 + y^2$, отсеченной плоскостью $z = 2$. Нормаль

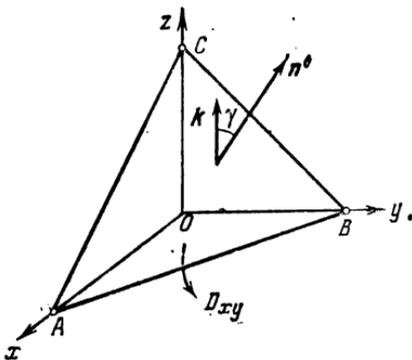


Рис. 18.

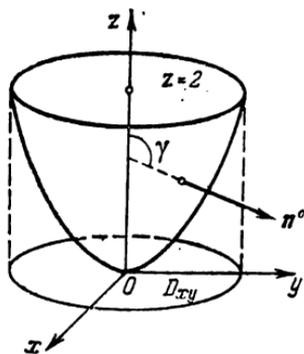


Рис. 19.

берется внешняя по отношению к области, ограниченной параболоидом.

Решение. Данная поверхность (параболоид вращения) проектируется взаимно однозначно на плоскость xOy в круг D_{xy} (рис. 19). Находим орт нормали \mathbf{n}^0 к поверхности S :

$$\mathbf{n}^0 = \pm \frac{\text{grad}(z - x^2 - y^2)}{|\text{grad}(z - x^2 - y^2)|} = \pm \frac{-2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$

По условию задачи нормаль \mathbf{n}^0 образует тупой угол γ с осью Oz , поэтому перед дробью следует взять знак минус. Таким образом,

$$\mathbf{n}^0 = \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$

Отсюда

$$\cos \gamma = -\frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} < 0$$

и, значит,

$$dS = \frac{dx dy}{|\cos \gamma|} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dx dy,$$

Находим скалярное произведение

$$(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) = \frac{2y^3 - z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$

Искомый поток в силу формулы (1) равен

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) dS = \iint_{D_{xy}} (2y^3 - z) \Big|_{z=x^2+y^2} dx dy = \\ &= \iint_{D_{xy}} (2y^3 - y^2 - x^2) dx dy. \end{aligned}$$

Область интегрирования D_{xy} есть круг с центром в начале координат радиуса $R = \sqrt{2}$. Вводя полярные координаты $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, будем иметь

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_{D_{xy}} (2\rho^3 \sin^3 \varphi - \rho^2) \rho d\rho d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} (2\rho^4 \sin^3 \varphi - \rho^3) d\rho = -2\pi \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^{\sqrt{2}} = -2\pi. \end{aligned}$$

Пример 6. Найти поток векторного поля $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$ через круг S , полученный сечением шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ плоскостью $y = x$. Взять сторону круга, обращенную к положительной части оси Ox .

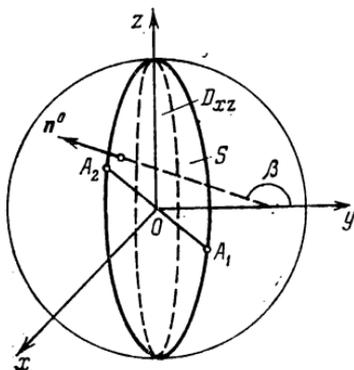


Рис. 20.

найдем, исключив y из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= R^2, \\ y &= x. \end{aligned} \right\}$$

Решение. Так как плоскость $y = x$ перпендикулярна координатной плоскости xOy , то круг S , лежащий на этой плоскости, проектируется на плоскость xOy в отрезок A_1A_2 и, значит, нарушается взаимная однозначность проектирования. На другие координатные плоскости круг S проектируется взаимно однозначно. Проектируя круг, например, на плоскость xOz , получим область D_{xz} , ограниченную эллипсом (рис. 20). Уравнение эллипса

Отсюда

$$2x^2 + z^2 = R^2 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{\frac{R^2}{2}} + \frac{z^2}{R^2} = 1.$$

По условию нормаль к кругу S образует тупой угол β с осью Oy (рис. 20), поэтому берем

$$\mathbf{n} = -\text{grad}(y - x) = \mathbf{i} - \mathbf{j},$$

$$\mathbf{n}^0 = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{j}.$$

Из последнего равенства имеем $\cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0$. Элемент площади dS круга равен

$$dS = \frac{dx dz}{|\cos \beta|} = \sqrt{2} dx dz.$$

Находим скалярное произведение: $(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) = \sqrt{2}$.

Искомый поток по формуле (5) равен

$$\Pi = \iint_{D_{xz}} 2 dx dz = 2 \iint_{D_{xz}} dx dz = 2 \cdot \frac{\pi R^2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} R^2 \pi,$$

так как площадь Q области D_{xz} , ограниченной эллипсом с полуосями

$a = \frac{R}{\sqrt{2}}$ и $b = R$, равна

$$Q = \iint_{D_{xz}} dx dz = \pi ab = \frac{\pi R^2}{\sqrt{2}}.$$

Пример 7. Вычислить поток вектора $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через внешнюю сторону боковой поверхности кругового цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, ограниченной плоскостями $z = 0$ и $z = H$ ($H > 0$).

Решение. Данный цилиндр проектируется на плоскость xOy в линию, а именно, в окружность (рис. 21)

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= R^2, \\ z &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Поэтому будем проектировать цилиндр на другие координатные плоскости, например, на плоскость yOz . Так как цилиндр проектируется на плоскость yOz не взаимно однозначно, то воспользуемся свойством аддитивности потока вектора и представим искомый поток Π в виде суммы потоков $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$, где Π_1 — поток поля через часть S_1 цилиндра, расположенную в области, где $y \geq 0$, а Π_2 — поток этого же поля через часть S_2 цилиндра,

расположенную в области, где $y < 0$. На S_1 имеем

$$\mathbf{n}^0 = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{R}, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) = \frac{x^2 + y^2}{R} = R.$$

Следовательно,

$$\Pi_1 = \iint_{S_1} R \, dS = R \iint_{S_1} dS = RS,$$

где S — площадь части S_1 цилиндра. Так как $S = \pi R H$, то $\Pi_1 = \pi R^2 H$.

На S_2 опять имеем

$$\mathbf{n}^0 = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{R}, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) = \frac{x^2 + y^2}{R} = R$$

и, значит,

$$\Pi_2 = \iint_{S_2} R \, dS = RS = \pi R^2 H.$$

Искомый поток равен $\Pi = 2\pi R^2 H$.

З а м е ч а н и е. Задача решается проще, если на цилиндре ввести криволинейные координаты $x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$, $z = z$. (См. далее п. 3°).

Для нахождения потока векторного поля $\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ через поверхность S , заданную уравнением $z = f(x, y)$ методом проектирования на координатную плоскость, не обязательно находить орт \mathbf{n}^0 нормали, а можно брать вектор

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \pm \operatorname{grad} [z - f(x, y)] = \\ &= \pm \left(-\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right). \end{aligned}$$

Тогда формула (1) для вычисления потока Π примет вид

$$\Pi = \iint_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) \, dS =$$

$$= \iint_{D_{xy}} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) \Big|_{z=f(x,y)} \, dx \, dy. \quad (7)$$

Аналогично получаются формулы для вычисления потоков через поверхности, заданные уравнениями $x = \varphi(y, z)$ или $y = \psi(x, z)$.

Формула (7) в координатной форме записывается так:

$$\begin{aligned} \Pi = \pm \iint_{D_{xy}} \left\{ -P[x, y, f(x, y)] \frac{\partial f}{\partial x} - Q[x, y, f(x, y)] \frac{\partial f}{\partial y} + \right. \\ \left. + R[x, y, f(x, y)] \right\} dx \, dy. \end{aligned}$$

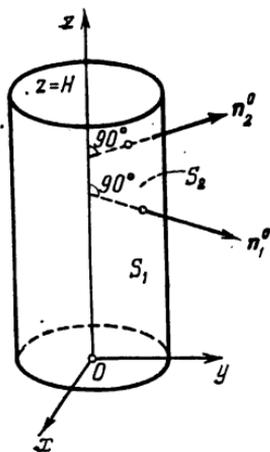


Рис. 21.

Пример 8. Вычислить поток векторного поля

$$\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}\mathbf{k}$$

через внешнюю сторону однополостного гиперболоида $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2 - 1}$, ограниченного плоскостями $z = 0$, $z = \sqrt{3}$.

Решение. Данная поверхность проектируется взаимно однозначно на плоскость xOy в область D_{xy} , ограниченную окружностями

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0 \end{array} \right\} \text{ и } \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 0. \end{array} \right\}$$

Находим внешнюю нормаль \mathbf{n} :

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \pm \operatorname{grad} (z - \sqrt{x^2 + y^2 - 1}) = \\ &= \pm \left(\frac{-x\mathbf{i} - y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} + \mathbf{k} \right). \end{aligned}$$

Так как \mathbf{n} образует с осью Oz тупой угол γ (рис.22), то берем знак минус и, значит,

$$\mathbf{n} = \frac{-x\mathbf{i} - y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} - \mathbf{k},$$

Находим скалярное произведение

$$(\mathbf{a}, \mathbf{n}) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} - \sqrt{x^2 + y^2 - 1} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}.$$

Применяя формулу (7), получим

$$\Pi = \iint_{\mathcal{B}} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) dS = \iint_{D_{xy}} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}.$$

Переходя к полярным координатам $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, будем иметь

$$\Pi = \iint_{D_{xy}} \frac{\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{\rho^2 - 1}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - 1}} = 2\pi \sqrt{\rho^2 - 1} \Big|_1^2 = 2\sqrt{3}\pi.$$

Пример 9. Вычислить поток векторного поля

$$\mathbf{a} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$$

через замкнутую поверхность, ограниченную цилиндром $x^2 + y^2 = R^2$ и плоскостями $z = x$, $z = 0$ ($z \geq 0$).

Решение. Поверхность S кусочно гладкая, поэтому воспользуемся свойством аддитивности потока, представляя искомый поток Π в виде суммы потоков Π_1 , Π_2 , Π_3 через гладкие куски,

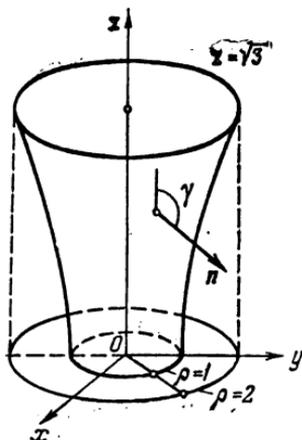


Рис. 22.

соответственно, S_1 (полукруг $x^2 + y^2 \leq R^2$, $0 \leq x \leq R$, $z = 0$), S_2 (часть плоскости $z=x$) и S_3 (часть цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$): $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3$. Так как S замкнута, то берем внешнюю нормаль к ней (рис. 23).

1) На S_1 , где $z = 0$, имеем $n^0 = -k$, поэтому

$$(a, n^0) = -x$$

и, значит, поток Π_1 будет равен

$$\Pi_1 = - \iint_{S_1} x dS = - \iint_{S_1} x dx dy.$$

Переходя к полярным координатам $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, найдем

$$\Pi_1 = - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^R \rho \cos \varphi \rho d\rho d\varphi = - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \int_0^R \rho^2 d\rho = - \frac{2}{3} R^3.$$

2) На S_2 , где $z = x$, имеем

$$n = \pm \text{grad}(z - x) = \pm (-i + k),$$

и так как нормаль n к S_2 образует с осью Oz острый угол, то в правой части берем знак плюс. Таким образом, $n = -i + k$ и, значит, $(a, n) = x - y$.

Проектируя S_2 на плоскость xOy , получим полукруг

$$D_{xy}: 0 \leq x \leq \sqrt{R^2 - y^2}.$$

Тогда по формуле (6) будем иметь

$$\Pi_2 = \iint_{D_{xy}} (a, n) \Big|_{z=x} dx dy,$$

и снова переходя к полярным координатам, найдем

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos \varphi - \sin \varphi) d\varphi \int_0^R \rho^2 d\rho = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos \varphi - \sin \varphi) d\varphi \int_0^R \rho^2 d\rho = \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3} R^3.$$

3) На S_3 , где $x^2 + y^2 = R^2$, т. е. на боковой поверхности цилиндра, имеем

$$n^0 = \pm \frac{\text{grad}(x^2 + y^2 - R^2)}{|\text{grad}(x^2 + y^2 - R^2)|} = \pm \frac{x i + y j}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \pm \frac{x i + y j}{R}.$$

В этом случае нормаль n образует с осью Oz прямой угол и, значит,

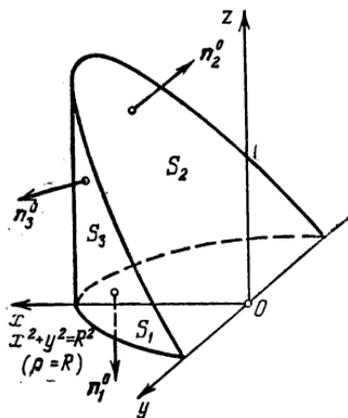


Рис. 23.

$\cos \gamma = 0$, поэтому выбор знака в правой части произволен; возьмем, например, знак плюс, тогда

$$n^0 = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{R}, \quad (a, n^0) = \frac{(x+z)y}{R},$$

и, следовательно,

$$\Pi_3 = \frac{1}{R} \iint_{S_3} (x+z)y \, dS.$$

Проектировать поверхность S_3 (прямой цилиндр) на плоскость xOy нельзя, так как она спроектируется в линию — полуокружность (будет нарушена взаимная однозначность проектирования). То же самое имеет место и в случае проектирования на плоскость xOz . Поэтому будем проектировать поверхность S_3 на плоскость yOz , на которую она проектируется взаимно однозначно в область D_{yz} , ограниченную линией

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= R^2, \\ z &= x. \end{aligned} \right\}$$

Исключая отсюда x , получим уравнение проекции этой линии на плоскость zOy : $z^2 + y^2 = R^2$ — окружность. Так как

$$|\cos \alpha| = \left| \cos \widehat{(n_3^0, i)} \right| = |(n_3^0, i)| = \left| \frac{x}{R} \right| = \frac{x}{R} \quad (x \geq 0),$$

то будем иметь

$$\begin{aligned} \Pi_3 &= \frac{1}{R} \iint_{D_{yz}} \frac{(x+z)y}{|\cos \alpha|} \Big|_{x=z} dy \, dz = \iint_{D_{yz}} \frac{(x+z)y}{x} \Big|_{x=z} dy \, dz = \\ &= \iint_{D_{yz}} \frac{2zy}{z} dy \, dz = 2 \iint_{D_{yz}} y \, dy \, dz. \end{aligned}$$

Используя полярные координаты: $y = \rho \cos \varphi$, $z = \rho \sin \varphi$, найдем

$$\Pi_3 = 2 \iint_{D_{yz}} \rho \cos \varphi \rho \, d\rho \, d\varphi = 2 \int_0^\pi \cos \varphi \, d\varphi \int_0^R \rho^2 \, d\rho = 0.$$

Итак,

$$\Pi = -\frac{2}{3} \pi R^3 + \frac{2}{3} \pi R^3 + 0 = 0.$$

108. Вычислить поток векторного поля $a = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ через верхнюю сторону треугольника,

ограниченного плоскостями

$$x + y + z = a, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

109. Вычислить поток векторного поля $a = xzi$ через внешнюю сторону параболоида $z = 1 - x^2 - y^2$, ограниченного плоскостью $z = 0$ ($z \geq 0$).

110. Вычислить поток векторного поля $a = xi + zk$ через боковую поверхность кругового цилиндра $y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$, ограниченную плоскостями $z = 0, z = h$ ($h > 0$).

111. Вычислить поток векторного поля $a = xi + yj + zk$ через верхнюю сторону круга, вырезаемого конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ на плоскости $z = h$ ($h > 0$).

112. Вычислить поток векторного поля $a = 3xi - yj - zk$ через внешнюю сторону параболоида $x^2 + y^2 = 9 - z$, расположенную в первом октанте.

113. Вычислить поток векторного поля

$$a = (x^2 + y^2)i + (y^2 + z^2)j + (z^2 + x^2)k$$

через часть плоскости $z = 0$, ограниченную окружностью $x^2 + y^2 = 1$, в направлении орта k .

114. Вычислить поток векторного поля $a = yzi - xj - yk$ через полную поверхность конуса $x^2 + y^2 = z^2$, ограниченную плоскостью $z = 1$ ($0 \leq z \leq 1$).

115. Вычислить поток векторного поля $a = 2xi + (1 - 2y)j + 2zk$ через замкнутую поверхность, ограниченную параболоидом $x^2 + z^2 = 1 - 2y$ ($y \geq 0$) и плоскостью $z = 0$.

116. Вычислить поток векторного поля $a = x^2i + y^2j + z^2k$ через полную поверхность пирамиды, ограниченной плоскостями $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$.

117. Вычислить поток векторного поля $a = xi + yj + zk$ через сферу $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

2°. Метод проектирования на все три координатные плоскости. Пусть поверхность S взаимно однозначно проектируется на все три координатные плоскости. Обозначим через D_{xy}, D_{xz}, D_{yz} проекции S соответственно на плоскости xOy, xOz, yOz .

В этом случае уравнение $F(x, y, z) = 0$ поверхности S однозначно разрешимо относительно каждого из аргументов x, y, z , так что

$$x = x(y, z), \quad y = y(x, z), \quad z = z(x, y).$$

Тогда поток вектора

$$\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

через поверхность S , единичный вектор нормали к которой равен

$$\mathbf{n}^0 = \cos \alpha \cdot \mathbf{i} + \cos \beta \cdot \mathbf{j} + \cos \gamma \cdot \mathbf{k}.$$

можно записать так:

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) dS = \\ &= \int_S [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] dS. \end{aligned} \quad (8)$$

Известно, что

$$\begin{aligned} dS \cos \alpha &= \pm dy dz, \\ dS \cos \beta &= \pm dx dz, \\ dS \cos \gamma &= \pm dx dy, \end{aligned} \quad (9)$$

причем знак в каждой из формул (9) выбирается таким, каков знак $\cos \alpha$, $\cos \beta$ и $\cos \gamma$ на поверхности S . Подставляя (9) в (8), будем иметь

$$\begin{aligned} \Pi &= \pm \int_{D_{yz}} P[x(y, z), y, z] dy dz \pm \int_{D_{xz}} Q[x, y(x, z), z] dx dz \pm \\ &\quad \pm \int_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)] dx dy. \end{aligned} \quad (10)$$

Пример 10. Найти поток вектора

$$\mathbf{a} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$$

через часть внешней стороны сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, заключенной в первом октанте.

Решение. Имеем

$$\mathbf{n}^0 = \frac{\text{grad}(x^2 + y^2 + z^2 - 1)}{|\text{grad}(x^2 + y^2 + z^2 - 1)|} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

откуда, учитывая, что данная поверхность S находится в первом октанте, получим

$$\cos \alpha = x \geq 0, \quad \cos \beta = y \geq 0, \quad \cos \gamma = z \geq 0.$$

Поэтому в формуле (10) берем перед всеми интегралами знак плюс и, полагая в ней

$$P = xy, \quad Q = yz, \quad R = xz,$$

получим

$$\Pi = \int_{D_{yz}} xy \, dy \, dz + \int_{D_{xz}} yz \, dx \, dz + \int_{D_{xy}} xz \, dx \, dy. \quad (11)$$

Из уравнения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, находим

$$z = z(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad y = y(x, z) = \sqrt{1 - x^2 - z^2}, \\ x = x(y, z) = \sqrt{1 - y^2 - z^2}.$$

Подставляя эти выражения для x , y , z соответственно в третий, второй и первый интегралы правой части (11), получим

$$\Pi = \int_{D_{xy}} x \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx \, dy + \int_{D_{xz}} z \sqrt{1 - x^2 - z^2} \, dx \, dz + \\ + \int_{D_{yz}} y \sqrt{1 - y^2 - z^2} \, dy \, dz. \quad (12)$$

Вычислим первый интеграл, стоящий в правой части, переходя к полярным координатам $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, где $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, $0 \leq \rho \leq 1$. Тогда получим

$$I_1 = \int_{D_{xy}} x \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx \, dy = \int_{D_{xy}} \rho^2 \sqrt{1 - \rho^2} \cos \varphi \, d\varphi \, d\rho = \\ = \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \, d\varphi \int_0^1 \rho^2 \sqrt{1 - \rho^2} \, d\rho = \int_0^1 \rho^2 \sqrt{1 - \rho^2} \, d\rho.$$

Полагая в последнем интеграле $\rho = \sin t$, $d\rho = \cos t \, dt$, будем иметь

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t \, dt = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t \, dt = \frac{\pi}{16}.$$

Второй и третий интегралы в формуле (12) вычисляются аналогично; при этом получим

$$I_2 = \int_{D_{xz}} z \sqrt{1 - x^2 - z^2} \, dx \, dz = \frac{\pi}{16}, \\ I_3 = \int_{D_{yz}} y \sqrt{1 - y^2 - z^2} \, dy \, dz = \frac{\pi}{16}.$$

Искомый поток будет равен

$$\Pi = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{3\pi}{16}.$$

118. Применяя метод проектирования на все три координатные плоскости, вычислить поток векторного поля

$$a = zi - xj + yk$$

через верхнюю сторону треугольника, получаемого пересечением плоскости $3x + 6y - 2z - 6 = 0$ с координатными плоскостями.

3°. Метод введения криволинейных координат на поверхности. В некоторых случаях при вычислении потока векторного поля через данную поверхность S возможно выбрать на самой поверхности простую систему координат, в которой удобно вычислять поток, не применяя проектирования на координатные плоскости.

Рассмотрим частные случаи.

С л у ч а й 1). Пусть поверхность S является частью кругового цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, ограниченного поверхностями $z = f_1(x, y)$ и $z = f_2(x, y)$, причем $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$.

Полагая

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi, \quad z = z,$$

будем иметь для данной поверхности

$$0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$f_1(R \cos \varphi, R \sin \varphi) \leq$$

$$\leq z \leq f_2(R \cos \varphi, R \sin \varphi),$$

а для элемента площади dS получаем следующее выражение (рис. 24):

$$dS = R d\varphi dz.$$

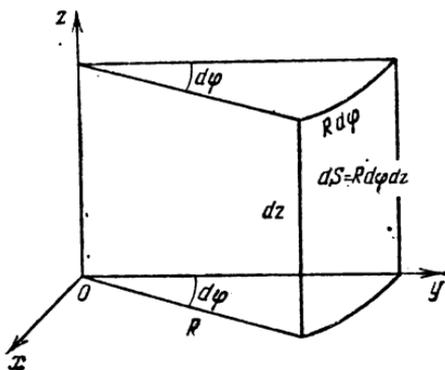


Рис. 24.

Тогда поток векторного поля a через внешнюю сторону поверхности S вычисляется по формуле

$$\Pi = R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{f_1(R \cos \varphi, R \sin \varphi)}^{f_2(R \cos \varphi, R \sin \varphi)} (a, n^0) dz, \quad (13)$$

где

$$n^0 = \frac{\text{grad}(x^2 + y^2 - R^2)}{|\text{grad}(x^2 + y^2 - R^2)|} = \frac{xi + yj}{R}.$$

Пример 11. Найти поток вектора $r = xi + yj + zk$ через внешнюю сторону боковой поверхности кругового цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, ограниченного плоскостями $z = 0$ и $z = H (H > 0)$.

Решение. В данном случае имеем:

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi; f_1(R \cos \varphi, R \sin \varphi) = 0, f_2(R \cos \varphi, R \sin \varphi) = H.$$

Введем на цилиндре криволинейные координаты

$$x = R \cos \varphi, y = R \sin \varphi, z = z,$$

Тогда искомый поток вектора r будет равен

$$\Pi = R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H (r, n^0) dz.$$

Но так как

$$r = xi + yj + zk = R \cos \varphi \cdot i + R \sin \varphi \cdot j + zk,$$

а нормаль n^0 на цилиндре

$$n^0 = \frac{x i + y j}{R} = \frac{R \cos \varphi \cdot i + R \sin \varphi \cdot j}{R} = \cos \varphi \cdot i + \sin \varphi \cdot j,$$

то скалярное произведение на цилиндре будет равно

$$(r, n^0) = R \cos^2 \varphi + R \sin^2 \varphi = R.$$

Окончательно находим

$$\Pi = R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H dz = 2\pi R^2 H.$$

Пример 12. Вычислить поток радиуса-вектора

$$r = xi + yj + zk$$

через боковую поверхность кругового цилиндра $x^2 + y^2 = 1$, ограниченного снизу плоскостью $x + y + z = 1$, а сверху — плоскостью $x + y + z = 2$.

Решение. В данном случае (рис. 25) имеем

$$R = 1, f_1(x, y) = 1 - x - y, f_2(x, y) = 2 - x - y.$$

Переходя к координатам на цилиндре

$$x = \cos \varphi, y = \sin \varphi, z = z,$$

будем иметь

$$f_1(x, y) = 1 - \cos \varphi - \sin \varphi, f_2(x, y) = 2 - \cos \varphi - \sin \varphi.$$

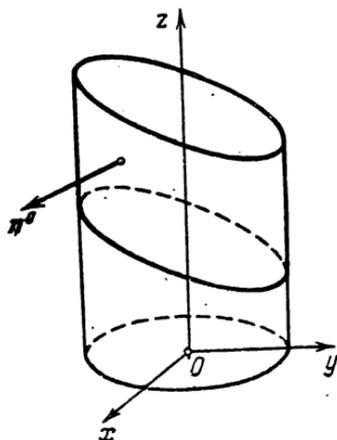


Рис. 25.

Согласно формуле (13) поток вектора r будет равен

$$\Pi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{1 - \cos \varphi - \sin \varphi}^{2 - \cos \varphi - \sin \varphi} (r, n^0) dz.$$

Но так как на цилиндре $x^2 + y^2 = 1$

$$n^0 = xi + yj = \cos \varphi \cdot i + \sin \varphi \cdot j,$$

то

$$(r, n^0) = x^2 + y^2 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

и, следовательно,

$$\Pi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{1 - \cos \varphi - \sin \varphi}^{2 - \cos \varphi - \sin \varphi} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

119. Найти поток вектора

$$a = yi + xj - e^{xy}k$$

через внешнюю сторону боковой поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = 4$, ограниченной плоскостями $z = 0$ и $x + y + z = 4$.

120. Найти поток вектора

$$a = xi - xyj + zk$$

через внешнюю сторону цилиндрической поверхности $x^2 + z^2 = R^2$, ограниченной плоскостями $y = 1$ и $x + y = 4$.

121. Найти поток вектора

$$a = x^3i - y^3j + xz^3k$$

через внешнюю сторону цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = 9$, ограниченной сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

122. Найти поток векторного поля

$$a = xi - yj - xyz^3k$$

через внешнюю сторону боковой поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = 1$, ограниченной плоскостью $z = 0$ и гиперболическим параболоидом $z = x^2 - y^2$.

123. Найти поток векторного поля

$$a = (xy - y^2)i + (2x - x^2 + xy)j + zk$$

через внешнюю сторону боковой поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = 1$, ограниченной эллиптическим конусом $z^2 = \frac{x^2}{2} + y^2$.

С л у ч а й 2). Пусть поверхность S является частью сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, ограниченной коническими поверхностями, уравнения которых в сферических координатах имеют вид $\theta = f_1(\varphi)$, $\theta = f_2(\varphi)$, и полуплоскостями $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$.

Положим для точек данной сферы

$$x = R \cos \varphi \sin \theta, \quad y = R \sin \varphi \sin \theta, \quad z = R \cos \theta,$$

где $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$. Тогда для элемента площади dS получим (рис. 26)

$$dS = R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi.$$

В этом случае поток векторного поля \mathbf{a} через внешнюю часть S сферы вычисляется по формуле

$$\Pi = R^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) \sin \theta \, d\theta, \quad (14)$$

где

$$\mathbf{n}^0 = \frac{\text{grad}(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)}{|\text{grad}(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)|} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{R}.$$

П р и м е р 13. Найти поток вектора

$$\mathbf{a} = (x - 2y + 1)\mathbf{i} + (2x + y - 3z)\mathbf{j} + (3y + z)\mathbf{k}$$

через часть поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, расположенную в первом октанте, в область, где $x^2 + y^2 + z^2 > 1$.

Р е ш е н и е. В данном случае имеем

$$R = 1, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \pi/2,$$

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \pi/2,$$

$$\mathbf{n}^0 = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) = x^2 + y^2 + z^2 + x.$$

Введем на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ координаты φ и θ так, что

$$x = \cos \varphi \sin \theta, \quad y = \sin \varphi \sin \theta,$$

$$z = \cos \theta.$$

Тогда будем иметь

$$(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) = 1 + \cos \varphi \sin \theta$$

и, применяя формулу (14), получим

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} (1 + \cos \varphi \sin \theta) \sin \theta \, d\theta = \\ &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \, d\theta + \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \, d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \, d\theta = \frac{3}{4} \pi. \end{aligned}$$

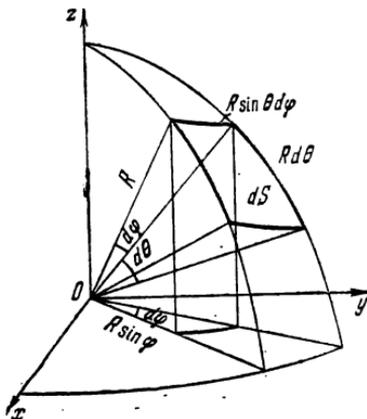


Рис. 26.

124. Найти поток векторного поля

$$a = x^3i - y^3j + zk$$

через внешнюю сторону части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, вырезаемой конической поверхностью $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$.

125. Найти поток векторного поля

$$a = yzi + xzj + xyk$$

через внешнюю сторону части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, расположенную в первом октанте.

126. Найти поток радиуса-вектора

$$r = xi + yj + zk$$

через внешнюю сторону части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, ограниченной плоскостями $z = 0$ и $z = y$.

127. Найти поток вектора

$$a = xzi + yzj + z^2k$$

через внешнюю часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, отсеченной плоскостью $z = 2$ ($z \geq 2$).

§ 12. Поток вектора через замкнутую поверхность. Теорема Гаусса — Остроградского

Т е о р е м а. Если в некоторой области G пространства координаты вектора

$$a = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k$$

непрерывны и имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$, то поток вектора a через любую замкнутую кусочно гладкую поверхность Σ , расположенную в области G , равен тройному интегралу от $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ по области V , ограниченной поверхностью Σ :

$$\Pi = \oiint_{\Sigma} (a, n^0) d\sigma = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv \quad (1)$$

(Формула Гаусса—Остроградского).

Нормаль n к поверхности Σ берется внешняя.

П р и м е р 1. Вычислить поток вектора

$$a = x^2i + y^2j + z^2k$$

через замкнутую поверхность

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad z = 0 \quad (z > 0).$$

Решение. По формуле (1)

$$\Pi = \iiint_V (2x + 2y + 2z) \, dv. \quad (2)$$

Интеграл (2) удобно вычислять в сферических координатах r, θ, φ . Имеем

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

и элемент объема

$$dv = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi,$$

так что

$$\begin{aligned} \Pi &= 2 \iiint_V (r \sin \theta \cos \varphi + r \sin \theta \sin \varphi + r \cos \theta) r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = \\ &= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta (\sin \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi + \cos \theta) d\theta \int_0^R r^3 dr = \\ &= \frac{2R^4}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \, d\theta = \frac{\pi R^4}{2}. \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислить поток вектора $\mathbf{a} = 4xz \mathbf{i} - yj + zk$ через поверхность тора.

Решение. Воспользовавшись теоремой Гаусса—Остроградского, получим, что искомый поток Π равен

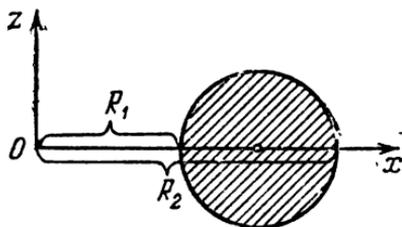


Рис. 27.

$$\begin{aligned} \Pi &= \oiint_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) \, d\sigma = \\ &= \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = 4V, \end{aligned}$$

где V — объем тора. Чтобы вычислить объем V , воспользуемся теоремой Гюльдена об объеме тела вращения, в силу которой этот объем равен произведению площади вращающейся фигуры на путь, описываемый центром масс этой фигуры при вращении.

Пусть R_1 и R_2 — внутренний и внешний радиусы тора (рис. 27). Площадь S круга, который при вращении образует тор, равна

$$S = \pi \left(\frac{R_2 - R_1}{2} \right)^2.$$

Длина пути, описываемого центром масс — центром этого круга, — есть длина l окружности радиуса $\frac{R_1 + R_2}{2}$, т. е.

$$l = 2\pi \frac{R_1 + R_2}{2} = \pi(R_1 + R_2).$$

Таким образом, объем V тора равен

$$V = \pi \left(\frac{R_2 - R_1}{2} \right)^2 \pi (R_2 + R_1) = \frac{\pi^2}{4} (R_2 - R_1)^2 (R_2 + R_1).$$

Искомый поток

$$\Pi = \pi^2 (R_2 - R_1)^2 (R_2 + R_1).$$

Пример 3. Используя теорему Гаусса—Остроградского, вычислить поток векторного поля

$$a = \left(\frac{x^2 y}{1 + y^2} + 6yz^2 \right) i + 2x \operatorname{arctg} y \cdot j - \frac{2xz(1 + y) + 1 + y^2}{1 + y^2} k$$

через внешнюю сторону части поверхности $z = 1 - x^2 - y^2$, расположенной над плоскостью xOy .

Решение. Для того чтобы можно было применить теорему Гаусса—Остроградского, замкнем снизу данную поверхность куском плоскости xOy , который ограничен окружностью

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1, \\ z &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Пусть v — объем полученного тела, ограниченного замкнутой кусочно гладкой поверхностью σ , состоящей из части σ_1 параболоида вращения $z = 1 - x^2 - y^2$ и части σ_2 плоскости $z = 0$ (рис. 28).

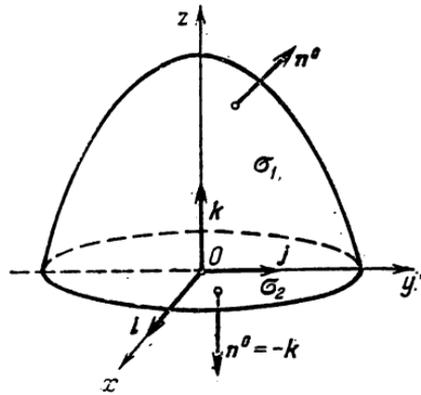


Рис. 28.

Поток данного вектора через поверхность σ по теореме Гаусса—Остроградского равен

$$\Pi = \iiint_{\sigma} (a, n^0) d\sigma = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv.$$

Находим сумму

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{2xy}{1 + y^2} + \frac{2x}{1 + y^2} - \frac{2x(1 + y)}{1 + y^2} \equiv 0.$$

Следовательно, поток

$$\Pi = \oiint_{\sigma} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma = 0.$$

В силу аддитивности потока будем иметь

$$\Pi = \iint_{\sigma_1} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma + \iint_{\sigma_2} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma = 0.$$

Отсюда искомым поток

$$\Pi_1 = \iint_{\sigma_1} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma = - \iint_{\sigma_2} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma.$$

Поток Π_2 вектора \mathbf{a} через круг $x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$ равен

$$\Pi_2 = \iint_{\sigma_2} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma.$$

Так как на плоскости $z = 0$ имеем

$$\mathbf{a} = \frac{x^2 y}{1 + y^2} \mathbf{i} + 2x \operatorname{arctg} y \cdot \mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{n}^0 = -\mathbf{k},$$

и следовательно, $(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) = 1$, то поток Π_2 через круг σ_2 будет равен площади круга σ_2 :

$$\Pi_2 = \iint_{\sigma_2} d\sigma = \pi.$$

Искомый поток $\Pi_1 = -\Pi_2 = -\pi$.

Используя теорему Гаусса — Остроградского, вычислить потоки векторных полей через указанные замкнутые поверхности S .

128. $\mathbf{a} = (1 + 2x)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; $S: x^2 + y^2 = z^2, z = 4, z \geq 0$.

129. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + y\mathbf{k}$; $S: x^2 + y^2 = 4 - z, z = 0, z \geq 0$.

130. $\mathbf{a} = (y^2 + z^2)\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + 2yz\mathbf{k}$; $S: x^2 + z^2 = y^2, y = 1, y \geq 0$.

§ 13. Дивергенция векторного поля.

Соленоидальное поле

Понятие потока вектора через замкнутую поверхность приводит к понятию о дивергенции или расхожимости поля. Это понятие дает некоторую количественную характеристику поля в каждой его точке.

Пусть M — изучаемая точка поля. Окружим ее поверхностью Σ произвольной формы, например, сферой достаточно малого радиуса. Область, ограниченная поверхностью Σ , пусть будет (V) , а ее объем V . Рассмотрим отношение

$$\frac{\oiint_{\Sigma} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma}{V}. \quad (1)$$

О п р е д е л е н и е 1. Если отношение (1) имеет конечный предел, когда область (V) стягивается к точке M , то этот предел называют *дивергенцией* векторного поля (дивергенцией вектора \mathbf{a}) в точке M и обозначают символом $\operatorname{div} \mathbf{a}(M)$. Так что

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = \lim_{(V) \rightarrow M} \frac{\oiint_{\Sigma} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma}{V}. \quad (2)$$

Формула (2) дает инвариантное определение дивергенции. Это определение означает, что дивергенция поля \mathbf{a} в точке M есть объемная плотность потока вектора \mathbf{a} в этой точке.

Точки M векторного поля $\mathbf{a}(M)$, в которых $\operatorname{div} \mathbf{a} > 0$, называются *источниками*, а точки, в которых $\operatorname{div} \mathbf{a} < 0$, называются *стоками* векторного поля.

Дивергенция векторного поля есть скалярная функция точек поля.

Если координаты вектора

$$\mathbf{a}(M) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ в окрестности точки $M(x, y, z)$, то, пользуясь инвариантным определением дивергенции, из теоремы Гаусса — Остроградского получаем, что

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (3)$$

Все величины в формуле (3) рассматриваются в одной и той же точке $M(x, y, z)$.

Используя формулу (3) для дивергенции, можно теорему Гаусса — Остроградского (см. § 12) записать в векторной форме

$$\oiint_{\Sigma} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma = \int \int \int_V \operatorname{div} \mathbf{a} dv. \quad (4)$$

П р и м е р 1. Пользуясь инвариантным определением, вычислить дивергенцию вектора $\mathbf{a} = x\mathbf{i}$ в точке $O(0, 0, 0)$, выбрав в качестве поверхностей σ , окружающих точку O , сферы σ_e радиуса e с центром в этой точке.

Решение. По определению дивергенции в данной точке имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(0) = \lim_{(\sigma_\varepsilon) \rightarrow 0} \frac{\oiint_{\sigma_\varepsilon} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma}{v_\varepsilon},$$

где v_ε — объем шара, ограниченного сферой σ_ε , или

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\oiint_{\sigma_\varepsilon} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma}{v_\varepsilon}.$$

Но так как объем шара равен $v_\varepsilon = \frac{4}{3} \pi \varepsilon^3$, то

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\oiint_{\sigma_\varepsilon} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma}{\frac{4}{3} \pi \varepsilon^3}.$$

Вычислим поток $\oiint_{\sigma_\varepsilon} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma$ данного вектора через сферу σ_ε . Орт нормали \mathbf{n}^0 к сфере σ_ε направлен по радиусу сферы, поэтому можно положить:

$$\mathbf{n}^0 = \mathbf{r}^0 = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{\mathbf{r}}{\varepsilon},$$

где \mathbf{r}^0 — орт радиуса-вектора $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, или

$$\mathbf{n}^0 = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\varepsilon}.$$

Искомый поток будет равен

$$\oiint_{\sigma_\varepsilon} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma = \oiint_{\sigma_\varepsilon} \frac{x^2}{\varepsilon} d\sigma.$$

Переходя к координатам на сфере σ_ε

$$x = \varepsilon \cos \varphi \sin \theta, \quad y = \varepsilon \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \varepsilon \cos \theta,$$

получим

$$\begin{aligned} \oiint_{\sigma_\varepsilon} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta \varepsilon^2 \sin \theta d\varphi d\theta}{\varepsilon} = \\ &= \varepsilon^3 \int_0^\pi \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \varphi d\varphi = \frac{4}{3} \pi \varepsilon^3. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{3} \pi \varepsilon^3}{\frac{4}{3} \pi \varepsilon^3} = 1.$$

Пример 2. Вычислить $\operatorname{div} \mathbf{r}$.

Решение. Имеем $\mathbf{r} = xi + yj + zk$, так что $P = x$, $Q = y$, $R = z$ и, значит, по формуле (3)

$$\operatorname{div} \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

Пример 3. Вычислить $\operatorname{div} (u \cdot \mathbf{a})$, где $u(M)$ — скалярная функция, $\mathbf{a}(M) = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k$ — векторная функция.

Решение. Используя формулу (3), находим

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (u \mathbf{a}) &= \\ &= \frac{\partial (uP)}{\partial x} + \frac{\partial (uQ)}{\partial y} + \frac{\partial (uR)}{\partial z} = u \frac{\partial P}{\partial x} + P \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial Q}{\partial y} + Q \frac{\partial u}{\partial y} + \\ &+ u \frac{\partial R}{\partial z} + R \frac{\partial u}{\partial z} = u \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) + P \frac{\partial u}{\partial x} + Q \frac{\partial u}{\partial y} + R \frac{\partial u}{\partial z} = \\ &= u \cdot \operatorname{div} \mathbf{a} + (\mathbf{a}, \operatorname{grad} u). \end{aligned}$$

Итак,

$$\operatorname{div} (u \mathbf{a}) = u \cdot \operatorname{div} \mathbf{a} + (\mathbf{a}, \operatorname{grad} u). \quad (5)$$

Пример 4. Найти дивергенцию вектора

$$\mathbf{a} = \varphi(r) \mathbf{r}^0 = \frac{\varphi(r)}{r} \mathbf{r},$$

где $r = |\mathbf{r}|$ — расстояние от начала координат до переменной точки $M(x, y, z)$.

Решение. Используя формулу (5), получим

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\varphi(r)}{r} \operatorname{div} \mathbf{r} + \left(\mathbf{r}, \operatorname{grad} \frac{\varphi(r)}{r} \right).$$

Далее,

$$\operatorname{div} \mathbf{r} = 3, \quad \operatorname{grad} \frac{\varphi(r)}{r} = \left(\frac{\varphi(r)}{r} \right)' \operatorname{grad} r = \frac{r\varphi'(r) - \varphi(r)}{r^2} \mathbf{r}^0,$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{a} &= \frac{\varphi(r)}{r} \cdot 3 + \left(\frac{r\varphi'(r) - \varphi(r)}{r^2} \mathbf{r}^0, \mathbf{r} \right) = \\ &= 3 \frac{\varphi(r)}{r} + \frac{r\varphi'(r) - \varphi(r)}{r} = 2 \frac{\varphi(r)}{r} + \varphi'(r). \end{aligned}$$

131. При какой функции $\psi(r)$ будет $\operatorname{div} \psi(r)r = 2\psi(r)$?

132. Найти $\operatorname{div}(r^4 r)$.

133. Найти дивергенцию векторного поля

$$a = [c, r],$$

где c — постоянный вектор.

134. Найти

$$\operatorname{div}(r(w, r))_z$$

где w — постоянный вектор.

135. При какой функции $\psi(z)$ дивергенция поля

$$a = xzi + yj + \psi(z)k$$

будет равна z ?

136. Найти поток радиуса вектора r через поверхность сферы.

137. Электростатическое поле точечного заряда q равно

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^0}{r^2}.$$

Вычислить $\operatorname{div} E$.

138. Показать, что

$$\frac{1}{3} \oint_{\Sigma} (r, n^0) d\sigma = V,$$

где V — объем, ограниченный замкнутой поверхностью Σ .

139. Доказать, что если Σ — замкнутая кусочно гладкая поверхность и c — ненулевой постоянный вектор, то

$$\oint_{\Sigma} \cos(n, c) d\sigma = 0,$$

где n — вектор, нормальный к поверхности Σ .

140. Доказать формулу

$$\oint_{\Sigma} (\varphi a, n^0) d\sigma = \int_V (\varphi \operatorname{div} a + (a, \operatorname{grad} \varphi)) dv,$$

где $\varphi = \varphi(x, y, z)$, а Σ — поверхность, ограничивающая объем V . Установить условия применимости формулы.

141. Доказать, что если функция $u(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

то
$$\oiint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0,$$

где $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная по направлению внешней нормали к кусочно гладкой замкнутой поверхности Σ .

142. Доказать, что если функция $u(x, y, z)$ является многочленом второй степени и Σ — кусочно гладкая замкнутая поверхность, то интеграл

$$\oiint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$$

пропорционален объему, ограниченному поверхностью Σ .

Найти поток векторного поля через указанные замкнутые поверхности: 1) непосредственно, 2) по теореме Гаусса — Остроградского.

$$143. \mathbf{a} = xi + zk; \quad S: \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = 4. \end{cases}$$

$$144. \mathbf{a} = 2xi + 2yj - zk; \quad S: \begin{cases} z^2 = x^2 + y^2, \\ z = H, \quad H > 0. \end{cases}$$

$$145. \mathbf{a} = xi - zj; \quad S: \begin{cases} z = 6 - x^2 - y^2, \\ z^2 = x^2 + y^2, \quad z \geq 0. \end{cases}$$

$$146. \mathbf{a} = yzi - xj - yk; \quad S: \begin{cases} x^2 + z^2 = y^2, \\ y = 1 \quad (0 \leq y \leq 1). \end{cases}$$

$$147. \mathbf{a} = xi + 2yj - zk; \quad S: \begin{cases} z^2 = x^2 + y^2, \\ z = x^2 + y^2. \end{cases}$$

$$148. \mathbf{a} = 2xi - (z - 1)k; \quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 0, \quad z = 1. \end{cases}$$

$$149. \mathbf{a} = 2xi - yj + zk; \quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ 3z = x^2 + y^2. \end{cases}$$

$$150. \mathbf{a} = yxi + 2yj - zk; S: x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

$$151. \mathbf{a} = (x+z)i + (y+x)j + (z+y)k; S: \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ z = y, z \geq 0. \end{cases}$$

$$152. \mathbf{a} = 3xi - yj - zk; S: \begin{cases} 9 - z = x^2 + y^2, \\ x = 0, y = 0, z = 0. \end{cases}$$

$$153. \mathbf{a} = (y-x)i + (z-y)j + (x-z)k; S: \begin{cases} x+y+z=1, \\ x-y+z=1, \\ x=0, z=0. \end{cases}$$

$$154. \mathbf{a} = xi - 2yj - zk; S: \begin{cases} 1 - z = x^2 + y^2, \\ z = 0. \end{cases}$$

Соленоидальное (трубчатое) поле

О п р е д е л е н и е. Если во всех точках M некоторой области G дивергенция векторного поля (заданного в области G) равна нулю

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = 0,$$

то говорят, что поле *соленоидально* в этой области.

Таким образом, по определению, соленоидальное поле не имеет источников и стоков.

Из теоремы Гаусса—Остроградского следует, что в соленоидальном поле поток вектора $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$ через любую замкнутую поверхность σ , лежащую в этом поле, равен нулю

$$\oiint_{\sigma} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma = 0.$$

В соленоидальном поле G векторные линии не могут ни начинаться, ни кончатся. Они могут быть либо замкнутыми кривыми, либо иметь концы на границе поля.

Уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = 0$$

называется в гидродинамике *уравнением неразрывности несжимаемой жидкости*.

В этом случае количество жидкости, выходящей через какую-нибудь замкнутую поверхность σ , всегда равняется количеству входящей жидкости, и полный поток равен нулю.

Какие из следующих векторных полей являются соленоидальными?

$$155. \mathbf{a} = x(z^2 - y^2)i + y(x^2 - z^2)j + z(y^2 - x^2)k.$$

$$156. \mathbf{a} = y^2i - (x^2 + y^3)j + z(3y^2 + 1)k.$$

$$157. \mathbf{a} = (1 + 2xy)i - y^2zj + (z^2y - 2zy + 1)k.$$

158. Показать, что поле вектора

$$E = \frac{q}{r^2} r^0 \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

является соленоидальным во всякой области, не содержащей начала координат $O(0, 0, 0)$.

159. При каком условии векторное поле $a = \varphi(r)r$ будет соленоидальным?

Пусть име м поле вектора $a(M)$ (не обязательно соленоидальное). Рассмотрим в поле замкнутый ориентированный контур L . Поверхность Σ , имеющую линию L своим краем, назовем *поверхностью, натянутой на контур L* . Нормаль n к поверхности Σ условимся ориентировать так, чтобы из конца нормали выбранный обход контура L был виден совершающимся против часовой стрелки (рис. 29).

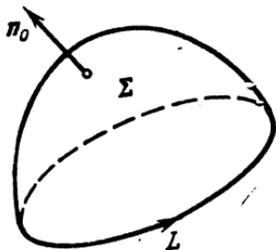


Рис. 29.

160. Показать, что в соленоидальном поле поток вектора $a(M)$ не зависит от вида поверхности Σ , натянутой на данный контур L , а зависит только от самого контура.

§ 14. Линейный интеграл в векторном поле.

Циркуляция векторного поля

Пусть даны непрерывное векторное поле $a = a(M)$ и кусочно гладкая кривая L , на которой выбрано положительное направление (ориентированная кривая).

О п р е д е л е н и е 1. *Линейным интегралом* от вектора $a = a(M)$ вдоль ориентированной кривой L называется криволинейный интеграл первого рода (интеграл по длине дуги кривой) от скалярного произведения (a, τ^0)

$$\int_L (a, \tau^0) ds,$$

где $\tau^0 = \tau^0(M)$ — орт вектора, касательного к линии L , ориентация которого совпадает с ориентацией L ; ds — дифференциал длины дуги s кривой L .

Если $r = r(M)$ есть радиус-вектор произвольной точки M линии L , то линейный интеграл в поле $a(M)$ можно записать в виде

$$\int_L (a, \tau^0) ds = \int_L (a, dr). \quad (1)$$

Если в векторном поле введена прямоугольная система координат $Oxyz$, то $\mathbf{r} = xi + yj + zk$,

$$\mathbf{a} = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k$$

и линейный интеграл (1) выразится через криволинейный интеграл второго рода

$$\int_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz.$$

В случае, когда $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$ является силовым полем, линейный интеграл (1) дает величину работы этого поля вдоль линии L . Свойства линейного интеграла.

а) Линейность:

$$\int_L (\lambda \mathbf{a}_1 + \mu \mathbf{a}_2, d\mathbf{r}) = \lambda \int_L (\mathbf{a}_1, d\mathbf{r}) + \mu \int_L (\mathbf{a}_2, d\mathbf{r}),$$

где λ, μ — постоянные числа.

б) Аддитивность:

$$\int_{L_1+L_2} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_{L_1} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) + \int_{L_2} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}).$$

в) При изменении ориентации линии L интеграл меняет знак

$$\int_{BA} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = - \int_{AB} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}),$$

где A — начальная, а B — конечная точки линии L .

Вычисление линейного интеграла в векторном поле. Пусть линия L задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

при этом в начальной точке A линии L параметр t принимает значение $t = t_0$, а в конечной точке B линии L — значение $t = t_1$ (направление на линии L соответствует возрастанию параметра t от t_0 до t_1); функции $\varphi(t), \psi(t), \chi(t)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[t_0, t_1]$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) &= \int_{AB} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_{t_0}^{t_1} \{ P[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \varphi'(t) + \\ &+ Q[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \psi'(t) + R[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \chi'(t) \} dt. \end{aligned}$$

Если линия L задана системой уравнений $y = \psi(x), z = \chi(x)$, $a \leq x \leq b$, то

$$\begin{aligned} \int_{AB} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) &= \int_a^b \{ P[x, \psi(x), \chi(x)] + Q[x, \psi(x), \chi(x)] \psi'(x) + \\ &+ R[x, \psi(x), \chi(x)] \chi'(x) \} dx. \end{aligned}$$

Аналогичные формулы можно написать и для случаев, когда линия задается одной из следующих систем уравнений:

$$x = \varphi(y), \quad z = \chi(y) \quad (y_0 < y < y_1)$$

или

$$x = \varphi(z), \quad y = \psi(z) \quad (z_0 < z < z_1).$$

Пример 1. Найти линейный интеграл от вектора $a = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$, где \mathbf{r} — радиус-вектор, вдоль отрезка прямой от точки $A(r_A)$ до точки $B(r_B)$.

Решение. Искомый линейным интегралом будет

$$\int_{AB} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_{AB} \frac{(\mathbf{r}, d\mathbf{r})}{|\mathbf{r}|}. \quad (1)$$

Из равенства

$$d(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = (d\mathbf{r}, \mathbf{r}) + (\mathbf{r}, d\mathbf{r}) = 2(\mathbf{r}, d\mathbf{r})$$

находим

$$(\mathbf{r}, d\mathbf{r}) = \frac{1}{2} d(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} d(|\mathbf{r}|^2) = \frac{1}{2} \cdot 2|\mathbf{r}| d|\mathbf{r}| = |\mathbf{r}| d|\mathbf{r}|.$$

Отсюда

$$\frac{(\mathbf{r}, d\mathbf{r})}{|\mathbf{r}|} = d|\mathbf{r}|. \quad (2)$$

Подставляя (2) в интеграл (1), будем иметь

$$\int_{AB} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_{AB} d|\mathbf{r}| = \int_{r_A}^{r_B} d|\mathbf{r}| = |r_B| - |r_A|.$$

Следует обратить внимание на то, что

$$|d\mathbf{r}| \neq d|\mathbf{r}|.$$

Найти линейный интеграл вдоль отрезка прямой, ограниченного точками $A(r_1)$ и $B(r_2)$, для следующих векторных полей:

161. $\mathbf{a} = \mathbf{r}$.

162. $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2}$.

163. $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{r}^0}{|\mathbf{r}|^2}$, \mathbf{r}^0 — орт.

164. Вычислить линейный интеграл вдоль прямой, проходящей через точки $O(0, 0, 0)$ и $M_1(1, 1, 1)$ в направ-

лени от точки O к точке M_1 , если $\mathbf{a} = [b, r]$, где b — постоянный вектор.

165. Доказать, что

$$\int_{AB} (\text{grad } u, dr) = u(B) - u(A).$$

Пример 2. Найти линейный интеграл от вектора

$$\mathbf{a} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$$

вдоль дуги L винтовой линии

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t, \quad z = \frac{t}{2\pi}$$

от точки A пересечения линии с плоскостью $z = 0$ до точки B пересечения с плоскостью $z = 1$ (рис. 30).

Решение. Линейный интеграл в данном примере имеет вид

$$\int_L (\mathbf{a}, dr) = \int_L z dx + x dy + y dz.$$

Винтовая линия расположена на круговом цилиндре $x^2 + y^2 = R^2$. В точке A имеем $t_0 = 0$, в точке B имеем $t_1 = 2\pi$. Так как

$$dx = -R \sin t dt, \quad dy = R \cos t dt,$$

$$dz = \frac{dt}{2\pi},$$

то интеграл будет равен

$$\int_L (\mathbf{a}, dr) = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{t}{2\pi} R \sin t + \right.$$

$$\left. + R^2 \cos^2 t + \frac{R}{2\pi} \sin t \right) dt = R^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt - \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} t \sin t dt = \pi R^2 + R,$$

так как

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi;$$

$$\int_0^{2\pi} t \sin t dt = -2\pi.$$

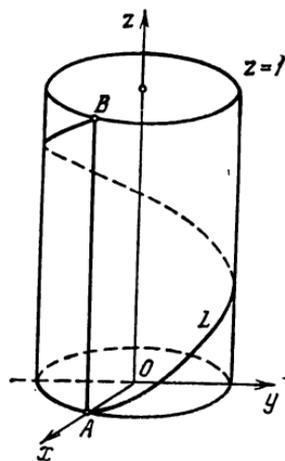


Рис. 30.

Пример 3. Найти линейный интеграл от вектора (см. пример 2)

$$\mathbf{a} = x\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$$

вдоль прямой AB (см. рис. 30) в направлении от точки A к точке B .

Решение. Так как прямая AB (образующая цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$) расположена на плоскости xOz и проходит через точку $A(R, 0, 0)$, то $y = 0$, $x = R$, $dx = 0$ и для радиуса-вектора \mathbf{r} точек прямой AB будем иметь $\mathbf{r} = R\mathbf{i} + z\mathbf{k}$, $d\mathbf{r} = dz \cdot \mathbf{k}$. Поэтому скалярное произведение

$$(\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = z dx + x dy + y dz = 0.$$

Следовательно, искомый линейный интеграл

$$\int_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_{AB} (\mathbf{a}, d\mathbf{r})$$

на прямой AB будет равен нулю.

Из примеров 2 и 3 следует, что в общем случае линейный интеграл в векторном поле зависит не только от начальной и конечной точек пути интегрирования, но и от формы этого пути.

Пример 4. Вычислить работу силового поля

$$\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + (x + y + z)\mathbf{k}$$

вдоль отрезка AB прямой, проходящей через точки $M_1(2, 3, 4)$ и $M_2(3, 4, 5)$.

Решение. Работа данного силового поля будет равна линейному интегралу вдоль отрезка M_1M_2 :

$$A = \int_{M_1M_2} (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = \int_{M_1M_2} y dx + x dy + (x + y + z) dz,$$

Находим канонические уравнения прямой M_1M_2 . Имеем

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{1}.$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} y &= x + 1, \\ z &= x + 2, \end{aligned} \right\}$$

$$dy = dx, \quad dz = dx.$$

Здесь x изменяется в пределах от 2 до 3 (так как абсцисса точки M_1 равна 2, а абсцисса точки M_2 равна 3). Искомая работа будет равна

$$A = \int_2^3 (x + 1 + x + x + x + 1 + x + 2) dx = \int_2^3 (5x + 4) dx = \frac{33}{2}.$$

166. Вычислить линейный интеграл в плоском векторном поле

$$a = \frac{y^2 i - x^2 j}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

вдоль полуокружности

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t \quad (0 \leq t \leq \pi).$$

167. Вычислить линейный интеграл в плоском векторном поле

$$a = (x^2 + y^2)i + (x^2 - y^2)j$$

вдоль линии $y = |x|$ от точки $(-1, 1)$ до точки $(2, 2)$.

168. Вычислить линейный интеграл в плоском векторном поле

$$a = (x^2 - 2xy)i + (y^2 - 2xy)j$$

а) вдоль параболы $y = x^2$ от точки $(-1, 1)$ до точки $(1, 1)$;

б) вдоль отрезка прямой, соединяющей точки $(-1, 1)$ и $(1, 1)$.

169. Вычислить работу силового поля $F = 2xyi + x^2j$ вдоль дуги окружности $x^2 + y^2 = 1$ от точки $(1, 0)$ до точки $(0, 1)$.

170. Вычислить работу силового поля

$$F = (x^2 + 2xy)i + (x^2 + y^2)j$$

вдоль параболы $y = x^2$ от точки $(0, 0)$ до точки $(1, 1)$.

171. Вычислить линейный интеграл в векторном поле

$$a = \frac{xi + yj + zk}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - x - y + 2z}}$$

вдоль отрезка прямой от точки $(1, 1, 1)$ до точки $(4, 4, 4)$.

172. Вычислить линейный интеграл в векторном поле

$$a = (y^2 - z^2)i + 2yzj - x^2k$$

вдоль линии

$$\left. \begin{aligned} x &= t \\ y &= t^2 \\ z &= t^3 \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

в направлении возрастания параметра t .

173. Вычислить линейный интеграл в векторном поле

$$\mathbf{a} = yi + zj + xk$$

вдоль витка винтовой линии

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos t, \\ y &= a \sin t, \\ z &= bt \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq t < 2\pi)$$

в направлении возрастания параметра t .

174. Вычислить линейный интеграл в векторном поле

$$\mathbf{a} = x^2i + y^2j + z^2k$$

в направлении от точки $(0, 0, 0)$ до точки $(1, 1, 1)$ вдоль отрезка прямой, проходящей через эти точки.

Циркуляция векторного поля
и ее вычисление

Определение 2. Циркуляцией Π векторного поля $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$ называется линейный интеграл, взятый вдоль замкнутой ориентированной кривой L . Таким образом, по определению

$$\Pi = \oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}),$$

где символ \oint_L означает интеграл по замкнутой кривой L .

Если векторное поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$ задано в координатной форме

$$\mathbf{a} = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k,$$

то циркуляция векторного поля будет равна

$$\Pi = \oint_L P dx + Q dy + R dz.$$

За положительное направление обхода замкнутой кривой L будем считать направление, при котором область, ограниченная этой кривой, будет оставаться слева.

Пример 5. Вычислить циркуляцию векторного поля $\mathbf{a} = -y^3i + x^3j$ вдоль эллипса $L: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Решение. По определению циркуляции имеем

$$\Pi = \oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \oint_L -y^3 dx + x^3 dy. \quad (3)$$

Параметрические уравнения данного эллипса имеют вид (рис. 31)

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos t, \\ y &= b \sin t, \end{aligned} \right\} 0 \leq t < 2\pi. \quad (4)$$

Отсюда

$$dx = -a \sin t \, dt, \quad dy = b \cos t \, dt. \quad (5)$$

Подставляя (4) и (5) в (3), получим

$$\Pi = ab \int_0^{2\pi} (b^2 \sin^4 t + a^2 \cos^4 t) \, dt = \frac{3}{4} \pi ab (a^2 + b^2),$$

так как

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^4 t \, dt &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t)^2 \, dt = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left(1 - 2 \cos 2t + \frac{1 + \cos 4t}{2} \right) \, dt = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2 \cos 2t + \frac{1}{2} \cos 4t \right) \, dt = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} \, dt = \frac{3}{4} \pi. \end{aligned}$$

Аналогично находим, что

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 t \, dt = \frac{3}{4} \pi.$$

Пример 6. Вычислить циркуляцию векторного поля

$$\mathbf{a} = ye^{xy}\mathbf{i} + xe^{xy}\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$$

вдоль линии L , получаемой пересечением конуса $x^2 + y^2 = (z-1)^2$ с координатными плоскостями (рис. 32).

Решение. Линия L состоит из двух отрезков BC и CA , расположенных на координатных плоскостях yOz и xOz соответственно и дуги \widehat{AB} окружности $\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{aligned} \right\}$. Поэтому циркуляция данного векторного поля будет равна

$$\Pi = \oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_{BC} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) + \int_{CA} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) + \int_{\widehat{AB}} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}).$$

1) На отрезке BC имеем

$$x = 0, \quad dx = 0; \quad z = 1 - y, \quad dz = -dy; \quad 1 \geq y \geq 0.$$

Следовательно,

$$\int_{BC} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_{BC} y \, dx = 0.$$

2) На отрезке CA имеем

$$y = 0, \quad dy = 0; \quad z = 1 - x, \quad dz = -dx; \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Следовательно,

$$\int_{CA} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_{CA} x \, dy = 0.$$

3) На дуге $\overset{\frown}{AB}$ окружности $\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{array} \right\}$ имеем $z = 0, \quad dz = 0$, и значит,

$$\begin{aligned} \int_{\overset{\frown}{AB}} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) &= \int_{\overset{\frown}{AB}} e^{xy} (y \, dx + x \, dy) = \int_{\overset{\frown}{AB}} e^{xy} d(xy) = \\ &= \int_{\overset{\frown}{AB}} d(e^{xy}) = e^{xy} \Big|_{A(1,0)}^{B(0,1)} = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Искомая циркуляция векторного поля равна нулю.

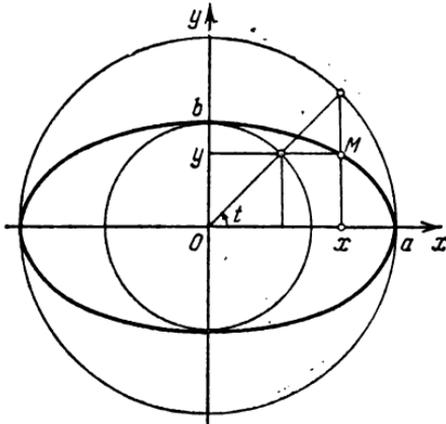


Рис. 31.

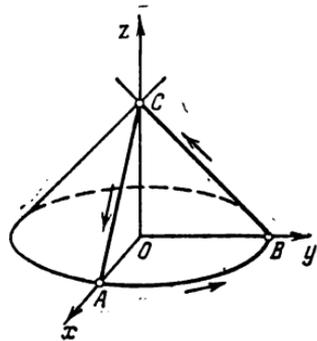


Рис. 32.

Пример 7. Вычислить циркуляцию векторного поля

$$\mathbf{a} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k},$$

если

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

Решение. Имеем

$$\mathcal{C} = \oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_L xy \, dx + yz \, dy + xz \, dz,$$

Линия L есть эллипс, получающийся в результате сечения цилиндра $x^2 + y^2 = 1$ плоскостью $x + y + z = 1$. Найдем параметрические уравнения этой линии. Проекция любой точки этой линии на плоскость xOy находится на окружности $x^2 + y^2 = 1$. Отсюда получаем $x = \cos t$, $y = \sin t$. Но эллипс лежит на плоскости $x + y + z = 1$, откуда $z = 1 - x - y$ или $z = 1 - \cos t - \sin t$. Следовательно, параметрические уравнения линии L :

$$\left. \begin{aligned} x &= \cos t, \\ y &= \sin t, \\ z &= 1 - \cos t - \sin t, \end{aligned} \right\} 0 \leq t < 2\pi.$$

Отсюда находим

$$dx = -\sin t dt, \quad dy = \cos t dt, \quad dz = (\sin t - \cos t)dt,$$

и, значит, циркуляция будет равна

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_0^{2\pi} [-\cos t \sin^2 t + \sin t (1 - \cos t - \sin t) \cos t + \\ &\quad + \cos t (1 - \cos t - \sin t) (\sin t - \cos t)] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (-3 \sin^2 t \cos t + \sin 2t - \cos^2 t \sin t - \\ &\quad - \cos^2 t + \cos^3 t) dt = - \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = -\pi. \end{aligned}$$

Вычислить циркуляцию Π вектора \mathbf{a} вдоль данной линии L :

$$175. \quad \mathbf{a} = (xz + y)\mathbf{i} + (yz - x)\mathbf{j} - (x^2 + y^2)\mathbf{k};$$

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 3. \end{cases}$$

$$176. \quad \mathbf{a} = y^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k};$$

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ x^2 + y^2 = Rx \quad (z \geq 0). \end{cases}$$

$$177. \quad \mathbf{a} = (2x + z)\mathbf{i} + (2y - z)\mathbf{j} + xyz\mathbf{k};$$

L — линия пересечения параболоида вращения $x^2 + y^2 = 1 - z$ с координатными плоскостями.

178. Показать, что если в векторном поле циркуляция вектора по любому замкнутому контуру равна нулю, то в таком поле не может быть замкнутых векторных линий,

§ 15. Ротор (вихрь) векторного поля

Пусть имеем поле вектора

$$\mathbf{a}(M) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Будем предполагать, что координаты P , Q , R вектора $\mathbf{a}(M)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка по всем своим аргументам.

О п р е д е л е н и е 1. *Ротором* вектора $\mathbf{a}(M)$ называется вектор, обозначаемый символом $\text{rot } \mathbf{a}(M)$ и определяемый равенством

$$\text{rot } \mathbf{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (1)$$

или в символической, удобной для запоминания, форме

$$\text{rot } \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Этот определитель обычно раскрывается по элементам первой строки, при этом операции умножения элементов второй строки на элементы третьей строки понимаются как операции дифференцирования, например, $\frac{\partial}{\partial x} \cdot Q = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

О п р е д е л е н и е 2. Если в некоторой области G имеем $\text{rot } \mathbf{a} = 0$, то поле вектора \mathbf{a} в области G называется *безвихревым*.

П р и м е р 1. Найти ротор вектора

$$\mathbf{a} = (x + z)\mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j} + (x^2 + z)\mathbf{k}.$$

Р е ш е н и е. Используя формулу (2), имеем

$$\text{rot } \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + z & y + z & x^2 + z \end{vmatrix}.$$

Раскрывая определитель по элементам первой строки и понимая операцию умножения, скажем, $\frac{\partial}{\partial y}$ на $x^2 + z$, как операцию частного дифференцирования, найдем

$$\text{rot } \mathbf{a} = -\mathbf{i} - (2x - 1)\mathbf{j}.$$

П р и м е р 2. Найти ротор вектора \mathbf{H} напряженности магнитного поля в условиях примера 3 § 10.

Р е ш е н и е. Вектор \mathbf{H} напряженности магнитного поля

$$\mathbf{H} = \frac{2}{\rho^2} [I, \mathbf{r}]$$

или

$$\mathbf{H} = \frac{2}{\rho^2} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & I \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\frac{2I}{\rho^2} y\mathbf{i} + \frac{2I}{\rho^2} x\mathbf{j},$$

где $\rho^2 = x^2 + y^2$. Отсюда в силу (2)

$$\operatorname{rot} H = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{2Iy}{x^2 + y^2} & \frac{2Ix}{x^2 + y^2} & 0 \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2Ix}{x^2 + y^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2Iy}{x^2 + y^2} \right) \right] \mathbf{k} = 2I \left[\frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] \mathbf{k} = 0 \\ (x^2 + y^2 \neq 0).$$

Таким образом, $\operatorname{rot} H = 0$ везде, кроме оси Oz , в точках которой последние формулы теряют смысл (знаменатель обращается в нуль), т. е. поле вектора H является безвихревым всюду вне точек оси Oz .

Найти ротор следующих векторов:

179. $\mathbf{a} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (y^2 + z^2)\mathbf{j} + (z^2 + x^2)\mathbf{k}$.

180. $\mathbf{a} = z^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + x^3\mathbf{k}$.

181. $\mathbf{a} = \frac{1}{2}(-y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j})$.

182. Показать, что если координаты вектора $\mathbf{a}(M)$ имеют непрерывные частные производные второго порядка, то

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} = 0,$$

т. е. что поле вектора $\operatorname{rot} \mathbf{a}(M)$ есть соленоидальное поле

183. Показать, что

a) $\operatorname{rot} (\mathbf{a} \pm \mathbf{b}) = \operatorname{rot} \mathbf{a} \pm \operatorname{rot} \mathbf{b}$,

b) $\operatorname{rot} (\lambda \mathbf{a}) = \lambda \operatorname{rot} \mathbf{a}$

(λ — числовая постоянная).

184. Показать, что если $u = u(M)$ — скалярная функция, $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$ — вектор, то

$$\operatorname{rot} (u\mathbf{a}) = u \operatorname{rot} \mathbf{a} + [\operatorname{grad} u, \mathbf{a}].$$

185. Показать, что если \mathbf{a} и \mathbf{b} — постоянные векторы, r — радиус-вектор точки $M(x, y, z)$, то

$$\operatorname{rot} (r, \mathbf{a})\mathbf{b} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}],$$

186. Показать, что

$$\operatorname{rot} (r\mathbf{a}) = \frac{1}{r} [r, \mathbf{a}],$$

где \mathbf{a} — постоянный вектор, $r = |r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

187. Показать, что $\text{rot}(f(r)\mathbf{a}) = \frac{f'(r)}{r}[\mathbf{r}, \mathbf{a}]$, где $f(r)$ — произвольная дифференцируемая функция своего аргумента, \mathbf{a} — постоянный вектор.

188. Показать, что векторное поле $\mathbf{a} = f(r)\mathbf{r}$ является безвихревым, т. е. $\text{rot } \mathbf{a} \equiv 0$.

189. Показать, что

$$\text{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\mathbf{b}, \text{rot } \mathbf{a}) - (\mathbf{a}, \text{rot } \mathbf{b}).$$

190. Показать, что ротор поля линейных скоростей \mathbf{v} вращающегося твердого тела есть постоянный вектор, направленный параллельно оси вращения, модуль которого равен удвоенной угловой скорости вращения: $\text{rot } \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}$.

191. Определить угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$, с которой вращается твердое тело около неподвижной оси, проходящей через некоторую его точку, если его линейная скорость

$$\mathbf{v} = 2xi + y^2j + xzk.$$

192. Показать, что поле ротора вектора $\mathbf{a}(M)$ свободно от источников и стоков.

193. Какова должна быть функция $f(x, z)$, чтобы ротор векторного поля

$$\mathbf{a} = yzi + f(x, z)j + xyk$$

совпадал с вектором $k - i$?

§ 16. Теорема Стокса

Пусть координаты вектора

$$\mathbf{a}(M) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

непрерывны и имеют непрерывные частные производные.

Теорема. Циркуляция вектора \mathbf{a} по замкнутому контуру L равна потоку ротора этого вектора через любую поверхность Σ , натянутую на контур L :

$$\oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_{\Sigma} (\text{rot } \mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma, \quad (1)$$

Предполагается, что ориентация нормали \mathbf{n}^0 к поверхности Σ согласована с ориентацией контура L так, чтобы из конца нормали обход контура в выбранном направлении был виден совершающимся против часовой стрелки.

Пример 1. Вычислить циркуляцию вектора $a = y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ по контуру $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 3, \end{cases}$ 1) непосредственно, 2) по теореме Стокса.

Решение. 1) Контур L — окружность радиуса $R = 2$, лежащая в плоскости $z = 3$ (рис. 33). Выберем ориентацию на ней как указано на рисунке. Параметрические уравнения линии L :

$$\left. \begin{aligned} x &= 2 \cos t, \\ y &= 2 \sin t, \\ z &= 3, \end{aligned} \right\} 0 \leq t < 2\pi,$$

так что

$$dx = -2 \sin t \, dt, \quad dy = 2 \cos t \, dt, \quad dz = 0.$$

Для циркуляции вектора a имеем

$$C = \int_0^{2\pi} [2 \sin t (-2 \sin t) +$$

$$+ 4 \cos^2 t \cdot 2 \cos t - 3 \cdot 0] \, dt = -4\pi.$$

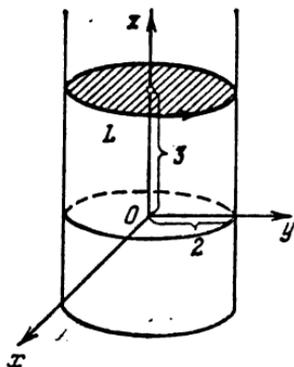


Рис. 33.

2) Для вычисления циркуляции по теореме Стокса выберем какую-нибудь поверхность Σ , натянутую на контур L . Естественно в качестве Σ взять круг, имеющий линию L своей границей. Согласно выбранной ориентации контура нормаль n^0 к кругу необходимо взять равной k : $n^0 = k$. Далее

$$\operatorname{rot} a = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x^2 & -z \end{vmatrix} = (2x - 1) \mathbf{k}.$$

Поэтому, в силу теоремы Стокса,

$$C = \iint_{\Sigma} (\operatorname{rot} a, n^0) \, d\sigma = \iint_{\Sigma} (2x - 1) \, d\sigma =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (2\rho \cos \varphi - 1) \rho \, d\rho = -2\pi \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_0^2 = -4\pi.$$

194. Показать, что поток ротора через незамкнутую поверхность, натянутую на данный контур, не зависит от формы поверхности.

Найти циркуляцию векторов по указанным контурам непосредственно и по теореме Стокса.

$$195. \mathbf{a} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}; \quad L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 0. \end{cases}$$

$$196. \mathbf{a} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}; \quad L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0. \end{cases}$$

197. $\mathbf{a} = 2xz\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ по контуру, образованному пересечением плоскости $x + y + 2z = 2$ с координатными плоскостями.

$$198. \mathbf{a} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}; \quad L: \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = 1. \end{cases}$$

$$199. \mathbf{a} = z^2\mathbf{i}; \quad L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ x = 0, y = 0, z = 0. \end{cases}$$

$$200. \mathbf{a} = yz^2\mathbf{i} + xz^2\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}; \quad L: \begin{cases} x = y^2 + z^2, \\ x = 9. \end{cases}$$

$$201. \mathbf{a} = y^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j}; \quad L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ 3y + 4z = 5. \end{cases}$$

$$202. \mathbf{a} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}; \quad L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x = z. \end{cases}$$

203. Дано векторное поле скоростей \mathbf{v} точек твердого тела, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси Oz . Вычислить циркуляцию этого поля по окружности

$$L: \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \\ z = 0, \end{cases} \quad 0 \leq t < 2\pi,$$

непосредственно и по теореме Стокса.

Из теоремы Стокса получаем: проекция вектора $\text{rot } \mathbf{a}$ на любое направление \mathbf{n} не зависит от выбора системы координат и равна поверхностной плотности циркуляции вектора \mathbf{a} по контуру площадки, перпендикулярной этому направлению:

$$\text{пр}_{\mathbf{n}} \text{rot } \mathbf{a} |_{\mathbf{M}} = (\text{rot } \mathbf{a}, \mathbf{n}^0) |_{\mathbf{M}} = \lim_{(\Sigma) \rightarrow \mathbf{M}} \frac{\oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r})}{S}. \quad (2)$$

Здесь (Σ) — плоская площадка, перпендикулярная вектору \mathbf{n} , S — площадь этой площадки; L — контур площадки, ориентированный так, чтобы обход контура был виден из конца вектора \mathbf{n} против часовой стрелки; запись $(\Sigma) \rightarrow M$ означает, что площадка (Σ) стягивается к точке M , в которой рассматривается вектор $\text{rot } \mathbf{a}$, причем направление нормали \mathbf{n} к этой площадке остается все время одним и тем же.

Пример 2. Вычислить плотность циркуляции вектора $\mathbf{a} = y\mathbf{i}$ по окружности

$$L: \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \\ z = 0, \end{cases} \quad 0 \leq t < 2\pi,$$

в центре этой окружности $M(0, 0, 0)$ в положительном направлении оси Oz .

Решение. Здесь (Σ) — круг радиуса a с центром в точке M , так что $S = \pi a^2$.

Искомая плотность циркуляции μ_M равна

$$\begin{aligned} \mu_M &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\pi a^2} \oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\pi a^2} \oint_L y \, dx = \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} (-a^2) \sin^2 t \, dt = -1. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\text{rot } \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\mathbf{k},$$

т. е. значит,

$$(\text{rot } \mathbf{a}, \mathbf{n}^0)|_M = (-\mathbf{k}, \mathbf{k}) = -1,$$

что, в силу (2), подтверждает верность результата.

204. Вычислить плотность циркуляции вектора $\mathbf{a} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ по окружности $L: \{y = a \cos t, z = a \sin t, x = 0; 0 \leq t < 2\pi\}$ в центре этой окружности $C(0, 0, 0)$ в положительном направлении оси Ox .

205. Вычислить плотность циркуляции вектора $\mathbf{a} = 2y\mathbf{i} + 5xz\mathbf{j}$ по эллипсу $L: \{x = a \cos t, y = b \sin t, z = 1; 0 \leq t < 2\pi\}$ в центре эллипса $C(0, 0, 1)$ в положительном направлении оси Oz .

§ 17. Независимость линейного интеграла от пути интегрирования. Формула Грина

О п р е д е л е н и е. Область G трехмерного пространства называется *односвязной* (точнее, *поверхностно односвязной*), если на любой замкнутый контур, лежащий в этой области, можно натянуть поверхность, целиком лежащую в области G . Например, все трехмерное пространство, внутренность сферы являются односвязными областями; внутренность тора, трехмерное пространство, из которого выброшена прямая, не являются односвязными областями.

Т е о р е м а. Для того чтобы линейный интеграл

$$\int_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

не зависел от формы пути интегрирования L , необходимо и достаточно, чтобы векторное поле

$$\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

было безвихревым, т. е.

$$\text{rot } \mathbf{a}(M) = 0.$$

Здесь предполагается, что координаты $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ вектора \mathbf{a} имеют непрерывные частные производные первого порядка и область определения вектора $\mathbf{a}(M)$ односвязна.

В этом случае линейный интеграл $\int_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r})$ будет зависеть только от положения начальной и конечной точек пути интегрирования L .

При выполнении условий теоремы циркуляция вектора $\mathbf{a}(M)$ по любому замкнутому контуру C , расположенному в поле вектора $\mathbf{a}(M)$, равна нулю: $\oint_C (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = 0$.

П р и м е р 1. Показать, что в поле вектора

$$\mathbf{a} = xy^2z\mathbf{i} + x^2yz\mathbf{j} + \frac{1}{2}x^2y^2\mathbf{k}$$

линейный интеграл $\int_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r})$ не зависит от формы пути интегрирования L .

Р е ш е н и е. Координаты вектора \mathbf{a} являются всюду непрерывными функциями, так что область определения G вектора \mathbf{a} есть все пространство — односвязная область. В этой области имеем

$$\text{rot } \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2z & x^2yz & \frac{1}{2}x^2y^2 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Следовательно, линейный интеграл

$$\int_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_L xy^2z \, dx + x^2yz \, dy + \frac{1}{2} x^2y^2dz$$

не зависит от формы пути интегрирования L .

В частности, для плоского векторного поля

$$\mathbf{a}(M) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j} \quad (1)$$

имеем

$$\operatorname{rot} \mathbf{a}(M) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Поэтому для плоского векторного поля (1), определенного в односвязной области G , условие $\operatorname{rot} \mathbf{a}(M) = 0$ в координатной форме записывается так: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Таким образом, для того чтобы в плоском поле, определенном в односвязной области G , линейный интеграл

$$\int_L P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy$$

не зависел от формы пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

З а м е ч а н и е. Требование, чтобы область G , где определен вектор $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$, была односвязной, существенно. Если область G не односвязна, то при условии $\operatorname{rot} \mathbf{a}(M) \equiv 0$ линейный интеграл может зависеть от формы пути интегрирования.

П р и м е р 2. Рассмотрим линейный интеграл

$$\int_L \frac{-y \, dx}{x^2 + y^2} + \frac{x \, dy}{x^2 + y^2}.$$

Р е ш е н и е. Подынтегральное выражение теряет смысл в точке $O(0, 0)$; поэтому исключим эту точку. В оставшейся части плоскости (это будет уже не односвязная область) коэффициенты при dx и dy непрерывны, имеют непрерывные частные производные, и выполняется тождество

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) \equiv \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

С другой стороны, если вычислить этот интеграл вдоль окружности

$L: x^2 + y^2 = R^2$, то параметризуя уравнение этой окружности, будем иметь

$$\oint_L \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t}{R^2} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi,$$

т. е. линейный интеграл зависит от пути интегрирования.

Определить, в каких из указанных ниже векторных полей интеграл не зависит от формы пути интегрирования:

$$206. \mathbf{a} = z^2 \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j} + y^2 \mathbf{k}.$$

$$207. \mathbf{a} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}}.$$

$$208. \mathbf{a} = \frac{y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Ф о р м у л а Г р и н а

Пусть в области D с границей L задано плоское векторное поле

$$\mathbf{a} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j},$$

где координаты $P(x, y)$, $Q(x, y)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Тогда справедлива формула Грина

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (2)$$

При этом граница L проходится так, что область D остается слева.

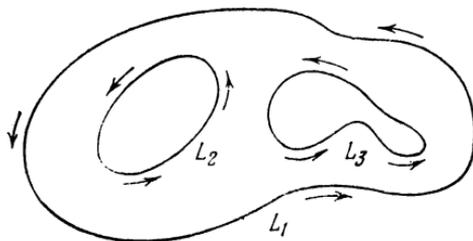


Рис. 34.

Область D может быть и неодносвязной, так что граница ее может состоять из нескольких компонент (см. рис. 34). В этом

случае под интегралом

$$\int_L P dx + Q dy$$

понимается сумма интегралов по всем компонентам границы области D .

Формула Грина (2) представляет собой частный случай теоремы Стокса (см. § 16).

Формула Грина дает возможность в некоторых случаях упростить вычисление циркуляции векторного поля.

Пример 3. Вычислить циркуляцию вектора

$$a = \sqrt{1+x^2+y^2}i + y[xy + \ln(x + \sqrt{1+x^2+y^2})]j$$

по окружности $x^2 + y^2 = R^2$.

Решение. Циркуляция данного вектора равна

$$\begin{aligned} \mathcal{C} = \oint_L (a, dr) &= \oint_L \sqrt{1+x^2+y^2} dx + \\ &+ y[xy + \ln(x + \sqrt{1+x^2+y^2})] dy. \end{aligned}$$

Здесь

$$P = \sqrt{1+x^2+y^2}, \quad Q = xy^2 + y \ln(x + \sqrt{1+x^2+y^2}).$$

Находим частные производные

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y^2 + \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

Применяя формулу Грина, получим

$$\mathcal{C} = \iint_D \left(y^2 + \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \right) dx dy = \iint_D y^2 dx dy.$$

Переходя к полярным координатам

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

будем иметь

$$\mathcal{C} = \iint_D \rho^2 \sin^2 \varphi \rho d\rho d\varphi = \iint_D \rho^3 \sin^2 \varphi d\rho d\varphi.$$

Так как $0 < \varphi < 2\pi$, $0 \leq \rho < R$, то

$$\mathcal{C} = \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{\pi R^4}{4}.$$

Вычислить циркуляцию следующих векторов по данным контурам, применяя формулу Грина:

$$209. \mathbf{a} = (y + x)\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j}; \quad L: x + y = 1, \\ x = 0, y = 0.$$

$$210. \mathbf{a} = (x - y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}; \quad L: y = x, y = x^2.$$

$$211. \mathbf{a} = x \ln(1 + y^2)\mathbf{i} + \frac{x^2 y}{1 + y^2}\mathbf{j}; \quad L: x^2 + y^2 = 2x.$$

$$212. \mathbf{a} = y^2\mathbf{i} - x^2\mathbf{j}; \quad L: x + y = -1, x = 0, y = 0.$$

$$213. \mathbf{a} = \frac{(3x - y^3 \sqrt{1 + x^2 + 4y^3})\mathbf{i} + (18y^2 + x^3 \sqrt{1 + x^2 + 4y^3})\mathbf{j}}{3 \sqrt{1 + x^2 + 4y^3}},$$

$$L: x^2 + y^2 = 1.$$

214. С помощью формулы Грина вычислить разность между интегралами

$$I_1 = \int_{AmB} (x + y)^2 dx - (x - y)^2 dy$$

$$I_2 = \int_{AnB} (x + y)^2 dx - (x - y)^2 dy,$$

где AmB — отрезок прямой, соединяющей точки $A(0, 0)$ и $B(1, 1)$, а AnB — дуга параболы $y = x^2$.

215. Доказать, что величина интеграла

$$\oint_L (2x - y) dx + x^2 dy,$$

где L — замкнутый контур, дает площадь области, ограниченной этим контуром.

216. Пользуясь формулой Грина, вычислить линейный интеграл $\int_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r})$ в векторном поле

$$\mathbf{a} = (e^x \sin y - y)\mathbf{i} + (e^x \cos y - 1)\mathbf{j},$$

где линия L есть верхняя полуокружность $x^2 + y^2 = 2x$, проходящая в направлении от точки $A(2, 0)$ до точки $O(0, 0)$.

§ 18. Признаки потенциальности поля

О п р е д е л е н и е. Векторное поле $\mathbf{a}(M) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$, заданное в пространственной области V , называется *потенциальным*, если существует такая скалярная функция $\varphi(M)$, что во всех точках области V выполняется равенство

$$\mathbf{a}(M) = \text{grad } \varphi(M). \quad (1)$$

Функция $\varphi(M) = \varphi(x, y, z)$, удовлетворяющая в области V равенству (1), называется *потенциалом* (или потенциальной функцией) векторного поля \mathbf{a} .

Соотношение (1) равносильно следующим трем скалярным равенствам:

$$P(x, y, z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad Q(x, y, z) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad R(x, y, z) = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (2)$$

Потенциал поля определяется неоднозначно, с точностью до постоянного слагаемого.

З а м е ч а н и е. Для силовых полей функция $\varphi(M)$ обычно называется *силовой функцией*, а потенциалом называется функция $-\varphi(M)$.

П р и м е р 1. (Электростатическое поле точечного заряда.) Показать, что поле электрической напряженности \mathbf{E} , создаваемое точечным зарядом q , помещенным в начале координат:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{r^3} \mathbf{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

является потенциальным полем.

Р е ш е н и е. Задача ставится так: показать, что существует функция $\varphi(x, y, z)$ такая, что выполняются соотношения (2).

В нашем случае имеем

$$P(x, y, z) = \frac{qx}{r^3}, \quad Q(x, y, z) = \frac{qy}{r^3}, \quad R(x, y, z) = \frac{qz}{r^3}.$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}$$

и аналогично

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{y}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{z}{r^3},$$

то функция

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{q}{r} = -\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

является потенциалом данного поля:

$$\text{grad} \left(-\frac{q}{r} \right) = E.$$

В данном примере начало координат, где сосредоточен заряд q , является особой точкой поля E .

К р и т е р и й п о т е н ц и а л ь н о с т и в е к т о р н о г о п о л я

Т е о р е м а 1. Для того, чтобы векторное поле $\mathbf{a}(M)$, заданное в односвязной области V , было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке области V выполнялось условие

$$\text{rot } \mathbf{a} = 0. \quad (3)$$

Иными словами, для того чтобы векторное поле, заданное в односвязной области, было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы оно было безвихревым.

Потенциал $\varphi(x, y, z)$ векторного поля

$$\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

определяется формулой

$$\varphi(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P dx + Q dy + R dz, \quad (4)$$

где (x_0, y_0, z_0) — некоторая фиксированная точка поля, а (x, y, z) — произвольная текущая точка.

П р и м е р 2. Показать, что поле вектора

$$\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$$

является потенциальным.

Р е ш е н и е. Координаты $P = x^2$, $Q = y^2$, $R = z^2$ вектора \mathbf{a} являются бесконечно дифференцируемыми функциями во всем пространстве, так что \mathbf{a} есть бесконечно дифференцируемый вектор,

определенный во всем трехмерном пространстве. Имеем

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y} z^2 - \frac{\partial}{\partial z} y^2 \right) \mathbf{i} + \\ + \left(\frac{\partial}{\partial z} x^2 - \frac{\partial}{\partial x} z^2 \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x} y^2 - \frac{\partial}{\partial y} x^2 \right) \mathbf{k} = 0.$$

В силу теоремы 1 поле вектора \mathbf{a} потенциально. Легко видеть, что функция

$$\Phi(x, y, z) = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} + C,$$

где C — произвольная постоянная, является потенциалом данного поля.

Проверить, будут ли следующие векторные поля потенциальными:

$$217. \mathbf{a} = xzi + 2yj + xyk.$$

$$218. \mathbf{a} = (2xy + z^2)\mathbf{i} + (2yz + x^2)\mathbf{j} + (2xz + y^2)\mathbf{k}.$$

$$219. \mathbf{a} = \frac{1}{3} (x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + xz^3\mathbf{k}).$$

$$220. \mathbf{a} = yz \cos xy \cdot \mathbf{i} + xz \cos xy \cdot \mathbf{j} + \sin xy \cdot \mathbf{k}.$$

$$221. \mathbf{a} = \ln(1 + z^2)\mathbf{i} + \ln(1 + x^2)\mathbf{j} + xz\mathbf{k}.$$

$$222. \mathbf{a} = \left(\frac{z}{x^2} + \frac{1}{y} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{y}{z^2} + \frac{1}{x} \right) \mathbf{k}.$$

$$223. \mathbf{H} = \frac{2I}{r^2} (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}), \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad r \neq 0.$$

224. Доказать, что поле $\mathbf{a} = f(r) \cdot \mathbf{r}$, где $f(r)$ — дифференцируемая функция, является потенциальным.

225. Показать, что в потенциальном поле $\mathbf{a} = \operatorname{grad} \Phi$ векторные линии перпендикулярны к поверхности уровня функции Φ .

§ 19. Вычисление линейного интеграла в потенциальном поле

Т е о р е м а. *Линейный интеграл в потенциальном поле $\mathbf{a}(M)$ равен разности значений потенциала $\Phi(M)$ поля в конечной и начальной точках пути интегрирования:*

$$\int_{M_1}^{M_2} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \Phi(M_2) - \Phi(M_1). \quad (1)$$

Пример 1. Вычислить линейный интеграл в поле вектора

$$r = xi + yj + zk$$

вдоль отрезка прямой, ограниченного точками $M_1(-1, 0, 3)$ и $M_2(2, -1, 0)$.

Решение. Покажем, что поле данного вектора потенциально. В самом деле,

$$\operatorname{rot} a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Легко убедиться, что потенциал этого поля

$$\varphi(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} + C.$$

Применяя формулу (1), получим

$$\int_{M_1}^{M_2} (a, dr) = \varphi(2, -1, 0) - \varphi(-1, 0, 3) = \frac{5}{2} - 5 = -\frac{5}{2}.$$

Отметим, что несущественно, какой линией соединены точки M_1 и M_2 ; в любом случае при фиксированных M_1 и M_2 интеграл

$$\int_{M_1}^{M_2} (a, dr) = \int_{M_1}^{M_2} x dx + y dy + z dz$$

имеет одно и то же значение.

Вычисление потенциала поля в декартовых координатах

Формулой

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= \\ &= \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \quad (2) \end{aligned}$$

можно пользоваться для нахождения потенциальной функции $\varphi(M) = \varphi(x, y, z)$ заданного потенциального поля

$$a(x, y, z) = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k.$$

Для этого зафиксируем начальную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и соединим ее с текущей точкой $M(x, y, z)$ ломаной M_0ABM , звенья которой параллельны координатным осям, а именно, $M_0A \parallel Ox$, $AB \parallel Oy$,

$BM \parallel Oz$ (рис. 35). Тогда формула (2) примет вид

$$\varphi(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z) dz, \quad (3)$$

где x, y, z — координаты текущей точки на звеньях ломаной, вдоль которых ведется интегрирование.

Пример 2. Доказать, что векторное поле

$$\mathbf{a} = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$$

является потенциальным, и найти его потенциал.

Решение. 1-й способ. Необходимым и достаточным условием потенциальности поля $\mathbf{a}(M)$ является равенство нулю $\text{rot } \mathbf{a}(M)$. В нашем случае

$$\text{rot } \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} = (1-1)\mathbf{i} + (1-1)\mathbf{j} + (1-1)\mathbf{k} \equiv 0,$$

т. е. поле является потенциальным. Потенциал этого поля найдем с помощью формулы (3). За начальную фиксированную точку примем начало координат $O(0, 0, 0)$. Тогда получим

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= \int_0^x (0+0) dx + \\ &+ \int_0^y (x+0) dy + \int_0^z (x+y) dz \Rightarrow \\ &= xy + xz + yz. \end{aligned}$$

Итак,

$$\varphi(x, y, z) = xy + xz + yz + C,$$

где C — произвольная постоянная.

2-й способ. По определению потенциал $\varphi(x, y, z)$ есть такая скалярная функция, для которой $\text{grad } \varphi = \mathbf{a}$. Это векторное равенство равносильно трем скалярным равенствам:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = y + z, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x + z, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = x + y. \quad (6)$$

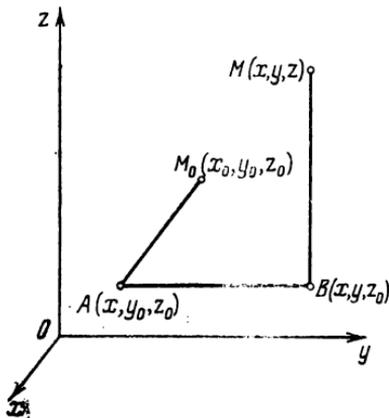


Рис. 35.

Интегрируя (4) по x , получим

$$\varphi(x, y, z) = \int_0^x (y + z) dx = xy + xz + f(y, z), \quad (7)$$

где $f(y, z)$ — произвольная дифференцируемая функция от y и z . Дифференцируя по y обе части (7) и учитывая (5), получим соотношение для нахождения пока неопределенной функции $f(y, z)$. Имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x + \frac{\partial f}{\partial y}$$

или

$$x + z = x + \frac{\partial f}{\partial y},$$

откуда

$$z = \frac{\partial f}{\partial y}. \quad (8)$$

Проинтегрировав (8) по y , будем иметь

$$f(y, z) = \int_0^y z dy = zy + F(z), \quad (9)$$

где $F(z)$ — пока неопределенная функция от z . Подставив (9) в (7), получим

$$\varphi(x, y, z) = xy + xz + zy + F(z).$$

Продифференцировав последнее равенство по z и учитывая соотношение (6), получим уравнение для нахождения $F(z)$:

$$x + y = x + y + \frac{dF}{dz}.$$

Отсюда $\frac{dF}{dz} = 0$, так что $F(z) \equiv C = \text{const.}$

Итак,

$$\varphi(x, y, z) = xy + yz + xz + C.$$

3-й способ. По определению полного дифференциала функции $\varphi(x, y, z)$ имеем

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz.$$

Подставляя сюда вместо частных производных $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ их выражения из (4), (5), (6), получим

$$d\varphi = (y + z)dx + (x + z)dy + (x + y)dz$$

или, после несложных преобразований,

$$\begin{aligned} d\varphi &= (y dx + x dy) + (z dx + x dz) + (y dz + z dy) = \\ &= d(xy) + d(xz) + d(yz) = d(xy + xz + yz). \end{aligned}$$

Итак,

$$d\varphi = d(xy + yz + xz).$$

Отсюда следует, что

$$\varphi(x, y, z) = xy + yz + xz + C.$$

В следующих задачах установить потенциальность данных векторных полей $a(M)$ и найти их потенциалы $\varphi(M)$:

$$226. a = 2xyzi + x^2zj + x^2yk.$$

$$227. a = (yz + 1)i + xzj + xyk.$$

$$228. a = (2xy + z)i + (x^2 - 2y)j + xk.$$

$$229. a = \frac{i + j + k}{x + y + z}.$$

$$230. a = \frac{yz i + xz j + xy k}{1 + x^2 y^2 z^2}.$$

$$231. a = \frac{r}{r}.$$

$$232. a = \frac{r}{r^2}.$$

$$233. a = r \cdot r.$$

В том случае, когда область Ω является звездной с центром в начале координат $O(0, 0, 0)$ *), потенциал $\varphi(M)$ векторного поля $a = a(M)$ в точке $M(x, y, z)$ можно находить по формуле

$$\varphi(M) = \int_0^1 (a(M'), r(M)) dt + C, \quad C = \text{const}, \quad (10)$$

где $r(M) = xi + yj + zk$ — радиус-вектор точки $M(x, y, z)$, а точка $M'(tx, ty, tz)$ при $0 \leq t \leq 1$ пробегает отрезок OM прямой, проходящей через точки O и M .

Пример 3. Найти потенциал векторного поля

$$a = yzi + xzj + xyk.$$

*) Область Ω называется звездной относительно точки O , принадлежащей Ω , если любой луч, выходящий из этой точки, пересекает границу этой области не более чем в одной точке. Например, на плоскости звездными областями будут сама плоскость, параллелограмм, круг; в трехмерном пространстве — само пространство, параллелепипед, шар.

Решение. Легко видеть, что $\operatorname{rot} a \equiv 0$, т. е. данное векторное поле потенциально. Это поле определено во всем трехмерном пространстве, которое является звездным с центром в начале координат $O(0, 0, 0)$, поэтому для нахождения его потенциала воспользуемся формулой (10). Так как в данном случае

$$a(M') = a(tx, ty, tz) = t^2 yz i + t^2 xz j + t^2 xy k,$$

то скалярное произведение векторов $a(M')$ и $r(M)$ равно

$$(a(M'), r(M)) = t^2(xyz + xyz + xyz) = 3t^2xyz.$$

Искомый потенциал

$$\varphi(M) = \int_0^1 (a(M'), r(M)) dt = xyz \int_0^1 3t^2 dt + C = xyz + C.$$

Итак,

$$\varphi(M) = xyz + C.$$

Используя формулу (10), найти потенциалы следующих векторных полей:

234. $a = \alpha i + \beta j + \gamma k$, где α, β, γ —постоянные.

235. $a = (y + z)i + (x + z)j + (y + x)k$.

236. $a = yi + xj + e^z k$.

237. $a = e^x \sin y \cdot i + e^x \cos y \cdot j + k$.

**ОПЕРАТОР ГАМИЛЬТОНА,
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ
ВТОРОГО ПОРЯДКА.
ОПЕРАТОР ЛАПЛАСА**

§ 20. Оператор Гамильтона «набла»

Многие операции векторного анализа могут быть записаны в сокращенной и удобной для расчетов форме с помощью символического оператора Гамильтона «набла»:

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}. \quad (1)$$

В этом операторе соединены дифференциальные и векторные свойства. Будем понимать формальное умножение $\frac{\partial}{\partial x}$ на функцию $f(x, y, z)$ как частное дифференцирование $\frac{\partial f}{\partial x}$.

В рамках векторной алгебры формальные операции над оператором «набла» будем проводить так, как если бы он был вектором. Используя этот формализм, получим следующее.

1. Если $u = u(x, y, z)$ — скалярная дифференцируемая функция, то по правилу умножения вектора на скаляр имеем

$$\nabla u = \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) u = i \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial u}{\partial y} + k \frac{\partial u}{\partial z} = \text{grad } u. \quad (2)$$

2. Если $\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$, где P, Q, R — дифференцируемые функции, то по известной формуле для скалярного произведения имеем

$$\begin{aligned} (\nabla, \mathbf{a}) &= \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}, P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k} \right) = \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \text{div } \mathbf{a}, \end{aligned} \quad (3)$$

в частности, $(\nabla, \mathbf{c}) = 0$ (\mathbf{c} — постоянный вектор).

3. Если $\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$, то

$$[\nabla, \mathbf{a}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \text{rot } \mathbf{a}, \quad (4)$$

в частности, $(\nabla, \mathbf{c}) = 0$ (\mathbf{c} — постоянный вектор).

Продолжая формализм действий с ∇ как с вектором, из распределительного свойства для скалярного и векторного произведений получаем

$$(\nabla, \mathbf{a} + \mathbf{b}) = (\nabla, \mathbf{a}) + (\nabla, \mathbf{b}), \quad (5)$$

т. е. $\text{div}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \text{div} \mathbf{a} + \text{div} \mathbf{b},$

$$[\nabla, \mathbf{a} + \mathbf{b}] = [\nabla, \mathbf{a}] + [\nabla, \mathbf{b}], \quad (6)$$

т. е. $\text{rot}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \text{rot} \mathbf{a} + \text{rot} \mathbf{b}.$

Формулы (5) и (6) можно трактовать также как проявление дифференциальных свойств оператора «набла» (∇ — линейный дифференциальный оператор).

Используя формализм действий с оператором ∇ как с вектором, следует помнить, что ∇ не является вектором — он не имеет ни величины, ни направления, так что, например, вектор $[\nabla, \mathbf{a}]$ не будет, вообще говоря, перпендикулярен вектору \mathbf{a} (однако для плоского поля $\mathbf{a} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ вектор

$$[\nabla, \mathbf{a}] = \text{rot} \mathbf{a} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

будет перпендикулярен плоскости xOy , а значит, и вектору \mathbf{a}).

Точно так же по отношению к символическому вектору ∇ понятие коллинеарности не имеет смысла. Например, выражение $[\nabla\phi, \nabla\psi]$, где ϕ и ψ — скалярные функции, формально напоминает векторное произведение двух коллинеарных векторов, которое всегда равно нулю. Но в общем случае это не имеет места. В самом деле, вектор $\nabla\phi = \text{grad} \phi$ направлен по нормали к поверхности уровня $\phi = \text{const}$, а вектор $\nabla\psi = \text{grad} \psi$ определяет нормаль к поверхности уровня $\psi = \text{const}$, и эти нормали в общем случае не обязаны быть коллинеарными (рис. 35). С другой стороны, в любом дифференцируемом скалярном поле ϕ имеем $[\nabla\phi, \nabla\phi] = 0$. Эти примеры показывают, что с оператором ∇ нужно обращаться с осторожностью.

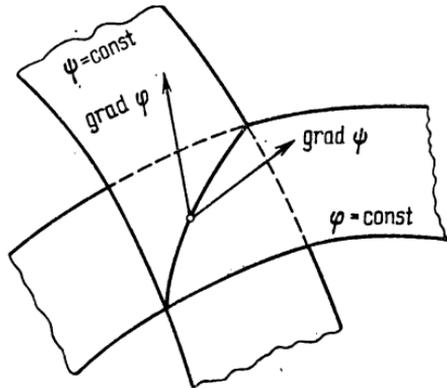


Рис. 36.

Наряду с векторной природой, оператор Гамильтона «набла» имеет дифференциальную природу. Учитывая дифференциальный характер ∇ , условимся считать, что оператор ∇ действует на все величины, написанные за ним. В этом смысле скажем, $(\nabla, \mathbf{a}) \neq \nabla(\mathbf{a}, \nabla)$. В самом деле,

$$(\nabla, \mathbf{a}) = \text{div} \mathbf{a},$$

в то время как

$$(a, \nabla) = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y} + R \frac{\partial}{\partial z}$$

есть скалярный дифференциальный оператор.

Применяя оператор ∇ к произведению каких-либо величин, надо иметь в виду правило дифференцирования произведения

$$\frac{\partial}{\partial x} (uv) = v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Отсюда следует, что оператор «набла» надо применять поочередно к каждому множителю, оставляя остальные множители неизменными, и затем брать сумму полученных выражений. При этом будем руководствоваться следующими правилами.

1°. Если оператор ∇ действует на какое-либо произведение, то в первую очередь учитывается его дифференциальный характер, а затем уже векторные свойства.

2°. Чтобы отметить тот факт, что «набла» не воздействует на какую-либо величину, входящую в состав сложной формулы, эту величину отмечают индексом c (const), который в окончательном результате может быть снят.

3°. Все величины, на которые оператор «набла» не воздействует, в окончательном результате ставятся впереди «набла», т. е. слева от него.

Пример 1. Показать, что

$$\operatorname{div} (ua) = u \operatorname{div} a + (a, \operatorname{grad} u).$$

Здесь u — скалярная функция, a — векторная функция.

Решение. В символической записи

$$\operatorname{div} (ua) = (\nabla, ua).$$

Учитывая сначала дифференциальный характер ∇ , мы должны написать

$$(\nabla, ua) = (\nabla, uca) + (\nabla, uac).$$

Рассматривая выражение (∇, uca) мы можем постоянный множитель u вынести за знак «набла» и, как скаляр, за знак скалярного произведения, что дает

$$(\nabla, uca) = (uc\nabla, a) = uc(\nabla, a) = u(\nabla, a)$$

(на последнем шаге мы опустили индекс c).

В выражении (∇, uac) оператор ∇ действует только на скалярную функцию u ; поэтому мы можем написать, что

$$(\nabla, uac) = (\nabla u, ac) = (ac, \nabla u) = (a, \nabla u).$$

В результате получаем формулу

$$(\nabla, ua) = u(\nabla, a) + (a, \nabla u)$$

или

$$\operatorname{div} (ua) = u \operatorname{div} a + (a, \operatorname{grad} u).$$

Пример 2. Показать, что

$$\operatorname{rot}(ua) = u \operatorname{rot} a - [a, \operatorname{grad} u].$$

Решение. В символической записи

$$\operatorname{rot}(ua) = [\nabla, ua].$$

Учитывая дифференциальные свойства ∇ , сначала пишем

$$[\nabla, ua] = [\nabla, u \cdot a] + [\nabla, ua_c]. \quad (7)$$

Затем в первом слагаемом справа выносим скалярный множитель u_c за знак ∇ и за знак векторного произведения, что дает

$$[\nabla, u \cdot a] = u_c [\nabla, a] = u [\nabla, a].$$

Во втором слагаемом в (7) относим u к оператору ∇ и изменяем порядок множителей для того, чтобы вектор a_c , на который «набла» не действует, оказался впереди ∇ . Это дает

$$[\nabla, ua_c] = [\nabla u, a_c] = -[a, \nabla u].$$

Таким образом,

$$[\nabla, ua] = u [\nabla, a] - [a, \nabla u]$$

или

$$\operatorname{rot}(ua) = u \operatorname{rot} a - [a, \operatorname{grad} u].$$

Пример 3. Пользуясь символическим методом, найти $\operatorname{div} [a, b]$.

Решение. Имеем

$$\operatorname{div} [a, b] = (\nabla, [a, b]) = (\nabla, [a, b_c]) + (\nabla, [a_c, b]). \quad (8)$$

Пользуясь свойством циклической перестановки множителей в смешанном произведении, преобразуем выражения в правой части (8) так, чтобы все постоянные величины оказались перед оператором ∇ , а переменные — позади него. Получим

$$\begin{aligned} \operatorname{div} [a, b] &= ([\nabla, a], b_c) - (\nabla, [b, a_c]) = ([\nabla, a], b_c) - \\ &\quad - ([\nabla, b], a_c) = (b, [\nabla, a]) - (a, [\nabla, b]), \end{aligned}$$

т. е. $\operatorname{div} [a, b] = (b, \operatorname{rot} a) - (a, \operatorname{rot} b)$.

Замечание. Применяя символический метод, мы избегаем весьма сложных аналитических преобразований и быстро получаем окончательный результат. Но, с другой стороны, различные формальные преобразования с оператором «набла» надо производить очень внимательно, в противном случае возможны, как мы видели, грубые ошибки. Поэтому при отсутствии уверенности в полученном результате его следует проверить аналитическим методом.

238. Показать, что

$$а) \quad \nabla \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \nabla u - u \nabla v}{v^2};$$

$$б) \quad \nabla f(u) = f'(u) \nabla u.$$

239. Доказать, что вектор $[\nabla u, \nabla v]$ соленоидален, если u и v — дифференцируемые скалярные функции.

Используя оператор Гамильтона ∇ , доказать следующие равенства:

$$240. \text{ а) } \text{grad}(uv) = v \text{ grad } u + u \text{ grad } v;$$

$$\text{ б) } \text{rot} [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\mathbf{b}, \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a}, \nabla)\mathbf{b} + \mathbf{a} \text{ div } \mathbf{b} - \mathbf{b} \text{ div } \mathbf{a}.$$

$$241. \text{ rot } [\mathbf{a}, \mathbf{r}] = 2\mathbf{a}, \mathbf{a} - \text{ постоянный вектор.}$$

242. Доказать, что вектор $\mathbf{a} = u \text{ grad } v$ ортогонален к $\text{rot } \mathbf{a}$.

§ 21. Дифференциальные операции второго порядка. Оператор Лапласа

Дифференциальные операции второго порядка получаются в результате двукратного применения к полям оператора ∇ .

Пусть имеем скалярное поле $u = u(M)$. В этом поле оператор ∇ порождает векторное поле $\nabla u = \text{grad } u$.

В векторном поле ∇u оператор ∇ , примененный повторно к ∇u , дает скалярное поле

$$(\nabla, \nabla u) = \text{div grad } u \quad (1)$$

и векторное поле

$$[\nabla, \nabla u] = \text{rot grad } u. \quad (2)$$

Если задано векторное поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$, то оператор ∇ порождает в нем скалярное поле $(\nabla, \mathbf{a}) = \text{div } \mathbf{a}$. В скалярном поле $\text{div } \mathbf{a}$ оператор ∇ порождает векторное поле,

$$\nabla(\nabla, \mathbf{a}) = \text{grad div } \mathbf{a}. \quad (3)$$

В векторном поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$ оператор ∇ порождает также векторное поле $[\nabla, \mathbf{a}] = \text{rot } \mathbf{a}$. Применяя к этому полю снова оператор ∇ , получим скалярное поле

$$(\nabla, [\nabla, \mathbf{a}]) = \text{div rot } \mathbf{a} \quad (4)$$

и векторное поле

$$[\nabla, [\nabla, \mathbf{a}]] = \text{rot rot } \mathbf{a}. \quad (5)$$

Формулы (1) — (5) определяют так называемые дифференциальные операции второго порядка.

П р и м е р 1 Пусть функция $u = u(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Доказать, что

$$\text{rot grad } u \equiv 0$$

Р е ш е н и е. 1-й способ. Действуя формально, получим

$$\text{rot grad } u = [\nabla, \nabla u] = [\nabla, \nabla] u = 0,$$

так как $[\nabla, \nabla] = 0$ как векторное произведение двух одинаковых «векторов».

2-й способ. Используя выражения градиента и ротора в декартовых координатах и учитывая данные условия, будем иметь

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{grad} u &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \mathbf{i} + \\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \mathbf{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] \mathbf{k} = \\ &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) \mathbf{k} = 0, \end{aligned}$$

так как смешанные производные в этом случае равны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Аналогично доказывается, что для векторного поля

$$\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

координаты P, Q, R которого имеют непрерывные частные производные второго порядка, получим $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$.

Обратим особое внимание на дифференциальную операцию второго порядка $\operatorname{div} \operatorname{grad} u = (\nabla, \nabla u)$. Предполагая, что функция $u(x, y, z)$ имеет вторые частные производные по x, y и z , получим

$$\begin{aligned} (\nabla, \nabla u) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}, \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \equiv \Delta u. \end{aligned}$$

Итак, $(\nabla, \nabla u) = \Delta u$, где символ $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ называется

оператором Лапласа. Его можно представить как скалярное произведение оператора Гамильтона ∇ на самого себя, т. е.

$$\Delta = (\nabla, \nabla) = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Этот оператор играет важную роль в математической физике.

Рассмотрим еще одну операцию второго порядка $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a}$. Имеем $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = [\nabla, [\nabla, \mathbf{a}]]$. Воспользуемся формулой для двойного векторного произведения, записанной в виде $[A, [B, C]] = = B(A, C) - (A, B)C$. Заменив в этой формуле A на ∇ , B на ∇ , C на \mathbf{a} , получим

$$[\nabla, [\nabla, \mathbf{a}]] = \nabla(\nabla, \mathbf{a}) - (\nabla, \nabla)\mathbf{a} = \nabla(\nabla, \mathbf{a}) - \Delta \mathbf{a} \quad (6)$$

т. е.

$$\text{rot}(\text{rot } a) = \text{grad div } a - \Delta a, \text{ где } \Delta a = \Delta P \cdot i + \Delta Q \cdot j + \Delta R \cdot k.$$

Дифференциальные операции второго порядка можно для наглядности записать в виде следующей таблицы:

	Скалярное поле u	Векторное поле a	
	grad	div	rot
grad		grad div a	
div	div grad $u = \Delta u$		div rot $a = 0$
rot	rot grad $u = 0$		rot rot $a =$ $= \text{grad div } a - \Delta a$

Пример 2. Законы классической теории электромагнетизма постулируются в виде системы уравнений Максвелла.

В простейшем случае непроводящей однородной и изотропной среды при отсутствии зарядов и токов эта система имеет вид

$$\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = [\nabla, H], \quad (7)$$

$$-\frac{\mu}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = [\nabla, E], \quad (8)$$

$$(\nabla, E) = 0, \quad (9)$$

$$(\nabla, H) = 0. \quad (10)$$

Здесь E и H — векторы напряженности электрического и магнитного полей; ϵ и μ — коэффициенты электрической и магнитной проницаемости (в наших предположениях $\epsilon, \mu = \text{const}$); c — скорость света в пустоте.

Поскольку пространственная и временная производные коммутируют, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial t} [\nabla, H] = \left[\nabla, \frac{\partial H}{\partial t} \right],$$

то дифференцируя (7) по t , получим

$$\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \left[\nabla, \frac{\partial H}{\partial t} \right].$$

Заменяя $\frac{\partial H}{\partial t}$ из (8), найдем $\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\frac{c}{\mu} [\nabla, [\nabla, E]]$ или

$$\frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = [\nabla, [\nabla, E]]. \quad (11)$$

В силу формулы (6) $[\nabla, [\nabla, E]] = \nabla (\nabla, E) - \Delta E$. Так как

$(\nabla, E) = 0$, то из (11) имеем $\frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \Delta E$.

Итак, для векторного поля E получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\epsilon\mu} \Delta E.$$

Это — одно из основных уравнений математической физики, называемое *волновым уравнением*.

Нетрудно убедиться (проверьте это!), что векторное поле H удовлетворяет точно такому же волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\epsilon\mu} \Delta H.$$

Таким образом, каждая из координат E_x, E_y, E_z и H_x, H_y, H_z векторов E и H удовлетворяет в наших условиях уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

Здесь $a = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ — скорость распространения процесса. В вакууме при $\epsilon = \mu = 1$ имеем $a = c$, т. е. в пустоте электромагнитные процессы распространяются со скоростью света.

243. Показать, что любое решение уравнения $[\nabla, [\nabla, A]] - k^2 A = 0$, удовлетворяющее условию соленоидальности, удовлетворяет векторному уравнению Гельмгольца $\nabla^2 A + k^2 A = 0$.

О п р е д е л е н и е. Скалярное поле $u = u(x, y, z)$, удовлетворяющее условию $\Delta u = 0$, называется *лапласовым* или *гармоническим полем*.

П р и м е р 3. Важным примером гармонического поля является скалярное поле $u = k/r$, $k = \text{const}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Эта функция представляет собой потенциал поля тяготения, создаваемого точечной массой, помещенной в начале координат. Нетрудно проверить, что функция $u = k/r$ — гармоническая всюду, кроме начала координат, где она не определена. В самом деле,

$$\begin{aligned} (\nabla, \nabla \frac{k}{r}) &= k \left(\nabla, \nabla \frac{1}{r} \right) = k \left(\nabla, -\frac{1}{r^2} \nabla r \right) = -k \left(\nabla, \frac{1}{r^2} r^0 \right) = \\ &= -k \left(\nabla \frac{1}{r^2}, r^0 \right) - k \frac{1}{r^2} (\nabla, r^0) = -k \left(-\frac{2}{r^3} \nabla r, r^0 \right) - \frac{k}{r^2} (\nabla, r^0) = \\ &= \frac{2k}{r^3} (r^0, r^0) - \frac{k}{r^2} (\nabla, r^0) = \frac{2k}{r^3} - \frac{k}{r^2} \cdot \frac{2}{r} = 0 \end{aligned}$$

для всех $r \neq 0$, так как

$$\begin{aligned} (\nabla, r^0) &= \left(\nabla, \frac{r}{r} \right) = \left(\nabla \frac{1}{r}, r \right) + \frac{1}{r} (\nabla, r) = \left(-\frac{\nabla r}{r^2}, r \right) + \frac{3}{r} = \\ &= -\frac{1}{r^2} (r^0, r) + \frac{3}{r} = -\frac{1}{r} (r^0, r^0) + \frac{3}{r} = -\frac{1}{r} + \frac{3}{r} = \frac{2}{r}. \end{aligned}$$

Пример 4. Доказать, что в потенциальном поле вектора \mathbf{a} его потенциальная функция $u(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \rho(x, y, z), \quad (12)$$

где $\rho(x, y, z)$ — дивергенция вектора \mathbf{a} .

Решение. По условию

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \rho. \quad (13)$$

Так как поле вектора \mathbf{a} потенциальное, то $\mathbf{a} = \operatorname{grad} u$, где u — потенциал поля. Подставляя в (13) $\mathbf{a} = \operatorname{grad} u$, получим

$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \rho$ или, так как $\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \Delta u$, то $\Delta u = \rho$.

В частном случае, в точках поля, где дивергенция равна нулю, уравнение (12) обращается в уравнение Лапласа $\Delta u = 0$. Уравнение Лапласа — Пуассона дает возможность найти потенциальную функцию u с помощью интегрирования дифференциального уравнения в частных производных. В некоторых задачах это оказывается более удобным.

В электростатике нередко предпочитают вместо функции u брать противоположную ей по знаку функцию $v = -u$. Тогда $\mathbf{a} = -\operatorname{grad} v$. Сообразно с этим в теории электростатического поля уравнение Пуассона имеет вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{4\pi\rho}{\epsilon}. \quad (14)$$

Рассмотрим элементарный пример на применение уравнения Пуассона.

Пример 5. Пусть две бесконечные разноименно заряженные параллельные пластины AA_1 и BB_1 имеют потенциалы v_1 и v_2 , причем, для определенности, $v_1 > v_2$. Найти поле \mathbf{E} между ними (рис. 37).

Решение. Направим ось Ox перпендикулярно к пластинам в направлении убывания потенциала, а плоскость yOz совместим с

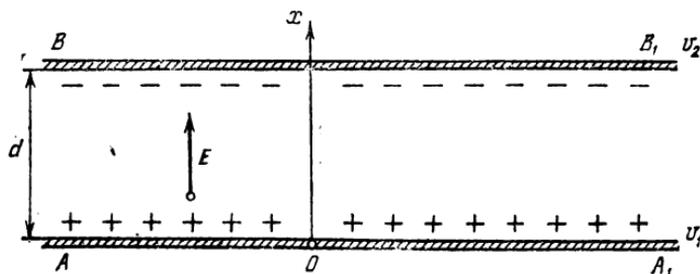


Рис. 37.

положительно заряженной пластиной AA_1 . Будем искать потенциальную функцию из уравнения Пуассона. В силу симметрии задачи относительно оси Ox и бесконечности пластин, можно заключить, что эквипотенциальными поверхностями будут плоскости,

параллельные пластинам, а функция v будет зависеть лишь от одной переменной x . Уравнение (14) примет вид

$$\frac{d^2v}{dx^2} = 0, \quad (15)$$

поскольку объемные заряды во всем пространстве между пластинами отсутствуют. Интегрируя (15), найдем

$$v = C_1x + C_2 \quad (16)$$

(C_1, C_2 — произвольные постоянные).

Потребуем, чтобы при $x = 0$ функция v принимала значение v_1 , а при $x = d$, где d — расстояние между пластинами, она принимала значение v_2 . Это дает $C_2 = v_1$, $v_2 = C_1d + C_2$, откуда $C_2 = v_1$,

$C_1 = \frac{v_2 - v_1}{d}$. Подставляя эти значения C_1, C_2 в (16), получим

$$v = \frac{v_2 - v_1}{d} x + v_1 = v_1 - \frac{v_1 - v_2}{d} x.$$

Вектор E определится по формуле $E = -\text{grad } v$, что дает

$$E = \frac{v_1 - v_2}{d} i,$$

так что поле будет однородным и направлено по оси Ox . Величина E в любой точке равна $|E| = \frac{v_1 - v_2}{d}$, т. е. равна падению потенциала на единицу длины кратчайшего пути между пластинами.

244. Пусть скалярная функция $\varphi(M)$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Показать, что вектор $\nabla\varphi$ — соленоидальный и безвихревой.

245. Показать, что $\Delta(uv) = u\Delta v + v\Delta u + 2(\nabla u, \nabla v)$.

246. Доказать, что если r — радиус-вектор, то

$$\Delta r = \begin{cases} \frac{2}{r} & \text{в пространстве,} \\ \frac{1}{r} & \text{на плоскости.} \end{cases}$$

247. Проверить, являются ли следующие скалярные поля гармоническими:

а) $u = x^2 + 2xy - y^2,$

б) $u = x^2y + y^2z + z^2x,$

в) $u = x^2 - y^2.$

248. Показать, что скалярное поле

$$u = \ln \frac{1}{r}, \text{ где } r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (r \neq 0),$$

является гармоническим.

249. Найти все гармонические поля, зависящие только от x .

250. Найти общий вид однородного гармонического многочлена второй степени от x и y .

251. Найти все решения уравнения Пуассона $\Delta u = x^{n-2}$, зависящие только от x .

Пример 6. Формулы Грина. Пусть φ, ψ — две скалярные функции точки. Составим вектор $\mathbf{a} = \varphi \operatorname{grad} \psi$. Тогда $\operatorname{div} \mathbf{a} = \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad} \psi) = \varphi \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi + (\operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \psi) = \varphi \cdot \Delta \psi + (\operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \psi)$.

Применим теперь формулу Гаусса — Остроградского

$$\oiint_{\Sigma} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma = \int \int \int_V \operatorname{div} \mathbf{a} dv.$$

Заметим, что в нашем случае

$$(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) = (\varphi \operatorname{grad} \psi, \mathbf{n}^0) = \varphi (\operatorname{grad} \psi, \mathbf{n}^0) = \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}.$$

В результате получаем *первую формулу Грина*

$$\int \int \int_V [\varphi \Delta \psi + (\operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \psi)] dv = \oiint_{\Sigma} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma, \quad (17)$$

которая при $\varphi = \psi$ превращается в формулу

$$\int \int \int_V [\varphi \Delta \varphi + |\operatorname{grad} \varphi|^2] dv = \oiint_{\Sigma} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma. \quad (18)$$

Если в формуле (17) положить $\varphi \equiv 1$, то получим

$$\int \int \int_V \Delta \psi dv = \oiint_{\Sigma} \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma.$$

Поменяем в формуле (17) местами φ и ψ и вычтем получившуюся в результате формулу

$$\int \int \int_V [\psi \Delta \varphi + (\operatorname{grad} \psi, \operatorname{grad} \varphi)] dv = \oiint_{\Sigma} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma$$

из формулы (17). Мы получим тогда *вторую формулу Грина*

$$\int \int \int_V (\varphi \cdot \Delta \psi - \psi \cdot \Delta \varphi) dv = \oiint_{\Sigma} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\sigma.$$

Здесь предполагается, что все функции, с которыми приходится иметь дело, так же как и их производные, встречающиеся в формулах, непрерывны в рассматриваемой области.

Пример 7. Найти поверхностный интеграл

$$I = \iint_{\Sigma} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma,$$

взятый по сфере $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ для $\varphi = x^2 + y^2$ и $\psi = y^2 + z^2$.

Решение. В силу первой формулы Грина искомым интеграл равен

$$I = \int \int \int_V [\varphi \Delta \psi + (\text{grad } \varphi, \text{grad } \psi)] dv,$$

где область интегрирования V — шар: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Имеем $\Delta \psi = 4$, $\text{grad } \varphi = 2xi + 2yj$, $\text{grad } \psi = 2yj + 2zk$; $(\text{grad } \varphi, \text{grad } \psi) = 4y^2$, поэтому

$$I = \int \int \int_V (4x^2 + 4y^2 + 4y^2) dv = 4 \int \int \int_V (x^2 + 2y^2) dv.$$

Переходя к сферическим координатам $x = r \cos \varphi \sin \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$, $z = r \cos \theta$, получим

$$\begin{aligned} I &= 4 \int \int \int_V (r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + 2r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \\ &= 4 \int_0^{2\pi} (\cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi) d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \int_0^1 r^4 dr = \\ &= \frac{4}{5} \int_0^{2\pi} (1 + \sin^2 \varphi) d\varphi \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{12}{5} \pi \left(-\cos \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{16}{5} \pi. \end{aligned}$$

Пример 8. Найти поверхностный интеграл

$$I = \iint_{\Sigma} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\sigma,$$

взятый по поверхности $\Sigma: x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$, $z = H$, $H > 0$, если $\varphi = x^2 + y^2 + x + z$, $\psi = x^2 + y^2 + 2z + x$.

Решение. Искомым интеграл по второй формуле Грина равен

$$I = \int \int \int_V (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dv.$$

Для данных функций φ и ψ имеем $\Delta \varphi = 4$, $\Delta \psi = 4$ и, значит,

$$I = -4 \int \int \int_V z dv.$$

Переходя к цилиндрическим координатам $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$, получим

$$I = -4 \int_V \int \int z \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz = -4 \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H z \, dz = -2\pi R^2 H^2.$$

Пример 9. Найти поверхностный интеграл $I = \iint_{\Sigma} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, d\sigma$

по замкнутой поверхности Σ , ограниченной плоскостями: $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, если $\varphi = e^x \sin y + 1$.

Решение. Данная функция является гармонической, так как $\Delta \varphi = e^x \sin y - e^x \sin y \equiv 0$. Поэтому по формуле (18) будем иметь

$$I = \int_V \int \int |\text{grad } \varphi|^2 \, dv.$$

Находим модуль градиента функции φ :

$$\text{grad } \varphi = e^x \sin y \cdot i + e^x \cos y \cdot j \quad |\text{grad } \varphi| = e^x.$$

Искомый интеграл равен

$$I = \int_V \int \int e^{2x} \, dv = \int_0^1 e^{2x} dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = \frac{1}{8} (e^2 - 5).$$

252. Вычислить поверхностный интеграл $I = \iint_{\Sigma} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, d\sigma$ по замкнутой поверхности $\Sigma: \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, y=0, y \geq 0\}$, если $\varphi = z^2$, $\psi = x^2 + y^2 - z^2$.

253. Вычислить поверхностный интеграл $I = \iint_{\Sigma} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) d\sigma$, взятый по всей поверхности замкнутого цилиндра $\Sigma: \{x^2 + y^2 = 1, z=0, z=1\}$, если $\varphi = 2x^2$, $\psi = x^2 + z^2$.

254. Вычислить поверхностный интеграл $I = \iint_{\Sigma} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, d\sigma$, если $\varphi = \frac{x+y+z}{\sqrt{3}}$, а Σ есть сфера: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

255. Найти поверхностный интеграл $I = \iint_{\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma$,

если $\varphi = e^x \sin y + e^y \sin x + z$, а Σ — трехосный эллипсоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

§ 22. Векторный потенциал

Пусть векторное поле

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(M) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

является соленоидальным в области G , т. е. $\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = 0$ в G .

О п р е д е л е н и е. Векторным потенциалом векторного поля $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$ называется вектор $\mathbf{b}(M) = P_1(x, y, z)\mathbf{i} + Q_1(x, y, z)\mathbf{j} + R_1(x, y, z)\mathbf{k}$, удовлетворяющий в области G условию

$$\operatorname{rot} \mathbf{b}(M) = \mathbf{a}(M) \quad (1)$$

или в координатной форме

$$\frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z} = P, \quad \frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial x} = Q, \quad \frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} = R. \quad (2)$$

Для соленоидального векторного поля $\mathbf{a}(M)$ векторный потенциал $\mathbf{b}(M)$ определяется неоднозначно; условию (1) удовлетворяет также вектор $\mathbf{B}(M) = \mathbf{b}(M) + \operatorname{grad} f(M)$, где $f(M)$ — произвольная дифференцируемая скалярная функция, так как $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f(M)) \equiv 0$.

Таким образом, два векторных потенциала соленоидального поля $\mathbf{a}(M)$ отличаются друг от друга на градиент скалярного поля.

Нахождение векторного потенциала $\mathbf{b}(M)$ соленоидального поля $\mathbf{a}(M)$ сводится к нахождению какого-либо частного решения системы (2) трех дифференциальных уравнений в частных производных относительно трех неизвестных функций $P_1(x, y, z)$, $Q_1(x, y, z)$, $R_1(x, y, z)$.

Векторный потенциал $\mathbf{b}(M)$ можно построить следующим образом. Пользуясь произволом в выборе вектора $\mathbf{b}(M)$, для упрощения положим, например, $P_1(x, y, z) \equiv 0$, т. е. вектор $\mathbf{b}(M)$ будем искать в виде $\mathbf{b}(M) = Q_1(x, y, z)\mathbf{j} + R_1(x, y, z)\mathbf{k}$. В этом случае система дифференциальных уравнений (2) для нахождения неизвестных функций $Q_1(x, y, z)$ и $R_1(x, y, z)$ примет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z} &= P, \\ \frac{\partial R_1}{\partial x} &= -Q, \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x} &= R. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Из второго и третьего уравнений этой системы находим

$$R_1(x, y, z) = - \int Q(x, y, z) dx + C_1(y, z),$$

$$Q_1(x, y, z) = \int R(x, y, z) dx + C_2(y, z),$$

где $C_1(y, z)$ и $C_2(y, z)$ — любые дифференцируемые функции y и z . Положим для упрощения $C_2(y, z) \equiv 0$ и выберем функцию $C_1(y, z)$ так, чтобы удовлетворялось и первое уравнение системы (3). Для этого подставляем в первое уравнение найденные выражения для Q_1 и R_1 :

$$- \frac{\partial}{\partial y} \int Q(x, y, z) dx + \frac{\partial C_1}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} \int R(x, y, z) dx = P(x, y, z).$$

Отсюда найдем

$$\frac{\partial C_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int Q(x, y, z) dx + \frac{\partial}{\partial z} \int R(x, y, z) dx + P(x, y, z).$$

Легко проверить, что правая часть этого уравнения не зависит от x в силу того, что $\operatorname{div} a(M) = 0$ в G .

Интегрируя последнее равенство по y , найдем

$$C_1(y, z) = \int \left[\frac{\partial}{\partial y} \int Q(x, y, z) dx + \frac{\partial}{\partial z} \int R(x, y, z) dx + P(x, y, z) \right] dy + C_3(z). \quad (4)$$

Полагая в (4) $C_3(z) \equiv 0$ и подставляя (4) в выражение для $R_1(x, y, z)$, получим частное решение системы (3):

$$P_1 \equiv 0, \quad (5)$$

$$Q_1 = \int R(x, y, z) dx, \quad (6)$$

$$R_1 = \int \left[\frac{\partial}{\partial y} \int Q(x, y, z) dx + \frac{\partial}{\partial z} \int R(x, y, z) dx + P(x, y, z) \right] dy - \int Q(x, y, z) dx. \quad (7)$$

Вектор $b(M)$, координаты $P_1(x, y, z)$, $Q_1(x, y, z)$ и $R_1(x, y, z)$ которого определяются формулами (5), (6), (7), является векторным потенциалом, так как он удовлетворяет условию $\operatorname{rot} b = a$.

П р и м е р 1. Найти векторный потенциал $b = b(x, y, z)$ для соленоидального поля, задаваемого вектором

$$a = 2yi - xj + 2zk.$$

Р е ш е н и е. Потенциал b ищем в виде

$$b = b(x, y, z) = Q_1(x, y, z)j + R_1(x, y, z)k,$$

где $Q_1(x, y, z)$ и $R_1(x, y, z)$ находим по формулам (7) и (8). Так как в

данном случае $P = 2y$, $Q = -z$, $R = 2x$, то будем иметь

$$Q_1(x, y, z) = \int 2x dx = x^2,$$

$$R_1(x, y, z) = \int z dx + \int 2y dy = xz + y^2.$$

Итак,

$$\mathbf{b}(x, y, z) = x^2\mathbf{j} + (xz + y^2)\mathbf{k}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что $\text{rot } \mathbf{b} = \mathbf{a}$, и, значит, этот вектор является векторным потенциалом данного поля.

З а м е ч а н и е. В виду произвола, допустимого при выборе вектора \mathbf{b} , вместо условия $P_1(x, y, z) \equiv 0$ можно потребовать, чтобы $Q_1(x, y, z) \equiv 0$ или $R_1(x, y, z) \equiv 0$. Система уравнений (2) и формулы (5), (6), (7) соответственно изменятся.

Найти векторные потенциалы соленоидальных полей:

256. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}.$

257. $\mathbf{a} = 2y\mathbf{i} + 2z\mathbf{j}.$

258. $\mathbf{a} = (e^x - e^y)\mathbf{k}.$

259. $\mathbf{a} = 6y^2\mathbf{i} + 6z\mathbf{j} + 6x\mathbf{k}.$

260. $\mathbf{a} = 3y^2\mathbf{i} - 3x^2\mathbf{j} - (y^2 + 2x)\mathbf{k}.$

261. $\mathbf{a} = ye^{x^2}\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} - (2xyze^{x^2} + z^2)\mathbf{k}.$

Если векторное поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$ соленоидально в области G , которая является звездной (см. § 19, гл. IV) с центром в начале координат $O(0, 0, 0)$ (поле $\mathbf{a}(M)$ может быть не определено в точке O), то один из векторных потенциалов $\mathbf{b} = \mathbf{b}(M)$ можно найти по формуле

$$\mathbf{b}(M) = \int_0^1 [\mathbf{a}(M'), \mathbf{r}(M)] t dt, \quad (8)$$

где $\mathbf{r}(M) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ есть радиус-вектор точки $M(x, y, z)$, а точка $M'(tx, ty, tz)$ при изменении параметра t от 0 до 1 пробегает отрезок OM .

П р и м е р 2. Пользуясь формулой (8), найти векторный потенциал соленоидального поля $\mathbf{a} = 2y\mathbf{i} - z\mathbf{j} + 2x\mathbf{k}$.

Р е ш е н и е. Данное векторное поле определено во всем трехмерном пространстве, которое является звездной областью с центром в начале координат, поэтому для нахождения векторного потенциала можно применить формулу (8). В точке $M'(tx, ty, tz)$ имеем

$$\mathbf{a}(M') = 2ty\mathbf{i} - tz\mathbf{j} + 2tx\mathbf{k}.$$

Находим векторное произведение

$$[\mathbf{a}(M'), \mathbf{r}(M)] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2ty & -tz & 2tx \\ x & y & z \end{vmatrix} = \\ = [-(2xy + z^2)\mathbf{i} + (2x^2 - 2yz)\mathbf{j} + (2y^2 + xz)\mathbf{k}] t.$$

По формуле (8) находим

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(M) &= \int_0^1 [-(2xy + z^2) \mathbf{i} + (2x^2 - 2yz) \mathbf{j} + (2y^2 + xz) \mathbf{k}] t^2 dt = \\ &= -\frac{1}{3} (2xy + z^2) \mathbf{i} + \frac{2}{3} (x^2 - yz) \mathbf{j} + \frac{1}{3} (2y^2 + xz) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Легко установить, что $\operatorname{rot} \mathbf{b}(M) = \mathbf{a}(M)$.

З а м е ч а н и е. В примерах 1 и 2 для одного и того же соленоидального поля $\mathbf{a} = 2y\mathbf{i} - z\mathbf{j} + 2x\mathbf{k}$ получены разные векторные потенциалы:

$$\mathbf{b}_1(M) = x^2\mathbf{j} + (xz + y^2)\mathbf{k},$$

$$\mathbf{b}_2(M) = -\frac{1}{3} (2xy + z^2) \mathbf{i} + \frac{2}{3} (x^2 - yz) \mathbf{j} + \frac{1}{3} (2y^2 + xz).$$

Они отличаются друг от друга слагаемым, равным градиенту некоторого скалярного поля $f(M)$. Это слагаемое играет роль произвольной постоянной (при действии на нее ротора). Оно представимо как градиент некоторой скалярной функции $f(M)$. Найдем эту функцию в нашем случае. Имеем

$$\operatorname{grad} f(M) = \mathbf{b}_1(M) - \mathbf{b}_2(M) =$$

$$= \frac{1}{3} (2xy + z^2) \mathbf{i} + \frac{1}{3} (x^2 + 2yz) \mathbf{j} + \frac{1}{3} (2xz + y^2) \mathbf{k}.$$

Для нахождения скалярного поля $f(M)$ применим формулу (3) из § 19, в которой за точку (x_0, y_0, z_0) возьмем начало координат $O(0, 0, 0)$. Тогда получим

$$\begin{aligned} f(M) &= \int_0^x 0 \cdot dx + \int_0^y \frac{1}{3} x^2 dy + \int_0^z \frac{1}{3} (2xz + y^2) dz + C = \\ &= \frac{1}{3} (x^2y + y^2z + z^2x) + C, \end{aligned}$$

где C — произвольная постоянная. Так как $\operatorname{grad} C = 0$, то можно положить $C = 0$ и, значит, $f(M) = \frac{1}{3} (x^2y + y^2z + z^2x)$.

П р и м е р 3. Найти векторный потенциал \mathbf{b} магнитного поля \mathbf{H} , создаваемого электрическим зарядом e , движущимся с постоянной скоростью \mathbf{v} .

Р е ш е н и е. Согласно закону Био—Савара напряженность магнитного поля равна

$$\mathbf{H}(M) = \frac{[e\mathbf{v}, \mathbf{r}]}{4\pi r^3}, \quad (9)$$

где r — расстояние точки M до заряда e .

Так как H является соленоидальным вектором, т. е. $\operatorname{div} H=0$, то для него существует векторный потенциал \mathbf{b} такой, что $H=\operatorname{rot} \mathbf{b}$ или, учитывая формулу (9),

$$\operatorname{rot} \mathbf{b} = \frac{[e\mathbf{v}, \mathbf{r}]}{4\pi r^3} = \frac{e}{4\pi} \frac{[\mathbf{v}, \mathbf{r}]}{r^3}.$$

Перепишем последнюю формулу в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{b} &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \left[e\mathbf{v}, \frac{x}{r^3} \mathbf{i} \right] + \left[e\mathbf{v}, \frac{y}{r^3} \mathbf{j} \right] + \left[e\mathbf{v}, \frac{z}{r^3} \mathbf{k} \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \left[\mathbf{i}, -\frac{e\mathbf{v}}{r^3} \right] + \left[\mathbf{j}, -\frac{e\mathbf{v}}{r^3} \right] + \left[\mathbf{k}, -\frac{e\mathbf{v}}{r^3} \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \left[\mathbf{i}, \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e\mathbf{v}}{r} \right) \right] + \left[\mathbf{j}, \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e\mathbf{v}}{r} \right) \right] + \left[\mathbf{k}, \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e\mathbf{v}}{r} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Применяя легко проверяемое равенство

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \left[\mathbf{i}, \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} \right] + \left[\mathbf{j}, \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} \right] + \left[\mathbf{k}, \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z} \right],$$

получим

$$\operatorname{rot} \mathbf{b} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \frac{e\mathbf{v}}{r},$$

откуда

$$\mathbf{b} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e\mathbf{v}}{r}.$$

Пользуясь формулой (8), найти векторные потенциалы соленоидальных полей, определенных в звездных областях:

262. $\mathbf{a} = \mathbf{i}$.

263. $\mathbf{a} = 6x\mathbf{i} - 15y\mathbf{j} + 9z\mathbf{k}$.

264. $\mathbf{a} = 5x^2y\mathbf{i} - 10xyz\mathbf{k}$.

265. $\mathbf{a} = 2 \cos xz \cdot \mathbf{j}$.

266. $\mathbf{a} = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 > 0$.

**КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ.
ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ
ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА
В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ**

§ 23. Криволинейные координаты

Во многих задачах удобнее определять положение точки M пространства не тремя декартовыми координатами (x, y, z) , а тремя другими числами (q_1, q_2, q_3) , более отвечающими рассматриваемой частной задаче.

Пусть каждой точке M отвечает определенная тройка чисел (q_1, q_2, q_3) и, обратно, каждой такой тройке чисел отвечает единственная точка M . В этом случае величины q_1, q_2, q_3 называют *криволинейными координатами* точки M .

Координатными поверхностями в системе криволинейных координат q_1, q_2, q_3 называются поверхности

$$q_1 = C_1, \tag{1}$$

$$q_2 = C_2, \tag{2}$$

$$q_3 = C_3, \tag{3}$$

на которых одна из координат сохраняет постоянное значение.

Линии пересечения двух координатных поверхностей называются *координатными линиями*.

Вдоль линии пересечения координатных поверхностей (2) и (3) координаты q_2 и q_3 сохраняют постоянные значения; изменяется только координата q_1 . Аналогично на линиях пересечения поверхностей (1) и (3) или (1) и (2) меняются соответственно только q_2 и q_3 .

Введем единичные векторы e_1, e_2, e_3 , направленные по касательным к координатным линиям $(q_1), (q_2), (q_3)$ в точке M в сторону возрастания переменных q_1, q_2, q_3 .

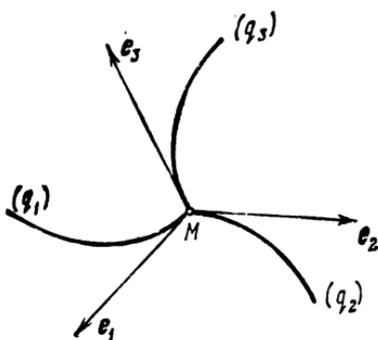


Рис. 38.

q_2, q_3 соответственно (рис. 38). Условимся брать орты e_1, e_2, e_3 всегда в таком порядке, чтобы их совокупность составляла правую тройку.

Подчеркнем коренное отличие криволинейных координат от обычных декартовых координат. В декартовой системе векторы

e_1, e_2, e_3 постоянны для всех точек пространства и равны соответственно i, j, k . Во всякой другой системе они будут, вообще говоря, изменять свои направления при переходе от одной точки M к другой.

В качестве примеров криволинейных координат рассмотрим цилиндрические и сферические координаты.

1°. **Цилиндрические координаты.** В цилиндрических координатах положение точки M пространства определяется тремя координатами]

$$\begin{aligned} q_1 &= \rho, & 0 \leq \rho < +\infty, \\ q_2 &= \varphi, & 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ q_3 &= z, & -\infty < z < +\infty. \end{aligned} \quad (4)$$

Координатными поверхностями являются:

$\rho = \text{const}$ — круговые цилиндры с осью Oz ;

$\varphi = \text{const}$ — полуплоскости, примыкающие к оси Oz ;

$z = \text{const}$ — плоскости, перпендикулярные оси Oz .

Координатными линиями являются: линии (ρ) — лучи, перпендикулярные оси Oz и имеющие начало на этой оси; линии (φ) — окружности с центром на оси Oz , лежащие в плоскостях, перпендикулярных этой оси; линии (z) — прямые, параллельные оси Oz (рис. 39).

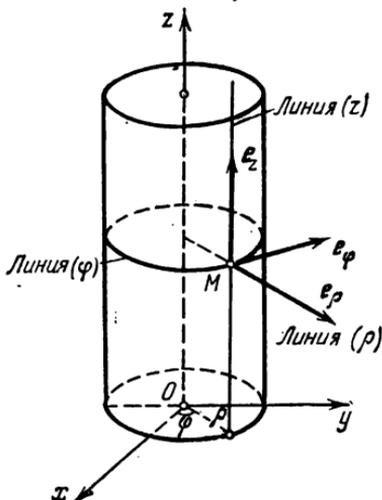


Рис. 39.

Связь декартовых координат с цилиндрическими определяется формулами

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, \\ y &= \rho \sin \varphi, \\ z &= z. \end{aligned} \quad (5)$$

2°. **Сферические координаты.** В сферических координатах положение точки M пространства определяется следующими координатами:

$$\begin{aligned} q_1 &= r, & 0 \leq r < +\infty, \\ q_2 &= \theta, & 0 \leq \theta \leq \pi, \\ q_3 &= \varphi, & 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned} \quad (6)$$

Координатными поверхностями являются:

$r = \text{const}$ — сферы с центром в точке O ;

$\theta = \text{const}$ — круговые полуконусы с осью Oz ;

$\varphi = \text{const}$ — полуплоскости, примыкающие к оси Oz .

Координатными линиями являются:

линии (r) — лучи, выходящие из точки O ;

линии (θ) — меридианы на сфере;

линии (φ) — параллели на сфере (рис. 40).

Связь декартовых координат со сферическими определяется формулами:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \sin \theta, \\ y &= r \sin \varphi \sin \theta, \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned} \quad (7)$$

Система криволинейных координат называется *ортогональной*, если в каждой точке M орты e_1, e_2, e_3 попарно ортогональны. Координатные линии и координатные поверхности в такой системе будут

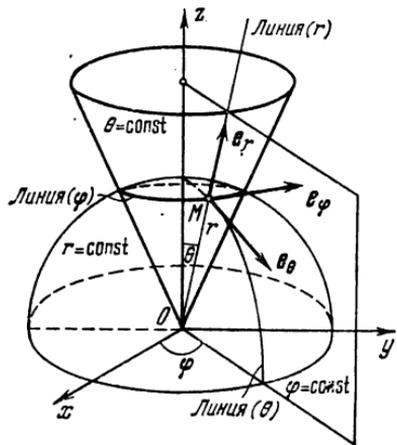


Рис. 40.

также ортогональны. Системы цилиндрических и сферических координат служат примером ортогональных криволинейных систем координат. В дальнейшем будут рассматриваться только ортогональные системы координат.

Пусть $r = r(q_1, q_2, q_3)$ — радиус-вектор точки M . Тогда

$$dr = H_1 dq_1 e_1 + H_2 dq_2 e_2 + H_3 dq_3 e_3. \quad (8)$$

Здесь

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}, \quad i = 1, 2, 3,$$

— коэффициенты Ламэ данной криволинейной системы координат. В цилиндрических координатах

$$q_1 = \rho, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z$$

в силу (5) имеем

$$H_1 = H_\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2} = 1,$$

$$H_2 = H_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \rho,$$

$$H_3 = H_z = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = 1.$$

В сферических координатах

$$q_1 = r, \quad q_2 = \theta, \quad q_3 = \varphi$$

в силу (7) имеем

$$H_1 = H_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = 1,$$

$$H_2 = H_\theta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} = r,$$

$$H_3 = H_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = r \sin \theta.$$

Величины

$$dl_i = H_i dq_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

фигурирующие в формуле (8), являются дифференциалами длин дуг координатных линий. Это соображение в ряде случаев позволяет более просто вычислять коэффициенты Ламэ. Так, в случае цилиндрических координат (4) (см. рис. 38) дифференциалы длин дуг координатных линий (ρ) , (φ) , (z) будут

$$d(\rho) = 1 \cdot d\rho, \quad \text{откуда } H_1 = 1;$$

$$d(\varphi) = \rho \cdot d\varphi, \quad \text{откуда } H_2 = \rho;$$

$$d(z) = 1 \cdot dz, \quad \text{откуда } H_3 = 1.$$

Так же просто получаются выражения для коэффициентов Ламэ в случае сферических координат (6).

§ 24. Основные операции векторного анализа в криволинейных координатах

1°. Дифференциальные уравнения векторных линий. Пусть имеем поле вектора

$$\mathbf{a} = a_1(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_1 + a_2(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_2 + a_3(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_3.$$

Уравнения векторных линий в криволинейных координатах q_1, q_2, q_3 имеют вид

$$\frac{H_1 dq_1}{a_1(q_1, q_2, q_3)} = \frac{H_2 dq_2}{a_2(q_1, q_2, q_3)} = \frac{H_3 dq_3}{a_3(q_1, q_2, q_3)}.$$

В частности, в цилиндрических координатах ($q_1 = \rho, q_2 = \varphi, q_3 = z$):

$$\frac{d\rho}{a_1(\rho, \varphi, z)} = \frac{\rho d\varphi}{a_2(\rho, \varphi, z)} = \frac{dz}{a_3(\rho, \varphi, z)}; \quad (1)$$

в сферических координатах ($q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \varphi$):

$$\frac{dr}{a_1(r, \theta, \varphi)} = \frac{r d\theta}{a_2(r, \theta, \varphi)} = \frac{r \sin \theta d\varphi}{a_3(r, \theta, \varphi)}.$$

Пример 1. Векторное поле задано в цилиндрических координатах

$$a(M) = e_\rho + \varphi e_\varphi.$$

Найти векторные линии этого поля.

Решение. По условию задачи $a_1 = 1, a_2 = \varphi, a_3 = 0$. В силу формулы (1) имеем

$$\frac{d\rho}{1} = \frac{\rho d\varphi}{\varphi} = \frac{dz}{0}.$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} \rho &= C_1, \\ \rho &= C_2 \varphi; \end{aligned} \right\}$$

это — спирали Архимеда, лежащие в плоскостях, параллельных плоскости xOy .

2°. **Градиент в ортогональных координатах.** Пусть имеем скалярное поле

$$u = u(q_1, q_2, q_3).$$

Тогда

$$\text{grad } u = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} e_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} e_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} e_3.$$

В частности, в цилиндрических координатах ($q_1 = \rho, q_2 = \varphi, q_3 = z$):

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial \rho} e_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} e_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} e_z; \quad (2)$$

в сферических координатах ($q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \varphi$):

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} e_\varphi. \quad (3)$$

Пример 2. Вычислить градиент скалярного поля, заданного в цилиндрических координатах (ρ, φ, z) : $u = \rho + z \cos \varphi$.

Решение. Пользуясь формулой (2), получаем

$$\text{grad } u = 1 \cdot e_\rho - \frac{1}{\rho} z \sin \varphi \cdot e_\varphi + \cos \varphi \cdot e_z.$$

Пример 3. Найти градиент скалярного поля, заданного в сферических координатах (r, θ, φ)

$$u = r + \frac{\sin \theta}{r} - \sin \theta \cos \varphi.$$

Решение. Пользуясь формулой (3), будем иметь

$$\text{grad } u = \left(1 - \frac{\sin \theta}{r}\right) e_r + \frac{\cos \theta}{r} \left(\frac{1}{r} - \cos \varphi\right) e_\theta + \frac{\sin \varphi}{r} e_\varphi.$$

3°. Ротор в ортогональных координатах. Пусть

$$a = a_1(q_1, q_2, q_3)e_1 + a_2(q_1, q_2, q_3)e_2 + a_3(q_1, q_2, q_3)e_3.$$

Тогда

$$\text{rot } a = \begin{vmatrix} \frac{1}{H_2 H_3} e_1 & \frac{1}{H_1 H_3} e_2 & \frac{1}{H_1 H_2} e_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ a_1 H_1 & a_2 H_2 & a_3 H_3 \end{vmatrix}.$$

В частности, в цилиндрических координатах ($q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$):

$$\text{rot } a = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} e_\rho & e_\varphi & \frac{1}{\rho} e_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & \rho a_2 & a_3 \end{vmatrix}; \quad (4)$$

в сферических координатах ($q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$):

$$\text{rot } a = \begin{vmatrix} \frac{1}{r^2 \sin \theta} e_r & \frac{1}{r \sin \theta} e_\theta & \frac{1}{r} e_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ a_1 & r a_2 & r \sin \theta \cdot a_3 \end{vmatrix}. \quad (4')$$

Пример 4. Вычислить ротор векторного поля, заданного в цилиндрических координатах

$$a = \sin \varphi \cdot e_\rho + \frac{\cos \varphi}{\rho} e_\varphi - \rho z e_z.$$

Решение. Воспользовавшись формулой (4), будем иметь

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} e_\rho & e_\varphi & \frac{1}{\rho} e_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sin \varphi & \cos \varphi & -\rho z \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho} e_\rho (0 - 0) - e_\varphi (-z - 0) + \\ + \frac{1}{\rho} e_z (0 - \cos \varphi) = z e_\varphi - \frac{\cos \varphi}{\rho} e_z.$$

4°. Дивергенция в ортогональных координатах. Пусть задано векторное поле

$$\mathbf{a} = a_1(q_1, q_2, q_3) \mathbf{e}_1 + a_2(q_1, q_2, q_3) \mathbf{e}_2 + a_3(q_1, q_2, q_3) \mathbf{e}_3.$$

Тогда

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial (a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial (a_2 H_1 H_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial (a_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} \right].$$

В частности, в цилиндрических координатах ($q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$):

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho a_1)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_3}{\partial z};$$

В сферических координатах ($q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$):

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 a_1)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta \cdot a_2)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_3}{\partial \varphi}. \quad (5)$$

Пример 5. Показать, что поле вектора

$$\mathbf{a} = \frac{2 \cos \theta}{r^3} \mathbf{e}_r + \frac{\sin \theta}{r^3} \mathbf{e}_\theta$$

соленоидально.

Решение. Пользуясь формулой (5), будем иметь

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{2 \cos \theta}{r^3} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\sin \theta}{r^3} \right) + 0 = \\ = \frac{1}{r^2} \left(-\frac{2 \cos \theta}{r^2} \right) + \frac{1}{r^4 \sin \theta} 2 \sin \theta \cos \theta = 0$$

всюду, где $r \neq 0$. Это и означает, что поле вектора \mathbf{a} соленоидально всюду, кроме точки $r = 0$.

267. Найти уравнение векторных линий поля, заданного в сферических координатах

$$\mathbf{a} = \frac{2\alpha \cos \theta}{r^3} \mathbf{e}_r + \frac{\alpha \sin \theta}{r^3} \mathbf{e}_\theta, \quad \alpha = \text{const.}$$

Найти градиенты скалярных полей:

а) В цилиндрических координатах

$$268. \quad u = \rho^2 + 2\rho \cos \varphi - e^z \sin \varphi.$$

$$269. \quad u = \rho \cos \varphi + z \sin^2 \varphi - 3\rho.$$

б) В сферических координатах

$$270. \quad u = r^2 \cos \theta.$$

$$271. \quad u = 3r^2 \sin \theta + e^r \cos \varphi - r.$$

$$272. \quad u = \mu \frac{\cos \theta}{r^2}, \quad \mu = \text{const.}$$

Вычислить дивергенцию векторов:

а) В цилиндрических координатах

$$273. \quad a = \rho e_\rho + z \sin \varphi e_\varphi + e^\varphi \cos z e_z.$$

$$274. \quad a = \varphi \operatorname{arctg} \rho e_\rho + 2e_\varphi - z^2 e^z e_z.$$

б) В сферических координатах

$$275. \quad a = r^2 e_r - 2 \cos^2 \varphi e_\theta + \frac{\varphi}{r^2 + 1} e_\varphi.$$

Вычислить ротор следующих векторных полей:

$$276. \quad a = (2r + \alpha \cos \varphi) e_r - \alpha \sin \theta e_\theta + r \cos \theta e_\varphi, \quad \alpha = \text{const.}$$

$$277. \quad a = r^2 e_r + 2 \cos \theta e_\theta - \varphi e_\varphi.$$

$$278. \quad a = \cos \varphi e_\rho - \frac{\sin \varphi}{\rho} e_\varphi + \rho^2 e_z.$$

279. Показать, что векторное поле

$$a = \frac{2 \cos \theta}{r^3} e_r + \frac{\sin \theta}{r^3} e_\theta$$

является потенциальным.

280. Показать, что векторное поле

$$a = f(r) e_r,$$

где f — любая дифференцируемая функция, является потенциальным.

5°. Вычисление потока в криволинейных координатах. Пусть S — часть координатной поверхности $q_1 = C$, где $C = \text{const}$, ограниченная координатными линиями

$$q_1 = \alpha_1, \quad q_2 = \alpha_2 \quad (\alpha_1 < \alpha_2);$$

$$q_3 = \beta_1, \quad q_3 = \beta_2 \quad (\beta_1 < \beta_2).$$

Тогда поток вектора

$$a = a_1(q_1, q_2, q_3) e_1 + a_2(q_1, q_2, q_3) e_2 + a_3(q_1, q_2, q_3) e_3$$

через поверхность S в направлении вектора e_1 вычисляется по формуле

$$\Pi = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} a_1(C, q_2, q_3) H_2(C, q_2, q_3) H_3(C, q_2, q_3) dq_3 dq_2. \quad (6)$$

Аналогично вычисляется поток через часть поверхности $q_2 = C$ или через часть поверхности $q_3 = C$, где $C = \text{const}$.

Пример 6. Найти поток векторного поля, заданного в сферических координатах:

$$a = r^2 \theta e_r + r e^{2\theta} e_\theta$$

через внешнюю сторону верхней полусферы S радиуса R с центром в начале координат.

Решение. Полусфера S является часть координатной поверхности $r = \text{const}$, именно $r = R$. На поверхности S имеем

$$q_1 = r = R; \quad q_2 = \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2};$$

$$q_3 = \varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Учитывая, что в сферических координатах

$$H_1 = H_r = 1, \quad H_2 = H_\theta = r,$$

$$H_3 = H_\varphi = r \sin \theta,$$

по формуле (6) найдем

$$\Pi = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} R^4 \theta \sin \theta d\varphi = 2\pi R^4 \int_0^{\pi/2} \theta \sin \theta d\theta = 2\pi R^4.$$

Пример 7. Вычислить поток векторного поля, заданного в цилиндрических координатах:

$$a = \rho e_\rho + z e_\varphi$$

через замкнутую поверхность, образованную плоскостями $z = 0$ и $z = 1$ и цилиндром $\rho = 1$. Поток вычислить непосредственно и с помощью теоремы Гаусса—Остроградского.

Решение. 1) Непосредственное вычисление. Рассмотрим систему прямоугольных координат ρ, φ, z . Цилиндр в этой системе будет отвечать прямоугольный параллелепипед, ограниченный плоскостями $\rho = 0, \rho = 1, \varphi = 0, \varphi = 2\pi, z = 0, z = 1$. Тогда в координатах ρ, φ, z поток надо вычислить через полную поверхность этого параллелепипеда. Для этого вычисляем поток через каждую из граней и берем сумму потоков. На координатных поверхностях $\rho = C = \text{const}$ имеем

$$\Pi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 C^2 dz d\varphi = 2\pi C^2,$$

откуда для поверхности $\rho = 0$ получаем $\Pi_1 = 0$; при $\rho = 1$ имеем $\Pi_2 = 2\pi$.

На координатных поверхностях $\varphi = \text{const}$ имеем в случае $\varphi = 0$

$$\Pi_3 = - \int_0^1 \int_0^1 z \, dz \, d\rho = - \frac{1}{2}$$

(знак минус определяется выбором нормали); в случае $\varphi = 2\pi$

$$\Pi_4 = + \int_0^1 \int_0^1 z \, dz \, d\rho = \frac{1}{2}.$$

На координатных поверхностях $z = \text{const}$ в случаях $z = 0$ и $z = 1$ имеем $\Pi_5 = \Pi_6 = 0$, так как в нашем случае $a_z(\rho, \varphi, z)$ тождественно равно нулю.

Искомый поток

$$\Pi = \sum_{n=1}^6 \Pi_n = 2\pi.$$

2) Вычисление по теореме Гаусса—Остроградского

$$\Pi = \int \int \int_V \text{div } \mathbf{a} \, dv.$$

По формуле для дивергенции вектора \mathbf{a} в цилиндрических координатах

$$\text{div } \mathbf{a} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho a_1) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_3}{\partial z}$$

в нашем случае получим

$$\text{div } \mathbf{a} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 2.$$

Поэтому искомый поток

$$\Pi = \int \int \int_V 2 \, dv = 2\pi.$$

Вычислить поток векторного поля, заданного в цилиндрических координатах, через данную поверхность S непосредственно и с помощью теоремы Гаусса—Остроградского.

$$281. \mathbf{a} = \rho e_\rho - \cos \varphi e_\varphi + z e_z,$$

S — замкнутая поверхность, образованная цилиндром $\rho = 2$ и плоскостями $z = 0$ и $z = 2$.

$$282. \mathbf{a} = \rho e_\rho + \rho \varphi e_\varphi - 2z e_z,$$

S — замкнутая поверхность, образованная цилиндром $\rho = 1$, полуплоскостями $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$ и плоскостями $z = -1$, $z = 1$.

283. Найти поток векторного поля, заданного в сферических координатах:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r$$

через замкнутую поверхность, окружающую начало координат.

284. Найти поток вектора, заданного в сферических координатах:

$$\mathbf{a} = r\mathbf{e}_r + r \sin \theta \mathbf{e}_\theta - 3r\varphi \sin \theta \mathbf{e}_\varphi$$

через замкнутую поверхность S , ограниченную верхней полусферой радиуса R и плоскостью $\theta = \frac{\pi}{2}$.

285. Найти поток вектора, заданного в сферических координатах:

$$\mathbf{a} = r^2\mathbf{e}_r + R^2 \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi$$

через сферу $r = R$.

286. Найти поток вектора, заданного в сферических координатах:

$$\mathbf{a} = r\mathbf{e}_r$$

через замкнутую поверхность S , ограниченную верхней полусферой радиуса R и плоскостью $\theta = \frac{\pi}{2}$, непосредственно и с помощью теоремы Гаусса — Остроградского.

287. Найти поток вектора, заданного в сферических координатах:

$$\mathbf{a} = r^2\mathbf{e}_r + R^2 r \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi$$

через замкнутую поверхность, ограниченную координатными поверхностями $r = R$, $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, непосредственно и с помощью теоремы Гаусса — Остроградского.

6°. Нахождение потенциала в криволинейных координатах. Пусть в криволинейных координатах q_1, q_2, q_3 задано векторное поле

$$\mathbf{a}(M) = a_1(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_1 + a_2(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_2 + a_3(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_3,$$

которое является потенциальным в некоторой области Ω изменения переменных q_1, q_2, q_3 , т. е. $\text{rot } \mathbf{a} = 0$ в Ω .

Для нахождения потенциала $u = u(q_1, q_2, q_3)$ этого поля равенство $\mathbf{a}(M) = \text{grad } u(M)$ записывается в виде

$$a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \mathbf{e}_3.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial q_1} = a_1 H_1, \quad \frac{\partial u}{\partial q_2} = a_2 H_2, \quad \frac{\partial u}{\partial q_3} = a_3 H_3. \quad (7)$$

Это есть система дифференциальных уравнений с частными производными, интегрируя которую найдем искомый потенциал $u = u(q_1, q_2, q_3) + C$, где C — произвольная постоянная.

Система дифференциальных уравнений (7) решается так же, как при нахождении потенциала в декартовых координатах.

Система дифференциальных уравнений (7) имеет вид:

1) в цилиндрических координатах ($q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$)

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = a_\rho, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \rho a_\varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = a_z; \quad (7')$$

2) в сферических координатах ($q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$)

$$\frac{\partial u}{\partial r} = a_r, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = r a_\theta, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = r \sin \theta \cdot a_\varphi. \quad (7'')$$

Пример 8. Найти потенциал векторного поля, заданного в цилиндрических координатах:

$$\mathbf{a} = \left(\frac{\operatorname{arctg} z}{\rho} + \cos \varphi \right) \mathbf{e}_\rho - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi + \frac{\ln \rho}{1+z^2} \mathbf{e}_z.$$

Решение. По формуле (4) находим

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\rho & \mathbf{e}_\varphi & \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\operatorname{arctg} z}{\rho} + \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & \frac{\ln \rho}{1+z^2} \end{vmatrix} = 0 \quad (\rho > 0),$$

т. е. данное поле потенциально. Искомый потенциал $u = u(\rho, \varphi, z)$ является решением следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \rho} &= \frac{\operatorname{arctg} z}{\rho} + \cos \varphi, \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} &= -\sin \varphi \cdot \rho, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\ln \rho}{1+z^2}. \end{aligned} \right\}$$

Из первого уравнения интегрированием по ρ находим, что

$$u = \ln \rho \cdot \operatorname{arctg} z + \rho \cos \varphi + C(\varphi, z). \quad (8)$$

Дифференцируя (8) по φ , получим

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\rho \sin \varphi + \frac{\partial C}{\partial \varphi},$$

и так как $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\rho \sin \varphi$, то $\frac{\partial C}{\partial \varphi} \equiv 0$, т. е. $C = C_1(z)$. Таким образом,

$$u = \ln \rho \cdot \operatorname{arctg} z + \rho \cos \varphi + C_1(z).$$

Отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\ln \rho}{1+z^2} + C_1'(z).$$

В силу третьего уравнения системы имеем

$$\frac{\ln \rho}{1+z^2} = \frac{\ln \rho}{1+z^2} + C_1'(z),$$

т. е. $C_1'(z) \equiv 0$, откуда $C_1(z) \equiv C = \text{const}$.

Итак, потенциал данного поля

$$u(\rho, \varphi, z) = \ln \rho \cdot \operatorname{arctg} z + \rho \cos \varphi + C.$$

В следующих задачах убедиться в том, что векторные поля, заданные в цилиндрических координатах, являются потенциальными, и найти их потенциалы.

$$288. \mathbf{a} = e_\rho + \frac{1}{\rho} e_\varphi + e_z.$$

$$289. \mathbf{a} = \rho e_\rho + \frac{\varphi}{\rho} e_\varphi + z e_z.$$

$$290. \mathbf{a} = \varphi z e_\rho + z e_\varphi + \rho \varphi e_z.$$

$$291. \mathbf{a} = e^\rho \sin \varphi e_\rho + \frac{1}{\rho} e^\rho \cos \varphi e_\varphi + 2z e_z.$$

$$292. \mathbf{a} = \varphi \cos z e_\rho + \cos z e_\varphi - \rho \varphi \sin z e_z.$$

Пример 9. Найти потенциал векторного поля, заданного в сферических координатах:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{r} e^{\theta\varphi} e_r + \frac{\theta \ln r}{r \sin \theta} e^{\theta\varphi} e_\theta + \frac{\ln r}{r} \varphi e^{\theta\varphi} e_\varphi.$$

Решение. По формуле (4') получаем, что

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} e_r & r e_\theta & r \sin \theta \cdot e_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{r} e^{\theta\varphi} & \varphi \ln r \cdot e^{\theta\varphi} & \theta \ln r \cdot e^{\theta\varphi} \end{vmatrix} = 0.$$

Данное поле потенциально в области, где $r > 0$, $\theta \neq n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \dots$).

Система дифференциальных уравнений (7) для нахождения потенциала $u = u(r, \theta, \varphi)$ имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{r} e^{\theta\varphi}, \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} &= \varphi e^{\theta\varphi} \ln r, \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} &= \theta \cdot e^{\theta\varphi} \ln r. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Интегрируя первое уравнение системы (9), получим

$$u = e^{\theta\varphi} \ln r + C(\varphi, \theta) \quad (10)$$

Дифференцируя (10) по θ и учитывая второе уравнение системы, будем иметь

$$\varphi e^{\theta\varphi} \ln r = \varphi e^{\theta\varphi} \ln r + \frac{\partial C}{\partial \theta},$$

т. е. $\frac{\partial C}{\partial \theta} \equiv 0$, откуда $C(\varphi, \theta) \equiv C_1(\varphi)$, и значит,

$$u = e^{\theta\varphi} \ln r + C_1(\varphi). \quad (11)$$

Дифференцируя (11) по φ и принимая во внимание третье уравнение системы (9), найдем

$$\theta e^{\theta\varphi} \ln r = \theta e^{\theta\varphi} \ln r + C'_1(\varphi)$$

или $C'_1(\varphi) \equiv 0$, откуда $C_1(\varphi) \equiv C = \text{const}$. Искомый потенциал равен

$$u(r, \theta, \varphi) = e^{\theta\varphi} \ln r + C.$$

Установить потенциальность следующих векторных полей, заданных в сферических координатах, и найти их потенциалы.

293. $\mathbf{a} = \theta \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\theta.$

294. $\mathbf{a} = 2r \mathbf{e}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta.$

295. $\mathbf{a} = \frac{1}{2} \varphi^2 \cdot \mathbf{e}_r + \frac{\varphi}{\sin \theta} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\theta}{r} \mathbf{e}_\theta.$

296. $\mathbf{a} = \cos \varphi \sin \theta \cdot \mathbf{e}_r + \cos \varphi \cos \theta \cdot \mathbf{e}_\theta - \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi.$

297. $\mathbf{a} = e^r \sin \theta \cdot \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} e^r \cos \theta \cdot \mathbf{e}_\theta + \frac{2\varphi}{(1+\varphi^2) r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi.$

7°. Вычисление линейного интеграла и циркуляции векторного поля в криволинейных координатах. Пусть векторное поле

$$\mathbf{a}(M) = a_1(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_1 + a_2(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_2 + a_3(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_3$$

определено и непрерывно в области Ω изменения ортогональных криволинейных координат q_1, q_2, q_3 .

Дифференциал $d\mathbf{r}$ радиуса-вектора \mathbf{r} любой точки $M(q_1, q_2, q_3) \in \Omega$, как известно, равен (см. § 23, (8))

$$d\mathbf{r} = H_1 dq_1 \mathbf{e}_1 + H_2 dq_2 \mathbf{e}_2 + H_3 dq_3 \mathbf{e}_3.$$

Поэтому линейный интеграл вектора $\mathbf{a}(M)$ по ориентированной гладкой или кусочно гладкой кривой $L \subset \Omega$ будет равен

$$\int_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_L a_1 H_1 dq_1 + a_2 H_2 dq_2 + a_3 H_3 dq_3. \quad (12)$$

В частности, для цилиндрических координат $q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$ будем иметь

$$\mathbf{a} = a_\rho(\rho, \varphi, z)\mathbf{e}_\rho + a_\varphi(\rho, \varphi, z)\mathbf{e}_\varphi + a_z(\rho, \varphi, z)\mathbf{e}_z,$$

$$d\mathbf{r} = d\rho \mathbf{e}_\rho + \rho d\varphi \mathbf{e}_\varphi + dz \mathbf{e}_z,$$

поэтому

$$\int_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_L a_\rho d\rho + a_\varphi \rho d\varphi + a_z dz; \quad (13)$$

для сферических координат $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$ будем иметь

$$\mathbf{a} = a_r(r, \theta, \varphi)\mathbf{e}_r + a_\theta(r, \theta, \varphi)\mathbf{e}_\theta + a_\varphi(r, \theta, \varphi)\mathbf{e}_\varphi,$$

$$d\mathbf{r} = dr \cdot \mathbf{e}_r + r d\theta \cdot \mathbf{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi,$$

и следовательно,

$$\int_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_L a_r dr + r a_\theta d\theta + r a_\varphi \sin \theta d\varphi. \quad (14)$$

Циркуляция C векторного поля $\mathbf{a}(M)$ в криволинейных координатах q_1, q_2, q_3 вычисляется в общем случае по формуле (12), а в случае цилиндрических или сферических координат она вычисляется по формуле (13) или (14) соответственно.

Пример 10. Вычислить линейный интеграл в векторном поле, заданном в цилиндрических координатах

$$\mathbf{a} = 4\rho \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_\varphi + (\rho + \varphi) \cdot \mathbf{e}_z,$$

вдоль прямой

$$L : \begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{4} \\ z = 0 \end{cases}$$

от точки $O\left(0, \frac{\pi}{4}, 0\right)$ до точки $A\left(1, \frac{\pi}{4}, 0\right)$.

Решение. В данном примере

$$a_\rho = 4\rho \sin \varphi, \quad a_\varphi = z e^\rho, \quad a_z = \rho + \varphi.$$

По формуле (13) искомый линейный интеграл

$$\int_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_L 4\rho \sin \varphi d\rho + \rho z e^\rho d\varphi + (\rho + \varphi) dz.$$

На прямой L имеем:

$$\varphi = \frac{\pi}{4}, \quad d\varphi = 0; \quad z = 0, \quad dz = 0; \quad 0 \leq \rho \leq 1.$$

Поэтому

$$\int_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_L 2\sqrt{2}\rho d\rho = \sqrt{2} \int_0^1 2\rho d\rho = \sqrt{2}.$$

Пример 11. Вычислить линейный интеграл в векторном поле, заданном в сферических координатах

$$\mathbf{a} = e^r \sin \theta \cdot \mathbf{e}_r + 3\theta^2 \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_\theta + r\varphi\theta \cdot \mathbf{e}_\varphi.$$

вдоль линии

$$L: \begin{cases} r = 1, \\ \varphi = \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

в направлении от точки $M_0\left(1, 0, \frac{\pi}{2}\right)$ до точки $M_1\left(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

(рис. 41).

Решение. Линия L есть дуга окружности с центром в начале координат и радиусом $R = 1$, расположенная в плоскости yOz . Координаты данного вектора равны

$$a_r = e^r \sin \theta, \quad a_\theta = 3\theta^2 \sin \varphi, \quad a_\varphi = r\varphi\theta.$$

В силу формулы (14) линейный интеграл имеет вид

$$\int_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_L e^r \sin \theta dr + 3\theta^2 r \sin \varphi d\theta + r^2 \varphi \theta \sin \theta d\varphi.$$

Учитывая, что на линии L выполняются условия:

$$r = 1, \quad dr = 0; \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad d\varphi = 0, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

получим

$$\int_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_L 3\theta^2 d\theta = \int_0^{\pi/2} 3\theta^2 d\theta = \frac{\pi^3}{8}.$$

Пример 12. Вычислить циркуляцию векторного поля, заданного в цилиндрических координатах

$$\mathbf{a} = \rho \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_\rho + \rho z \cdot \mathbf{e}_\varphi + \rho^3 \cdot \mathbf{e}_z,$$

по кривой

$$L: \begin{cases} \rho = \sin \varphi, \\ z = 0, \end{cases} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi,$$

непосредственно и по теореме Стокса.

Решение. Координаты данного вектора

$$a_\rho = \rho \sin \varphi, \quad a_\varphi = \rho z, \quad a_z = \rho^3.$$

Контур L представляет собой замкнутую кривую, расположенную в плоскости $z = 0$ (рис. 42).

1) Непосредственное вычисление циркуляции.

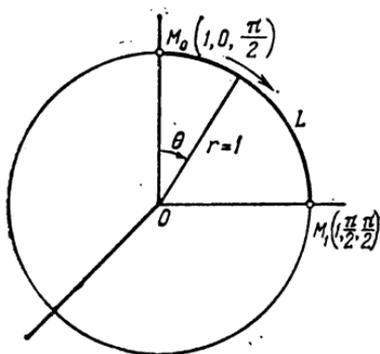


Рис. 41.

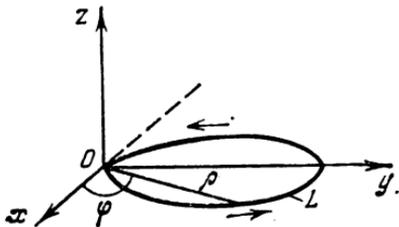


Рис. 42.

Подставляя координаты данного вектора в формулу (13), получим

$$\mathcal{C} = \oint_L \rho \sin \varphi d\rho + \rho^2 z d\varphi + \rho^3 dz.$$

На кривой L имеем:

$$z = 0, \quad dz = 0; \quad \rho = \sin \varphi, \quad d\rho = \cos \varphi d\varphi, \quad 0 \leq \varphi < \pi.$$

Поэтому искомая циркуляция будет равна

$$\mathcal{C} = \oint_L \rho \sin \varphi d\rho = \int_0^\pi \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi = 0.$$

2) Вычисление циркуляции с помощью теоремы Стокса.
По теореме Стокса искомая циркуляция равна

$$\mathcal{C} = \oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_S (\operatorname{rot} \mathbf{a}, \mathbf{n}^0) dS,$$

где S — поверхность, натянутая на контур L .

Находим ротор данного поля

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \rho \cdot \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \rho \sin \varphi & \rho^2 z & \rho^3 \end{vmatrix} = -\rho \mathbf{e}_\rho - 3\rho^2 \mathbf{e}_\varphi + (2z - \cos \varphi) \mathbf{e}_z.$$

В точках, где $\rho = 0$, значение $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ доопределяем по непрерывности, полагая

$$\operatorname{rot} \mathbf{a}(0, \varphi, z) = (2z - \cos \varphi) \mathbf{e}_z.$$

Таким образом, $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ определен во всем трехмерном пространстве. Так как кривая L лежит в плоскости $z = 0$, то в качестве поверхности S , натянутой на эту кривую, возьмем часть плоскости $z = 0$, ограниченной кривой L . Тогда за орт нормали \mathbf{n}^0 к поверхности S можно взять орт \mathbf{e}_z , т.е. $\mathbf{n}^0 = \mathbf{e}_z$. Находим скалярное произведение:

$$(\operatorname{rot} \mathbf{a}, \mathbf{n}^0) = (-\rho \mathbf{e}_\rho - 3\rho^2 \mathbf{e}_\varphi + (2z - \cos \varphi) \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_z) = 2z - \cos \varphi,$$

так как в силу ортонормированности базиса $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ имеем

$$(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_z) = (\mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z) = 0, \quad (\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_z) = 1.$$

Искомая циркуляция равна

$$\mathcal{C} = \int_S \int (2z - \cos \varphi) dS.$$

Учитывая, что $z = 0$ на S и элемент площади dS координатной поверхности $z = 0$ равен

$$dS = \rho d\rho d\varphi,$$

окончательно получим

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= - \int_S \int \cos \varphi dS = - \int \int \cos \varphi \rho d\rho d\varphi = \\ &= - \int_0^\pi \cos \varphi d\varphi \int_0^{\sin \varphi} \rho d\rho = - \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi = 0. \end{aligned}$$

Пример 13. Вычислить циркуляцию вектора, заданного в сферических координатах

$$\mathbf{a} = r \mathbf{e}_r + (R + r) \sin \theta \cdot \mathbf{e}_\varphi,$$

по окружности

$$L: \begin{cases} r = R, \\ \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

в направлении возрастания угла φ непосредственно и по теореме Стокса.

Решение. В данном примере

$$a_r = r, \quad a_\theta = 0, \quad a_\varphi = (R + r) \sin \theta.$$

1) Непосредственное вычисление циркуляции.

По формуле (14) искомая циркуляция равна

$$\mathcal{C} = \oint_L r dr + (R + r) \sin \theta r \sin \theta d\varphi = \oint_L r dr + r(R + r) \sin^2 \theta d\varphi.$$

На данной окружности L , центр которой находится в начале координат, имеем:

$$r = R, \quad dr = 0; \quad \theta = \frac{\pi}{2}; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

и, следовательно,

$$\mathcal{C} = 2R^2 \oint_L d\varphi = 2R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi R^2.$$

2) Вычисление циркуляции по теореме Стокса.

Искомая циркуляция по теореме Стокса равна

$$\mathcal{C} = \oint_L (a, dr) = \int_S (\text{rot } a, n^0) dS,$$

где S — поверхность, натянутая на окружность L .

Находим ротор данного вектора

$$\begin{aligned} \text{rot } a &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} e_r & r \cdot e_\theta & r \sin \theta \cdot e_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ r & 0 & (Rr + r^2) \sin^2 \theta \end{vmatrix} = \\ &= \frac{2}{r} (R + r) \cos \theta \cdot e_r - \frac{1}{r} (R + 2r) \sin \theta \cdot e_\theta. \end{aligned}$$

В качестве поверхности S , натянутой на окружность L , возьмем, например, верхнюю полусферу радиуса R : $r = R, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi < 2\pi$. Орт n^0 нормали к внешней стороне полусферы S направлен по вектору e_r , поэтому берем $n^0 = e_r$. Находим скалярное

произведение

$$\begin{aligned}
 (\operatorname{rot} \mathbf{a}, \mathbf{n}^0) &= \left(\frac{2(R+r)}{r} \cos \theta \cdot \mathbf{e}_r - \frac{R+2r}{r} \sin \theta \cdot \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_r \right) = \\
 &= \frac{2(R+r)}{r} \cos \theta,
 \end{aligned}$$

так как $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_r) = 1$, $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta) = 0$.

Учитывая, что $r = R$ на поверхности S , для искомого потока получим выражение

$$\Pi = \iint_S \frac{2(R+r)}{r} \cos \theta \, dS = 4 \iint_S \cos \theta \, dS.$$

В сферических координатах элемент площади dS координатной поверхности $r = R$, т. е. полусферы S , будет равен

$$dS = R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

и, следовательно,

$$\Pi = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \cos \theta R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = 4R^2 \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi R^2.$$

В силу теоремы Стокса получаем $\Pi = 4\pi R^2$.

В качестве поверхности S , натянутой на окружность L , можно было взять нижнюю полусферу, орт нормали которой $\mathbf{n}^0 = -\mathbf{e}_r$; результат будет тот же: $\Pi = 4\pi R^2$.

Заметим, что за поверхность S , натянутую на окружность L , не следует брать круг, ограниченный этой окружностью, так как в этом круге имеется точка $r = 0$ (центр круга), в которой ротор данного вектора имеет разрыв.

Вычислить линейный интеграл по данным линиям L в векторных полях, заданных в цилиндрических координатах.

298. $\mathbf{a} = z\mathbf{e}_\rho + \rho\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi + \cos \varphi \cdot \mathbf{e}_z,$

L — отрезок прямой: $\{\rho = a, \varphi = 0, 0 \leq z \leq 1\}$.

299. $\mathbf{a} = \rho\mathbf{e}_\rho + 2\rho\varphi\mathbf{e}_\varphi + z\mathbf{e}_z,$

L — полуокружность: $\{\rho = 1, z = 0, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$.

300. $\mathbf{a} = e^\rho \cos \varphi \cdot \mathbf{e}_\rho + \rho \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi + \rho\mathbf{e}_z,$

L — виток винтовой линии: $\{\rho = R, z = \varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$.

Вычислить линейный интеграл по данной линии L в векторных полях, заданных в сферических координатах.

301. $\mathbf{a} = e^r \cos \theta \cdot \mathbf{e}_r + 2\theta \cos \varphi \cdot \mathbf{e}_\theta + \varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi$,
 L — полуокружность: $\{r = 1, \varphi = 0, 0 \leq \theta \leq \pi\}$.

302. $\mathbf{a} = 4r^3 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \mathbf{e}_r + \theta \cdot \varphi \cdot \mathbf{e}_\theta + \cos^2 \varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi$,

L — отрезок прямой: $\left\{ \varphi = \frac{\pi}{2}, \theta = \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq 1 \right\}$.

303. $\mathbf{a} = \sin^3 \theta \cdot \mathbf{e}_r + \sin \theta \cdot \mathbf{e}_\theta + r\varphi\theta \cdot \mathbf{e}_\varphi$,

L — отрезок прямой: $\left\{ \varphi = \frac{\pi}{2}, r = \frac{1}{\sin \theta}, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$.

Вычислить циркуляцию векторных полей, заданных в цилиндрических координатах, по данным контурам непосредственно и с помощью теоремы Стокса.

304. $\mathbf{a} = z\mathbf{e}_\rho + \rho z\mathbf{e}_\varphi + \rho\mathbf{e}_z$,

L — окружность: $\{\rho = 1, z = 0\}$.

305. $\mathbf{a} = \rho \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_\rho - \rho^2 z\mathbf{e}_\varphi + \rho^2 \mathbf{e}_z$,

L — окружность: $\{\rho = R, z = R\}$.

306. $\mathbf{a} = z \cos \varphi \cdot \mathbf{e}_\rho + \rho\mathbf{e}_\varphi + \varphi^2 \mathbf{e}_z$,

L — петля: $\{\rho = \sin \varphi, z = 1\}$.

Вычислить циркуляцию векторов, заданных в сферических координатах, по данным контурам L непосредственно и с помощью теоремы Стокса.

307. $\mathbf{a} = r\theta\mathbf{e}_r + r \sin \theta \cdot \mathbf{e}_\varphi$,

L — окружность: $\left\{ r = 1, \theta = \frac{\pi}{4} \right\}$.

308. $\mathbf{a} = r \sin \theta \cdot \mathbf{e}_r + \theta e^\theta \mathbf{e}_\theta$,

L — петля: $\left\{ r = \sin \varphi, \theta = \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \pi \right\}$.

309. $\mathbf{a} = r\varphi\theta \cdot \mathbf{e}_\varphi$,

L — контур, ограниченный полуокружностью $\{r = R, \varphi = \frac{\pi}{4}, 0 \leq \theta \leq \pi\}$ и ее вертикальным диаметром: $\left\{ \varphi = \frac{\pi}{4}, \theta = 0 \right\}$.

§ 25. Оператор Лапласа в ортогональных координатах

Если $u = u(q_1, q_2, q_3)$ — скалярная функция, то

$$\operatorname{grad} u = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \mathbf{e}_3, \quad (1)$$

Если

$$\mathbf{a} = a_1(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_1 + a_2(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_2 + a_3(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_3,$$

то

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (a_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (a_2 H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (a_3 H_1 H_2) \right]. \quad (2)$$

Используя формулы (1) и (2), для оператора Лапласа Δu получим следующее выражение:

$$\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) \right].$$

В цилиндрических координатах

$$\Delta u = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] = \\ = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

В сферических координатах

$$\Delta u = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right] = \\ = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Пример. Найти все решения уравнения Лапласа $\Delta u = 0$, зависящие только от расстояния r .

Решение. Записывая уравнение Лапласа в сферических координатах и учитывая сферическую симметрию решения (оно не должно зависеть от θ и φ), будем иметь

$$\Delta u \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0 \quad (u = u(r)).$$

Отсюда

$$r^2 \frac{\partial u}{\partial r} = C_1,$$

так что

$$u = \frac{C_1}{r} + C_2,$$

где C_1, C_2 — постоянные.

310. Дано скалярное поле $u = u(M)$ в цилиндрических координатах

$$u(\rho, \varphi, z) = \rho^2 \varphi + z^2 \varphi^3 - \rho \varphi z.$$

Найти Δu .

311. Дано скалярное поле $u = u(M)$ в сферических координатах

$$u(r, \theta, \varphi) = r^2 \varphi \theta + r^3 \varphi^2 + \varphi + \theta^2.$$

Найти Δu .

312. Являются ли гармоническими следующие функции:

1) $u = \rho^2 \cos 2\varphi,$

2) $u = r \cos 2\theta.$

313. Найти всевозможные гармонические функции

1) зависящие только от $\theta,$

2) зависящие только от φ

(в сферической системе координат).

314. Найти все решения уравнения Пуассона

$$\Delta u = r^{n-1}$$

в сферической системе координат, если $u = u(r).$

ОТВЕТЫ

$$1. \text{ а) } \frac{x-2}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}; \quad \text{ б) } x + y = 1; \quad \text{ в) } \left. \begin{aligned} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 1; \end{aligned} \right\};$$

$$\text{ г) } y = \frac{x^2}{3}, \quad z = \frac{x^3}{9}; \quad \text{ д) } x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x - y = 0.$$

$$7. \mathbf{i} + \mathbf{k}. \quad 8. \mathbf{i} + \mathbf{k}. \quad 9. -\mathbf{j} + \frac{1}{2\pi} \mathbf{k}.$$

$$10. -\mathbf{i} + \mathbf{k}. \quad 11. e\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}. \quad 12. \text{Нет}. \quad 14. \text{Нет}.$$

$$17. \text{ а) } 2 \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \mathbf{r} \right); \quad \text{ б) } \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|^2 + \left(\mathbf{r}, \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right); \quad \text{ в) } \left[\mathbf{r}, \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right].$$

21. Окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных к вектору \mathbf{a} .

22. Годограф скорости — винтовая линия: $x = a \cos t$, $y = -a \sin t$, $z = 2bt$; годограф ускорения — окружность: $x = -a \sin t$, $y = a \cos t$, $z = 2b$.

$$26. \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d\mathbf{a}}{du} \frac{du}{dt}; \quad \frac{d^2\mathbf{a}}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{a}}{du^2} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \frac{d\mathbf{a}}{du} \frac{d^2u}{dt^2}.$$

$$28. (t-1)e^t \mathbf{i} + \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \mathbf{j} - \arctg t \cdot \mathbf{k} + \mathbf{c}.$$

$$29. \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \cdot \mathbf{i} + \frac{1}{2} e^{t^2} \mathbf{j} + \sin t \cdot \mathbf{k} + \mathbf{c}.$$

$$30. e^{\sin t} \mathbf{i} - \frac{1}{2} \sin t^2 \cdot \mathbf{j} + t\mathbf{k} + \mathbf{c}.$$

$$31. \frac{t^3}{6} \mathbf{i} + (t \cos t - \sin t) \mathbf{j} + \frac{2^t}{\ln 2} \mathbf{k} + \mathbf{c}.$$

$$32. \frac{2}{3} \mathbf{j} + \pi \mathbf{k}. \quad 33. \left(1 - e^{-\frac{1}{2}} \right) \mathbf{i} + \left(e^{\frac{1}{2}} - 1 \right) \mathbf{j} + (e-1) \mathbf{k}.$$

$$34. -\ln 2 \cdot \mathbf{j} + \mathbf{k}. \quad 35. 2\pi^3 \mathbf{i} + \pi \mathbf{j} + \pi^2 \mathbf{k}. \quad 36. R = \frac{\sqrt{2}}{|\sin 2t|}.$$

$$37. R = \frac{2}{3} t(1+9t^2)^{3/2}. \quad 38. R = 6. \quad 39. R = \frac{1}{2} a\pi.$$

$$40. R = 2a \operatorname{ch}^2 t. \quad 41. x + y = 0. \quad 42. x - y - \sqrt{2} z = 0.$$

$$43. \frac{1}{T} = \frac{1}{3}. \quad 44. \frac{1}{T} = \frac{1}{2a \operatorname{ch}^2 t}.$$

$$45. \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = C - \text{семейство трехосных эллипсоидов.}$$

$$46. x^2 + y^2 - z = C - \text{семейство параболоидов.}$$

$$47. x^2 + y^2 = Cz - \text{семейство параболоидов.}$$

$$48. 2y^2 + 9z^2 = C - \text{семейство эллиптических цилиндров.}$$

$$49. x + 2y - z = C - \text{семейство параллельных плоскостей.}$$

50. $a_1x + a_2y + a_3z = C(b_1x + b_2y + b_3z)$ — пучок плоскостей, проходящих через прямую

$$\left. \begin{aligned} a_1x + a_2y + a_3z &= 0, \\ b_1x + b_2y + b_3z &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Здесь a_1, a_2, a_3 — координаты вектора \mathbf{a} ; b_1, b_2, b_3 — координаты вектора \mathbf{b} .

$$51. x^2 + y^2 + z^2 = C^2 - \text{семейство концентрических сфер.}$$

$$52. (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{r}) = C \text{ или } \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = C - \text{семейство парал-}$$

лельных плоскостей.

$$53. 2x - y = C - \text{семейство параллельных прямых.}$$

$$54. y = Cx, \quad C > 0 - \text{пучок прямых.}$$

$$55. y^2 = Cx - \text{семейство парабол.}$$

$$56. x^2 - y^2 = C - \text{семейство гипербол.}$$

$$57. y = -x \ln C - C, \quad C > 0 - \text{семейство прямых.}$$

$$58. \frac{\sqrt{15}}{5}. \quad 59. \frac{3\sqrt{21}}{7}. \quad 60. \frac{\sqrt{3}}{3} e^3. \quad 61. -\frac{2}{5}. \quad 62. \frac{3}{5} \sqrt{2}.$$

$$63. \frac{1}{4}. \quad 64. 0. \quad 65. \frac{2\sqrt{3}}{3} (\sqrt{2} + 3). \quad 66. 0. \quad 67. -2.$$

$$68. \frac{\pi a^2}{\sqrt{a^2 + R^2}}. \quad 69. \frac{2}{3} (i + j - k).$$

$$70. k. \quad 71. \varphi = \pi. \quad 72. \varphi = 0.$$

$$73. \varphi = 0. \quad 74. y = -x + 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$75. x^2 + y^2 + z^2 = 1. \quad 78. \frac{r}{r^2}. \quad 79. a. \quad 80. \mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{r}) + \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{r}).$$

$$81. 2|a|^2 r - 2(\mathbf{a}, \mathbf{r}) \mathbf{a}. \quad 86. \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{2u}{r}.$$

$$87. \frac{\partial u}{\partial l} = -\frac{\cos(\widehat{r, l})}{r^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial l} = 0 \text{ при } r \perp l.$$

$$88. \frac{\partial u}{\partial l} = \frac{1}{r^2}. \quad 89. \frac{\partial u}{\partial l} = 1.$$

90. $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{(\text{grad } u, \text{grad } v)}{|\text{grad } v|}$; $\frac{\partial u}{\partial l} = 0$, если $\text{grad } u \perp \text{grad } v$.
91. а) 1 в направлении оси Oy ;
б) 3 в направлении вектора $\mathbf{a} = -i - 2j + 2k$.
92. $x = \frac{y}{C_1} = \frac{z}{C_2}$. 93. $\frac{x}{a_1} = \frac{y - C_1}{a_2} = \frac{z - C_2}{a_3}$.
94. $x^2 + y^2 + z^2 = C_1^2$,
 $x + y + z = C_2$. } 95. $\frac{1}{x} - \frac{1}{z} = 1$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{2y^2} = 4$.
96. $x^2 = C_1 y$, $z = C_2$. 97. $z = C_1 x$, $y = C_2$. 98. $xy = C_1$, $z = C_2$.
99. $x = C_1$, $2y^2 - z^2 = C_2$. 100. $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = C_1$, $z = C_2$.
101. $y^2 + z^2 = C_1$, $x = C_2$. 102. $x = C_1 y$, $x = C_2 z$.
103.
$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{b_{01}} &= \frac{y}{b_{02}} + C_1, \\ \frac{x}{b_{01}} &= \frac{z}{b_{03}} + C_2. \end{aligned} \right\}$$
104. $\Pi = -3$. 105. $\Pi = \pi R^2 \gamma$. 106. $\Pi = \pi R^2 h$.
107. $\Pi = 4\pi R^3 f(R)$. 108. $\Pi = \frac{a^3}{2}$. 109. $\Pi = \frac{\pi}{6}$.
110. $\Pi = \frac{1}{2} \pi R^2 h$. 111. $\Pi = \pi h^3$.
112. $\Pi = \frac{81}{8} \pi$. 113. $\Pi = \frac{\pi}{4}$.
114. $\Pi = 0$. 115. $\Pi = \frac{\pi}{2}$. 116. $\Pi = \frac{1}{4}$. 117. $\Pi = 4\pi R^3$.
118. $\Pi = -\frac{7}{6}$. 119. $\Pi = 0$. 120. $\Pi = 6\pi R$. 121. $\Pi = 0$.
122. $\Pi = \pi$. 123. $\Pi = 0$. 124. $\Pi = \frac{2}{3} \pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$. 125. $\Pi = \frac{3}{8} R^4$.
126. $\Pi = \sqrt{2}\pi$. 127. $\Pi = 45\pi$. 128. $\Pi = -\frac{256}{3}\pi$. 129. $\Pi = 8\pi$.
130. $\Pi = 0$. 131. $\psi(r) = \frac{C}{r}$. 132. $7r^4$. 133. 0. 134. 0.
135. $\psi(z) = C - z$, $C = \text{const}$. 136. $\Pi = 4\pi R^3$.
137. $\text{div} E = 0$ ($r \neq 0$).
143. 16π . 144. πH^3 . 145. $\frac{32}{3} \pi$. 146. 0. 147. $\frac{\pi}{3}$.
148. 4π . 149. $\frac{19}{3} \pi$. 150. $\frac{32}{3} \pi$. 151. $2R^3$.
152. $\frac{81}{8} \pi$. 153. -1 . 154. $-\pi$.

155. Соленоидальное

156. Несолоноидальное.

157. Соленоидальное.

159. $\varphi(r) = \frac{C}{r^3}$, $r \neq 0$, $C = \text{const.}$ 161. $\frac{r_2^2 - r_1^2}{2}$. 162. $\ln \frac{r_2}{r_1}$. 163. $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right)$. 164. 0.166. $-\frac{4}{3}R^3$. 167. $\frac{41}{6}$. 168. а) $-\frac{14}{15}$, б) $\frac{2}{3}$. 169. 0.170. $\frac{5}{3}$. 171. $3\sqrt{3}$. 172. $\frac{1}{35}$.173. $-\pi a^2$. 174. 1.175. -2π . 176. $-\frac{\pi R^3}{4}$. 177. $\frac{4}{3}$. 179. $-2(zi + xj + yk)$.180. $3(z^2 - x^2)j$. 181. $(x + y)k$. 191. $\omega = \frac{1}{2} \text{rot } v = -\frac{z}{2}j$.193. $f(x, z) = xz + x + z + C$, $C = \text{const.}$ 195. 4π . 196. -4π . 197. $\frac{4}{3}$. 198. -2π . 199. $\frac{128}{3}$.200. 729π . 201. 0. 202. $-\sqrt{2}\pi$.203. $2\omega\pi a^2$. У к а з а н и е. $v = [\omega, r]$.204. $\mu_c = 1$. 205. $\mu_c = 3$. 206. Зависит.207. Не зависит. 208. Зависит. 209. -1 . 210. $\frac{4}{15}$.211. 0. 212. $\frac{2}{3}$. 213. $\frac{\pi}{2}$. 214. $\frac{1}{3}$.216. $\frac{\pi}{2}$. У к а з а н и е. Дополнить путь интегрирования L отрезком OA оси Ox .

217. Нет. 218. Да. 219. Нет. 220. Да. 221. Нет.

222. Нет. 223. Да. 226. $\varphi = x^2yz$. 227. $\varphi = x + xyz$.228. $\varphi = x^2y - y^2 + xz$. 229. $\varphi = \ln|x + y + z|$.230. $\varphi = \text{arctg}(xyz)$. 231. $\varphi = r$. 232. $\varphi = \ln r$.233. $\varphi = \frac{1}{3}r^3$. 234. $\varphi = \alpha x + \beta y + \gamma z + C$, $C = \text{const.}$ 235. $\varphi = xy + yz + zx + C$. 236. $\varphi = xy + e^z + C$.237. $\varphi = e^x \sin y + z + C$. 247. а) Да; б) нет; в) да.249. $u = C_1x + C_2$.250. $u = Ax^2 + Bxy - Ay^2$, A и B — любые.251. $u(x) = \begin{cases} \frac{x^n}{(n-1)n} + C_1x + C_2, & \text{если } n \neq 1, \\ x \ln|x| + C_1x + C_2, & \text{если } n = 1 (x \neq 0), \end{cases}$

$$252. I = \frac{-4}{15} \pi. \quad 253. I = -\frac{\pi}{3}. \quad 254. I = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

$$255. I = 0.$$

$$256. \mathbf{b} = x\mathbf{j} + (y - x)\mathbf{k}. \quad 257. \mathbf{b} = (y^2 - 2xz)\mathbf{k}.$$

$$258. \mathbf{b} = (e^x - xe^y)\mathbf{j}. \quad 259. \mathbf{b} = 3x^2\mathbf{j} + (2y^3 - 6xz)\mathbf{k}.$$

$$260. \mathbf{b} = -x(x + y^2)\mathbf{j} + (x^3 + y^3)\mathbf{k}.$$

$$261. \mathbf{b} = -(xz^2 + yze^{xz})\mathbf{j} - 2xyz\mathbf{k}.$$

$$262. \mathbf{b} = \frac{1}{2} (-z\mathbf{j} + y\mathbf{k}).$$

$$263. \mathbf{b} = -8yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + 7xy\mathbf{k}.$$

$$264. \mathbf{b} = 2xy^2z\mathbf{i} - 3x^2yz\mathbf{j} + x^2y^2\mathbf{k}.$$

$$265. \mathbf{b} = \frac{1}{x} \sin xz \cdot \mathbf{i} - \frac{1}{z} \sin xz \cdot \mathbf{k}.$$

$$266. \mathbf{b} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{x^2 + y^2} z - \mathbf{k}.$$

$$267. \varphi = C_1, \quad r = C_2 \sin^2 \theta.$$

$$268. \operatorname{grad} u = 2(\rho + \cos \varphi) \mathbf{e}_\rho - \left(2 \sin \varphi + \frac{1}{\rho} e^z \cos \varphi\right) \mathbf{e}_\varphi - e^z \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_z.$$

$$269. \operatorname{grad} u = (\cos \varphi - 3^\rho \ln 3) \mathbf{e}_\rho + \left(\frac{z}{\rho} \sin 2\varphi - \sin \varphi\right) \mathbf{e}_\varphi + \sin^2 \varphi \cdot \mathbf{e}_z.$$

$$270. \operatorname{grad} u = 2r \cos \theta \cdot \mathbf{e}_r - r \sin \theta \cdot \mathbf{e}_\theta.$$

$$271. \operatorname{grad} u = (6r \sin \theta + e^r \cos \varphi - 1) \mathbf{e}_r + 3r \cos \theta \cdot \mathbf{e}_\theta - \frac{e^r \sin \varphi}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi.$$

$$272. \operatorname{grad} u = -\mu \left(\frac{2 \cos \theta}{r^3} \mathbf{e}_r + \frac{\sin \theta}{r^3} \mathbf{e}_\theta \right).$$

$$273. \operatorname{div} \mathbf{a} = 2 + \frac{z}{\rho} \cos \varphi - e^\varphi \sin z.$$

$$274. \operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\varphi}{\rho} \operatorname{arctg} \rho + \frac{\varphi}{1 + \rho^2} - (z^2 + 2z) e^z.$$

$$275. \operatorname{div} \mathbf{a} = 4r - \frac{2}{r} \cos^2 \varphi \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{r(r^2 + 1) \sin \theta}.$$

$$276. \operatorname{rot} \mathbf{a} = \frac{\cos 2\theta}{\sin \theta} \mathbf{e}_r - \left(2 \cos \theta + \frac{\alpha \sin \varphi}{r \sin \theta}\right) \mathbf{e}_\theta - \frac{\alpha \sin \theta}{r} \mathbf{e}_\varphi.$$

$$277. \operatorname{rot} \mathbf{a} = -\frac{\varphi}{r} \operatorname{ctg} \theta \cdot \mathbf{e}_r + \frac{\varphi}{r} \mathbf{e}_\theta + \frac{2 \cos \theta}{r} \mathbf{e}_\varphi.$$

$$278. \operatorname{rot} \mathbf{a} = -2\rho \mathbf{e}_\varphi + \frac{\sin \varphi}{\rho} \mathbf{e}_z.$$

281. 24π . 282. $\frac{1}{2}\pi$. 283. 4π . 284. $\frac{2}{3}\pi R^3$. Указание. При непосредственном вычислении потока надо рассматривать потоки через все координатные поверхности $r = 0$, $r = R$, $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$. 285. $4\pi R^4$. 286. $2\pi R^3$.

$$287. \frac{1}{2} \pi R^4 - \frac{R^5}{3}.$$

$$288. u = \rho + \varphi + z + C.$$

$$289. u = \frac{1}{2} (\rho^2 + \varphi^2 + z^2) + C. \quad 290. u = \rho\varphi z + C.$$

$$291. u = e^\rho \sin \varphi + z^2 + C. \quad 292. u = \rho\varphi \cos z + C.$$

$$293. u = r\theta + C. \quad 294. u = r^2 + \varphi + \theta + C.$$

$$295. u = \frac{1}{2} (r\varphi^2 + \theta^2) + C. \quad 296. u = r \cos \varphi \sin \theta + C.$$

$$297. u = e^r \sin \theta + \ln(1 + \varphi^2) + C.$$

$$298. 1. \quad 299. \pi^2. \quad 300. 2\pi R. \quad 301. \pi^3. \quad 302. 1.$$

$$303. \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1.$$

$$304. 0. \quad 305. -2\pi R^4. \quad 306. \pi.$$

$$307. \pi. \quad 308. 0. \quad 309. 0.$$

$$310. \Delta u = 4\varphi - \frac{\varphi z}{\rho} + \frac{6\varphi z^2}{\rho^2} + 2\varphi^3.$$

$$311. \Delta u = 6\varphi\theta + 12r\varphi^2 + \frac{2}{r^2} + \varphi \operatorname{ctg} \theta + \frac{2\theta}{r^2} \operatorname{ctg} \theta + \frac{2r}{\sin^2 \theta}.$$

312. 1) Да; 2) нет.

$$313. 1) u(\theta) = C_1 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right| + C_2. \quad 2) u(\varphi) = C_1 \varphi + C_2.$$

$$314. u(r) = \begin{cases} \frac{r^{n+1}}{(n+1)(n+2)} + \frac{C_1}{r} + C_2, & n \neq -1, -2, \\ \ln r + \frac{C_1}{r} + C_2, & n = -1, \\ -\frac{\ln r}{r} + \frac{C_1}{r} + C_2, & n = -2. \end{cases} \quad (r \neq 0)$$

П Р И Л О Ж Е Н И Е I

ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА В
ОРТОГОНАЛЬНЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

I. Скалярное поле задано в ортогональных криволинейных координатах $u = u(q_1, q_2, q_3)$. Тогда

$$\text{grad } u = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} e_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} e_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} e_3.$$

Оператор Лапласа

$$\Delta u = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) \right].$$

Ч а с т н ы е с л у ч а и. а) Скалярное поле задано в цилиндрических координатах $u = u(\rho, \varphi, z)$. Тогда

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial \rho} e_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} e_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} e_z.$$

Оператор Лапласа

$$\Delta u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

б) Скалярное поле задано в сферических координатах $u = u(r, \theta, \varphi)$. Тогда

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} e_\varphi.$$

Оператор Лапласа

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \sin \theta \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

II. Векторное поле задано в ортогональных криволинейных координатах

$$\mathbf{a} = a_1(q_1, q_2, q_3) e_1 + a_2(q_1, q_2, q_3) e_2 + a_3(q_1, q_2, q_3) e_3.$$

Тогда

$$\text{div } \mathbf{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial (a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial (a_2 H_3 H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial (a_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} \right],$$

$$\text{rot } \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \frac{1}{H_2 H_3} e_1 & \frac{1}{H_1 H_3} e_2 & \frac{1}{H_1 H_2} e_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ a_1 H_1 & a_2 H_2 & a_3 H_3 \end{vmatrix}.$$

Ч а с т н ы е с л у ч а и. а) Векторное поле задано в цилиндрических координатах

$$\mathbf{a} = a_1(\rho, \varphi, z)\mathbf{e}_\rho + a_2(\rho, \varphi, z)\mathbf{e}_\varphi + a_3(\rho, \varphi, z)\mathbf{e}_z.$$

Тогда

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho a_1)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_3}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\rho & \mathbf{e}_\varphi & \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & \rho a_2 & a_3 \end{vmatrix}.$$

б) Векторное поле задано в сферических координатах

$$\mathbf{a} = a_1(r, \theta, \varphi)\mathbf{e}_r + a_2(r, \theta, \varphi)\mathbf{e}_\theta + a_3(r, \theta, \varphi)\mathbf{e}_\varphi.$$

Тогда

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (a_1 r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (a_2 \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_3}{\partial \varphi},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \mathbf{e}_r & \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\theta & \frac{1}{r} \mathbf{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ a_1 & r a_2 & a_3 r \sin \theta \end{vmatrix}.$$

П Р И Л О Ж Е Н И Е II

ЭЛЕМЕНТЫ ПЛОЩАДЕЙ КООРДИНАТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Координаты	Координатные поверхности	Элементы площадей
Общие q_1, q_2, q_3	$q_1 = C = \text{const}$ $q_2 = C = \text{const}$ $q_3 = C = \text{const}$	$dS_1 = H_2(C, q_2, q_3) H_3(C, q_2, q_3) dq_2 dq_3$ $dS_2 = H_1(q_1, C, q_3) H_3(q_1, C, q_3) dq_1 dq_3$ $dS_3 = H_1(q_1, q_2, C) H_2(q_1, q_2, C) dq_1 dq_2$
Цилиндрические $q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$	$\rho = C = \text{const}$ $\varphi = C = \text{const}$ $z = C = \text{const}$	$dS = C d\varphi dz$ $dS = d\rho dz$ $dS = \rho d\rho d\varphi$
Сферические $q_1 = r$ $q_2 = \theta$ $q_3 = \varphi$	$r = C = \text{const}$ $\theta = C = \text{const}$ $\varphi = C = \text{const}$	$dS = C^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ $dS = r \sin C dr d\varphi$ $dS = r dr d\theta.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдфайн И. А., Векторный анализ и теория поля, ГИФМЛ, 1962.
2. Демидович Б. П., Сборник задач и упражнений по математическому анализу, ГИФМЛ, 1962.
3. Кальвинцкий Л. А., Добротин Д. А., Жевеержеев В. Ф., Специальный курс высшей математики, «Высшая школа», 1976.
4. Кочин Н. Е., Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, Изд-во АН СССР, 1951.
5. Кручкович Г. И., Мордасова Г. М., Подольский В. А., Римский-Корсаков Б. С., Сулейманова Х. Р., Чегис И. А., Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики, «Высшая школа», 1970.
6. Кудрявцев Л. Д., Математический анализ, том II, «Высшая школа», 1973.
7. Ладон И. Ф., Основы векторного исчисления с приложениями к теории электромагнитного поля. — Издание ВЭТА, Ленинград, 1938.
8. Лаптев Г. Ф., Элементы векторного исчисления, «Наука», 1975.
9. Мисюркеев И. В., Сборник задач и упражнений по методам математической физики, «Просвещение», 1975.
10. Никольский С. М., Курс математического анализа, том II, «Наука», 1973.
11. Очан Ю. С., Сборник задач по методам математической физики, «Высшая школа», 1967.
12. Пчелин Б. К., Векторный анализ для инженеров-электриков и радистов, «Энергия», 1968.

*Михаил Леонтьевич
Краснов
Александр Иванович
Киселев
Григорий Иванович
Макаренко*

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

(Серия: «Избранные главы
высшей математики для инженеров
и студентов вузов»)

М., 1978 г., 160 стр., с илл.

Редакторы *В. В. Абгарян,*
А. С. Чистопольский
Техн. редактор *Е. В. Морозова*
Корректор *Л. С. Сомова*

ИБ № 2221

Сдано в набор 05.04.78.
Подписано к печати 21.08.78.
Бумага $84 \times 108^{1/32}$, тип. № 1.
Обыкновенная гарнитура.
Высокая печать.
Условн. печ. л. 8,4. Уч.-изд. л. 8,41.
Тираж 60 000 экз. Заказ № 110.
Цена книги 35 коп.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Типография № 4 издательства «Наука»
630077, Новосибирск, 77,
Станиславского, 25

Цена 35 коп.