

Л. Р. НЕЙМАН и П. А. КАЛАНТАРОВ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ  
ОСНОВЫ  
ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ



ГОСЭНЕРГОИЗДАТ



Л. Р. НЕЙМАН и П. Л. КАЛАНТАРОВ

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

В ТРЕХ ЧАСТЯХ

*Издание пятое, переработанное*

\*

*Часть первая*

\*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МОСКВА 1959 ЛЕНИНГРАД

Л. Р. НЕЙМАН и П. Л. КАЛАНТАРОВ

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ  
ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ  
И ТЕОРИЯ ЦЕПЕЙ  
ПОСТОЯННОГО ТОКА

*Допущено Министерством высшего образования СССР  
в качестве учебника для электротехнических и энергетических  
вузов и факультетов*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МОСКВА 1959 ЛЕНИНГРАД

*Курс „Теоретические основы электротехники“ предназначен для студентов всех энергетических и электротехнических высших учебных заведений и факультетов. Содержание курса соответствует программе Министерства высшего образования СССР по одноименной дисциплине. Курс состоит из трех частей: части первой — „Физические основы электротехники и теория цепей постоянного тока“, написанной Л. Р. Нейманом, за исключением главы о расчете линейных цепей постоянного тока, написанной П. Л. Калантаровым и дополненной Л. Р. Нейманом, части второй — „Теория цепей переменного тока“, написанной П. Л. Калантаровым и переработанной и дополненной Л. Р. Нейманом, и части третьей — „Теория электромагнитного поля“, написанной Л. Р. Нейманом.*

*В первой части излагаются основные понятия и законы, относящиеся к электромагнитным явлениям, и методы расчета электрических и магнитных цепей при постоянном токе.*

*Нейман Леонид Робертович, Калантаров Павел Лазаревич*

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

### *Часть первая*

Редакторы *И. А. Зайцев, М. С. Кияницына*

Технический редактор *Е. М. Соболева*

---

Сдано в производство 5/XI 1958 г. Подписано к печати 9/IV 1959 г.  
 М 04221. Печ. л. 18,5. Бум. л. 9,23. Уч.-изд. л. 18. Формат 60×92<sup>1</sup>/<sub>16</sub>  
 Тираж 75 000 (26—75 тыс.) Заказ 2114. Цена 7 р. 30 к.

---

Типография № 4 УПП Ленсовнархоза. Ленинград, Социалистическая, 14

---

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЯТОМУ ИЗДАНИЮ

Книга для пятого издания подверглась дополнительной переработке. В первой и во второй частях введены новые параграфы, в которых рассматриваются полупроводниковые диоды и триоды как элементы электрической цепи. Это потребовало предварительно рассмотреть в различных местах книги физические явления в полупроводниках, а также дополнить главу о четырехполюсниках рассмотрением активных четырехполюсников и различных форм записи уравнений четырехполюсников. В первой части рассмотрение вопроса о движении заряженных частиц в электрическом и магнитном полях дополнено сведениями о процессах в новых ускорителях элементарных частиц с выделением этого материала в отдельный параграф. Во второй части существенно дополнена новыми параграфами глава, посвященная исследованию переходных процессов. Рассмотрено применение интеграла Фурье к расчету этих процессов и соответственно введено понятие о частотных характеристиках. Введено понятие о передаточной функции и расширено понятие об обратных связях. Изложен метод изображения переходных процессов на фазовой плоскости и связанный с ним метод изоклин для исследования переходных процессов в нелинейных электрических цепях. Указанные дополнения были необходимы в связи с тем, что эти вопросы приобретают все более важное значение для новых развивающихся направлений электротехники.

Естественно, для сохранения общего объема книги необходимо было сократить ее отдельные места и удалить некоторые не имеющие столь существенного значения вопросы.

Терминология в пятом издании приведена в полное соответствие с терминологией в области теоретической электротехники, утвер-

жденной в 1957 г. и рекомендованной Комитетом технической терминологии Академии Наук СССР.

При переработке книги мною были учтены отдельные пожелания, высказанные различными лицами. Я считаю своим приятным долгом выразить этим лицам свою благодарность. Мною был учтен также ряд пожеланий, относящихся к содержанию курса «Теоретические основы электротехники», высказанных участниками научно-методической конференции по теоретической электротехнике, состоявшейся в январе 1958 г. в Ленинграде, и участниками научно-методического семинара представителей кафедр теоретических основ электротехники высших учебных заведений страны, проведенного Министерством высшего образования в Москве также в январе 1958 г.

Выражаю свою глубокую признательность рецензенту профессору А. Е. Каплянскому, просмотревшему рукопись пятого издания и сделавшему ряд полезных замечаний, И. А. Зайцеву и М. С. Кияницыной, оказавшим мне большую помощь в редактировании и подготовке рукописи к печати, а также членам кафедры теоретической электротехники Ленинградского Политехнического института имени М. И. Калинина, принявшим активное участие в обсуждении методов изложения новых вопросов.

*Л. Нейман*

---

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

Четвертое издание учебника «Теоретические основы электротехники» выходит в свет после смерти одного из его авторов — Павла Лазаревича Калантарова, вложившего свой большой труд в дело подготовки для нашей Родины многочисленных специалистов электротехников.

В соответствии с пожеланиями представителей многих высших учебных заведений четвертое издание выходит вновь в трех отдельных томах, что должно значительно облегчить пользование книгой, так как курс «Теоретические основы электротехники» читается в высших учебных заведениях на нескольких семестрах.

При переработке книги для четвертого издания мною были учтены пожелания, высказанные в многочисленных отзывах по предыдущему изданию, частично опубликованных в журнале «Электричество» за 1953 год и частично присланных непосредственно нам, а также была учтена дискуссия по терминологии в области теоретической электротехники, проведенная в 1953 году на страницах журнала «Электричество».

В первой части книги — «Физические основы электротехники и теория цепей постоянного тока», написанной Л. Р. Нейманом, дополнительно развиты параграфы, в которых обобщаются основные положения и углубляются взаимосвязи, характеризующие электромагнитные явления. В этом мы видим одну из основных задач этой части курса. В первой части курса глава, посвященная методам расчета линейных цепей постоянного тока, написанная ранее П. Л. Калантаровым, дополнена рассмотрением этих методов на конкретных примерах. Ввиду широкого применения в современной электротехнике нелинейных элементов с использованием их особых свойств, мною вновь написана глава, посвященная расчету нелинейных электрических цепей постоянного тока.

Вторая часть книги — «Теория цепей переменного тока», написанная П. Л. Калантаровым, переработана мною в некоторой ее части в соответствии с высказанными в отзывах пожеланиями и с учетом развивающихся новых направлений в электротехнике. Уделено большее внимание физической стороне явлений, что главным образом относится к первой главе. Введен ранее, чем было в предыдущем издании, символический метод, так как он необходим для практических занятий со студентами. Значительно рас-

ширена глава, посвященная нелинейным цепям переменного тока, которая, в частности, дополнена методами расчета переходных процессов в таких цепях. Усилено рассмотрение практических приложений излагаемых теоретических методов, а также уделено большее внимание практическому значению рассматриваемых общих положений.

Третья часть книги — «Теория электромагнитного поля», написанная Л. Р. Нейманом, подверглась меньшим изменениям. Внесенные в нее изменения преследовали те же цели, что и изменения, сделанные в первой и во второй частях книги.

В соответствии с высказанными пожеланиями некоторые параграфы, которые могут рассматриваться как необязательные, набраны мелким шрифтом.

Считаю своим долгом выразить благодарность всем лицам, принявшим участие в обсуждении предыдущего издания нашей книги и высказавшим ряд ценных пожеланий. Выражаю также признательность рецензенту профессору А. Е. Каплянскому, тщательно просмотревшему рукопись нового издания и сделавшему ряд полезных замечаний. Большую помощь в редактировании и подготовке рукописи к печати мне оказали И. А. Зайцев и В. Ф. Бердникова, которым приношу свою глубокую благодарность.

*Л. Нейман*

---

## ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Введение . . . . .	13

### *Глава первая*

#### **Напряженность электрического поля. Электрическое напряжение и электродвижущая сила**

§ 1. Элементарные частицы, обладающие электрическим зарядом, и их электромагнитное поле как особый вид материи . . . . .	20
§ 2. Электрическое поле . . . . .	22
§ 3. Проводящие вещества, диэлектрики и полупроводники . . . . .	23
§ 4. Напряженность электрического поля . . . . .	27
§ 5. Теорема Гаусса . . . . .	31
§ 6. Электрическое напряжение . . . . .	36
§ 7. Потенциал электростатического поля . . . . .	38
§ 8. Электродвижущие силы . . . . .	41

### *Глава вторая*

#### **Поляризация диэлектриков и электрическое смещение. Электрическая емкость**

§ 9. Поляризация диэлектриков . . . . .	47
§ 10. Электрическое смещение. Постулат Максвелла . . . . .	53
§ 11. Электрическая емкость уединенного тела и конденсатора . . . . .	59
§ 12. Конденсаторы с нелинейной характеристикой . . . . .	64

### *Глава третья*

#### **Энергия и механические проявления электрического поля**

§ 13. Энергия системы заряженных тел . . . . .	69
§ 14. Распределение энергии в электрическом поле . . . . .	71
§ 15. Потери энергии в диэлектрике при переменном электриче- ском поле . . . . .	74
§ 16. Силы, действующие на заряженные тела . . . . .	77

*Глава четвертая***Электрический ток**

§ 17. Электрический ток и плотность тока . . . . .	86
§ 18. Ток в проводящей среде . . . . .	88
§ 19. Ток переноса . . . . .	90
§ 20. Ток электрического смещения в диэлектрике . . . . .	92
§ 21. Принцип непрерывности электрического тока . . . . .	96
§ 22. Законы электрических цепей постоянного тока . . . . .	100

*Глава пятая***Расчет линейных электрических цепей постоянного тока**

§ 23. Линейные и нелинейные электрические цепи . . . . .	107
§ 24. Последовательное, параллельное и смешанное соединения приемников . . . . .	108
§ 25. Передача энергии по двухпроводной линии . . . . .	110
§ 26. О расчете сложных электрических цепей . . . . .	113
§ 27. Метод контурных токов . . . . .	116
§ 28. Принцип наложения . . . . .	119
§ 29. Принцип взаимности . . . . .	120
§ 30. Условия эквивалентности источников электродвижущей силы и источников тока . . . . .	121
§ 31. Теорема об эквивалентном генераторе . . . . .	123
§ 32. Преобразование соединения трехлучевой звездой в соединение треугольником . . . . .	127
§ 33. Метод узловых напряжений . . . . .	130

*Глава шестая***Расчет нелинейных электрических цепей постоянного тока**

§ 34. Нелинейные элементы электрической цепи постоянного тока . . . . .	133
§ 35. Полупроводниковые диоды, как нелинейные элементы электрической цепи . . . . .	142
§ 36. Последовательное, параллельное и смешанное соединения участков электрической цепи, содержащих нелинейные элементы и не содержащих источников э. д. с. . . . .	147
§ 37. Последовательное, параллельное и смешанное соединения участков электрической цепи, содержащих нелинейные элементы и источники э. д. с. . . . .	148
§ 38. Расчет сложной электрической цепи с одним нелинейным элементом . . . . .	151
§ 39. Расчет сложной электрической цепи с двумя нелинейными элементами . . . . .	154

- § 40. Расчет сложной электрической цепи с тремя нелинейными элементами . . . . . 157
- § 41. Расчет сложной электрической цепи с четырьмя и более нелинейными элементами. Метод последовательных приближений . . . . . 160
- § 42. Аналитическое исследование особых свойств нелинейных электрических цепей постоянного тока при малых отклонениях от заданного режима . . . . . 162

### Глава седьмая

#### Магнитный поток и явление электромагнитной индукции

- § 43. Магнитное поле . . . . . 167
- § 44. Магнитная индукция . . . . . 168
- § 45. Магнитный поток . . . . . 170
- § 46. Принцип непрерывности магнитного потока . . . . . 173
- § 47. Закон электромагнитной индукции . . . . . 175
- § 48. Потокосцепление . . . . . 180
- § 49. Электродвижущие силы самоиндукции и взаимной индукции . . . 182
- § 50. Невозможность построения бесколлекторной машины постоянного тока, основанной на явлении электромагнитной индукции . . . 183
- § 51. Электромагнитная инерция. Принцип Ленца . . . . . 185
- § 52. Электродвижущая сила, напряжение, разность потенциалов . . 187

### Глава восьмая

#### Напряженность магнитного поля и закон полного тока

- § 53. Связь магнитного поля с электрическим током . . . . . 193
- § 54. Намагниченность вещества и напряженность магнитного поля . . 197
- § 55. Закон полного тока . . . . . 202
- § 56. Магнитное поле движущейся частицы с электрическим зарядом и элемента тока . . . . . 205
- § 57. Магнитные свойства вещества . . . . . 211
- § 58. Потери на гистерезис . . . . . 218
- § 59. Магнитные свойства некоторых ферромагнитных материалов . . 220

### Глава девятая

#### Расчет магнитных цепей

- § 60. Магнитная цепь. Закон магнитной цепи . . . . . 224
- § 61. Расчет магнитной цепи с последовательным соединением участков . 226
- § 62. Расчет разветвленных магнитных цепей . . . . . 228
- § 63. О расчете постоянных магнитов . . . . . 231
- § 64. О расчете магнитных цепей с постоянными магнитами . . . . 233
- § 65. Распределение напряженности магнитного поля вдоль неоднородной магнитной цепи . . . . . 235

## Глава десятая

## Индуктивности электрических контуров

§ 66. Собственная индуктивность электрических контуров . . . . .	237
§ 67. Взаимная индуктивность электрических контуров . . . . .	242
§ 68. Связь между индуктивностями. Эквивалентные индуктивности . . . . .	245
§ 69. Нелинейная характеристика катушки с сердечником из ферромагнитного материала . . . . .	250

## Глава одиннадцатая

## Энергия и механические проявления магнитного поля

§ 70. Энергия системы контуров с электрическими токами . . . . .	252
§ 71. Распределение энергии в магнитном поле . . . . .	254
§ 72. Принцип взаимности . . . . .	257
§ 73. Электромагнитная сила . . . . .	258
§ 74. Электромагнитные силы в случаях одного и двух контуров с токами . . . . .	264
§ 75. Сила, действующая на проводник с током во внешнем магнитном поле. Правило Миткевича. . . . .	270
§ 76. Сопоставление сил, возникающих в электрическом и магнитном полях . . . . .	274
§ 77. Сила, действующая на частицу с электрическим зарядом, движущуюся в электрическом и магнитном полях . . . . .	276
§ 78. Движение заряженных элементарных частиц в электрическом и магнитном полях. Электронные осциллографы и микроскопы . . . . .	277
§ 79. Движение заряженных элементарных частиц в электрическом и магнитном полях. Ускорители элементарных частиц . . . . .	281
§ 80. Единство электрических и магнитных явлений . . . . .	288
Приложение . . . . .	293
Алфавитный указатель . . . . .	295

---

## ВВЕДЕНИЕ

Эпоха строительства социализма в нашей стране и перехода от социализма к коммунизму характеризуется беспрецедентным расцветом отечественной науки и техники. Победа Великой Октябрьской социалистической революции создала условия для осуществления широкой электрификации нашего народного хозяйства. Об исключительном значении, которое имеет электрификация народного хозяйства для построения коммунистического общества, свидетельствует знаменитая формула великого основателя Советского государства В. И. Ленина: «Коммунизм — это есть Советская власть плюс электрификация всей страны».

В соответствии с решениями XXI съезда КПСС предстоящее семилетие 1959—1965 гг. явится решающим этапом в осуществлении идеи Ленина о сплошной электрификации страны.

Выполнение величественных задач, намеченных в решениях XXI съезда КПСС, требует развития новых направлений в науке и технике, что неразрывно связано с глубокой разработкой теоретических проблем во всех областях знания. Инженеры-электрики, выпускаемые из высших учебных заведений, чтобы быть способными научно решать стоящие перед страной большие задачи, должны обладать широкими теоретическими знаниями и умением применять их на практике. Курс «Теоретические основы электротехники», в котором рассмотрены теоретические вопросы электротехники, неразрывно связано с практическими задачами электротехники, и является одним из важнейших звеньев в системе теоретической подготовки инженеров-электриков.

\* \* \*

Первые труды в области электричества в России принадлежат гениальному русскому ученому-академику М. В. Ломоносову. М. В. Ломоносов, создавший в разных областях науки много замечательных трудов, посвятил большое количество работ изучению электричества. В своих теоретических исследованиях М. В. Ломоносов выдвигал положения, которые значительно опережали его эпоху, и ставил проблемы исключительной глубины. Так, по его предложению Академия наук выдвинула в качестве конкурсной темы на премию на 1755 г. задачу «сыскать подлинную электрической силы причину и составить точную ее теорию».

Наряду с этим М. В. Ломоносов всегда стремился найти практическое приложение научным открытиям. В своих работах он указал возможность защиты человека и зданий от поражения молнией путем создания молниеотводов. В этом отношении замечательны слова М. В. Ломоносова в его добавлениях к курсу физики, где он высказал мысль, что среди опытов по электричеству есть опыты «великую надежду к благополучию человеческому показующие».

М. В. Ломоносов развивал и отстаивал в своих трудах учение о познаваемости и о материальности мира, в частности, о материальности электричества. Материалистический подход к решению основных научных проблем, характерный для трудов М. В. Ломоносова в различных областях науки, стал в последующем лучшей традицией передовых русских ученых и изобретателей, традицией, явившейся источником их исключительных успехов в области науки и техники.

Современником М. В. Ломоносова был русский академик Ф. Эпинус. Ему принадлежит приоритет открытия термоэлектрических явлений и явления электростатической индукции. Особо следует отметить доклад Ф. Эпинуса, сделанный им в 1758 г. в Академии наук на тему: «Речь о родстве электрической силы и магнетизма».

В настоящее время нам хорошо известно, что между электрическими и магнитными явлениями существует неразрывная связь, и это положение лежит в основе всего современного учения об электромагнитных явлениях. Однако к такому убеждению научная мысль пришла лишь в итоге длительного накопления опытных фактов, и в течение долгого времени явления электрические и явления магнитные рассматривались как самостоятельные, не имеющие между собой связи. Первое обстоятельное научное сочинение о магнитных и электрических явлениях, принадлежащее Гильберту, вышло в 1600 г. В этом труде Гильберт пришел, однако, к неправильному заключению, что электрические и магнитные явления не имеют между собою связи.

Сходство между механическим взаимодействием электрически заряженных тел и механическим взаимодействием полюсов магнитов естественно привело к попытке одинаково объяснить эти явления. Возникло представление о положительной и отрицательной магнитных массах, распределенных на концах магнита и являющихся причиной магнитных действий. Однако подобное предположение, как нам теперь известно, не отвечает физической природе магнитных явлений. Оно возникло исторически по аналогии с представлением о положительном и отрицательном электричестве, отвечающем физической сущности электрических явлений. Согласно современным представлениям электрический заряд любого тела образуется совокупностью зарядов, находящихся в непрерывном движении положительно или отрицательно заряженных элементарных частиц — протонов, электронов и т. д.

Количественные соотношения, характеризующие механические взаимодействия электрически заряженных тел и механические взаимодействия магнитных масс полюсов магнита, первый опубликовал в 1785 г. Кулон. Но уже Кулон обратил внимание на существенное различие между магнитными массами и электрическими зарядами. Различие это вытекает из следующих простых опытных фактов. Нам без труда удается отделить друг от друга положительный и отрицательный электрические заряды, но никогда и ни в каких условиях не удается произвести опыт, в результате которого оказались бы отделенными друг от друга положительная и отрицательная магнитные массы. В связи с этим Кулон высказал предположение, что отдельные малые элементы объема магнита при его намагничивании обращаются в маленькие магнитики и что лишь внутри таких элементов объема положительные магнитные массы смещаются в одном направлении и отрицательные — в противоположном.

Однако если бы положительная и отрицательная магнитные массы имели самостоятельное существование внутри элементарных магнитиков, то все же можно было бы надеяться в каком-либо опыте, в котором осуществлялось бы непосредственное воздействие на эти элементарные магнитики, отделить отрицательную массу от положительной, подобно тому, как, воздействуя на молекулу, имеющую суммарный электрический заряд, равный нулю, нам удается расщепить ее на отрицательно и положительно заряженные частицы, так называемые ионы. Однако и в элементарных процессах никогда не обнаруживаются раздельно существующие положительная и отрицательная магнитные массы.

Раскрытие действительной природы магнитных явлений относится к началу прошлого столетия. Этот период знаменуется рядом замечательных открытий, установивших теснейшую связь между явлениями электрическими и явлениями магнитными.

В 1819 г. Эрстед произвел свои опыты, в которых он обнаружил механическое воздействие электрического тока на магнитную стрелку. В 1820 г. Ампер показал, что соленоид с током по своим действиям аналогичен магниту, и высказал мысль, что и в случае постоянного магнита действительной причиной возникновения магнитных действий являются также электрические токи, замыкающиеся по некоторым элементарным контурам внутри тела магнита. Эти идеи нашли конкретное выражение в современных представлениях, согласно которым магнитное поле постоянного магнита обусловлено элементарными электрическими токами, существующими в веществе магнита и эквивалентными магнитным моментам образующих вещество элементарных частиц. В частности, эти элементарные токи являются результатом вращения электронов вокруг своих осей, а также вращения электронов по орбитам в атомах.

Таким образом, мы приходим к убеждению, что магнитных масс в действительности не существует.

Всеми упомянутыми исследованиями было установлено важнейшее положение, что движение электрически заряженных частиц и тел всегда сопровождается магнитными явлениями. Этим самым уже было показано, что магнитные явления не представляют собою, как полагал Гильберт, чего-либо самостоятельного, никак не связанного с явлениями электрическими.

В 1831 г. Фарадей сообщил об открытии явления электромагнитной индукции. Он обнаружил возникновение электрического тока в контуре, движущемся по отношению к магниту или по отношению к другому контуру с током. Таким образом, было показано, что и электрические явления могут возникать как следствие процессов, относящихся к области магнитных явлений.

В 1833 г. русский академик Э. Х. Ленц сформулировал впервые чрезвычайно важное положение, в котором устанавливалась общность и обратимость явлений, открытых Эрстедом и Фарадеем. В этом положении была заложена основа важного принципа обратимости электрических машин. Э. Х. Ленц установил правило определения направления индуктированного тока, выражающее фундаментальный принцип электродинамики — принцип электромагнитной инерции.

В связи со всеми этими открытиями необходимо особенно отметить основную идею, которой неизменно руководствовался в своих исследованиях Фарадей и которая была развита в трудах академика В. Ф. Миткевича, — идею о физической реальности процесса, совершающегося в пространстве между электрически заряженными телами и между контурами с электрическими токами. Согласно этим представлениям взаимодействие заряженных тел, а также взаимодействие контуров с токами осуществляется через посредство окружающего их электромагнитного поля, являющегося особым видом материи.

Заслуга создания теории электромагнитного поля принадлежит Максвеллу, изложившему ее в классическом труде «Трактат об электричестве и магнетизме», вышедшем в 1873 г. Этот трактат содержит изложение в математической форме и дальнейшее углубление и расширение основных физических идей Фарадея.

Экспериментальное подтверждение и развитие максвелловой теории электромагнитного поля осуществлено Г. Герцем (1887—1889 гг.) в его замечательных опытах по получению и распространению электромагнитных волн, в работах П. Н. Лебедева (1895 г.) по генерированию и распространению электромагнитных волн весьма короткой длины волны, в классических опытах П. Н. Лебедева (1900—1910 гг.), в которых им было экспериментально доказано давление света, в изобретении радио А. С. Поповым (1895 г.) и в осуществлении им радиосвязи, а также во всем дальнейшем развитии практической и теоретической радиотехники.

Все указанные выше открытия привели к признанию глубокой связи между явлениями электрическими и явлениями магнитными.

По существу мы всегда имеем дело со сложным электромагнитным явлением.

Позднейший период характеризуется все более глубоким изучением строения вещества. Возникло представление об электромагнитном строении материи. Согласно простейшей модели атом содержит ядро, имеющее положительный заряд, и вращающиеся вокруг ядра электроны, обладающие отрицательным зарядом. Открытие радиоактивного распада ядер атомов показало, что и ядра представляют собой сложные образования, способные к дальнейшим превращениям. Весьма замечательным явилось открытие позитронов — частиц, имеющих положительный заряд, по величине равный отрицательному заряду электрона, и массу такого же порядка, как и масса электрона. При возникновении позитрона происходит преобразование фотона — кванта электромагнитного поля — в две элементарные частицы, обладающие электрическими зарядами — позитрон и электрон. Современные физические исследования привели к открытию целого ряда элементарных частиц, обладающих электрическими зарядами и магнитными моментами, а также к изучению свойств этих частиц и их взаимодействий.

Все эти и ряд других важных открытий особенно ценны тем, что они окончательно разрушили представление об атомах как о незыблемых элементах материи. Материя находится в постоянном движении, в развитии. Каждая форма движения материи способна к превращению в другую с новыми качественными особенностями.

Эти прогрессивные идеи привели к блестящим достижениям последних лет, открывшим пути подчинения воле человека процессов, происходящих при ядерных преобразованиях и сопровождающихся выделением огромного количества энергии, что создало новые широкие возможности использования сил природы для социальных целей.

\* \* \*

Содержание и построение курса «Теоретические основы электротехники» определяется необходимостью дать по возможности стройное представление об электромагнитных явлениях и о процессах, происходящих в различных электротехнических устройствах, а также развить основные методы расчета этих процессов.

В связи с этим в первой части курса особое внимание уделено углубленному рассмотрению электромагнитных явлений и установлению взаимосвязей между величинами, характеризующими эти явления. Это необходимо для изучения с должной глубиной теории электрических и магнитных цепей переменного тока и теории электромагнитного поля, излагаемых в последующих двух частях.

Возможность выделить из общей теории электромагнитных явлений большой раздел, именуемый теорией электрических и магнитных цепей, связана как с методами анализа явлений во многих

электротехнических устройствах, так и с практическими соображениями.

При техническом использовании электромагнитных явлений в большинстве случаев принимают меры для сосредоточения электрического и магнитного полей в возможно малых объемах. При этом для ограничения объема электрического поля в конденсаторах в качестве диэлектрика применяют материалы с высокой диэлектрической проницаемостью. Для ограничения объема магнитного поля магнитные цепи осуществляют из материалов, имеющих высокую магнитную проницаемость.

Осуществление электрических цепей из материалов с высокой электрической проводимостью, окруженных изолирующей средой, дает возможность создать определенные пути для электрического тока. Осуществление магнитных цепей из материалов с высокой магнитной проницаемостью, окруженных средой со сравнительно небольшой магнитной проницаемостью, дает возможность создать желательные пути для магнитного потока. Можно утверждать, что большая часть электротехнических устройств представляет собою то или иное сочетание электрических цепей с цепями магнитными.

В основе теории цепей лежат законы, установленные Омом, Кирхгофом, Ленцем и Джоулем.

Параметры электрических и магнитных цепей зависят от геометрической формы цепей и от физических свойств материалов, из которых выполнены эти цепи.

Когда параметры цепей зависят от интенсивности процессов, эти процессы, а также и цепи, в которых они происходят, называют нелинейными. Теория нелинейных цепей разработана в значительной мере благодаря трудам советских ученых — академиков Л. И. Мандельштама, Н. Д. Папалекси и А. А. Андронova.

В тех случаях, когда физические свойства сред или, соответственно, параметры цепей не зависят от интенсивности происходящих в них процессов, соотношения, которые связывают величины, характеризующие процессы в электрических и магнитных полях и цепях, имеют линейный характер, т. е. введенные в рассмотрение величины, их производные и интегралы входят в эти соотношения только в первой степени, если не рассматривать энергетической стороны процессов. Такие процессы, а соответственно и цепи, называют линейными. По отношению к ним применим важный принцип, называемый принципом наложения. По принципу наложения следствия, вызываемые в некоторой физической обстановке совместным действием нескольких однородных причин, являются суммой следствий, вызываемых в той же физической обстановке каждой из этих причин в отдельности. Использование этого принципа дает возможность обобщить результаты, полученные для простых случаев, на случаи более сложные. Обратное, применение этого принципа позволяет расчленить сложную задачу на несколько более

простых. В дальнейшем мы будем широко пользоваться принципом наложения.

Многие электротехнические вопросы не могут быть полностью рассмотрены при помощи теории цепей и могут быть решены лишь методами теории электромагнитного поля. Прежде всего для расчета параметров электрических и магнитных цепей необходимо знать электрические и магнитные поля, связанные с этими цепями. Так, например, для определения индуктивности электрической цепи необходимо уметь рассчитать магнитное поле этой цепи; для определения электрической емкости конденсаторов или линий передач необходимо уметь рассчитать их электрические поля. Это вполне закономерно, так как параметры электрических и магнитных цепей фактически отражают в себе в интегральной форме конфигурацию электрических и магнитных полей, связанных с рассматриваемыми цепями, и физические свойства среды, в которой существуют эти поля. Ряд весьма важных вопросов может быть решен только методами, развиваемыми в теории поля. К таким вопросам относятся, например, вопросы об излучении электромагнитных волн антенной и о распространении их в пространстве.

Наличие основных закономерностей, установленных в первой части курса, дает возможность начать рассмотрение теории электромагнитного поля с общих уравнений, характеризующих это поле в целом, и показать, что случаи, в которых выявляется только электрическое или только магнитное поле, представляют собой частные случаи, когда условия наблюдения таковы, что в некоторой ограниченной области пространства обнаруживается только одна сторона электромагнитного процесса. Этим ярко выделяется мысль об единстве электрических и магнитных явлений.

---

---

## ГЛАВА ПЕРВАЯ

### НАПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ НАПРЯЖЕНИЕ И ЭЛЕКТРОДВИЖУЩАЯ СИЛА

#### 1. Элементарные частицы, обладающие электрическим зарядом, и их электромагнитное поле как особый вид материи

Современное учение об электромагнитных явлениях, как было отмечено во введении, сложилось в итоге длительного их изучения и постепенного накопления опыта при их практических применениях. Становившееся все более широким техническое использование электричества выдвигало новые вопросы, требующие теоретического и экспериментального разрешения, что способствовало дальнейшему углублению знаний о природе электрических и магнитных явлений.

В настоящее время мы располагаем обширными знаниями об электрических и магнитных явлениях и большим опытом использования их в самых разнообразных областях производственной деятельности.

Элементарные частицы материи, обладающие *электрическими зарядами* (например, электрон—отрицательным зарядом, протон—положительным), являются важнейшими структурными элементами атомов вещества и поэтому, естественно, с электромагнитными явлениями связаны самые различные явления природы. Здесь уместно упомянуть слова Энгельса, сказанные им еще в период создания основ учения об электрических и магнитных явлениях и первых шагов практического применения электричества. «На земле не происходит почти ни одного изменения, не сопровождаемого какими-нибудь электрическими явлениями» (Ф. Э н г е л ь с, Диалектика природы, изд. 1950 г., стр. 83).

Элементарные заряженные частицы входят в состав атомов и молекул вещества, но они могут быть и в свободном состоянии. Они находятся в непрерывном движении и окружены, как мы говорим, *электромагнитным полем*. Обладающие электрическим зарядом частицы и их электромагнитное поле представляют собой особый вид материи — особый в том смысле, что ему присущи особые электромагнитные свойства, не учитываемые при рассмотрении других, например механической, форм движения материи.

*Электрический заряд* этих частиц является их важнейшим физическим свойством, характеризующим их взаимосвязь с собственным электромагнитным полем и их взаимодействие с внешним электромагнитным полем. Электрический заряд является основным отличительным свойством этих частиц материи, обладающих также и другими свойствами — массой, энергией, импульсом и т. д., присущими и другим формам движения материи, изучаемым, например, в механике.

Понятие *электричество* нередко относят ко всей совокупности электромагнитных явлений. Именно такой широкий смысл вкладывают в это понятие, говоря о науке об электричестве. Вместе с тем оно используется в более узком смысле в термине *количество электричества*, как синоним термина *электрический заряд*.

По сути дела, обладающие зарядом элементарные частицы и их электромагнитное поле представляют собой единое целое. Строго говоря, мы не можем указать точной границы между частицей с электрическим зарядом и ее электромагнитным полем. Вместе с тем все же можно полагать, что частица и ее электрический заряд, например заряд электрона, протона и т. д., сосредоточены в весьма малой области пространства. Именно для этой весьма малой области пространства характерна та форма движения материи, с которой связывается понятие об электрически заряженной частице. Вне этой области на первый план выступает то физическое явление, та форма движения материи, с которыми мы связываем понятие об электромагнитном поле. Это обстоятельство дает возможность ввести представление о том, что электрический заряд элементарной частицы, как и сама частица, занимает только некоторую ограниченную область пространства. В пространстве, окружающем эту область, согласно такому представлению, существует связанное с обладающей зарядом частицей электромагнитное поле, а объемная плотность электрического заряда точно равна нулю.

При такой широко используемой научной абстракции возникает необходимость дать наименование той области пространства, в которой существует электромагнитное поле, но в которой отсутствуют известные нам частицы материи. В дальнейшем для обозначения такой области пространства условимся применять термин *пустота*. Этот термин мы будем относить только к понятию о пространстве, как форме существования материи в виде поля, но не к происходящим в этом пространстве физическим процессам, помня при этом, что пространство неотделимо от происходящих в нем материальных процессов, что абсолютно пустого пространства, не заполненного физической материей, нет и не может быть и что в той области пространства, которую мы будем называть пустотой, всегда существует электромагнитное поле, а также поле тяготения, представляющие собой особые виды материи.

Существенно отметить, что если обладающую зарядом элементарную частицу нельзя мыслить без ее электромагнитного поля, то

электромагнитное поле может существовать в свободном состоянии, отделенное от частицы. Таковым является фотон, а также электромагнитное поле, излученное антенной.

Движение материи, с которым мы связываем понятие об электрически заряженной частице, а также понятие об электромагнитном поле, не может быть сведено к механическому движению. Для характеристики электрических и магнитных явлений необходимо ввести новые понятия, которые не рассматриваются механикой и которые принципиально не могут быть определены только через механические величины. Таковым является, в частности, электрический заряд. В связи со сказанным приведем замечательные слова В. И. Ленина: «Как ни диковинно с точки зрения «здравого смысла» превращение невесомого эфира в весомую материю и обратно, как ни «странно» отсутствие у электрона всякой иной массы, кроме электромагнитной, как ни необычно ограничение механических законов движения одной только областью явлений природы и подчинение их более глубоким законам электромагнитных явлений и т. д., — все это только лишнее *подтверждение* диалектического материализма». (В. И. Ленин, Сочинения, изд. IV, т. 14, стр. 248).

В этой фразе, которую В. И. Ленин приводит в развитие основных положений диалектического материализма, отчетливо сформулирована мысль, что электромагнитные явления не могут быть сведены к явлениям, изучение которых составляет предмет механики. В механике рассматривается движение в пространстве материальных тел, обладающих инертной массой. То, что эти тела могут обладать электрическими зарядами, а также то, что сами тела состоят из положительно и отрицательно заряженных элементарных частиц, совершенно не входит в круг вопросов, рассматриваемых в механике. Поэтому и естественно, что из законов механики не могут быть выведены более глубокие законы электромагнитных явлений.

## § 2. Электрическое поле

Как уже было отмечено, находящиеся в движении заряженные элементарные частицы окружены электромагнитным полем. Однако при известных условиях в некоторой области пространства не обнаруживаются магнитные явления и наблюдаются только явления электрические. Таковым является, например, случай заряженных, неподвижных проводящих тел.

Элементарные частицы, заряды которых образуют полные заряды тел, движутся около поверхностей тел хаотически и вследствие этого уже на ничтожных расстояниях от поверхностей тел их результирующее магнитное поле практически отсутствует.

Аналогично около неподвижных постоянных магнитов обнаруживается только магнитное поле.

Возможность создания таких условий позволяет сначала раздельно изучить электрическое поле и магнитное поле. Тем не менее важнейшей нашей задачей уже в первой части курса будет установление связей между этими полями как двумя сторонами единого электромагнитного поля, так как без глубокого изучения этих связей невозможно полное физическое рассмотрение во второй части курса процессов в электрических и магнитных цепях при переменных токах.

Для характеристики электрического поля, являющегося одной из сторон единого электромагнитного поля, можно воспользоваться тем или иным его проявлением. Принято характеризовать электрическое поле механическими силами, которые испытывают *неподвижные* заряженные тела, вносимые в это поле. В соответствии с этим, *электрическим полем мы называем одну из двух сторон электромагнитного поля, выявляемую по механическому воздействию на неподвижные заряженные тела и частицы.*

Для выявления электрического поля необходимо взять *неподвижное* заряженное тело, так как на движущееся заряженное тело действует не только электрическое, но также, как будет показано, и магнитное поле.

Простейшим случаем электрического поля является поле неподвижных электрически заряженных тел. Такое поле мы называем *электростатическим*. Раздел науки, в котором изучают электростатические поля и их проявления, называют *электростатикой*.

### § 3. Проводящие вещества, диэлектрики и полупроводники

При исследовании электрического поля в веществе необходимо учитывать электрические свойства вещества. Вещества по их электрическим свойствам могут быть разделены на три основных класса — *проводящие вещества, диэлектрики* (изолирующие вещества) и *полупроводящие вещества* (полупроводники).

Проводящими веществами являются такие, в которых существуют в значительном количестве обладающие электрическим зарядом свободные элементарные частицы (электроны или положительные и отрицательные ионы), приходящие в упорядоченное движение под действием электрического поля и образующие тем самым в веществе упорядоченный электрический ток. К проводящим веществам прежде всего относятся все металлы, в которых *электропроводность*, т. е. свойство проводить электрический ток под действием постоянного электрического поля, определяется наличием так называемых свободных электронов или электронов проводимости, т. е. электронов, слабо связанных с атомами, легко переходящих от атома к атому и образующих при упорядоченном движении электрический ток в металле. Значительной электропроводностью обладают также электролиты — растворы солей, оснований и кислот и некоторые соли в расплавленном состоянии, со-

держатся положительные и отрицательные ионы, на которые распадается часть молекул растворенного вещества или расплавленной соли. Способность проводить ток проявляют также газы в ионизированном состоянии.

Диэлектриками являются вещества, в которых обладающие зарядом свободные частицы имеются в практически ничтожном количестве и на первый план выступает явление поляризации, рассматриваемое в следующей главе. К ним относятся, например, стекло, слюда, масло, воздух в неионизированном состоянии и т. д.

Полупроводящими веществами являются вещества, занимающие по значению своей электропроводности промежуточное положение между проводящими веществами и диэлектриками и отличающиеся рядом присущих им характерных свойств, связанных с существованием в них не только электропроводности, обусловленной свободными электронами, т. е. электронами проводимости, но также электропроводности, обусловленной перемещением под действием электрического поля так называемых «дырок», т. е. незанятых валентными электронами мест в атомах. Валентными электронами являются электроны, расположенные на внешней электронной оболочке атома. Перемещение в веществе от атома к атому этих незанятых электронами мест по существу является результатом перемещения одного за другим валентных электронов — в незанятое место в одном атоме валентного электрона из соседнего атома, в освободившееся место в этом последнем атоме валентного электрона из следующего соседнего атома и т. д. Такое перемещение дырок эквивалентно по своему результату движению положительно заряженных частиц с зарядом, равным по абсолютной величине заряду электрона. Именно наличие полупроводников с различными типами электропроводности — электронной или  $n$ -типа (negative) и дырочной или  $p$ -типа (positive) — открывает возможности создания большой группы полупроводниковых приборов, обладающих весьма важными характеристиками, о чем будет сказано в дальнейшем. К полупроводящим веществам относится ряд элементов, важнейшими из которых в настоящее время являются германий (Ge), кремний (Si), селен (Se), ряд сплавов, например,  $Mg_3Sb_2$ ,  $ZuSb$ , ряд окислов, например,  $Al_2O_3$ ,  $Cu_2O$  и т. д.

Различие между проводящими веществами, диэлектриками и полупроводниками может быть охарактеризовано с точки зрения квантовых представлений. Эти представления будут необходимы в дальнейшем для объяснения принципов действия полупроводниковых приборов и их характеристик, как элементов электрических цепей.

В уединенном атоме все электроны характеризуются различными квантовыми состояниями, каждое из которых отличается своей совокупностью квантовых чисел (первое или главное квантовое число характеризует среднее расстояние электрона от ядра, второе — момент количества движения электрона, третье — орби-

тальный магнитный момент и четвертое — вращение электрона вокруг своей оси). Электроны в уединенном атоме занимают вполне определенные энергетические уровни, соответствующие определенным их квантовым состояниям и определенной их энергии в атоме. При этом на каждом энергетическом уровне могут находиться только два электрона, отличающиеся только направлением вращательных моментов относительно своих осей (спинов), так как энергии двух таких электронов почти одинаковы. На рис. 1, а схематически изображены энергетические уровни электронов в уединенном атоме. Чем выше расположена линия на рисунке, тем больше энергия. Расстояния между линиями соответствуют определенным приращениям энергии. В невозбужденном состоянии электроны занимают все идущие по порядку снизу основные уровни. Однако при возбуждении атома, например, под воздействием света, возможен переход электронов в возбужденные состояния на более высокие энергетические уровни.

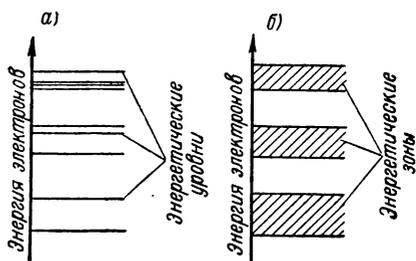


Рис 1.

Если большое число  $N$  одинаковых атомов сближаются настолько, что в результате их взаимодействия образуется твердое или жидкое тело, то в итоге этого взаимодействия каждый энергетический уровень, как соответствующий основным, так и возбужденным состояниям, расщепляется на  $N$  близко лежащих уровней. В результате вместо каждого уровня, имеющегося в уединенном атоме, в теле образуется почти сплошная полоса из  $N$  уровней или, как говорят, энергетическая зона. На рис. 1, б схематически изображены энергетические зоны твердого тела. Если атомы не возбуждены, то все основные зоны оказываются заполненными электронами. В верхней заполненной зоне расположены валентные электроны, которые определяют химические свойства вещества. Эта зона называется заполненной или валентной зоной.

Согласно квантовым представлениям ток электрической проводимости возможен только тогда, когда в веществе имеются незанятые электронами квантовые состояния, так что электроны могут переходить из одного состояния в другое. Такой переход, приводящий к хаотическому движению свободных электронов, может происходить в результате теплового движения атомов вещества. Под действием внешнего электрического поля на это хаотическое движение электронов накладывается их упорядоченное движение, которое и определяет собой ток проводимости. Но основным условием для этого, как отмечено, является наличие незанятых квантовых состояний и возможность перехода в них электронов из других состояний.

С этой точки зрения различие между проводящими веществами, диэлектриками и полупроводниками заключается в следующем. В проводниках валентная энергетическая зона перекрывается зоной возбужденных состояний (рис. 2, а), и электроны из валентной зоны легко переходят в зону возбужденных состояний, в которой имеется большое количество незанятых состояний. Такие электроны и являются свободными электронами или электронами проводимости. Поэтому зона возбужденных состояний называется также зоной проводимости. Зона проводимости содержит не только энергетические уровни, соответствующие возбуждению, но и пол-

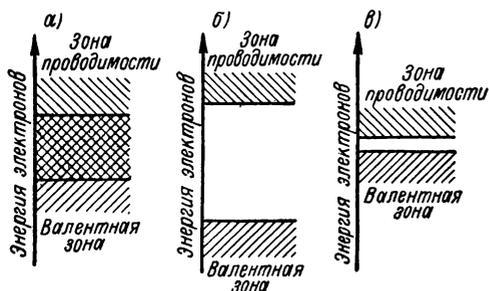


Рис. 2.

ной ионизации атомов вещества.

В диэлектриках между валентной (заполненной) зоной и зоной проводимости имеется значительный энергетический зазор (запрещенная зона) (рис. 2, б), в котором невозможны устойчивые состояния электронов. Электроны в заполненной зоне должны приобрести в результате теплового

или другого внешнего воздействия достаточную энергию, чтобы перейти в зону проводимости. У диэлектриков этот энергетический зазор столь велик, что при комнатной температуре лишь весьма малое количество электронов может переходить в зону проводимости, и, соответственно, электропроводность диэлектриков весьма мала.

В полупроводниках энергетический зазор между валентной зоной и зоной проводимости также существует, но он сравнительно невелик (рис. 2, в). Соответственно требуется значительно меньшая, чем в диэлектриках, энергия для перевода электрона из валентной зоны в зону проводимости. При этом образуется пара электрон—дырка. Перешедший в зону проводимости электрон является свободным электроном, так как в этой зоне имеется множество незанятых состояний, в которые он может легко переходить. Возникшее в валентной зоне незанятое место (дырка) также обеспечивает возможность перехода в него другого электрона в этой валентной зоне, т. е. происходит как бы перемещение дырки. Таким образом, в таком полупроводнике возникает электронно-дырочная проводимость, т. е. движение под действием внешнего электрического поля электронов в зоне проводимости в одном направлении и дырок в валентной зоне в другом направлении. Но особенно ценной является возможность путем введения примесей придать полупроводнику преимущественно электронную или преимущественно дырочную проводимость, о чем будет сказано при рассмотрении полупроводниковых приборов.

Основной задачей настоящего курса является изучение электромагнитных процессов, происходящих в различных электротехнических устройствах. Поэтому мы будем рассматривать главным образом макроскопические процессы. Иными словами, мы будем осреднять во времени и в пространстве микроскопические неоднородности, являющиеся результатом того, что изучаемые нами процессы в действительности представляют собою совокупность огромного числа процессов элементарных. Однако мы будем обращаться к рассмотрению элементарных процессов в тех случаях, когда это будет необходимо для физического объяснения исследуемых явлений. Осредняя в указанном смысле процессы, происходящие в веществе, мы будем характеризовать вещество соответствующими осредненными параметрами и при этом часто будем называть вещество средой. Заметим, что *однородной* называют среду, которая во всех элементах объема обладает одинаковыми физическими свойствами. *Изотропной* называют среду, обладающую в каждом элементе объема одинаковыми свойствами во всех направлениях.

#### § 4. Напряженность электрического поля

Исследуя электростатическое поле, мы будем предполагать, что заряженные проводящие тела находятся в идеальной изолирующей среде, не обладающей электропроводностью. При этом заряды на телах могут сохраняться сколь угодно долго.

Для обследования электрического поля во всех его точках необходимо взять пробное *точечное заряженное тело*, имеющее столь малые линейные размеры, что в пределах его обследуемое поле можно рассматривать как однородное. Кроме того, заряд  $q_0$  этого пробного тела должен быть достаточно мал. Размеры пробного тела, а также его заряд должны быть достаточно малы, чтобы внесение его в исследуемое поле не вызвало сколько-нибудь заметного перераспределения на других телах зарядов, определяющих это поле.

Обследуя при помощи пробного точечного заряженного тела электростатическое поле вокруг неподвижных заряженных тел, мы обнаруживаем, что в каждой точке этого поля пробное тело испытывает вполне определенную по величине и направлению механическую силу.

Пользуясь этим, мы и определим *основную физическую величину*, характеризующую электрическое поле в каждой его точке и называемую *напряженностью электрического поля*.

*Напряженность электрического поля равна отношению механической силы  $f$ , действующей на неподвижное положительно заряженное пробное тело, помещенное в данную точку поля, к величине заряда  $q_0$  этого тела.* Напряженность электрического поля изображают вектором  $E$ , по направлению совпадающим с вектором  $f$  механической силы, действующей на положительно заряженное проб-

ное тело. Имеем:

$$E = \frac{f}{q_0}.$$

Полное отсутствие влияния заряда  $q_0$  на распределение зарядов, определяющих исследуемое поле, будет иметь место, если величина  $q_0$  будет стремиться к нулю. Соответственно, можно дать следующее точное определение:

*Напряженность электрического поля есть векторная величина, равная пределу отношения силы, с которой электрическое поле действует на неподвижное точечное заряженное тело, внесенное в рассматриваемую точку поля, к заряду этого тела, когда этот за-*

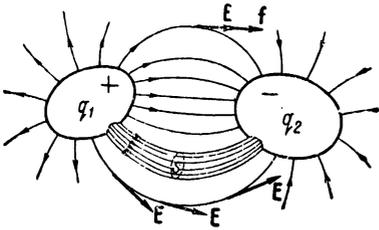


Рис. 3.

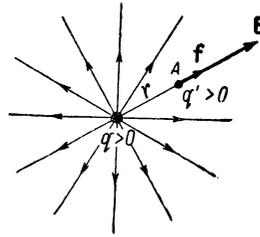


Рис. 4.

*ряд стремится к нулю, и направление которой принимается совпадающим с направлением силы, действующей на положительно заряженное точечное тело:*

$$E = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{f}{q_0}.$$

Определив напряженность поля во всех его точках, можно провести ряд линий так, чтобы в каждой точке этих линий касательные к ним совпадали по направлению с вектором напряженности поля (рис. 3). Эти линии называют *линиями напряженности* электрического поля. На чертеже их снабжают стрелками, указывающими направление вектора  $E$ . Совокупность таких линий образует картину электрического поля.

Вообразим замкнутый контур, ограничивающий некоторую поверхность  $s$  (рис. 3), и проведем через все точки этого контура линии напряженности поля. Совокупность этих линий образует трубчатую поверхность. Область электрического поля, ограниченную такой трубчатой поверхностью, называют *трубкой напряженности поля*.

Определим напряженность поля неподвижного точечного заряженного тела с зарядом  $q$  (рис. 4), расположенного в пустоте. Линейные размеры такого тела считаем весьма малыми по сравнению с расстоянием от него до точек, в которых рассматривается его поле. Обследуя поле точечного заряженного тела, мы обнаруживаем, что напряженность этого поля имеет направление вдоль радиусов  $r$ ,

исходящих из точки расположения тела, причем при  $q > 0$  ее направление совпадает с направлением радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ , и что величина напряженности поля пропорциональна заряду  $q$  и обратно пропорциональна квадрату расстояния  $r$ . То обстоятельство, что вектор  $\mathbf{E}$  имеет указанное направление и что величина  $E$  зависит только от  $r$ , является вполне естественным, так как поле уединенного точечного заряженного тела должно обладать сферической симметрией.

Действие заряженного тела передается через сферические поверхности  $s = 4\pi r^2$ , охватывающие его. Поэтому, естественно, считать напряженность поля изменяющейся обратно пропорционально величине этой поверхности, что соответствует опытному факту изменения  $E$  обратно пропорционально  $r^2$ . Таким образом, можем написать:

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q}{4\pi r^2}.$$

Величину  $\epsilon_0$  называют *электрической постоянной*. Мы предположили, что точечное тело с зарядом  $q$  расположено в пустоте. Соответственно, электрическая постоянная  $\epsilon_0$  относится к случаю, когда электрическое поле рассматривается в пустоте.

Если точечное тело с зарядом  $q$  окружено однородным и изотропным изолирующим веществом, то, как показывает опыт, напряженность поля изменяется по сравнению с тем случаем, когда тело с тем же зарядом находится в пустоте. Соответственно, пишут:

$$E = \frac{1}{\epsilon} \frac{q}{4\pi r^2}.$$

Величину  $\epsilon$  при этом называют *абсолютной диэлектрической проницаемостью* вещества. Она является основной характеристикой диэлектрика. *Диэлектрической проницаемостью* вещества или *относительной диэлектрической проницаемостью вещества* называют величину  $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ , равную отношению абсолютной диэлектрической проницаемости вещества  $\epsilon$  к электрической постоянной  $\epsilon_0$ .

Числовое значение величины  $\epsilon_0$ , а также для данного вещества и величины  $\epsilon$ , зависит от выбора единиц измерения электрического заряда, длины и механической силы. Мы в дальнейшем будем пользоваться абсолютной электромагнитной системой единиц, в которой исходными механическими единицами являются единица длины — *метр*, единица массы — *килограмм* и единица времени — *секунда* и которая включает в себя все практические электромагнитные единицы, а именно: *ампер*, *вольт*, *ом*, *кулон*, *вебер*, *фарада* и *генри*. Полагая, что исходной электромагнитной единицей является ампер, мы будем обозначать эту систему МКСА. Заметим, что в этой единой системе механических, электрических и магнитных единиц единицей силы является *ньютон*, единицей энергии и работы *джоуль* и единицей мощности *ватт*.

Соотношения между единицами системы МКСА и единицами системы СГС даны в приложении.

Электрическая постоянная  $\epsilon_0$  в системе МКСА имеет значение:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7} v_0^2} \frac{\text{Фарад}}{\text{метр}},$$

где  $v_0 = 2,998 \cdot 10^8 \approx 3 \cdot 10^8$  — числовое значение скорости света в пустоте, выраженной в метрах в секунду.

Следовательно:

$$\epsilon_0 \approx \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ ф/м.}$$

Если поместить в точку  $A$  (рис. 4) другой точечный заряд  $q'$ , то он будет испытывать в поле первого заряда механическую силу  $f = Eq'$ . Следовательно,

$$f = \frac{1}{\epsilon} \frac{qq'}{4\pi r^2}.$$

Если заряды  $q$  и  $q'$  находятся в пустоте, то, соответственно имеем:

$$f = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{qq'}{4\pi r^2}.$$

Такая же по величине, но противоположного направления сила действует на заряд  $q$  со стороны заряда  $q'$ , что следует на основании принципа равенства действия и противодействия.

Эти силы при  $q$  и  $q'$  одного знака являются силами отталкивания, а при  $q$  и  $q'$  разных знаков — силами притяжения.

Полученная зависимость является выражением закона Кулона.

Форму, в которой написан выше закон Кулона, называют *рациональной* формой в отличие от так называемой *нерационализованной* формы  $f = \frac{1}{\epsilon} \frac{qq'}{r^2}$ , которая сложилась исторически и применяется еще в настоящее время. Изменение силы  $f$  прямо пропорционально произведению зарядов  $q$  и  $q'$  и обратно пропорционально квадрату расстояния  $r^2$  было установлено Кулоном экспериментально в 1785 г.

Мы будем писать закон Кулона и другие зависимости в широко применяемой в настоящее время рациональной форме, так как эта форма приводит к устранению множителя  $4\pi$  из наиболее общих зависимостей и к переходу этого множителя на свое естественное место, а именно в те зависимости, которые соответствуют случаям, характеризующимся сферической симметрией. Весьма существенно

также, что при рациональной форме уравнений электромагнитного поля достигается симметрия зависимостей, относящихся к электрическим и к магнитным величинам.

Единицей электрического заряда (количества электричества) в системе единиц МКСА является *кулон* (1 к).

### § 5. Теорема Гаусса

Представим в электрическом поле поверхность  $s$ , ограниченную некоторым контуром (рис. 5). Обозначим через  $\beta$  угол между вектором  $\mathbf{E}$  и условно выбранной положительной нормалью  $N$  к поверхности в некоторой ее точке. Составляющая вектора  $\mathbf{E}$ , нормальная к элементу поверхности  $ds$ , равна  $E_n = E \cos \beta$ .

Интеграл от произведений элементов поверхности на составляющие вектора, нормальные к этим элементам, распространенный по всей поверхности  $s$ , носит название *потока вектора* сквозь эту поверхность.

Поток вектора напряженности электрического поля сквозь поверхность  $s$ , который мы обозначим через  $\Psi_E$ , равен:

$$\Psi_E = \int_s E \cos \beta ds.$$

Обозначив через  $ds$  вектор, длина которого численно равна поверхности элемента  $ds$ , а направление совпадает с направлением положительной нормали к этому же элементу, напишем выражение потока сокращенно в векторной форме:

$$\Psi_E = \int_s \mathbf{E} ds,$$

где  $\mathbf{E} ds = E \cos \beta ds$  есть скалярное произведение векторов  $\mathbf{E}$  и  $ds$ . Поток вектора есть величина скалярная.

Рассмотрим в однородном и изотропном диэлектрике замкнутую поверхность, ограничивающую часть пространства, в которой находится точечное тело с зарядом  $q$ . Замкнутая кривая на рис. 6 представляет след этой поверхности в плоскости рисунка. Определим поток вектора  $\mathbf{E}$  сквозь эту замкнутую поверхность, причем условимся считать внешнюю нормаль положительной. Выделим из всего пространства бесконечно тонкую коническую трубку напряженности поля. Эта трубка пересечет нашу замкнутую поверхность один или несколько раз, вырезая из поверхности при каждом пересечении по элементу  $ds$ . Поток вектора  $\mathbf{E}$  сквозь элемент поверхности  $ds$  равен:

$$E \cos \beta ds = \mathbf{E} ds.$$

Если элемент  $ds$  удален от точки, в которой мы предполагаем сосредоточенным заряд, на расстояние  $r$ , то

$$E = \frac{1}{\epsilon} \frac{q}{4\pi r^2} \quad \text{и} \quad \cos \beta ds = \pm r^2 d\omega,$$

где  $d\omega$  — телесный угол, под которым видна поверхность  $ds$  из точки, где расположен заряд. Действительно,  $\cos \beta ds$  есть проекция элемента  $ds$  на поверхность сферы радиуса  $r$  с центром в месте расположения заряда. Эта проекция совпадает с элементом сферы  $r^2 d\omega$ , вырезаемым конической трубкой. Знак плюс следует взять, если  $\cos \beta > 0$ , т. е. когда линия напряженности поля выходит из замкнутой поверхности, и знак минус — когда линия напряженности поля входит внутрь поверхности. Таким образом,

$$E ds = \pm \frac{1}{\epsilon} \frac{q}{4\pi} d\omega.$$

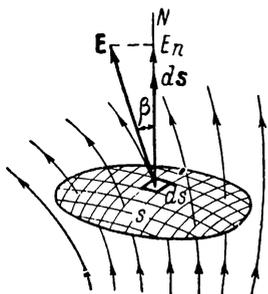


Рис. 5.

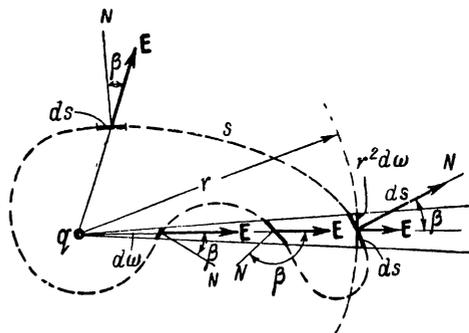


Рис. 6.

В выражение для потока сквозь сечение трубки не входит расстояние от заряда до рассматриваемого сечения, а следовательно, по абсолютному значению поток одинаков во всех сечениях одной и той же трубки. При этом поток мы должны считать положительным, если трубки напряженности поля выходят из замкнутой поверхности, и отрицательным — если они входят внутрь ее.

Если заряд  $q$  находится внутри замкнутой поверхности (рис. 6), то трубки пересекают поверхность либо один раз, либо любое, но обязательно нечетное число раз. В итоге, подсчитывая сумму потоков сквозь все сечения данной трубки замкнутой поверхностью, мы получим величину:

$$E ds = \frac{1}{\epsilon} \frac{q}{4\pi} d\omega,$$

так как число выходов радиуса-вектора превышает число вхождений на единицу. Распространяя в левой части интегрирование по всей поверхности, в правой части мы должны просуммировать телесные углы всех элементарных трубок, т. е. взять полный телесный угол, охватывающий все пространство вокруг точечного заряда. Такой угол равен  $4\pi$ . В итоге получаем уравнение:

$$\oint_S E ds = \frac{q}{\epsilon},$$

которое выражает теорему Гаусса.

Так как интеграл вектора напряженности поля по замкнутой поверхности оказался не зависящим от положения заряда внутри объема, ограниченного этой поверхностью, то теорема Гаусса справедлива и в случае, если заряд  $q$  расположен на теле любой формы или  $q$  является алгебраической суммой зарядов нескольких тел. Важно только, чтобы все эти заряды находились внутри рассматриваемой поверхности.

Итак, теорема Гаусса гласит:

*поток вектора напряженности электрического поля сквозь замкнутую поверхность в однородном и изотропном диэлектрике равен отношению электрического заряда, заключенного внутри этой поверхности, к абсолютной диэлектрической проницаемости диэлектрика.*

Если заряды расположены в пустоте, то в выражение теоремы Гаусса вместо  $\epsilon$  войдет электрическая постоянная  $\epsilon_0$ .

Применяя теорему Гаусса к поверхности, ограничивающей отрезок трубки напряженности поля (рис. 7), имеем:

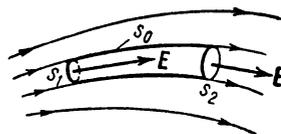


Рис. 7.

$$\oint_s \mathbf{E} ds = \int_{s_1} \mathbf{E} ds + \int_{s_2} \mathbf{E} ds + \int_{s_0} \mathbf{E} ds = 0.$$

Но  $\int_{s_0} \mathbf{E} ds = 0$ , так как вектор  $\mathbf{E}$  касателен к боковой поверхности  $s_0$  трубки. Следовательно,  $\int_{s_1} \mathbf{E} ds = - \int_{s_2} \mathbf{E} ds$ , т. е. *поток сквозь различные поперечные сечения трубки напряженности поля имеет одно и то же значение.* Это дает основание ввести понятие об единичной трубке, поток сквозь поперечное сечение которой равен единице потока. Тогда поток  $\Psi_E$  сквозь некоторую поверхность можно рассматривать как число единичных трубок напряженности поля, пересекающих эту поверхность. Поток сквозь элементарную поверхность  $ds$ , нормальную к вектору  $\mathbf{E}$ , равен  $d\Psi_E = \mathbf{E} ds = E ds$ , и, следовательно, величина вектора  $\mathbf{E}$  равна плотности потока

$$E = \frac{d\Psi_E}{ds},$$

т. е. числу единичных трубок, проходящих через единицу поверхности, нормальной к вектору  $\mathbf{E}$ . Таким образом, густота единичных трубок или линий напряженности поля, совмещенных с осями этих трубок, дает представление о величине вектора  $\mathbf{E}$ .

Из теоремы Гаусса вытекает важное следствие, что электрический заряд на заряженном проводящем теле любой формы распределяется на его поверхности или, точнее, в весьма тонком слое вблизи поверхности.

Напряженность поля внутри проводника при статическом состоянии зарядов должна быть равна нулю. Действительно, при

наличии электрического поля в проводящей среде свободные электрически заряженные частицы придут в движение, и, следовательно, статическое состояние установится только тогда, когда напряженность поля внутри проводника во всем его объеме станет равной нулю. Поэтому, проводя любую замкнутую поверхность внутри проводящего тела, мы получим поток  $\Psi_E = \oint_S \mathbf{E} \, ds$  сквозь

эту поверхность равным нулю. Следовательно, согласно теореме Гаусса, заряд внутри такой поверхности также равен нулю. Отсюда следует, что внутри тела суммарный заряд равен нулю, и заряд тела распределен только на поверхности тела.

Заклучение, что поле внутри заряженного проводящего тела отсутствует, справедливо и для полого проводника, если полость замкнута со всех сторон. Действительно, в теле сплошного заряженного проводника поля нет. Поэтому образование полости, т. е. замена части проводящей среды диэлектриком внутри полости, не может сказаться на распределении зарядов по внешней поверхности проводника, и поле в полости будет отсутствовать так же, как и внутри сплошного проводника.

Отрицательный заряд металлического тела является результатом избытка свободных электронов в теле. Эти избыточные электроны располагаются вблизи поверхности заряженного тела, так как внутри тела  $\rho = 0$ . Конечно, можно говорить об отсутствии заряда внутри тела только при макроскопическом рассмотрении явления, т. е. если разделять тело на элементы объема, хотя и малые по сравнению с объемом тела, но все же такие, чтобы в каждом элементе было сосредоточено большое число элементарных положительно и отрицательно заряженных частиц, так что суммарный заряд в элементе объема получается равным нулю.

В положительно заряженном металлическом теле имеется недостаток свободных электронов, так как часть из них при электризации тела была отдана некоторому другому телу, зарядившемуся отрицательно. Область, где положительный заряд преобладает над отрицательным зарядом электронов, ограничивается тонким слоем вблизи поверхности тела.

Применим теорему Гаусса для вычисления напряженности поля в случаях, когда имеется сферическая, осевая или плоская симметрия.

Рассмотрим уединенный проводящий шар радиуса  $R$  с зарядом  $q$  (рис. 8).

Во всех точках любой сферической поверхности радиуса  $r$  ( $r > R$ ), концентричной с заряженным шаром, вектор  $\mathbf{E}$  одинаков по величине и направлен по нормали к поверхности. Поэтому имеем,  $\oint_S \mathbf{E} \, ds = \oint_S E \, ds = E \oint_S ds = 4\pi r^2 E$ . На основании теоремы Гаусса

можем написать:  $4\pi r^2 E = \frac{q}{\epsilon}$ .

Следовательно:

$$E = \frac{1}{\epsilon} \frac{q}{4\pi r^2},$$

т. е. вне заряженного шара поле в точности такое же, как если бы весь заряд  $q$  был сосредоточен в центре шара.

В нижней части рис. 8 изображена зависимость напряженности поля  $E$  от радиуса  $r$ .

В качестве другого примера применения теоремы Гаусса рассмотрим поле уединенного бесконечно длинного прямолинейного

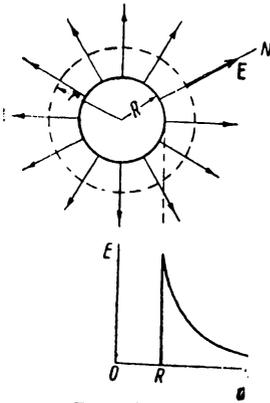


Рис. 8.

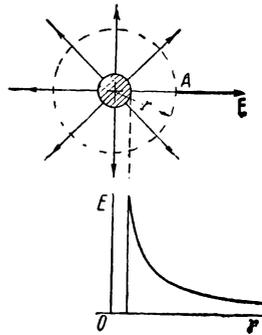


Рис. 9.

провода кругового сечения. На рис. 9 показано нормальное сечение провода. Пусть  $\tau$  — линейная плотность заряда, численно равная заряду на единицу длины провода. Для определения напряженности в точке  $A$  на расстоянии  $r$  от оси провода проведем через точку  $A$  цилиндрическую поверхность, соосную с проводом. Замкнем поверхность двумя плоскими поверхностями, нормальными к оси провода и удаленными друг от друга на расстояние  $l$ . Вследствие симметрии относительно оси провода линии напряженности поля должны быть радиальными прямыми, нормальными к поверхности провода, и во всех точках, равноудаленных от оси провода, напряженность поля должна иметь одинаковое значение. Поток вектора напряженности поля через плоские основания цилиндра равен нулю, так как линии напряженности поля касательны к ним. На боковой цилиндрической поверхности вектор  $E$  всюду нормален к поверхности и во всех точках имеет одну и ту же величину. Применяя теорему Гаусса к рассматриваемой замкнутой поверхности, получим:

$$\oint_s \mathbf{E} \, ds = 2\pi r l E = \frac{\tau l}{\epsilon} \quad \text{или} \quad E = \frac{\tau}{\epsilon 2\pi r}.$$

Определим еще поле бесконечной равномерно заряженной плоскости (рис. 10). Пусть поверхностная плотность заряда равна  $\sigma$ . Окружим часть плоскости замкнутой поверхностью, образованной двумя плоскими поверхностями  $s$ , параллельными заряженной плоскости, и боковой, нормальной к ней цилиндрической поверхностью. Поле по обе стороны заряженной плоскости однородно. Линии напряженности поля касательны к боковой цилиндрической

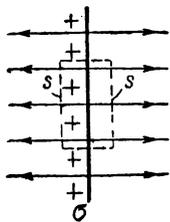


Рис. 10.

поверхности и нормальны к плоским поверхностям  $s$ . Теорема Гаусса дает:

$$\oint_s \mathbf{E} ds = E \cdot 2s = \frac{\sigma s}{\epsilon} \quad \text{или} \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon}.$$

Поле параллельных пластин с зарядами разного знака, но одинаковой плотности  $\sigma$  (рис. 11) можно получить наложением полей

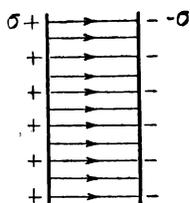


Рис. 11.

положительной и отрицательной пластин. Вне пластин  $E = 0$ , между пластинами  $E = \frac{\sigma}{\epsilon}$ .

## § 6. Электрическое напряжение

Если частица с зарядом  $q$  переносится в электрическом поле вдоль некоторого пути, то действующие на нее силы поля совершают работу. Отношение этой работы к величине переносимого заряда представляет собой физическую величину, называемую *электрическим напряжением* и характеризующую свойства электрического поля вдоль заданного пути, а именно способность поля совершать работу при перемещении заряженных частиц вдоль этого пути.

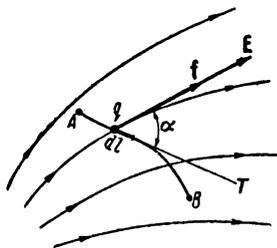


Рис. 12.

Представим, что частица с положительным зарядом  $q$  переносится в электрическом поле из точки  $A$  в точку  $B$  вдоль некоторого определенного пути (рис. 12). Сила  $\mathbf{f} = q\mathbf{E}$ , действующая на частицу, в каждой точке пути направлена по касательной к линии напряженности поля, проходящей через эту точку. Пусть  $\alpha$  — угол между направлением силы  $\mathbf{f}$  и положительным направлением касательной  $T$  к пути в некоторой его точке. Обозначим через  $d\mathbf{l}$  вектор, равный по величине элементу пути  $dl$  и направленный в положительном направлении касательной, т. е. в сторону перемещения заряженной частицы. Тогда  $\alpha$  есть угол между векторами  $\mathbf{E}$  и  $d\mathbf{l}$ .

При перемещении обладающей зарядом частицы по пути  $dl$  силы поля совершают работу:

$$dA = f \cos \alpha dl = qE \cos \alpha dl = q \mathbf{E} dl.$$

Работа, совершаемая силами поля при перемещении частицы вдоль всего пути от точки  $A$  до точки  $B$ , равна:

$$A = \int_A^B f \cos \alpha dl = q \int_A^B E \cos \alpha dl = q \int_A^B \mathbf{E} dl.$$

Она пропорциональна линейному интегралу  $\int_A^B E \cos \alpha dl$  напряженности поля вдоль заданного пути.

Этот линейный интеграл равен *электрическому напряжению* вдоль заданного пути от  $A$  к  $B$ . Принято обозначать напряжение буквой  $u$ . Таким образом,

$$u_{AB} = \int_A^B E \cos \alpha dl = \int_A^B \mathbf{E} dl.$$

Следовательно, работа, совершаемая при перемещении частицы с зарядом  $q$  по заданному пути от  $A$  до  $B$ , может быть представлена как произведение заряда на напряжение  $u_{AB}$  вдоль этого пути:

$$A = qu_{AB}.$$

При этом в общем случае рассматриваемый путь может быть взят целиком в проводнике, целиком в диэлектрике или может проходить частично в проводнике и частично в диэлектрике.

В соответствии с изложенным *электрическое напряжение представляет собой физическую величину, характеризующую электрическое поле вдоль рассматриваемого пути и равную линейному интегралу напряженности электрического поля вдоль этого пути.*

Нередко, говоря о напряжении вдоль некоторого участка пути, употребляют термин *падение напряжения* вдоль этого участка. Соответственно, линейный интеграл напряженности электрического поля вдоль некоторого замкнутого контура  $\oint \mathbf{E} dl$  представляет собой сумму падений напряжений вдоль всех участков этого контура.

Единицей напряжения в системе единиц МКСА является *вольт* (1 в).

Из сказанного вытекает, что величина *напряженности электрического поля равна падению напряжения, отнесенного к единице длины линии напряженности поля.* В самом деле, падение напряжения на пути  $dl$  равно  $du = E dl$ , если путь  $dl$  совпадает с линией напряженности поля, и, следовательно,  $E = \frac{du}{dl}$ . Поэтому единицей

напряженности электрического поля в системе единиц МКСА является *вольт на метр* (1 в/м).

### § 7. Потенциал электростатического поля

В электростатическом поле линейный интеграл напряженности поля по любому замкнутому контуру равен нулю:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0.$$

Это важное свойство электростатического поля вытекает из принципа сохранения энергии. Рассмотрим систему покоящихся

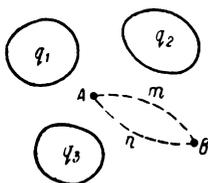


Рис. 13.

заряженных тел (рис. 13) и предположим, что по замкнутому пути  $AmbnA$  перемещается точечное тело с зарядом  $q$ . На части замкнутого пути движение будет совершаться в направлении сил поля, и работа, затраченная силами поля, будет положительной. На другой части замкнутого пути движение будет происходить против сил поля и, соответственно, работа сил поля будет отрицательной. Работа, затраченная силами

поля на перемещение тела с зарядом  $q$  по всему замкнутому пути, должна быть равна нулю:

$$q \oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0, \text{ т. е. } \oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0.$$

Действительно, при отсутствии этого условия всегда можно было бы выбрать такое направление обхода контура  $AmbnA$ , чтобы работа оказалась положительной. Однако после обхода по замкнутому пути система, включая и тело с зарядом  $q$ , возвращается в точности в исходное состояние, а это значит, что можно было бы повторять обход контура телом с зарядом  $q$  любое число раз и получать при каждом обходе конечную положительную работу. Возможность существования подобного неисчерпаемого источника энергии противоречит принципу сохранения энергии. Таким образом, в электростатическом поле линейный интеграл напряженности поля по любому замкнутому контуру должен быть равен нулю.

Отсюда непосредственно вытекает независимость линейного интеграла напряженности поля от выбора пути интегрирования при заданных начальной и конечной точках  $A$  и  $B$  пути. Действительно:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_{AmB} \mathbf{E} d\mathbf{l} + \int_{BnA} \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0,$$

откуда

$$\int_{AmB} \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \int_{BnA} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_{AnB} \mathbf{E} d\mathbf{l},$$

а так как пути  $m$  и  $n$  взяты произвольно, то, следовательно, интеграл  $\int_A^B \mathbf{E} d\mathbf{l}$  в электростатическом поле не зависит от выбора пути интегрирования и является только функцией координат точек  $A$  и  $B$ .

Величину, равную этому интегралу, называют разностью электрических потенциалов точек  $A$  и  $B$  и обозначают  $U_A - U_B$ . Имеем

$$U_A - U_B = \int_A^B \mathbf{E} d\mathbf{l}.$$

С другой стороны, этот интеграл равен напряжению вдоль некоторого пути от точки  $A$  к точке  $B$ . Следовательно, в применении к электростатическому полю термины «напряжение» и «разность потенциалов» относятся к одной и той же величине.

В дальнейшем разность потенциалов будем обозначать также буквой  $u$ , как и напряжение, в соответствии с чем будем применять обозначение:  $U_A - U_B = u_{AB}$ .

Из сказанного выше ясно, что разность электрических потенциалов двух точек электростатического поля численно равна работе сил поля при перемещении точечного заряженного тела с положительным зарядом, равным единице, из одной данной точки в другую.

Изберем в качестве конечной точки заданную в пространстве точку  $P$ . Тогда значение интеграла  $\int_A^P \mathbf{E} d\mathbf{l}$  явится функцией только координат  $x, y, z$  точки  $A$ . Обозначая эту функцию через  $U_A$  или  $U(x, y, z)$ , можем написать:

$$\int_A^P \mathbf{E} d\mathbf{l} = U_A = U(x, y, z).$$

Величина  $U$  называется электрическим потенциалом рассматриваемой точки поля. Потенциал заданной точки  $P$  равен нулю, так как  $U_P = \int_P^P \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$ .

Электрический потенциал, характеризующий данное поле, может быть определен лишь с точностью до произвольной постоянной, зависящей от произвольного выбора точки  $P$ , в которой потенциал принимается равным нулю.

Электрическое поле, которое может быть в каждой точке охарактеризовано с точностью до произвольной постоянной скалярной величиной, именуемой электрическим потенциалом, носит название потенциального электрического поля. Таковым, в частности, является электростатическое поле.

В реальных практических задачах электростатики обычно принимают равным нулю потенциал поверхности земли. При теоретическом рассмотрении задач, в которых рассматриваются заряжен-

ные тела, расположенные в ограниченной области пространства и окруженные бесконечной диэлектрической средой, обычно принимают равным нулю потенциал точек, бесконечно удаленных от заряженных тел, т. е. определяют потенциал как интеграл:

$$U = \int_A^{\infty} \mathbf{E} \, dl.$$

Поверхности, которые пересекаются линиями напряженности электрического поля под прямым углом, являются *поверхностями равного электрического потенциала*. Действительно, вдоль любой линии на этой поверхности имеем  $\int_A^B E \cos \alpha \, dl = 0$ , так как  $\cos \alpha = 0$ . Следовательно, разность потенциалов любых двух точек  $A$  и  $B$ , лежащих на этой поверхности, равна нулю.

Уравнение  $U(x, y, z) = \text{const}$  определяет совокупность точек, лежащих на поверхности равного потенциала, т. е. является уравнением этой поверхности. Следы поверхности равного потенциала на плоскости чертятся называют *линиями равного потенциала*. Очевидно, линии равного потенциала пересекаются с линиями напряженности поля всюду под прямым углом.

Как мы видели, во всякой электростатической системе поле внутри проводящих тел отсутствует ( $\mathbf{E} = 0$ ) и, следовательно, каждое проводящее тело имеет во всем своем объеме одинаковый потенциал. Поверхности проводящих тел суть поверхности равного электрического потенциала, и линии напряженности поля в диэлектрике нормальны к ним.

✓ Определим потенциал поля точечного заряженного тела (с зарядом  $q$ ) (см. рис. 4). При этом естественно выбрать путь интегрирования вдоль радиальной линии напряженности поля. Тогда будем иметь  $\mathbf{E} \, dl = E \, dr$  и, считая точку  $P$  удаленной в бесконечность, получим:

$$U = \int_r^{\infty} E \, dr = \int_r^{\infty} \frac{1}{\epsilon} \frac{q}{4\pi r^2} \, dr = \left| -\frac{1}{\epsilon} \frac{q}{4\pi r} \right|_r^{\infty} = \frac{1}{\epsilon} \frac{q}{4\pi r}.$$

Потенциал стремится к нулю в бесконечности и имеет конечное значение во всем пространстве, за исключением особой точки  $r=0$ , в которой предполагается сосредоточенным заряд. Заметим, что последнее предположение является математической абстракцией, так как всякое физическое тело и, соответственно, его заряд занимает некоторый, хотя бы очень малый, объем пространства. По такому же закону изменяется потенциал в пространстве вне заряженного шара, так как поле вне шара такое же, как если бы весь заряд шара был сосредоточен в его центре.

Найдем еще потенциал электрического диполя (рис. 14), т. е. системы двух равных, противоположных по знаку точечных зарядов  $q_1 = -q_2 = q$ , смещенных друг относительно друга на расстояние  $d$ . При употреблении термина «диполь» принято считать, что  $d$  мало по сравнению с расстоянием  $r$  от центра диполя, на котором рассматривается его поле. Пользуясь принципом наложения, получаем потенциал в точке  $A$ :

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left( \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}.$$

При  $r \gg d$  можно принять:  $r_1 r_2 \approx r^2$   
и  $r_2 - r_1 \approx d \cos \varphi$ .

Следовательно,

$$U = \frac{qd \cos \varphi}{4\pi\epsilon r^2} = \frac{p \cos \varphi}{4\pi\epsilon r^2},$$

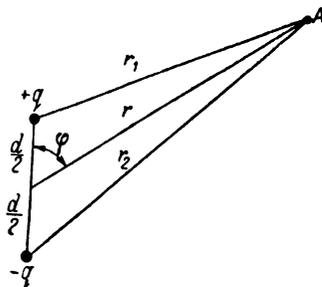


Рис. 14.

где  $p = qd$  является величиной *электрического момента диполя*.

Под *электрическим моментом диполя* понимают векторную величину  $\mathbf{p}$ , равную произведению  $qd$  и направленную от отрицательного к положительному заряду.

## § 8. Электродвижущие силы

Характерное свойство всякого потенциального электрического поля и, в частности, электростатического поля, а именно равенство нулю линейного интеграла напряженности поля вдоль любого замкнутого контура, относится лишь к области пространства, расположенной вне источников так называемых *электродвижущих сил* (э. д. с.).

Появление э. д. с. связано с наличием электрических полей неэлектростатического и в общем случае непотенциального характера.

В общем случае мы будем говорить, что в замкнутом контуре действует электродвижущая сила, если линейный интеграл напряженности электрического поля вдоль замкнутого контура не равен нулю, причем, как будет сейчас показано, этот линейный интеграл и равен э. д. с., действующей в контуре. Источниками э. д. с. могут являться, например, электрические генераторы, гальванические элементы, аккумуляторы, термоэлементы.

Условимся совокупность устройств, предназначенных для прохождения в них электрического тока, называть *электрической цепью*, при условии, что электромагнитные процессы в этих устройствах могут быть описаны с помощью понятий об э. д. с., токе и напряжении.

Если в замкнутой электрической цепи под действием э. д. с. возникает электрический ток, то эта э. д. с. совершает работу на поддержание тока в цепи. Эта работа совершается внутри источника э. д. с. за счет энергии какого-либо вида, в электрическом генераторе — за счет механической работы двигателя, приводящего во вращение генератор, в гальванических элементах и аккумуляторах — за счет электрохимической энергии, в термоэлементах — за счет тепловой энергии.

Для уяснения сущности величины, к которой принято относить понятие электродвижущая сила, рассмотрим в виде примера гальванический элемент (рис. 15). Тела  $A$  и  $B$ , приключенные к зажимам элемента, оказываются заряженными под действием э. д. с. элемента. Интеграл вектора  $\mathbf{E}$  по любому пути  $m$  в диэлектрике между телами  $A$  и  $B$  равен разности потенциалов этих тел:

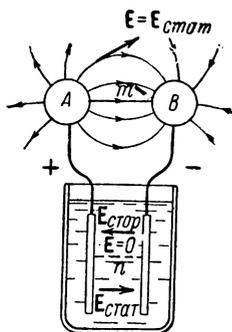


Рис. 15.

$$\int_{AmB} \mathbf{E} d\mathbf{l} = U_A - U_B = u_{AB}.$$

Однако, если мы выберем путь интегрирования от тела  $A$  по соединительному проводнику к положительному электроду элемента, затем через электролит (путь  $n$ ) к отрицательному электроду и, наконец, по соединительному проводнику к телу  $B$ , то мы должны признать, что вдоль этого пути интеграл равен нулю:

$$\int_{AnB} \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0.$$

Действительно, весь этот путь лежит целиком в проводящей среде. В металле проводимость обеспечивается наличием электронов проводимости, в электролите — наличием положительных ионов, обусловленным диссоциацией части молекул растворенного вещества. Несмотря на наличие на всем рассматриваемом пути обладающих электрическим зарядом свободных частиц, упорядоченное движение их не возникает — ток в цепи отсутствует. Это означает, что на всем указанном пути  $\mathbf{E} = 0$ , а следовательно, равен нулю и интеграл вектора  $\mathbf{E}$ .

В тонких слоях у поверхностей электродов отсутствие результирующего электрического поля ( $\mathbf{E} = 0$ ) является результатом наложения внутри этих слоев на электрическое поле с напряженностью  $\mathbf{E}_{стат}$ , образованного зарядами электродов и электролита, равного и противоположного ему *стороннего* электрического поля с напряженностью  $\mathbf{E}_{стор}$ , имеющего неэлектростатическое происхождение, что можно записать следующим образом:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{стат} + \mathbf{E}_{стор} = 0 \quad \text{или} \quad \mathbf{E}_{стат} = -\mathbf{E}_{стор}.$$

Соответственно будем иметь:

$$\int_{AnB} \mathbf{E}_{стат} d\mathbf{l} = - \int_{AnB} \mathbf{E}_{стор} d\mathbf{l} = \int_{BnA} \mathbf{E}_{стор} d\mathbf{l}.$$

Величина

$$\int_{BnA} \mathbf{E}_{стор} d\mathbf{l} = e$$

и представляет собой э. д. с. гальванического элемента, стремящуюся внутри элемента привести обладающие зарядом частицы в движение против сил электростатического поля  $\mathbf{E}_{стат}$ .

Обратим внимание на то, что э. д. с. направлена внутри источника от отрицательного его зажима к положительному. Природа этой электродвижущей силы заключается в том, что под действием давления растворения положительные ионы (атомы металла, лишенные электронов проводимости) стремятся выйти из электрода в электролит. Этому переходу противодействует осмотическое давление, которое испытывают положительные ионы металла со стороны электролита. Под действием разности этих давлений и происходит переход положительных ионов из электрода в электролит или в обратном направлении, в зависимости от того, с какой стороны давление преобладает. В итоге электрод оказывается заряженным, в первом случае отрицательно (избытком оставшихся в металле электронов проводимости), во втором случае положительно, а электролит приобретает заряд противоположного знака. Между электродом и электролитом устанавливается разность потенциалов и образуется электростатическое поле  $\mathbf{E}_{стат}$ , препятствующее переходу ионов. Переход прекращается, когда разность давлений уравнивается силами электростатического поля.

Действие на ион механической силы  $\mathbf{f}$ , обусловленной разностью давлений, эквивалентно наличию электрического поля напряженности  $\mathbf{E}_{стор} = \frac{\mathbf{f}}{q}$ , где  $q$  — заряд иона, что находится в полном соответствии с определением напряженности электрического поля. Таким образом, равновесное состояние наступает при условии:

$$\mathbf{E}_{стат} + \mathbf{E}_{стор} = \mathbf{E} = 0.$$

На рис. 15 векторы  $\mathbf{E}_{стор}$  и  $\mathbf{E}_{стат}$  условно изображены в пространстве между электродами в области, занятой электролитом, хотя, как ясно из изложенного, они отличны от нуля только в тонких слоях между электродами и электролитом.

Если электроды выполнены из разных материалов, то разности потенциалов между ними и электролитом будут, вообще говоря, различны, что приводит к появлению разности потенциалов между электродами.

Составляя линейный интеграл вектора  $\mathbf{E}$  по замкнутому контуру  $AmBnA$ , проходящему своей частью *внутри* источника э. д. с., получаем:

$$\oint_{AmBnA} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_{AmB} \mathbf{E} d\mathbf{l} + \int_{BnA} \mathbf{E} d\mathbf{l} = U_A - U_B,$$

так как

$$\int_{BnA} \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0.$$

С другой стороны,

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = \oint \mathbf{E}_{\text{стат}} d\mathbf{l} + \oint \mathbf{E}_{\text{стоп}} d\mathbf{l} = e,$$

так как

$$\oint \mathbf{E}_{\text{стат}} d\mathbf{l} = 0, \quad \text{а} \quad \oint \mathbf{E}_{\text{стоп}} d\mathbf{l} = \int_{BnA} \mathbf{E}_{\text{стоп}} d\mathbf{l} = e.$$

Следовательно,

$$e = U_A - U_B,$$

т. е. *электродвижущая сила элемента равна разности потенциалов или, что в данном случае одно и то же, напряжению на его зажимах при разомкнутой внешней цепи* (при отсутствии тока в цепи).

Из сказанного видно, что условие  $\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$  справедливо только в области пространства вне источников э. д. с.

В рассмотренном примере гальванического элемента при отсутствии тока результирующее поле (при макроскопическом рассмотрении явления) внутри элемента всюду отсутствует, что является следствием действия неэлектростатических, в данном случае электрохимических, причин. Соответственно напряжение вдоль пути  $BnA$  внутри элемента при отсутствии тока равно нулю.

Введение понятия стороннего электрического поля как составляющей результирующего поля и, соответственно, понятия э. д. с.  $e = \oint \mathbf{E}_{\text{стоп}} d\mathbf{l}$  имеет смысл в том, что именно величиной этой э. д. с. определяется работа на перенесение обладающих зарядами элементарных частиц, связанная с электрохимическими процессами. Следовательно, именно э. д. с. характеризует при прохождении тока преобразование энергии внутри элемента. В связи с этим, говоря об *источниках э. д. с.*, мы будем употреблять также термин *источник энергии*.

Весьма важным обстоятельством является то, что э. д. с. элемента почти не зависит от электрического тока в его цепи.

Электродвижущие силы возникают также при соприкосновении разнородных металлов. В этом случае возникновение э. д. с., называемых контактными э. д. с., связано с переходом электронов проводимости в месте контакта от одного металла в другой и образованием вследствие этого в одном металле избыточного

положительного, в другом — избыточного отрицательного электрического заряда. Этот переход электронов может рассматриваться как результат действия в месте контакта стороннего электрического поля, имеющего неэлектростатический характер. Появление на соприкасающихся металлах зарядов разных знаков приводит к появлению так называемой контактной разности потенциалов, равной при отсутствии тока контактной э. д. с. Контактная э. д. с. зависит от рода соприкасающихся металлов и от температуры. Она имеет порядок десятых вольт или нескольких вольт.

Как показывает опыт, э. д. с. возникает и в однородном проводнике, если проводник нагреть неравномерно по его длине, так что один конец проводника будет находиться при более высокой температуре, чем другой. Появление э. д. с. в этом случае можно пояснить некоторым переходом электронов проводимости от более нагретого конца проводника к менее нагретому вследствие того, что интенсивность теплового движения электронов возрастает с увеличением температуры.

Составим замкнутую цепь из двух разнородных проводников  $A$  и  $B$  (рис. 16). В местах спаев  $m$  и  $n$  проводников возникают контактные э. д. с. Если оба спаивания имеют одинаковую температуру, то полная э. д. с. в замкнутом контуре  $AmBnA$  равна нулю, так как э. д. с. в спаиваниях равны и противоположны друг другу. Если же температуры  $t$  и  $t_0$  спаев различны, то э. д. с.  $e$  в замкнутом контуре не равна нулю. Она определяется разностью контактных э. д. с. в спаиваниях  $m$  и  $n$  и э. д. с. в неравномерно по длине нагретых проводниках  $A$  и  $B$ . Можем написать:

$$e = e_{AB}(t) - e_{AB}(t_0) + e_A(t_0, t) + e_B(t, t_0),$$

где  $e_{AB}(t)$  — контактная э. д. с. в месте соединения проводников  $A$  и  $B$ , отсчитываемая от проводника  $A$  к проводнику  $B$ , при температуре  $t$ ;  $e_{AB}(t_0)$  — то же при температуре  $t_0$ ;  $e_A(t_0, t)$  — э. д. с. в проводнике  $A$  при температуре  $t_0$  в начале проводника и температуре  $t$  в конце проводника;  $e_B(t, t_0)$  — то же в проводнике  $B$  при температурах  $t$  в начале и  $t_0$  в конце проводника.

Э. д. с.  $e$  для данной пары проводников зависит от температур  $t$  и  $t_0$  спаев. Она называется *термоэлектродвижущей* силой. Рассмотренная цепь носит название *термоэлемента* или *термопары*. При заданной температуре  $t_0$  холодного спаивания величина  $e$  зависит только от температуры  $t$  горячего спаивания. Включив в цепь термоэлемента гальванометр, можно по величине тока в нем судить о величине  $e$  и, следовательно, о температуре  $t$  горячего спаивания. Термоэлектрические явления открыты русским академиком Ф. У. Эйнусом.

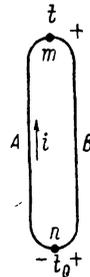


Рис. 16.

В термоэлементе действие э. д. с. при прохождении тока связано с преобразованием тепловой энергии в электромагнитную энергию.

Обычно применяемые термопары имеют э. д. с. порядка нескольких милливольт или десятых милливольт при температурах холодного и горячего спаев соответственно  $0^\circ$  и  $100^\circ$  С.

В соответствии с изложенным *электродвижущая сила, действующая вдоль некоторого пути, представляет собой физическую величину, характеризующую способность стороннего электрического поля вызывать электрический ток и равную линейному интегралу вдоль этого пути от напряженности стороннего электрического поля. Под сторонним электрическим полем мы понимаем поле, обусловленное тепловыми процессами, химическими реакциями, контактными явлениями, механическими силами и другими неэлектромагнитными (при макроскопическом рассмотрении) процессами, характеризующееся, как и всякое электрическое поле, силовым воздействием на заряженные частицы и тела, находящиеся в области, где это поле существует.* В дальнейшем понятие *электродвижущая сила* будет расширено с включением в него э. д. с., индуцируемых при изменении во времени магнитного потока. Если в замкнутой цепи под действием сторонней э. д. с. возникает ток, то в цепи происходит преобразование энергии какого-либо вида в электромагнитную энергию, и величина э. д. с. при этом численно равна работе, совершаемой силами стороннего электрического поля при перенесении вдоль замкнутой цепи единицы положительного электрического заряда.

Во всех случаях, когда в замкнутом контуре, например, взятом вдоль замкнутой электрической цепи, действует какой-либо источник э. д. с., линейный интеграл напряженности результирующего электрического поля вдоль этого контура отличен от нуля и равен э. д. с. источника.

В дальнейшем, при рассмотрении поля покоящихся заряженных систем, мы будем предполагать, что в исследуемом пространстве нет источников э. д. с. и что, следовательно, для любого контура в этом пространстве справедливо условие

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0.$$

---

## ГЛАВА ВТОРАЯ

### ПОЛЯРИЗАЦИЯ ДИЭЛЕКТРИКОВ И ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ СМЕЩЕНИЕ. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЕМКОСТЬ

#### § 9. Поляризация диэлектриков

Сила взаимодействия заряженных тел, как уже было отмечено, зависит от электрических свойств диэлектрика, окружающего тела. Эти свойства были охарактеризованы диэлектрической проницаемостью вещества. Опыт показывает, что два электрически заряженных тела с зарядами  $q_1$  и  $q_2$  взаимодействуют в любом однородном и изотропном диэлектрике с силой меньшей, нежели в пустоте. Соответственно напряженность электрического поля тела с зарядом  $q$ , расположенного в любом однородном и изотропном диэлектрике, оказывается меньшей, чем в случае, когда то же тело с таким же зарядом находится в пустоте. Так как абсолютная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  или, соответственно, электрическая постоянная  $\epsilon_0$  входят в выражения для механической силы и для напряженности поля в знаменателе, то в соответствии с вышесказанным абсолютная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  любого вещества всегда больше электрической постоянной  $\epsilon_0$ .

Роль диэлектрика в электрических явлениях связана с особым физическим состоянием, которое он приобретает под действием электрического поля. В отличие от проводящих веществ, в которых имеется достаточное количество свободных элементарных заряженных частиц, в диэлектриках все или, точнее, практически все элементарные заряженные частицы связаны внутриатомными, внутримолекулярными или междумолекулярными силами. Поэтому в диэлектриках, подверженных действию внешнего электрического поля, ток проводимости, обусловленный переносом электрических зарядов свободными электронами или ионами, обычно ничтожно мал. Как выше было отмечено, согласно квантовым представлениям ничтожно малая электропроводность диэлектриков является результатом наличия большого энергетического зазора (запрещенной зоны) между валентной зоной и зоной проводимости. При комнатной температуре лишь весьма малое количество электронов обладает достаточной энергией, чтобы преодолеть этот зазор и пе-

рейты в зону проводимости. В диэлектриках ширина запрещенной зоны достигает порядка 10 электронвольт, в то время как среднее значение энергии теплового движения при комнатной температуре равно около 0,3 электронвольт (1 электронвольт есть единица энергии, равная кинетической энергии, приобретаемой электроном при прохождении его в электрическом поле разности потенциалов в 1 в). Мы будем считать электропроводность диэлектриков равной нулю.

При внесении диэлектрика во внешнее поле элементарные заряженные частицы, входящие в состав молекул вещества, испытывают со стороны поля механические силы. Эти силы вызывают внутри молекул смещение частиц с положительными зарядами в сторону поля и частиц с отрицательными зарядами в противоположном направлении. Если напряженность поля не чрезмерно велика, то частицы с положительными и отрицательными зарядами совершенно разойтись не могут, так как они удерживаются внутриатомными, внутримолекулярными или междумолекулярными силами.

Существует ряд веществ, молекулы которых при отсутствии внешнего поля электрически нейтральны, т. е. заряды, входящие в состав такой молекулы, в среднем не создают электрического поля во внешнем по отношению к молекуле пространстве, т. е. центр электрического действия всех электронов в молекуле совпадает с центром действия положительных ядер.

В результате смещения под действием внешнего поля положительно и отрицательно заряженных частиц, входящих в состав молекулы, в противоположных направлениях центры электрического действия первых и вторых уже не будут совпадать, и во внешнем пространстве молекула будет восприниматься как диполь, т. е. как система двух равных, противоположных по знаку точечных зарядов  $q$  и  $-q$ , смещенных друг относительно друга на некоторое расстояние  $d$ .

Под действием внешнего электрического поля каждая молекула обращается в диполь, и диэлектрик оказывается в *поляризованном* состоянии.

*Электрическим моментом некоторого объема поляризованного диэлектрика называют векторную величину, равную геометрической сумме электрических моментов всех диполей, заключенных в этом объеме.*

Степень электрической поляризации диэлектрика в данной точке характеризуют векторной величиной, называемой *поляризованностью* или *интенсивностью поляризации*, и обозначают буквой  $P$ .

*Поляризованность равна пределу отношения электрического момента некоторого объема диэлектрика, содержащего данную точку, к этому объему, когда последний стремится к нулю.*

В веществах, молекулы которых приобретают полярность по вышерассмотренной схеме в результате деформации под действием

внешнего поля, оси всех диполей имеют одинаковое направление, и можно написать:

$$P = N_1 p = N_1 q d,$$

где  $N_1 = \frac{dN}{dV}$  — число диполей (молекул), отнесенное к единице объема вещества, причем  $dN$  — число диполей в объеме  $dV$ . Опыт показывает, что в полях, с которыми мы имеем дело на практике, для всех таких веществ поляризованность пропорциональна напряженности поля, т. е.

$$P = \alpha E.$$

Коэффициент  $\alpha$  назовем *абсолютной диэлектрической восприимчивостью* вещества. Отношение  $\alpha_r = \frac{\alpha}{\epsilon_0}$  называют *относительной диэлектрической восприимчивостью* или просто *диэлектрической восприимчивостью*. Рассмотренные выше диполи именуют *квазиупругими диполями*. К диэлектрикам, молекулы которых обладают такими свойствами, относятся, например, газы: водород, кислород, азот. Диэлектрическая восприимчивость этих веществ не зависит от температуры, так как силы внешнего электрического поля уравновешиваются в них внутримолекулярными силами, не зависящими от теплового движения молекул.

Существует другой класс изолирующих веществ, молекулы которых обладают отличным от нуля электрическим моментом даже при отсутствии внешнего поля. Такие молекулы называют *полярными*. В виде примера укажем газ хлористый водород (HCl), молекулы которого состоят из положительного иона водорода и отрицательного иона хлора, находящихся на некотором расстоянии друг от друга, т. е. являются диполями. Тепловое движение приводит диполи в хаотическое расположение, и электрические поля отдельных диполей взаимно нейтрализуются во внешнем пространстве. Если внести такое вещество во внешнее поле, то диполи будут стремиться расположиться своими осями вдоль линий поля. Однако этому упорядочению расположения препятствует тепловое движение. В результате произойдет лишь некоторый поворот диполей в направлении поля и диэлектрик окажется в определенной мере поляризованным. При этом к эффекту ориентации осей диполей обычно добавляется рассмотренный выше эффект деформации молекул. Опыт показывает, что в полях, с которыми мы имеем дело на практике, поляризованность диэлектриков с полярными молекулами также пропорциональна напряженности поля, т. е.  $P = \alpha E$ . Нарушение этой пропорциональности может наступить лишь при очень сильных полях, когда будет достигнуто так называемое насыщение, при котором почти все диполи уже оказываются ориентированными вдоль внешнего поля. Диэлектрическая восприим-

чивость диэлектриков с полярными молекулами убывает с увеличением температуры, так как при этом возрастает дезориентирующее действие теплового движения.

Существует особая группа диэлектриков, так называемых сегнетоэлектриков, для которых величина  $\alpha$  сильно зависит от напряженности поля и при некоторых значениях напряженности поля и температуры достигает весьма больших значений. Об основных свойствах этих веществ будет сказано ниже при рассмотрении конденсаторов с нелинейными характеристиками.

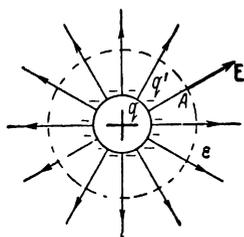


Рис. 17.

Нарисованная в общих чертах картина явлений в диэлектриках, подвергнутых действию внешнего электрического поля, позволяет пояснить тот факт, что  $\epsilon$  любого вещества больше  $\epsilon_0$ .

Поместим заряженное проводящее тело, например шар, в однородный и изотропный диэлектрик, для которого  $\epsilon = \text{const}$  (рис. 17). Под действием заряда  $q$  тела диэлектрик поляризуется. Если  $q > 0$ , то частицы с положительными зарядами в молекулах сместятся в направлении от тела, и частицы с отрицательными зарядами не сколько приблизятся к нему. Однако диэлектрик во всем своем объеме останется электрически нейтральным в том смысле, что в каждом элементе объема сумма положительных зарядов диполей останется равной сумме отрицательных и, следовательно, объемная плотность заряда по-прежнему будет равна нулю. Исключение представляет тонкий слой диэлектрика на его границе у поверхности заряженного тела, где как бы обнажаются отрицательные заряды диполей. Эти заряды образуют у поверхности тела так называемый связанный отрицательный заряд  $q'$ .

Термином «связанный заряд» мы будем обозначать электрический заряд, появляющийся на границах поляризованных диэлектриков. Этим зарядом обладают частицы, связанные внутримолекулярными силами и, следовательно, не приходящие в движение под действием неизменяющегося электрического поля. Этим он существенно отличается от так называемого свободного заряда, образующего, например, избыточный заряд проводника. Если бы внутри проводника образовалось постоянное электрическое поле, то свободные заряженные частицы пришли бы в движение — в проводнике возник бы постоянный электрический ток. Свободный заряд может находиться в покое в электростатическом поле лишь на поверхности проводника, окруженного совершенным диэлектриком.

Применяя теорему Гаусса в той форме, которая была получена в § 5, к замкнутой сферической поверхности, охватывающей заряженное тело, след которой изображен на рис. 17 пунктиром, будем

иметь:

$$\oint_S \mathbf{E} \, ds = \frac{q}{\epsilon},$$

где  $q$  — свободный заряд тела. Величина  $\epsilon$  отлична от  $\epsilon_0$ , и этим формально учитывается влияние поляризации диэлектрика на величину напряженности поля. Учитывая влияние поляризации появлением связанного заряда  $q'$  на границе диэлектрика, мы должны рассматривать поле как существующее в пустоте, но созданное не только свободным зарядом  $q$  тела, но и связанным зарядом  $q'$ . Соответственно можно написать теорему Гаусса также в форме:

$$\oint_S \mathbf{E} \, ds = \frac{q + q'}{\epsilon_0}.$$

Связанный заряд  $q'$  всегда имеет знак, противоположный знаку свободного заряда  $q$  тела. Поэтому эффект поляризации вещества приводит всегда к ослаблению электрического поля тела с зарядом  $q$  по сравнению со случаем, когда то же тело с таким же зарядом  $q$  расположено в пустоте. Следует отметить, что  $|q'| < |q|$ , так как, естественно, поляризация может лишь ослабить, но не уничтожить ее создающее поле.

Сопоставляя правые части в двух последних равенствах, имеем:

$$\frac{q}{\epsilon} = \frac{q + q'}{\epsilon_0}$$

и, учитывая сказанное о соотношении между  $q$  и  $q'$ , получаем:

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{q}{q + q'} > 1.$$

Таким образом, при наличии молекул изолирующего вещества поле ослабляется вследствие появления связанных зарядов, и этот факт ослабления поля учитывается тем, что для любого вещества принимается  $\epsilon > \epsilon_0$ .

Поляризованность диэлектрика мы определили как величину, равную электрическому моменту, отнесенному к единице объема вещества. Можно ее охарактеризовать еще несколько иначе, связав самое определение поляризованности с фактом смещения в диэлектрике положительно и отрицательно заряженных частиц под действием поля. Пусть изолирующее вещество помещено в однородное электрическое поле между двумя заряженными металлическими пластинами. При установлении поля частицы с положительными зарядами в диэлектрике смещаются по направлению к отрицательно заряженной пластине в среднем на расстояние  $x$ . Частицы с отрицательными зарядами при этом перемещаются по направлению к положительно заряженной пластине на расстояние  $d - x$ , где  $d$  — среднее расстояние, отсчитываемое по линии напряженности поля, на

которое расходятся по отношению друг к другу частицы с положительными и отрицательными зарядами. Для квазиупругих диполей  $d$  есть расстояние между центрами зарядов диполя, т. е. длина оси диполя. Для полярных молекул  $d$  — среднее значение проекций осей диполей на направление напряженности поля.

Рассечем мысленно диэлектрик плоскостью, нормальной к линиям напряженности поля, и рассмотрим поверхность  $s$ , являющуюся частью этой плоскости. На рис. 18 след  $a-b$  поверхности  $s$  отнесен жирным пунктиром. За время изменения напряженности поля от нуля до конечного значения сквозь поверхность  $s$  проходят в направлении сил поля все положительные заряды, которые до начала установления поля были заключены в объеме  $xs$ , и против сил поля — все отрицательные заряды, которые до установления поля были заключены в объеме  $(d-x)s$  (рис. 18). Если  $q$  — положительный заряд диполя и  $N_1$  — число диполей в единице объема, то в процессе установления поля сквозь поверхность  $s$  смещается в направлении вектора  $\mathbf{E}$  положительный заряд:

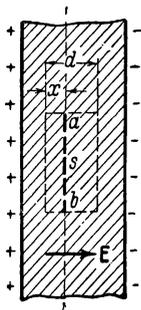


Рис. 18.

и в противоположном направлении — отрицательный заряд

$$qN_1xs$$

$$-qN_1(d-x)s.$$

Так как смещение отрицательного заряда против сил поля эквивалентно смещению положительного в направлении сил поля, то общий заряд, сместившийся сквозь поверхность  $s$ , равен:

$$Q' = qN_1xs + qN_1(d-x)s = N_1qds = Ps,$$

так как

$$N_1qd = P.$$

Стало быть,

$$P = \frac{Q'}{s}.$$

В общем случае неоднородного поля следует написать:

$$P = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta Q'}{\Delta s} = \frac{dQ'}{ds},$$

т. е. поляризованность равна пределу отношения электрического заряда, переносимого заряженными частицами, сместившимися в веществе диэлектрика в процессе установления поля сквозь элемент

поверхности, нормальный к направлению смещения частиц, к величине этого элемента при стремлении последнего к нулю.

В анизотропных кристаллических телах диэлектрическая восприимчивость по различным главным осям имеет различные значения.

Если вектор  $\mathbf{E}$  не направлен по одной из главных осей кристалла, то вектор  $\mathbf{P}$  уже не совпадает по направлению с вектором  $\mathbf{E}$ . Физически это объясняется тем, что заряженные элементарные частицы в молекулах кристаллов смещаются не в сторону действия внешнего поля, а несколько уклоняются в том направлении, в котором противодействующие смещению междумолекулярные силы наиболее слабы и диэлектрическая восприимчивость наибольшая.

При произвольном, но заданном, расположении осей  $OX$ ,  $OY$  и  $OZ$  по отношению к главным осям кристалла, связь между составляющими векторов  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{E}$  по осям  $OX$ ,  $OY$  и  $OZ$  может быть записана в виде:

$$P_x = \alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y + \alpha_{xz}E_z;$$

$$P_y = \alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y + \alpha_{yz}E_z;$$

$$P_z = \alpha_{zx}E_x + \alpha_{zy}E_y + \alpha_{zz}E_z,$$

т. е. диэлектрическая восприимчивость (как абсолютная, так и относительная) является при этом тензорной величиной.

## § 10. Электрическое смещение. Постулат Максвелла

Рассмотрим заряженное тело  $A$  любой формы с зарядом  $q$  (рис. 19). Тело окружено диэлектриком, в общем случае неоднородным и анизотропным. Окружим мысленно тело замкнутой поверхностью  $s$ , расположенной в диэлектрике. При увеличении свободного заряда  $q$  тела от нуля до его конечного значения в диэлектрике усиливалось электрическое поле и увеличивалась поляризация диэлектрика. В процессе установления поля происходило смещение элементарных, обладающих электрическим зарядом частиц, входящих в состав вещества диэлектрика, и сквозь поверхность  $s$  этими частицами перенесен заряд  $Q'$ . Согласно изложенному в предыдущем параграфе этот заряд может быть представлен в виде:

$$Q' = \oint_s P \cos \beta' ds = \oint_s \mathbf{P} \cdot d\mathbf{s},$$

где  $\mathbf{P}$  — вектор поляризованности в точках поверхности  $s$ .

При этом, если  $q > 0$ , то и  $Q' > 0$ , так как в этом случае положительно заряженные частицы смещаются в направлении положительной внешней нормали к поверхности  $s$ .

В объеме пространства, ограниченного поверхностью  $s$ , помимо свободного заряда  $q$ , появится связанный заряд  $q'$ . В случае однородного диэлектрика этот связанный заряд, как было выше отмечено, появляется на границе диэлектрика около поверхности заряженного тела. В общем случае неоднородного диэлектрика связанные заряды появляются также на границах раздела частей диэлектрика, обладающих различными диэлектрическими проницаемостями. Существенно отметить, что независимо от того, где размещены связанные заряды, должно иметь место очевидное равенство:

$$q' = -Q'.$$

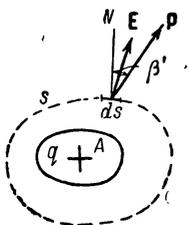


Рис. 19.

Действительно, до образования электрического поля объемная плотность электрического заряда в диэлектрике всюду была равна нулю и связанный заряд  $q'$  также был равен нулю. Поэтому появление избыточного связанного заряда  $q'$  одного знака в объеме, ограниченном поверхностью  $s$ , после установления поля возможно только вследствие того, что сквозь поверхность  $s$  переносится смещающимися в процессе поляризации заряженными частицами заряд  $Q'$ .

При этом абсолютные значения  $|q'|$  и  $|Q'|$  должны быть равны друг другу, но сами величины  $q'$  и  $Q'$  должны быть противоположны по знаку, так как, если положительный заряд смещается сквозь поверхность  $s$  изнутри наружу, то в объеме, ограниченном этой поверхностью, образуется избыток отрицательного заряда.

Итак, имеем:

$$q' = -Q' = - \oint_s \mathbf{P} ds.$$

Воспользуемся теперь теоремой Гаусса в форме:

$$\oint_s \mathbf{E} ds = \frac{q + q'}{\epsilon_0},$$

применив ее к той же замкнутой поверхности  $s$ . В этой форме теоремой Гаусса можно воспользоваться для любой среды, так как влияние вещества учтено здесь связанными зарядами  $q'$  и поле рассматривается в пустоте.

Умножив правую и левую части последнего равенства на  $\epsilon_0$ , получаем:

$$\oint_s \epsilon_0 \mathbf{E} ds = q + q' = q - \oint_s \mathbf{P} ds.$$

Отсюда находим:

$$\oint_s \epsilon_0 \mathbf{E} ds + \oint_s \mathbf{P} ds = \oint_s (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) ds = q.$$

Обозначим через  $\mathbf{D}$  вектор, равный сумме векторов  $\epsilon_0 \mathbf{E}$  и  $\mathbf{P}$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

и назовем его *вектором электрического смещения*.

Имеем:

$$\oint_s \mathbf{D} \, ds = \oint_s D \cos \beta \, ds = q,$$

т. е. *поток вектора электрического смещения сквозь замкнутую поверхность в направлении внешней нормали равен свободному электрическому заряду, заключенному в части пространства, ограниченной этой поверхностью*.

В последнем соотношении  $\beta$  есть угол между вектором  $\mathbf{D}$  и нормалью к элементу  $ds$  поверхности  $s$ .

Понятие об электрическом смещении в диэлектрике и о векторе электрического смещения было введено Максвеллом.

Вторая составляющая  $\mathbf{P}$  вектора электрического смещения была нами представлена как результат смещения элементарных обладающих зарядом частиц, входящих в состав вещества диэлектрика, сквозь поверхность, нормальную к направлению смещения этих частиц. Соответственно мы имели:

$$P = \frac{dQ'}{ds}.$$

Первая составляющая  $\epsilon_0 \mathbf{E}$  вектора электрического смещения, которую мы обозначим через  $\mathbf{D}_0$ , не является результатом смещения электрически заряженных частиц сквозь некоторую поверхность, так как она относится к электрическому полю в пустоте, т. е. к той области пространства, в которой отсутствуют заряженные частицы.

Величина  $\mathbf{D}_0 = \epsilon_0 \mathbf{E}$ , так же как и напряженность поля  $\mathbf{E}$ , характеризует само электрическое поле в данной его точке. Важно отметить, что физическая размерность величины  $D_0$  та же, что и размерность поляризованности  $P$  диэлектрика, т. е. размерность электрического заряда, отнесенного к единице поверхности. Это обстоятельство дает возможность сделать весьма важные обобщения, относящиеся к случаю изменяющегося во времени электрического поля, которые будут развиты далее в главах об электрическом токе и его магнитном поле.

Соотношение

$$\oint_s \mathbf{D} \, ds = q,$$

устанавливающее равенство потока вектора электрического смещения сквозь любую замкнутую поверхность свободному заряду, заключенному в объеме, ограниченном этой поверхностью, называют иногда обобщенной теоремой Гаусса.

Действительно, мы получили это соотношение, используя теорему Гаусса. Однако теорема Гаусса доказывается на основе закона Кулона лишь для случая *электростатического* поля. Соотношение же  $\oint_s \mathbf{D} ds = q$ , следуя Максвеллу, полагают справедливым во всех без исключения случаях и для сколь угодно быстро изменяющихся *переменных* электрических полей.

При таком широком обобщении это соотношение следует рассматривать как основной постулат теории электромагнитного поля. Все выводы этой теории, принимающей его в качестве одного из главных положений, полностью подтверждаются опытом. Будем называть его *постулатом Максвелла*.

Для случая однородной и изотропной среды мы имеем теорему Гаусса:

$$\oint_s \mathbf{E} ds = \frac{q}{\epsilon}.$$

С другой стороны, постулат Максвелла дает:

$$\oint_s \mathbf{D} ds = q.$$

Оба выражения совпадут, если положить

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}.$$

Будем считать, что это соотношение дает связь между векторами  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  в данной точке любой изотропной среды, причем  $\epsilon$  — абсолютная диэлектрическая проницаемость среды в рассматриваемой точке. При этом нет необходимости среду считать однородной. Действительно, если связь  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  пригодна для однородной среды, то всегда можно выделить в неоднородной среде около рассматриваемой точки столь малый объем, в пределах которого среду можно считать однородной. Поскольку постулат Максвелла справедлив во всех случаях, то для изотропной среды всегда можно написать:

$$\oint_s \epsilon \mathbf{E} ds = q.$$

В случае однородной среды  $\epsilon$  можно вынести за знак интеграла. При этом получаем теорему Гаусса. В случае же среды неоднородной величина  $\epsilon$  не может быть вынесена за знак интеграла.

Таким образом, абсолютная диэлектрическая проницаемость изотропной среды в данной ее точке равна отношению величины электрического смещения к величине напряженности поля:

$$\epsilon = \frac{D}{E}.$$

Получаем для изотропной среды:

$$D = \epsilon E = D_0 + P = \epsilon_0 E + \alpha E,$$

откуда

$$\epsilon = \epsilon_0 + \alpha \text{ или } \epsilon_r = 1 + \alpha_r.$$

В анизотропных кристаллических телах при произвольном, но заданном расположении осей  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  по отношению к главным осям кристалла, связь между проекциями на оси координат векторов  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  может быть записана в форме, аналогичной той, в которой была записана в предыдущем параграфе связь между проекциями векторов  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{E}$ . При этом диэлектрическая проницаемость является тензорной величиной.

Для большей части веществ величина  $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$  лежит в пределах от 1 до 10. Лишь некоторые вещества, например, жидкости: вода, метиловый спирт и ацетон, имеют значительно более высокую относительную диэлектрическую проницаемость. Молекулы этих жидкостей полярны и обладают большим электрическим моментом, с чем и связано высокое значение  $\epsilon_r$ .

Величина  $\epsilon$  почти для всех веществ в широких пределах не зависит от напряженности поля. Однако в диэлектриках с полярными молекулами, как указывалось выше, следует ожидать при весьма сильных полях эффекта насыщения. Рост поляризации по мере увеличения напряженности поля должен замедляться вследствие того, что при сильных полях почти все диполи оказываются ориентированными в направлении поля. Следовательно, диэлектрическая восприимчивость и диэлектрическая проницаемость должны в столь сильных полях уменьшаться с увеличением напряженности поля. Наблюдение этого эффекта связано с большими трудностями. Все же этот эффект удалось обнаружить в опыте с этиловым спиртом. Величина  $\epsilon$ , так же как и  $\alpha$ , сильно зависит от напряженности электрического поля в сегнетоэлектриках, свойства которых будут рассмотрены ниже.

Определив вектор электрического смещения во всех точках поля, можно провести ряд линий таким образом, чтобы в каждой точке этих линий касательные к ним совпадали по направлению с вектором смещения (рис. 20). Эти линии называют *линиями электрического смещения*. На рисунках их снабжают стрелками, указывающими направление вектора  $\mathbf{D}$ .

Совокупность линий смещения, проходящих через все точки контура, ограничивающего некоторую поверхность  $s$  (рис. 20), образует трубчатую поверхность, которая выделяет из всего поля так называемую *трубку электрического смещения*. Линии и трубки смещения начинаются на положительных зарядах и кончаются на отрицательных.

Установим связь между зарядами  $\Delta q_1$  и  $\Delta q_2$  на концах трубки смещения,

Применяя постулат Максвелла к замкнутой поверхности, образованной боковой поверхностью  $s_0$  трубки и поверхностями  $s_1$  и  $s_2$  внутри заряженных проводящих тел (рис. 20), будем иметь:

$$\int_{s_1} \mathbf{D} ds + \int_{s_0} \mathbf{D} ds + \int_{s_2} \mathbf{D} ds = \Delta q_1 + \Delta q_2.$$

Но  $\int_{s_1} \mathbf{D} ds + \int_{s_2} \mathbf{D} ds = 0$ , так как поле внутри заряженных проводящих тел отсутствует, и  $\int_{s_0} \mathbf{D} ds = 0$ , так как вектор  $\mathbf{D}$  касателен к поверхности  $s_0$ . Таким образом,

$$\Delta q_1 = -\Delta q_2,$$

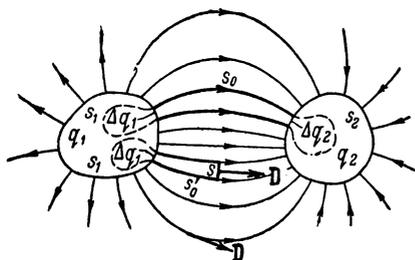


Рис. 20.

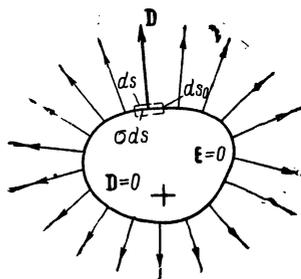


Рис. 21.

т. е. трубка электрического смещения опирается своими концами на равные и противоположные по знаку заряды.

Применяя постулат Максвелла к замкнутой поверхности, образованной поверхностью  $s$  некоторого поперечного сечения трубки, частью  $s'_0$  боковой поверхности трубки и поверхностью  $s_1$ , найдем:

$$\int_s \mathbf{D} ds + \int_{s'_0} \mathbf{D} ds + \int_{s_1} \mathbf{D} ds = \Delta q_1 \quad \text{или} \quad \int_s \mathbf{D} ds = \Delta q_1,$$

так как

$$\int_{s'_0} \mathbf{D} ds = 0 \quad \text{и} \quad \int_{s_1} \mathbf{D} ds = 0.$$

Следовательно, поток вектора электрического смещения сквозь любое поперечное сечение трубки остается постоянным и равным заряду на конце трубки.

Выбирая  $\Delta q_1$  равным единице электрического заряда, получаем единичную трубку смещения.

Необходимо помнить, что линии смещения совпадают с линиями напряженности поля только в изотропной среде, так как в анизотропной среде векторы  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$ , вообще говоря, имеют различные направления.

Применим постулат Максвелла к бесконечно малой замкнутой поверхности, охватывающей малый заряд  $dq = \sigma ds$  на поверхности

заряженного проводящего тела (рис. 21), причем  $\sigma$  — поверхностная плотность заряда тела в данном месте. Замкнутую поверхность возьмем так, чтобы часть ее, равная  $ds$ , была параллельна соответствующему элементу поверхности тела и была расположена в диэлектрике бесконечно близко к поверхности тела. Другая часть  $ds_0$ , имеющая цилиндрическую форму, пусть будет нормальна к поверхности тела и пересекает ее. Часть поверхности расположена внутри тела. Внутри тела поля нет, и  $D = 0$ . Поток вектора  $\mathbf{D}$  сквозь поверхность  $ds_0$  равен нулю, так как здесь  $\cos \beta = 0$  ( $\beta = \frac{\pi}{2}$ ). Остается поток  $d\Psi_D$  сквозь поверхность  $ds$ . Вектор  $\mathbf{E}$ , а в изотропной среде и вектор  $\mathbf{D}$ , нормален к поверхности тела и к поверхности  $ds$ . Следовательно, здесь  $\cos \beta = 1$  и  $d\Psi_D = D ds$ . Пользуясь постулатом Максвелла, имеем:

$$D ds = \sigma ds \quad \text{или} \quad D = \sigma,$$

т. е. величина вектора электрического смещения в изотропном диэлектрике у поверхности проводящего тела равна поверхностной плотности электрического заряда в соответствующей точке поверхности тела.

Единицей электрического смещения в системе единиц МКСА является *кулон на квадратный метр* ( $1 \text{ к/м}^2$ ).

### § 11. Электрическая емкость уединенного тела и конденсатора

Заряд уединенного проводящего тела пропорционален потенциалу тела, если диэлектрическая проницаемость среды, окружающей тело, не зависит от напряженности поля, т. е. является в каждой точке среды величиной постоянной. Это важное положение вытекает из линейности всех уравнений поля при постоянстве  $\epsilon$ . Следовательно, можно написать:

$$q = CU.$$

Величину  $C$  называют электрической емкостью тела.

Таким образом, *электрическая емкость уединенного тела равна отношению заряда тела к его потенциалу*:

$$C = \frac{q}{U};$$

при этом предполагают, что потенциал равен нулю в точках, бесконечно удаленных от тела.

Относительное распределение заряда по поверхности тела, а следовательно, и картина поля зависят от формы тела. Поэтому потенциал тела при заданном заряде и, соответственно, емкость тела зависят от размеров и формы тела. Если тело окружено однородным диэлектриком, то напряженность поля и, соответственно,

потенциал тела при заданном заряде обратно пропорциональны абсолютной диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  диэлектрика, что следует из теоремы Гаусса. На основании сказанного имеем:

$$C = \epsilon \cdot f(g_1, g_2, \dots),$$

где  $g_1, g_2, \dots$  — геометрические величины, характеризующие форму и размеры тела.

Таким образом, емкость *уединенного тела в случае однородной среды пропорциональна абсолютной диэлектрической проницаемости среды и зависит от размеров и формы тела.*

В более общем случае, когда диэлектрик, окружающий тело, в отдельных своих частях обладает различными диэлектрическими проницаемостями, емкость тела сложным образом зависит от диэлектрических проницаемостей отдельных однородных частей диэлектрика, от расположения по отношению к телу границ между этими частями диэлектрика и от формы и размеров поверхности тела, т. е.

$$C = F(\epsilon_k, g_k).$$

Единицей электрической емкости в системе единиц МКСА является *фарада* (1 ф). Единицей абсолютной диэлектрической проницаемости в этой системе, как было отмечено в § 4, является *фарада на метр* (1 ф/м). Действительно, из выражения  $\epsilon = \frac{D}{E}$  следует, что единицей величины  $\epsilon$  является  $1 \frac{\kappa}{\text{м}^2} : \frac{в}{\text{м}} = 1 \frac{\kappa}{\text{в} \cdot \text{м}} = 1 \frac{\phi}{\text{м}}$ .

Определим емкость проводящего шара радиуса  $R$ , окруженного однородной средой. Потенциал шара находится из формулы  $U = \frac{1}{\epsilon} \frac{q}{4\pi r}$ , выведенной в § 7, если положить в формуле  $r = R$ .

Имеем:  $U = \frac{1}{\epsilon} \frac{q}{4\pi R}$ , откуда

$$C = \frac{q}{U} = 4\pi\epsilon R.$$

Рассмотрим систему из двух проводящих тел, окруженных диэлектриком. Предположим, что эти тела заряжаются путем присоединения их к разноименным зажимам одного и того же источника э. д. с., так что заряды тел оказываются равными по величине и противоположными по знаку  $q_1 = -q_2 = q$ . Заряд каждого из двух тел будет пропорционален разности потенциалов  $U_1 - U_2 = u$  тел, если  $\epsilon$  не зависит от напряженности поля, т. е.

$$q = C(U_1 - U_2) = Cu.$$

Величина

$$C = \frac{q}{u},$$

равная отношению заряда одного из тел к разности потенциалов между ними, называется электрической емкостью между телами.

Емкость между двумя телами зависит от формы и размеров поверхностей тел, а также от их взаимного расположения. В случае однородной диэлектрической среды емкость между телами пропорциональна абсолютной диэлектрической проницаемости среды, т. е.

$$C = \epsilon f(g_1, g_2, \dots),$$

где  $g_1, g_2$ , — геометрические величины, определяющие форму и размеры тел и их взаимное расположение.

В более общем случае, когда диэлектрик состоит из нескольких частей, имеющих различные диэлектрические проницаемости, можно написать:

$$C = F(\epsilon_k, g_k),$$

т. е. емкость между двумя проводящими телами зависит от диэлектрических проницаемостей отдельных однородных частей диэлектрика, от расположения по отношению к телам границ между этими частями диэлектрика, от формы и размеров тел и от взаимного расположения тел.

Весьма часто система из двух проводящих тел, разделенных диэлектриком, осуществляется именно с целью использования ее электрической емкости. В таком случае она называется конденсатором, а разделенные диэлектриком проводящие тела — обкладками конденсатора. Наиболее часто используются обкладки в виде плоских параллельных пластин или соосных круговых цилиндров.

Емкость плоского конденсатора определим, пренебрегая искажением поля у его краев. Применим постулат Максвелла к замкнутой поверхности, охватывающей заряд  $q$  одной пластины. След этой замкнутой поверхности изображен на рис. 22 пунктиром. Часть поверхности внутри конденсатора проведем нормально к линиям напряженности поля. Линии поля пересекают только эту часть замкнутой поверхности, равную поверхности пластины. Таким образом:

$$\oint_s \mathbf{D} ds = Ds = q \quad \text{и} \quad E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{q}{\epsilon s}.$$

Разность потенциалов  $u$  пластин  $A$  и  $B$  конденсатора равна линейному интегралу вектора  $E$  вдоль некоторого пути между пластинами. Пусть  $d$  — расстояние между пластинами. Избирая путь интегрирования вдоль линии напряженности поля и замечая, что в однородном поле  $E = \text{const}$ , получим:

$$u = \int_A^B \mathbf{E} dl = \int_A^B E dl = E \int_A^B dl = Ed = \frac{q}{\epsilon s} d.$$

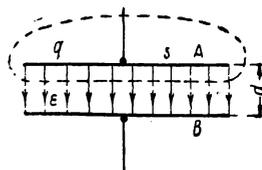


Рис. 22.

Следовательно,

$$C = \frac{q}{u} = \frac{\epsilon s}{d}.$$

В действительности электрическое поле у краев конденсатора искажено (рис. 23), и емкость, строго говоря, несколько отличается от вычисленной по последней формуле. Однако, если  $d$  много меньше линейных размеров пластин, то ошибка, получающаяся вследствие этого, ничтожна. В эталонных конденсаторах, рассчитанных на высокое напряжение, для которых  $d$  велико, обычно окружают рабочую часть одной пластины так называемым охранным кольцом (рис. 23), имеющим потенциал, весьма близкий потенциалу рабочей части. При достаточной ширине охранный колыца поле около рабочей части можно считать однородным и емкость ее относительно другой пластины вычислять по формуле:  $C = \frac{\epsilon s}{d}$ , причем  $s$ —поверхность рабочей части.

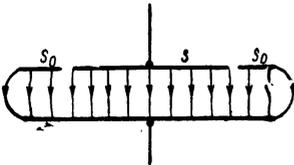


Рис. 23.

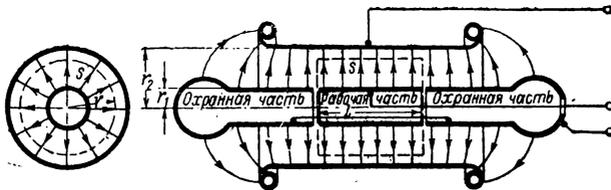


Рис. 24.

На рис. 24 изображен воздушный цилиндрический конденсатор, употребляемый в измерительных схемах при высоком напряжении. Для исключения краевого эффекта используется только средняя часть внутреннего цилиндра, имеющая длину  $l$ . Окружим рабочую часть внутреннего цилиндра замкнутой поверхностью, образованной цилиндрической поверхностью с радиусом основания  $r$  и двумя плоскими торцевыми поверхностями. Поток вектора  $D$  сквозь торцевые поверхности равен нулю. Применяя к этой замкнутой поверхности постулат Максвелла, получаем:

$$\oint_s \mathbf{D} ds = D 2\pi r l = q \quad \text{и} \quad E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{q}{\epsilon 2\pi r l},$$

причем  $q$  — заряд рабочей части.

Разность потенциалов между обкладками, имеющими радиусы  $r_1$  и  $r_2$  (рис. 24), определяется интегралом:

$$u = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{q}{\epsilon 2\pi l} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{1}{\epsilon} \frac{q}{2\pi l} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

и, следовательно:

$$C = \frac{q}{u} = \frac{2\pi l \epsilon}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Полученная формула служит также для вычисления емкости концентрического кабеля, имеющего соосное расположение прямого и обратного проводов.

Найдем еще выражение для емкости сферического конденсатора, поверхности обкладок которого являются поверхностями двух концентрических сфер с радиусами  $r_1$  и  $r_2$ . Между обкладками расположен слой диэлектрика с абсолютной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Электрическое поле между обкладками такое же, как если бы заряд  $q$  внутренней сферической обкладки был сосредоточен в центре сферы. Следовательно,  $E = \frac{q}{4\pi \epsilon r^2}$ , причем  $r_1 \leq r \leq r_2$ .

Разность потенциалов обкладок равна:

$$u = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi \epsilon r^2} dr = \frac{q}{4\pi \epsilon} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi \epsilon} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2},$$

и для искомой емкости получаем выражение:

$$C = \frac{q}{u} = 4\pi \epsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

При параллельном соединении конденсаторов (рис. 25) напряжение  $u$  одинаково для всех конденсаторов. Заряд всей группы конденсаторов равен сумме зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_n$  отдельных конденсаторов:  $q = q_1 + q_2 + \dots + q_n$ . Имеем:

$$\frac{q}{u} = \frac{q_1}{u} + \frac{q_2}{u} + \dots + \frac{q_n}{u}$$

или

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n.$$

Следовательно, емкость всей группы параллельно соединенных конденсаторов равна сумме емкостей отдельных конденсаторов.

При последовательном соединении конденсаторов (рис. 26) заряды на обкладках всех конденсаторов одинаковы.

Пусть  $u$  — общее напряжение и  $u_1, u_2, \dots, u_n$  — напряжения на отдельных конденсаторах. Имеем:

$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

Следовательно:

$$\frac{u}{q} = \frac{u_1}{q} + \frac{u_2}{q} + \dots + \frac{u_n}{q}$$

или

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n},$$

т. е. величина, обратная емкости группы последовательно соединенных конденсаторов, равна сумме величин, обратных емкостям отдельных конденсаторов.

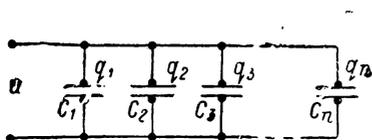


Рис. 25.

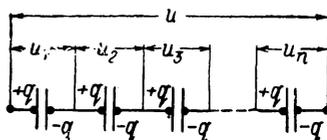


Рис. 26.

## § 12. Конденсаторы с нелинейной характеристикой

Если диэлектрическая проницаемость диэлектрика конденсатора не зависит от напряженности электрического поля, то и емкость  $C$  конденсатора не зависит от напряжения на конденсаторе. Это соблюдается для большинства конденсаторов, применяемых на практике. Зависимость заряда  $q$  такого конденсатора от напряжения  $u$  выражается прямой линией (рис. 27). Говорят, что такой конденсатор имеет *линейную характеристику*  $q = f(u) = Cu$ .

Однако, как уже было отмечено, существуют вещества, называемые сегнетоэлектриками, для которых величина  $\epsilon$  сильно зависит от напряженности электрического поля. При некоторых значениях напряженности поля относительная диэлектрическая проницаемость этих веществ достигает весьма больших значений. Если при отсутствии внешнего электрического поля сегнетоэлектрик не был поляризован, то при увеличении напряженности поля  $E$  электрическое смещение  $D$  возрастает соответственно кривой, изображенной на рис. 28. Связь между  $D$  и  $E$  оказывается нелинейной. Диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$  с увеличением  $E$  сначала возрастает, достигает максимума и затем убывает. При периодическом изменении напряженности поля в пределах  $+E_m$  и  $-E_m$  наблюдается так называемое явление *гистерезиса* — кривая  $D = f(E)$  при уменьшении напряженности поля не совпадает с соответствующей кривой при увеличении напряженности поля (рис. 29). При уменьшении напряженности поля до нуля сохраняется некоторая *остаточная поляризация и соответственно остаточное смещение*  $D_r$ .

Наименование «сегнетоэлектрики» связано с наименованием вещества сегнетова соль, для которого впервые были обнаружены указанные свойства. Сегнетова соль представляет собой двойную натрокалиевую соль винной кислоты ( $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ ). Высокая поляризуемость наблюдается в кристаллах сегнетовой соли в направлении одной из ее кристаллографических осей. Эти особые свойства сегнетовой соли весьма сильно зависят от температуры

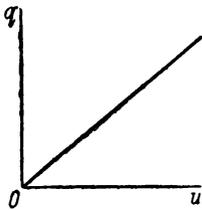


Рис. 27.

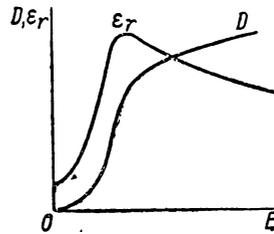


Рис. 28.

и проявляются только в диапазоне температуры от  $-18^\circ\text{C}$  до  $+22,5^\circ\text{C}$ . Впервые глубокие исследования свойств сегнетоэлектриков были произведены И. В. Курчатовым и П. П. Кобеко.

К группе сегнетоэлектриков относится также метатитанат бария ( $\text{TiO}_2 \cdot \text{BaO}$ ), сегнетоэлектрические свойства которого открыты советским ученым Б. М. Вулом. Относительная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_r$  титаната бария при комнатной температуре превышает 1000. Он сохраняет свои сегнетоэлектрические свойства до температуры  $+80^\circ\text{C}$ .

Существование сегнетоэлектриков имеет глубокое принципиальное значение. Их свойства в группе диэлектриков в значительной мере аналогичны свойствам ферромагнитных веществ. Это дает основание дать физическое объяснение свойств сегнетоэлектриков, сходное с объяснением свойств ферромагнитных веществ (§ 57).

Предполагают, что отдельные области сегнетоэлектриков самопроизвольно поляризованы в определенном направлении. Внешне эта поляризация не проявляется, пока различные области поляризованы в противоположных направлениях. Под действием внешнего поля поляризация областей изменяется в направлении поля. Это изменение происходит очень мелкими скачками, соответствующими изменению направления поляризации отдельных областей. Вследствие этого изменения направления поляризации областей и происходит быстрое увеличение поляризованности вещества и

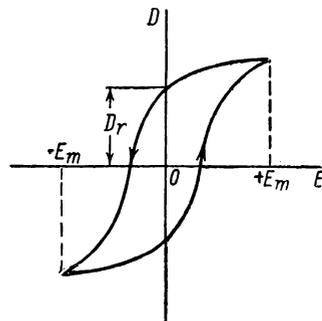


Рис. 29.

величины электрического смещения  $D$ , что соответствует крутой части кривой  $D = f(E)$  на рис. 28. При некоторой напряженности поля достигается *насыщение*, когда почти все области самопроизвольной поляризации оказываются поляризованными в направлении поля. Соответственно, при достаточно больших напряженностях поля величина  $D$  растет все медленней при увеличении  $E$ .

В опытах с кристаллом сегнетовой соли большой толщины, описанных И. В. Курчатовым, максимальное значение относительной диэлектрической проницаемости имело порядок 100 000, и насыщение достигалось уже при напряженности 30 в/см. У титаната бария насыщение достигается при значительно больших напряженностях поля. Температура 22,5° С для сегнетовой соли и соответственно 80° С для титаната бария характерна тем, что при ней разрушается тепловым движением самопроизвольная поляризация областей, и сегнетоэлектрик приобретает электрические свойства обычных диэлектриков.

Если диэлектриком в конденсаторе является сегнетоэлектрик, то зависимость  $q = f(u)$  заряда  $q$  на обкладке конденсатора от напряжения  $u$  между обкладками будет нелинейной и аналогичной по характеру зависимости  $D = f(E)$ , изображенной на рис. 28 и 29. В простейшем случае плоского конденсатора, поле в котором однородно, кривые  $q = f(u)$  и  $D = f(E)$  отличаются только масштабами, так как для плоского конденсатора  $q = Ds$  и  $u = Ed$ , где  $s$  — поверхность обкладки и  $d$  — толщина диэлектрика.

Говорят, что такой конденсатор обладает *нелинейной характеристикой*  $q = f(u)$ . На рис. 30 изображена эта характеристика, соответствующая увеличению напряжения при условии, что при отсутствии напряжения диэлектрик не был поляризован. При периодическом изменении напряжения в пределах  $+U_m$  и  $-U_m$  характеристика имеет вид *петли гистерезиса*, представленной на рис. 31. Кривая  $q = f(u)$ , проходящая через вершины петель гистерезиса, соответствующих различным значениям амплитуд напряжения  $U_m$ , изображенная на рис. 31 пунктиром, близка к кривой  $q = f(u)$ , изображенной на рис. 30.

Необходимо различать *статические характеристики* и *динамические характеристики* конденсатора.

Статическая характеристика определяет собою значения неизменяющихся во времени зарядов конденсатора при соответствующих значениях неизменяющихся во времени напряжений. Практически она может быть получена путем измерения ряда значений зарядов  $q$ , соответствующих ряду значений напряжений  $u$ , причем при переходе от одного значения напряжения  $u$  к другому необходима достаточная выдержка времени, чтобы новое значение заряда  $q$  успело установиться. Это новое значение заряда  $q$  устанавливается не сразу вследствие явления так называемой диэлектрической вязкости.

При достаточно быстром изменении напряжения явление диэлектрической вязкости приводит к тому, что зависимость  $q = f(u)$  будет отлична от зависимости, определяемой из статической характеристики. Связь  $q = f(u)$  при этом изображается динамической характеристикой. В частности, при быстрых периодических изменениях напряжения динамические петли гистерезиса отличаются от статических. При достаточно медленном изменении напряжения динамические характеристики практически совпадают со статическими.

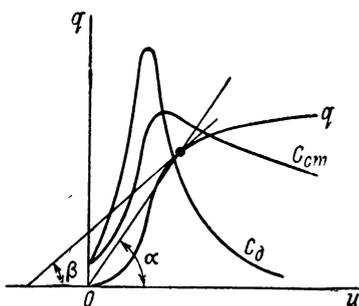


Рис. 30.

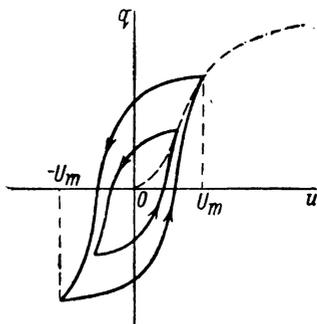


Рис. 31.

Нелинейный характер зависимости  $q = f(u)$  приводит к тому, что емкость такого конденсатора зависит от напряжения  $u$  на обкладках конденсатора. При этом различают так называемую *статическую емкость*, определяемую как отношение  $q$  к  $u$ :

$$C_{cm} = \frac{q}{u}$$

и *динамическую емкость*, определяемую как предел отношения приращения заряда  $\Delta q$  к соответствующему приращению напряжения  $\Delta u$  при стремлении последнего к нулю:

$$C_{\partial} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta u} = \frac{dq}{du}.$$

Статическая емкость определяется из статической характеристики и в случае конденсатора с нелинейной характеристикой является функцией напряжения. Динамическая емкость определяется из динамической характеристики, и так как вид последней зависит от скорости изменения напряжения при различных его значениях, то динамическая емкость является функцией не только величины напряжения, но, вообще говоря, и его производных по времени. Статическая и динамическая емкости конденсатора с нелинейной характеристикой различаются между собой также и при достаточно медленном изменении напряжения, хотя и определяются при этом

из одной и той же статической характеристики. Это видно хотя бы из рис. 30, так как статическая емкость равна:

$$C_{ст} = \frac{q}{u} = k \operatorname{tg} \alpha = f_1(u),$$

динамическая же емкость равна:

$$C_{д} = \frac{dq}{du} = k \operatorname{tg} \beta = f_2(u),$$

где  $k$  зависит от масштабов по осям абсцисс и ординат.

Конденсаторы с нелинейной характеристикой начинают находить себе применение в устройствах автоматического управления. О некоторых возможных использованиях нелинейных свойств таких конденсаторов будет сказано при рассмотрении нелинейных электрических цепей переменного тока.

---

---

---

## ГЛАВА ТРЕТЬЯ

### ЭНЕРГИЯ И МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРОЯВЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

#### § 13. Энергия системы заряженных тел

Система заряженных тел является носителем определенного запаса энергии. Эта энергия сообщается системе внешними источниками энергии в процессе образования зарядов и может быть вновь возвращена источникам или преобразована в другие виды энергии при уменьшении зарядов.

Для установления выражения энергии, запасенной в системе заряженных проводящих тел, рассмотрим работу, совершаемую внешними источниками при образовании зарядов системы. Элементарная работа, производимая внешними силами при увеличении заряда  $q_k$  некоторого тела на величину  $dq_k$ , равна  $dA_k = U_k dq_k$ , где  $U_k$  — потенциал тела. Полная работа при изменении зарядов всех  $n$  тел системы от нуля до конечного значения имеет выражение:

$$A = \sum_{k=1}^{k=n} A_k = \sum_{k=1}^{k=n} \int_0^{q_k} U_k dq_k.$$

Будем предполагать, что система заряжается весьма медленно, теоретически — бесконечно медленно. При этом электрические токи, возникающие при переносе зарядов на поверхность заряжаемых тел, бесконечно малы, и, следовательно, бесконечно малы и потери в проводниках конечного сопротивления; хотя при этом процесс и длится бесконечно долго, но мощность, характеризующая потери в проводниках, является бесконечно малой второго порядка, так как она пропорциональна квадрату тока. Допустим также, что в самом диэлектрике при изменении напряженности поля не совершаются необратимых процессов. В таком случае на основании закона сохранения энергии мы можем утверждать, что вся работа, совершаемая источниками при образовании зарядов, идет на создание запаса энергии в системе. Обозначая энергию системы заряженных тел через  $W_s$ , можем написать равенство:

$$A = W_s.$$

Потенциал  $U_k$   $k$ -того тела зависит от зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_n$  всех тел. При *постоянной* диэлектрической проницаемости среды эта

зависимость имеет *линейный* характер и согласно принципу наложения должна иметь вид:

$$U_k = \alpha_{k1}q_1 + \alpha_{k2}q_2 + \dots + \alpha_{kk}q_k + \dots + \alpha_{kn}q_n.$$

Коэффициенты  $\alpha$  называют потенциальными коэффициентами. Это выражение следует подставить под знак интеграла в выражении для работы  $A$ .

На основании закона сохранения энергии мы можем также утверждать, что работа, совершаемая внешними источниками при увеличении зарядов тел от нуля до их конечных значений, не зависит от порядка установления зарядов. Иначе мы всегда могли бы выбрать такой порядок установления зарядов и отличный от него такой порядок уменьшения зарядов, чтобы энергия, затраченная внешними источниками, была меньше энергии, им возвращенной, что явилось бы нарушением закона сохранения энергии. Поэтому мы вправе выбрать порядок установления зарядов по своему усмотрению. Предположим, что все заряды возрастают друг другу пропорционально, т. е.  $q_s = \gamma_{ks}q_k$ , где  $\gamma_{ks} = \text{const}$ . Тогда потенциал каждого тела будет возрастать пропорционально его заряду. Действительно, будем иметь:

$$U_k = (\alpha_{k1}\gamma_{k1} + \alpha_{k2}\gamma_{k2} + \dots + \alpha_{kn}\gamma_{kn})q_k = m_k q_k,$$

причем  $m_k = \text{const}$ . Искомая работа равна:

$$A = \sum_{k=1}^{k=n} \int_0^{q_k} U_k dq_k = \sum_{k=1}^{k=n} m_k \int_0^{q_k} q_k dq_k = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{m_k q_k^2}{2} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{U_k q_k}{2}.$$

Используя равенство  $A = W_s$ , получаем:

$$W_s = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} U_k q_k.$$

Следовательно, *энергия системы заряженных тел равна полусумме произведений потенциалов тел на их заряды.*

В весьма важном частном случае заряженного конденсатора мы имеем два заряженных тела с зарядами  $q_1$  и  $q_2$ , равными по величине и противоположными по знаку. Положив  $q = q_1 = -q_2$ , получаем выражение для энергии заряженного конденсатора:

$$W_s = \frac{U_1 q_1}{2} + \frac{U_2 q_2}{2} = \frac{(U_1 - U_2) q}{2}.$$

Обозначая разность потенциалов  $U_1$  и  $U_2$  обкладок через  $u$  и пользуясь соотношением  $q = Cu$ , где  $C$  — емкость конденсатора, получаем:

$$W_s = \frac{uq}{2} = \frac{Cu^2}{2} = \frac{q^2}{2C}.$$

Выражение для энергии системы заряженных тел может быть представлено еще и в иной форме, если заметить, что  $q_k = \int_{s_k} \sigma ds$ , где  $\sigma$  — поверхностная плотность заряда и  $s_k$  — поверхность данного тела, и что для всех точек поверхности каждого тела  $U_k = \text{const}$ . Имеем:

$$W_s = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} U_k \int_{s_k} \sigma ds = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} \int_{s_k} U_k \sigma ds = \frac{1}{2} \int_s U \sigma ds,$$

где  $s$  — совокупность поверхностей всех проводников.

#### § 14. Распределение энергии в электрическом поле

В последнем выражении энергия системы электрически заряженных тел выражена через потенциалы в тех точках пространства, где  $\sigma$  не равно нулю. Интегралы в этом выражении достаточно распространить только по поверхности тел.

Это выражение не дает возможности судить о том, где распределена эта энергия. Покажем, что энергию электрически заряженных тел следует рассматривать как распределенную в электрическом поле, окружающем заряженные тела, что соответствует взгляду на электромагнитное поле как на особый вид материи. Предположив это, мы должны считать, что каждый элемент объема диэлектрика, в котором напряженность электрического поля отлична от нуля, является носителем определенного запаса энергии, и следует говорить об объемной плотности энергии в каждой точке поля. Обозначая объемную плотность энергии электрического поля через  $W'_s$ , мы можем выразить энергию системы заряженных тел как энергию всего электрического поля, окружающего их, в виде интеграла:

$$W_s = \int_V W'_s dV,$$

распространенного уже по всему электрическому полю.

Рассмотрим сначала простейший случай однородного поля. Таким является поле в средней части между параллельными пластинами (рис. 23). Выделим из обеих пластин противоположные друг другу части с поверхностями  $s$ . Пусть заряды, расположенные на этих частях пластин, равны:  $q_1 = -q_2 = q$ . Энергия зарядов  $q_1$  и  $q_2$  имеет выражение:

$$W_s = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} q_k U_k = \frac{1}{2} q_1 U_1 + \frac{1}{2} q_2 U_2 = \frac{1}{2} q (U_1 - U_2),$$

причем  $U_1 - U_2 = u$  — разность потенциалов пластин. Так как поле однородно, то  $u = Ed$ , где  $d$  — расстояние между пластинами.

Поток электрического смещения сквозь любую поверхность  $s$ , проведенную в диэлектрике между пластинами параллельно поверхностям пластин и пересекающую все трубки смещения, начинающиеся на заряде  $q_1 = q$ , равен этому заряду (§ 10). Ввиду однородности поля имеем  $Ds = q$ . Следовательно,

$$W_s = \frac{1}{2} DEs d = \frac{1}{2} DEV,$$

где  $V = sd$  — объем диэлектрика, в котором сосредоточено поле зарядов  $q_1$  и  $q_2$ . Энергия, отнесенная к единице объема поля, получается равной

$$W'_s = \frac{W_s}{V} = \frac{1}{2} DE = \frac{\epsilon E^2}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon}.$$

Энергия всего поля, таким образом, может быть представлена в виде интеграла:

$$W_s = \int_V \frac{\epsilon E^2}{2} dV.$$

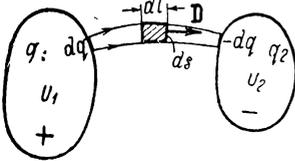


Рис. 32.

Полученное выражение для объемной плотности энергии электрического поля справедливо лишь для изотропной среды, в которой векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  совпадают по направлению. Для анизотропной среды объемная плотность энергии равна:

$$W'_s = \frac{\mathbf{E}\mathbf{D}}{2},$$

где  $\mathbf{E}\mathbf{D} = ED \cos \alpha$  есть скалярное произведение векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$ , составляющих друг с другом угол  $\alpha$ . Соответственно энергия всего поля может быть представлена в форме:

$$W_s = \int_V \frac{\mathbf{E}\mathbf{D}}{2} dV.$$

Покажем справедливость этого выражения для общего случая неоднородного поля в анизотропной среде. С этой целью рассмотрим два проводящих тела, имеющих равные заряды противоположных знаков:  $q_1 = -q_2 = q$  (рис. 32). Выделим в электрическом поле бесконечно тонкую трубку смещения. В объеме бесконечно малого отрезка  $dl$  трубки поле можно считать однородным. Энергия поля в объеме этого отрезка трубки равна:

$$W'_s ds dl = \frac{1}{2} DE \cos \alpha ds dl,$$

где  $ds$  — нормальное сечение трубки. Интегрируя вдоль всей трубки и вспоминая, что поток смещения  $Dds$  одинаков во всех поперечных

сечениях трубки и равен заряду  $dq$  на конце трубки, находим:

$$dW_s = \int \frac{1}{2} D ds E \cos \alpha dl = \frac{1}{2} D ds \int E \cos \alpha dl = \frac{1}{2} (U_1 - U_2) dq,$$

так как интеграл  $\int E \cos \alpha dl$  равен разности потенциалов на концах трубки. Для трубки конечного сечения, если заряды на ее концах расположены на поверхностях равного потенциала, например на поверхности двух заряженных проводящих тел, будем иметь:

$$\Delta W_s = \frac{1}{2} (U_1 - U_2) \Delta q,$$

где  $\Delta q$  — заряд на конце трубки.

Суммируя энергию по всем трубкам смещения и замечая, что для всех трубок величина  $U_1 - U_2$  имеет одинаковое значение, получаем:

$$W_s = \frac{1}{2} (U_1 - U_2) q = \frac{1}{2} U_1 q_1 + \frac{1}{2} U_2 q_2.$$

Таким образом, выражение энергии в виде интеграла по всему объему

поля  $W_s = \int_V \frac{\mathbf{E} \mathbf{D}}{2} dV$  эквивалентно выражению:  $W_s = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} q_k U_k$ ,

которое было получено на основании закона сохранения энергии. В том случае, когда поле создается неподвижными зарядами, с формальной точки зрения безразлично, каким из этих двух выражений пользоваться при вычислении энергии. Однако в дальнейшем мы увидим, что электрическое поле может возникать при изменяющемся во времени магнитном поле и при полном отсутствии электрических зарядов. Такое поле, например, существует в электромагнитной волне, излученной радиоантенной. В этом случае при вычислении энергии остается единственная возможность рассматривать ее как энергию поля и, следовательно, пользоваться выражением:

$W_s = \int_V \frac{\mathbf{E} \mathbf{D}}{2} dV$ . Точно так же энергия электрического поля дви-

жущегося электрического заряда может быть определена именно из этого выражения. Пользуясь этим выражением, мы во всех случаях получаем величины, согласующиеся с опытом. Поэтому необходимо признать, что представление о распределении энергии в электрическом поле с объемной плотностью  $\frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{D}$  отвечает сущности рассматриваемого физического явления.

### § 15. Потери энергии в диэлектрике при переменном электрическом поле

Вывод выражений для энергии системы заряженных тел

$$W_s = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} U_k q_k \quad \text{и} \quad W_s = \int_V \frac{\mathbf{E} \mathbf{D}}{2} dV$$

был сделан в предположении, что потенциалы тел зависят *линейно* от зарядов тел, что справедливо при постоянной, не зависящей от напряженности электрического поля диэлектрической проницаемости сред, в которых образуется поле. Только в данном случае справедливы эти выражения.

Кроме того, при выводе этих выражений предполагалось, что потери энергии в проводниках и в диэлектрике при увеличении зарядов тел и, соответственно, при установлении электрического поля в диэлектрике, отсутствовали.

В реальных диэлектриках, даже при независимости диэлектрической проницаемости от напряженности поля, имеют место потери энергии при наличии электрического поля и, особенно, при его изменении во времени. Реальные диэлектрики обладают конечной, хотя и очень малой, проводимостью, что приводит к некоторой потере энергии даже при постоянном поле. Однако для хороших диэлектриков эти потери весьма ничтожны. При переменном периодически изменяющемся поле появляются дополнительные потери в диэлектрике, связанные с изменением поляризации диэлектрика. И. И. Боргман еще в 1886 г. показал опытным путем, что потери в конденсаторах с твердым диэлектриком при периодическом изменении напряжения пропорциональны квадрату максимального напряжения. Кроме того, эти потери пропорциональны числу периодов в секунду, т. е. частоте напряжения. Как показывают результаты опытных исследований, для вычисления мощности, отнесенной к единице объема диэлектрика, можно пользоваться формулой вида:

$$P' = kfE_m^2,$$

где  $f$  — частота,  $E_m$  — максимальное значение напряженности электрического поля,  $k$  — величина, характеризующая материал. Рассматриваемые потери весьма малы в высокосортной слюде и парафине. Поэтому эти материалы употребляют при изготовлении конденсаторов, предназначенных для работы при высокой частоте. В пропитанной бумаге, применяемой в качестве изоляции в конденсаторах и в кабелях, эти потери значительно больше, чем в слюде. Поэтому конденсаторы с бумажной изоляцией непригодны для использования их при высокой частоте. Н. П. Богородицким разработаны новые электроизолирующие материалы, представляющие особый тип фарфора, потери энергии в котором в десять и более раз

меньше, чем в обычном фарфоре, при одинаковых частоте и амплитуде напряженности электрического поля. Эти новые электроизолирующие материалы получили применение при изготовлении высокочастотных конденсаторов.

Потери в диэлектрике при переменном поле для многих материалов сильно зависят от температуры. Создание теплостойких электроизолирующих материалов, электрические свойства которых мало изменяются в широком диапазоне изменения температуры, имеет большое практическое значение. В этом отношении представляют большой интерес кремнийорганические электроизолирующие ма-

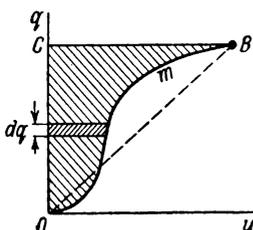


Рис. 33.

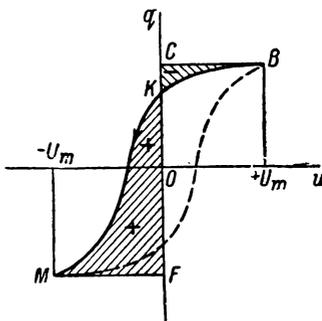


Рис. 34.

териалы, созданные на основе работ К. А. Андрианова. Эти материалы химически инертны и стойки к действию окисления. Их диэлектрическая проницаемость и потери в них при переменном электрическом поле мало изменяются при изменении температуры в интервале от 20° до 180° С.

Еще лучшими свойствами в отношении теплостойкости и химической инертности обладают некоторые новые материалы, относящиеся к так называемым фторорганическим материалам.

Обычно потери энергии в диэлектрике за один период изменения напряженности поля много меньше энергии, запасаемой в электрическом поле при максимальном за период значении напряженности поля. Поэтому при постоянстве диэлектрической проницаемости можно для вычисления энергии поля пользоваться выражениями:

$$W_s = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} U_k q_k = \int_V \frac{ED}{2} dV, \text{ обоснованными в предположении отсутствия потерь.}$$

Однако эти выражения неверны для диэлектриков с *нелинейной* характеристикой  $D = f(E)$ . Пусть конденсатор с таким диэлектриком заряжается от источника напряжения  $u$ . Работа источника при зарядении конденсатора выразится интегралом:  $A = \int_0^q u dq$  независимо от того, какова связь между  $u$  и  $q$ . Это следует из опреде-

ления понятия разности потенциалов. Произведение  $udq$  определяется площадью густо заштрихованной на рис. 33 полоски. Вся же работа  $A$  определяется заштрихованной площадью  $OmbCO$ . Вследствие нелинейности характеристики  $q = f(u)$  эта работа отлична от величины  $\frac{Uq}{2}$ , определяемой площадью треугольника  $OСВ$ . Кроме того, энергия, запасаемая в электрическом поле конденсатора, меньше работы  $A$  внешнего источника на величину потерь диэлектрика при установлении поля. Эти потери легко определяются

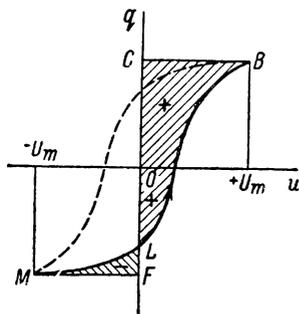


Рис. 35.

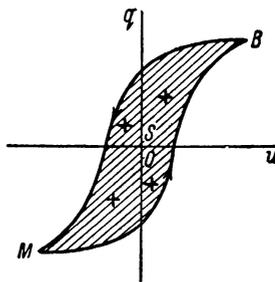


Рис. 36.

при периодическом изменении электрического поля. Зависимость  $q = f(u)$  при этом, как было отмечено, изображается в конденсаторах с сегнетоэлектриком петлей гистерезиса. При уменьшении напряжения от  $U_m$  до 0 работа внешнего источника отрицательна, так как  $u > 0$  и  $dq < 0$ , и определяется площадью  $СКВ$  (рис. 34). При изменении напряжения от 0 до  $-U_m$  внешний источник совершает положительную ( $u < 0$  и  $dq < 0$ ) работу, определяемую площадью  $КМF$ . При изменении напряжения от  $-U_m$  до 0 работа источника отрицательна ( $u < 0$  и  $dq > 0$ ) и определяется площадью  $MFL$  (рис. 35), и, наконец, при увеличении напряжения от 0 до  $U_m$  источник совершает положительную ( $u > 0$  и  $dq > 0$ ) работу, определяемую площадью  $LCB$ . Налагая рис. 34 на рис. 35, получаем, что вся работа внешнего источника за один период изменения напряжения на конденсаторе определяется площадью  $S$  петли гистерезиса (рис. 36), т. е. равна:

$$A = \oint u dq = abS,$$

где  $a$  и  $b$  — масштабы по осям абсцисс и ординат.

Так как после обхода по замкнутому циклу диэлектрик возвращается к исходному состоянию, то энергия электрического поля возвращается к исходному значению. Следовательно, в этом случае работа  $A$  целиком идет на необратимые процессы в диэлектрике, т. е. равна потерям  $W_2$  энергии в диэлектрике конденсатора за один

период изменения напряжения. Эти потери называют *потерями на диэлектрический гистерезис*.

В случае плоского конденсатора с поверхностью обкладок  $s$  и толщиной диэлектрика  $d$  имеем:  $q = Ds$  и  $u = Ed$ . Следовательно,  $W_2 = sd \oint \mathcal{E} dD$ . Но  $sd = V$  — объем диэлектрика, в котором существует поле. Таким образом, потери за один цикл изменения напряженности поля, отнесенные к единице объема диэлектрика, равны:

$$W'_2 = \oint \mathcal{E} dD.$$

Эти потери измеряются в соответствующем масштабе площадью петли в координатах  $D$  и  $E$ , изображенной на рис. 29. Наличие этих довольно значительных потерь в таких веществах, как титанат бария, затрудняет использование их при переменных полях, особенно при высоких частотах.

### § 16. Силы, действующие на заряженные тела

Механические силы взаимодействия точечных заряженных тел могут быть вычислены при помощи закона Кулона. В случаях, когда заряженные тела нельзя рассматривать как точечные, непосредственное применение закона Кулона невозможно. В общем случае вычисление результирующей силы, действующей на данное заряженное тело, может быть выполнено достаточно просто, если известны емкости тел или емкости между телами как функции геометрических координат.

Выше было указано, что емкость зависит от диэлектрической проницаемости среды и от геометрических величин, обозначенных через  $g$  и определяющих форму, размеры и взаимное расположение тел. В дальнейшем мы будем называть величины  $g$  *обобщенными геометрическими координатами* системы. Это могут быть линейные перемещения тел по заданному пути, расстояния между телами, углы поворота тел вокруг некоторой оси, поверхности или объемы тел и т. д. При таком обобщенном понимании координат  $g$ , точно так же силы  $f$ , стремящиеся изменить эти координаты, должны рассматриваться как *обобщенные силы*. Во всех случаях обобщения сила  $f$  должна удовлетворять основному требованию, чтобы произведение силы на производимое ею изменение координаты равнялось работе, совершаемой силой при этом изменении координаты. В зависимости от выбора обобщенной координаты  $g$  и обобщенная сила получает тот или иной смысл. Так, если  $g$  — линейное перемещение, то  $f$  — обычная механическая сила; если  $g$  — угол поворота, то  $f$  — момент пары сил; если  $g$  — поверхность, то  $f$  — поверхностное натяжение; если  $g$  — объем, то  $f$  — давление.

Наименьшее число обобщенных координат, необходимое для определения положения системы, равно, как известно из механики, числу степеней свободы системы. Так, в случае тела, перемещаю-

щегося по некоторой направляющей, достаточно знать путь, пройденный телом вдоль направляющей от начального положения. В случае одного тела, закрепленного на оси, достаточно знать только угол поворота тела вокруг этой оси. Если тело закреплено в точке, то его положение может быть определено тремя углами поворота и т. д. Каждой обобщенной координате соответствует своя обобщенная сила, стремящаяся изменить именно эту координату.

Рассмотрим произвольную систему  $n$  заряженных тел (рис. 37). Предположим, что все заряженные тела, кроме тела  $A_p$ , неподвижно закреплены, и только тело  $A_p$  может перемещаться так, что изме-

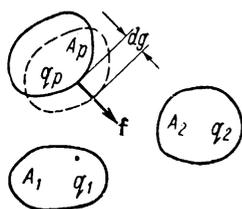


Рис. 37.

няется одна его координата  $g$ . Это изменение координаты  $g$  совершается под действием силы  $f$ , являющейся результатом взаимодействия заряженного тела  $A_p$  со всеми другими заряженными телами системы.

Будем исходить из предположения, что как возможные изменения зарядов тел, так и перемещение тела  $A_p$  происходит весьма медленно, теоретически — бесконечно медленно. При этом электрические токи, возникающие на поверхности тел вследствие перераспределения зарядов, бесконечно малы, и, следовательно, можно считать, что потери энергии в проводниках отсутствуют. Предположим также, что изменение напряженности поля в диэлектрике не сопровождается потерей энергии в нем. При этих условиях работа, затрачиваемая внешними источниками энергии на изменения  $dq_k$  зарядов тел, должна покрывать приращение энергии электрического поля и механическую работу, совершаемую силой  $f$ , изменяющей положение тела  $A_p$ . Сказанное может быть выражено уравнением:

$$\sum_{k=1}^{k=n} U_k dq_k = d_g W_s + f dg.$$

Индекс  $g$  у величины  $d_g W_s$  указывает, что рассматривается приращение энергии, соответствующее изменению только одной координаты  $g$  системы. Это уравнение справедливо независимо от того, каким образом изменяются заряды и потенциалы тела. Оно является выражением закона сохранения энергии применительно к рассматриваемому нами случаю.

Чтобы получить наиболее простое выражение для силы  $f$ , предположим, что заряды всех тел остаются неизменными:  $q_k = \text{const}$ . Это условие удовлетворяется, если все тела отключены от источ-

ников электродвижущей силы. Но тогда  $dq_k = 0$  и, соответственно, равна нулю работа внешних источников:  $\sum_{k=1}^{k=n} U_k dq_k = 0$ .

В этом случае имеем:

$$0 = (d_g W_\vartheta)_{q_k = \text{const}} + f dg$$

или

$$f dg = - (d_g W_\vartheta)_{q_k = \text{const}}.$$

Общий индекс  $q_k = \text{const}$  у приращения энергии указывает, что заряды сохраняются неизменными.

Если  $dg$  есть перемещение, происходящее под действием силы  $f$ , то  $f dg > 0$ . Из последнего равенства следует, что  $d_g W_\vartheta < 0$ , т. е. энергия электрического поля убывает. Действительно, механическая работа при отключенных внешних источниках энергии может совершаться только за счет внутренних запасов энергии в системе, в данном случае за счет энергии электрического поля.

Из последнего равенства получаем:

$$f = - \left( \frac{d_g W_\vartheta}{dg} \right)_{q_k = \text{const}} = - \left( \frac{\partial W_\vartheta}{\partial g} \right)_{q_k = \text{const}},$$

*т. е. механическая сила, стремящаяся изменить данную координату системы, равна убыли энергии электрического поля, отнесенной к единице производимого силой изменения координаты, в предположении, что заряды всех тел сохраняются неизменными.*

Рассмотрим еще другой, также весьма важный случай, когда во время движения системы поддерживаются неизменными потенциалы всех тел, т. е. когда  $U_k = \text{const}$ . Такой режим имеет место, когда все тела приключены к зажимам внешних источников э. д. с., напряжения на зажимах которых остаются неизменными. Так как при изменении геометрической конфигурации системы будут изменяться емкости между телами, то при постоянстве потенциалов тел должны изменяться их заряды. Дополнительные заряды могут сообщаться системе только от внешних источников, которые должны на это затратить некоторую работу. Таким образом, все члены уравнения

$$\sum_{k=1}^{k=n} U_k dq_k = d_g W_\vartheta + f dg$$

теперь отличны от нуля. Однако, если  $U_k = \text{const}$  и диэлектрические проницаемости сред не зависят от напряженности поля, то существует простое соотношение между работой внешних источников и приращением энергии электрического поля. Действительно, энергия электрического поля системы заряженных тел при этом мо-

жет быть представлена в форме:

$$W_{\vartheta} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} U_k q_k$$

и, следовательно, ее приращение при постоянстве потенциалов равно:

$$(d_g W_{\vartheta})_{U_k = \text{const}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} U_k dq_k,$$

т. е. в точности равно *половине* работы внешних источников. Остальная половина работы внешних источников идет на совершение механической работы  $fdg$ . Таким образом, механическая работа равна приращению энергии электрического поля:

$$fdg = + (d_g W_{\vartheta})_{U_k = \text{const}}$$

Если в системе происходит перемещение под действием силы  $f$ , то  $fdg > 0$ . Приращение энергии при  $U_k = \text{const}$  также оказывается положительным, и энергия поля возрастает.

Из последнего равенства получаем еще одно выражение для механической силы:

$$f = + \left( \frac{\partial W_{\vartheta}}{\partial g} \right)_{U_k = \text{const}},$$

т. е. *механическая сила, стремящаяся изменить данную координату системы, равна увеличению энергии электрического поля, отнесенному к единице производимого силой изменения координаты, в предположении, что потенциалы всех тел поддерживаются постоянными.*

Оба выражения для силы, и это необходимо подчеркнуть, тождественно равны друг другу, т. е. можно написать:

$$f = - \left( \frac{\partial W_{\vartheta}}{\partial g} \right)_{q_k = \text{const}} = + \left( \frac{\partial W_{\vartheta}}{\partial g} \right)_{U_k = \text{const}}.$$

Сила зависит только от положения тел и значений их зарядов в данный момент и не может зависеть от того, как будет развиваться энергетический процесс в том случае, если система придет в движение под действием силы. Но этот энергетический процесс, конечно, будет различным в зависимости от того, будем ли мы поддерживать при движении системы постоянными заряды тел или их потенциалы или же, вообще говоря, будут изменяться как заряды, так и потенциалы тел. Это и понятно, так как энергия электрического поля определяется не только положением тел, но и их зарядами, а следовательно, изменение энергии зависит как от изменения положения тел, так и от изменения зарядов.

Продemonстрируем тождественность обоих выражений для силы  $f$  на примере силы притяжения обкладок конденсатора. Энергия

заряженного конденсатора равна:

$$W_s = \frac{Cu^2}{2} = \frac{q^2}{2C},$$

где  $u = U_1 - U_2$  — разность потенциалов обкладок конденсатора. От координат явно зависит емкость  $C$  конденсатора. Определяя силу по формуле при  $q_k = \text{const}$ , воспользуемся выражением энергии через заряд конденсатора. Получаем:

$$f = - \frac{\partial}{\partial g} \left( \frac{q^2}{2C} \right)_{q=\text{const}} = - \frac{q^2}{2} \frac{\partial}{\partial g} \left( \frac{1}{C} \right) = \frac{q^2}{2C^2} \frac{\partial C}{\partial g} = \frac{u^2}{2} \frac{\partial C}{\partial g}.$$

При определении силы по формуле при  $U_k = \text{const}$  воспользуемся выражением энергии через разность потенциалов. Находим:

$$f = + \frac{\partial}{\partial g} \left( \frac{Cu^2}{2} \right)_{u=\text{const}} = \frac{u^2}{2} \frac{\partial C}{\partial g}.$$

Итак, действительно, оба выражения для силы совершенно одинаковы. Только при взятии производной следует считать постоянными в одном случае заряды, а в другом потенциалы.

Так как при движении под действием силы  $f$  имеем  $fdg > 0$ , то из последнего выражения следует, что при таком движении  $dC > 0$ , т. е. емкость возрастает. Следовательно, механические силы, действующие на обкладки конденсатора, стремятся увеличить емкость конденсатора.

Ценность полученных выражений в их общности: для вычисления силы нам достаточно только знать, как зависят от координат электрические емкости  $C$ , входящие в выражение для энергии электрического поля.

В качестве примера рассмотрим электростатический вольтметр, схематически изображенный на рис. 38. Емкость между подвижной и неподвижной частями вольтметра зависит от угла  $\alpha$  поворота подвижной части, т. е.  $C = F(\alpha)$ .

Так как в качестве обобщенной координаты принят угол поворота, то обобщенной силой  $f$  является вращающий момент  $M$ , действующий на подвижную пластину. Момент, определяемый силами притяжения между подвижными и неподвижными пласти-

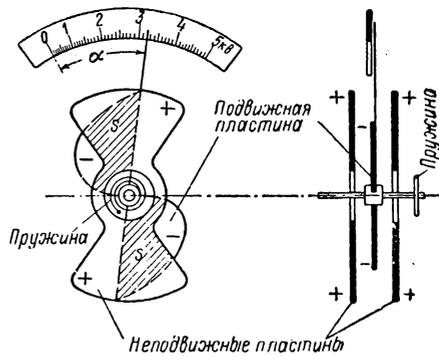


Рис. 38.

нами, имеющими заряды разного знака, имеет выражение:

$$M = \frac{u^2}{2} \frac{\partial C}{\partial \alpha}.$$

В состоянии равновесия этот момент уравновешивается моментом кручения пружины, пропорциональным углу  $\alpha$ :  $M' = k_1 \alpha$ . Поэтому положение равновесия определяется уравнением:

$$\frac{u^2}{2} \frac{\partial C}{\partial \alpha} = k_1 \alpha.$$

Из этого уравнения видно, что характер шкалы вольтметра, т. е. зависимость  $\alpha = \varphi(u)$  определяется зависимостью  $C = F(\alpha)$ . Так, например, если  $C = k' \alpha$ , т. е. если емкость пропорциональна углу поворота подвижной части, то

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{k'}{k_1} u^2,$$

т. е. шкала имеет квадратичный характер.

Найдем, какова должна быть зависимость  $C = F(\alpha)$  для того, чтобы шкала вольтметра была равномерной. Мы желаем, чтобы угол  $\alpha$  отклонения стрелки прибора был пропорционален напряжению, т. е. чтобы соблюдалось условие:  $\alpha = k_2 u$ . Подставляя отсюда  $u$  в уравнение равновесия, получаем:

$$\frac{\partial C}{\partial \alpha} = 2k_1 k_2^2 \frac{1}{\alpha},$$

откуда находится требуемая зависимость  $C$  от  $\alpha$ :

$$C = 2k_1 k_2^2 \ln \alpha + A.$$

Емкость между пластинами, если пренебречь краевым эффектом, пропорциональна поверхности  $s$  перекрытия пластин, заштрихованной на рисунке. Эта поверхность должна возрастать пропорционально логарифму угла  $\alpha$ . Следует отметить, что полученное уравнение для емкости не может быть удовлетворено при  $\alpha = 0$ , так как емкость не может принимать бесконечно больших значений. Поэтому в вольтметре этого типа принципиально невозможно добиться равномерности шкалы в ее начальном участке.

В качестве другого примера рассмотрим силу взаимного притяжения обкладок заряженного плоского конденсатора. Будем определять силу, действующую на вырезанную центральную часть обкладки, окруженную охранным кольцом, достаточно широким, чтобы поле под центральной частью обкладки можно было считать однородным (рис. 39). Емкость этой центральной части конденсатора равна:  $C = \frac{\epsilon s}{d}$ , причем  $s$  — внутренняя поверхность вырезанной

части обкладки и  $d$  — расстояние между обкладками. Сила, стремящаяся изменить расстояние  $d$ , равна:

$$f = \frac{u^2}{2} \frac{\partial C}{\partial d} = - \frac{u^2}{2} \frac{\epsilon s}{d^2}.$$

Ввиду однородности поля в рассматриваемой системе имеем  $\frac{u^2}{d^2} = E^2$  и, стало быть,  $f = - \frac{\epsilon E^2}{2} s = - \frac{ED}{2} s$ . Знак минус указывает, что сила действует в сторону уменьшения расстояния  $d$ , т. е. стремится сблизить обкладки. Абсолютное значение силы, приходящейся на единицу поверхности обкладки,

$$f' = \frac{|f|}{s} = \frac{ED}{2}$$

численно равно энергии электрического поля в единице объема диэлектрика.

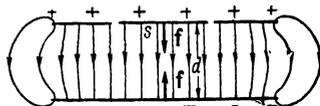


Рис. 39.

В заключение этого параграфа ознакомимся кратко с представлениями Фарадея о природе механических сил в электрическом поле. Фарадей рассматривал механические взаимодействия между заряженными телами как результат особого физического состояния диэлектрика, заполняющего пространство между заряженными телами.

По представлению Фарадея, силы, действующие на обкладки конденсатора, являются результатом тяжения, которое испытывают трубки электрического смещения по всей их длине. При этом сила продольного тяжения, отнесенная к единице поверхности любого нормального сечения трубки, равна:

$$f' = \frac{ED}{2} = \frac{\epsilon E^2}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon}.$$

Это продольное тяжение проявляется в виде сил, действующих на обкладки, так как трубки заканчиваются на поверхностях обкладок.

Продольное тяжение трубок согласно этим представлениям должно сопровождаться боковым распором их. Действительно, при наличии одного лишь тяжения трубки всегда располагались бы по кратчайшему расстоянию, и нельзя было бы объяснить искривление трубок у краев конденсаторов. Это искривление можно объяснить существованием наряду с продольным тяжением бокового распора между трубками. Величину бокового распора можно определить, рассматривая равновесие отрезка трубки в неоднородном поле. При этом оказывается, что силы бокового давления и продольного тяжения, отнесенные к единице поверхности, равны между собой.

Представление о продольном тяжении и боковом распоре трубок смещения помогает нам, когда построена картина поля, на-

глядно представить себе общий характер сил, действующих на заряженные тела. Так, из рис. 17 и 21 явствует, что поверхность уединенного заряженного тела испытывает стремление к увеличению своих размеров, она как бы растягивается во все стороны начинающимися на ней трубками смещения. Два тела, имеющие заряды разного знака (см. рис. 20), взаимно притягиваются как бы вследствие продольного тяжения трубок, идущих от одного тела к другому. Тела, несущие заряды одного знака (рис. 40), отталкиваются, что может быть объяснено согласно этим представлениям боковым распором между трубками, выходящими из этих тел. Незаряженное проводящее тело, внесенное в поле заряженного тела, притягивается

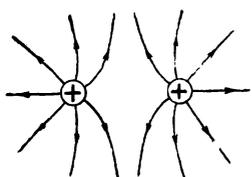


Рис. 40.

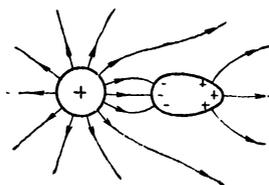


Рис. 41.

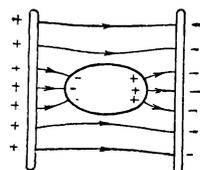


Рис. 42.

к последнему, что нетрудно усмотреть из картины поля, изображенной на рис. 41. Вообще всякое проводящее незаряженное тело, внесенное в неоднородное внешнее поле, испытывает стремление переместиться в ту сторону, где напряженность поля имеет большее значение. Проводник удлиненной формы во внешнем однородном поле (рис. 42) располагается вдоль поля, не испытывая при этом стремления перемещаться в ту или иную сторону.

Силы тяжения должны проявляться не только на границе между диэлектриком и проводником, но также и на границе двух различных диэлектриков. В том случае, когда линии смещения пересекают нормально поверхность раздела, вектор  $\mathbf{D}$  имеет одинаковое значение в обеих средах, тяжение же трубок смещения, приходящееся на единицу поверхности, согласно выражению  $f' = \frac{D^2}{2\epsilon}$ , будет больше в той среде, диэлектрическая проницаемость которой меньше. Следовательно, поверхность раздела испытывает давление в сторону среды с меньшей диэлектрической проницаемостью. Силами, действующими на границе двух диэлектриков, можно объяснить втягивание в неоднородное поле тела из изолирующего вещества, имеющего диэлектрическую проницаемость, превышающую проницаемость окружающей среды.

Метод Фарадея, развитый Максвеллом в количественном отношении, позволяет не только оценить качественно, но и вычислить силы столь же точно, как и при помощи закона Кулона, который по своей форме соответствует представлению о действии зарядов на расстоянии. Так как электромагнитное поле является одним из видов мате-

рии, то мы должны принять основное положение Фарадея о передаче сил от одного заряженного тела к другому через посредство электрического поля. Представление же Фарадея о трубках смещения и их свойствах следует рассматривать лишь как способ наглядного описания передачи сил в электрическом поле. Сами же физические процессы, совершающиеся в электрическом поле, конечно, не могут быть сведены к механическим натяжениям и давлениям в некоторой гипотетической среде, о чем было сказано в первом параграфе.

Подобные попытки свести явления в электрическом поле к механическим натяжениям и давлениям в нем являются механистической трактовкой электромагнитных явлений. Изучаемые в области электромагнитных явлений виды материи — частицы, обладающие электрическим зарядом, и электромагнитное поле, — как было сказано в первых параграфах, обладают особыми, не рассматриваемыми в механике электромагнитными свойствами. Для таких частиц (электронов, протонов и т. п.) этим особым отличительным свойством является их электрический заряд. Соответственно и физические величины  $E$  и  $D_0$ , определяющие интенсивность электромагнитного процесса в электрическом поле, являются электромагнитными величинами, т. е. отнюдь не являются напряженностью и смещением в механическом смысле.

При современном состоянии науки мы не можем дать наглядную интерпретацию физическому процессу, совершающемуся в поле, мы не знаем внутреннего строения поля, так же как еще не знаем внутреннего строения электрона, протона и т. п. Эти значительно более глубокие знания несомненно могут стать достоянием человека при дальнейшем прогрессе науки.

---

---

## ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

### ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

#### § 17. Электрический ток и плотность тока

Явление движения заряженных частиц называют *электрическим током*. В понятие электрический ток, как будет показано в § 20, входит также явление изменения во времени электрического поля, т. е. так называемый электрический ток смещения в пустоте.

Термин электрический ток применяется для характеристики не только самих этих явлений, но также и их интенсивности, являясь при этом синонимом термина *сила электрического тока*. В этом последнем смысле электрический ток является физической величиной. Ограничиваясь пока рассмотрением явления движения заряженных частиц, мы можем определить электрический ток как величину (силу тока) следующим образом: *электрический ток  $i$  сквозь некоторую поверхность  $s$  равен пределу отношения электрического заряда  $\Delta q$ , переносимого заряженными частицами сквозь эту поверхность в течение промежутка времени  $\Delta t$ , к величине этого промежутка, когда последний стремится к нулю*, т. е.  $i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} =$

$= \frac{dq}{dt}$ . Электрический ток есть величина скалярная. В разных элементах поверхности  $s$  направление движения заряженных частиц может быть самым различным. Однако, рассматривая весьма малый элемент поверхности  $\Delta s$ , можно считать направление движения заряженных частиц во всех точках элемента одинаковым, причем это положение становится все более строгим по мере уменьшения  $\Delta s$ , т. е. когда  $\Delta s \rightarrow 0$ . В связи с этим вводят в рассмотрение векторную величину — *плотность тока, равную пределу отношения тока  $\Delta i$  сквозь элемент поверхности  $\Delta s$ , нормальный к направлению движения заряженных частиц, к этому элементу, когда последний стремится к нулю*,

$$\delta = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta i}{\Delta s} = \frac{di}{ds}.$$

*и имеющую направление, совпадающее с направлением движения положительно заряженных частиц, или, соответственно, противоположное направлению движения отрицательно заряженных частиц.*

Если вектор  $\delta$  составляет с положительной нормалью к поверхности угол  $\beta$ , то существует соотношение:

$$di = \delta \cos \beta ds = \delta ds.$$

Ток, проходящий сквозь поверхность  $s$  конечных размеров (рис. 43), поэтому равен:

$$i = \int_s \delta \cos \beta ds = \int_s \delta ds.$$

Только в том случае, когда плотность тока во всех точках поверхности одинакова по величине и составляет с нормалью к поверхности всюду один и тот же угол, можно написать:

$$i = \delta \cos \beta \int_s ds = \delta \cos \beta s.$$

Если, кроме того, направление тока нормально к поверхности, то  $i = \delta \cdot s$ . Такое условие соблюдается при постоянном во времени токе в случае линейных проводников, поперечные размеры которых малы по сравнению с их длиной. Поэтому при изучении процессов в электрических цепях, составленных из линейных проводников, обычно говорят о направлении всего тока в том или ином участке цепи. Из сказанного ясно, что в общем случае о направлении тока, как о вполне определенном направлении в пространстве, можно говорить только в отношении бесконечно малого тока  $di$  сквозь бесконечно малую поверхность  $ds$ . Это есть направление вектора плотности тока в данной точке пространства.

В пространстве, в котором существует электрический ток, можно провести ряд линий таким образом, чтобы векторы плотности тока были касательны к этим линиям во всех их точках. Такие линии мы назовем *линиями тока*. Область, ограниченная трубчатой поверхностью, образованной совокупностью линий тока, называется *трубкой тока*.

Можно условиться подразделять пространство, в котором существует ток, на трубки равного тока. При этом число трубок, пересекающих единицу нормальной к ним поверхности, будет пропорционально плотности тока. Если еще условиться каждую трубку изображать в пространстве одной линией тока, совпадающей с осью трубки, то картина таких линий даст нам наглядное представление не только о направлении, но и о величине вектора плотности тока во всех точках пространства. Говоря в дальнейшем о линиях тока, мы и будем под этим подразумевать оси трубок тока.

В системе единиц МКСА единицей тока является *ампер* (1 а) и единицей плотности тока *ампер на квадратный метр* (1 а/м<sup>2</sup>).

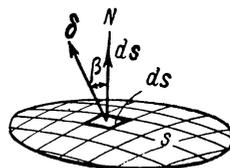


Рис. 43.

### § 18. Ток в проводящей среде

Электрический ток в проводящей среде связан с наличием в ней электрического поля. Именно под действием этого электрического поля и приходят в упорядоченное движение заряженные частицы внутри проводника. Этот вид электрического тока называют *электрическим током проводимости*.

Согласно электронной теории электрический ток в металлах представляет собой движение так называемых свободных электронов, слабо связанных с атомами, легко переходящих от атома к атому. В соответствии с изложенными выше квантовыми представлениями высокая электропроводность таких веществ является результатом того, что в них валентная зона перекрывается зоной проводимости, и, следовательно, между этими зонами отсутствует энергетический зазор и валентные электроны могут легко переходить на свободные энергетические уровни зоны проводимости, становясь свободными электронами. При заданной напряженности поля и температуре устанавливается определенная плотность тока, т. е. электроны приобретают определенную среднюю скорость в направлении, противоположном направлению линий поля, так как заряд электрона отрицателен. То обстоятельство, что средняя скорость электронов в постоянном поле остается постоянной, связано с тем, что кинетическая энергия, приобретаемая электронами при ускорении в электрическом поле, передается атомам вещества и переходит в тепловое движение. Плотность тока при постоянной температуре проводника оказывается пропорциональной напряженности электрического поля. При этом в изотропной среде вектор плотности тока  $\delta$  совпадает по направлению с вектором напряженности электрического поля  $E$ , и линии тока совпадают с линиями напряженности электрического поля. На основании сказанного можем для плотности тока проводимости написать:

$$\delta = \gamma E.$$

Величину  $\gamma$  называют *удельной электрической проводимостью вещества*.

Величину  $\rho = \frac{1}{\gamma}$ , обратную удельной проводимости, называют *удельным электрическим сопротивлением вещества*. Следовательно, связь между напряженностью электрического поля и плотностью тока может быть представлена в виде:

$$E = \rho \delta$$

Единицей удельного сопротивления в системе единиц МКСА является *ом, умноженный на метр* (1 ом·м). Действительно, из соотношения  $\rho = \frac{E}{\delta}$  имеем для этой единицы  $1 \frac{\text{в}}{\text{м}} \frac{\text{м}^2}{\text{а}} = 1 \frac{\text{в} \cdot \text{м}}{\text{а}} = 1 \text{ ом} \cdot \text{м}$ , так как  $1 \frac{\text{в}}{\text{а}} = 1 \text{ ом}$  есть единица электрического со-

противления. Соответственно единицей удельной проводимости в этой системе является  $1 \frac{1}{\text{ом} \cdot \text{м}}$ .

Наивысшей удельной проводимостью при нормальной температуре обладают чистое серебро и медь.

Величина  $\gamma$  сильно зависит от примесей, которые обычно всегда имеются в металлах. Особенно резко сказывается влияние примесей, если они образуют с основным металлом твердые растворы. Наличие примесей может сильно снижать удельную проводимость металла. Поэтому медь, применяемая для электротехнических целей, подвергается очистке путем электролиза. Все же в электротехнической меди содержится некоторое количество примесей. На величине  $\gamma$  сказывается также механическая обработка. Холодная обработка приводит к некоторому снижению  $\gamma$ . В качестве стандартной удельной проводимости электротехнической меди принята удельная проводимость образцовой меди, равная  $58 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{ом} \cdot \text{м}}$

при  $20^\circ \text{C}$ , отвечающая удельному сопротивлению  $0,017241 \cdot 10^{-6} \text{ом} \cdot \text{м}$ . К проводящим веществам относятся также уголь и электролиты. В последних проводимость осуществляется положительными и отрицательными ионами.

Удельная проводимость  $\gamma$  и, соответственно, удельное сопротивление  $\rho$  проводящих веществ зависят от температуры. На рис. 44 приведены кривые зависимости удельного сопротивления меди, железа, платины и свинца от температуры. В некоторых пределах эти зависимости можно считать линейными. Поэтому для вычисления удельного сопротивления  $\rho_t$  при температуре  $t$  по известному значению удельного сопротивления  $\rho_a$  при температуре  $t_a$  можно пользоваться, если  $t$  не слишком отличается от  $t_a$ , приближенной зависимостью:

$$\rho_t = \rho_a [1 + \alpha(t - t_a)].$$

Величина  $\alpha$  называется *температурным коэффициентом сопротивления*. Металлы имеют положительный температурный коэффициент сопротивления. Температурный коэффициент сопротивления электролитов и угля отрицателен.

Распределение зарядов на проводниках при постоянных токах в проводниках должно быть стационарным, так как электрический заряд, вносимый в любой элемент объема проводника за некоторый промежуток времени, должен быть равен заряду, выносимому из этого элемента объема за тот же промежуток времени. Но электри-

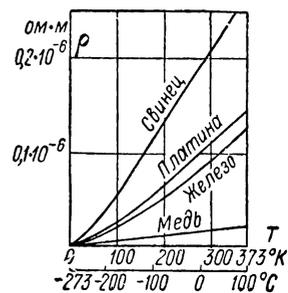


Рис. 44.

ческое поле стационарно распределенных зарядов тождественно с электростатическим полем аналогичным образом распределенных неподвижных зарядов. Поэтому в области вне источников э. д. с. электрическое поле постоянных токов, так же как и электростатическое поле, является потенциальным и в нем для любого замкнутого контура, не проходящего через источник э. д. с., имеет место равенство:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0.$$

Поле постоянных токов, протекающих в неподвижных проводниках, в отличие от электростатического называют *стационарным*.

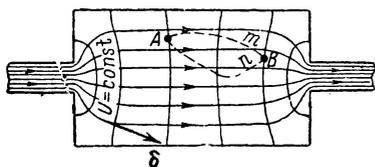


Рис. 45.

Так же, как в электростатическом поле, линейный интеграл напряженности электрического поля, взятый от точки  $A$  до точки  $B$  (рис. 45), определяется только положением этих точек и не зависит от выбора пути между ними (например пути  $m$  или  $n$ ) при условии, что этот путь не проходит через источник э. д. с.

Этот линейный интеграл равен разности потенциалов точек  $A$  и  $B$ :

$$\int_A^B \mathbf{E} d\mathbf{l} = U_A - U_B.$$

Поверхности равного потенциала, определяемые уравнениями

$$U(x, y, z) = \text{const},$$

пересекаются линиями напряженности поля под прямым углом.

В изотропной в отношении проводимости среде линии тока совпадают с линиями напряженности поля, так как в любой точке такой среды векторы плотности тока и напряженности электрического поля, связанные соотношением  $\delta = \gamma \mathbf{E}$ , имеют одно и то же направление. Поэтому в изотропной среде линии тока пересекают поверхности равного потенциала под прямым углом.

## § 19. Ток переноса

Перенос электрических зарядов движущимися в свободном пространстве элементарными частицами или телами представляет собой *электрический ток переноса* (ток конвекции). Ток переноса отличается от тока проводимости тем, что его плотность не может быть представлена соотношением:  $\delta = \gamma \mathbf{E}$ , где удельная проводимость  $\gamma$  есть определенная величина, характеризующая среду, прово-

дающую ток. В случае *свободного* движения обладающих электрическим зарядом частиц или заряженных тел в электрическом поле их скорость не пропорциональна напряженности поля  $E$ . Действительно, сила, действующая на частицу с зарядом  $q$  в электрическом поле, равна  $qE$ . Ускорение такой частицы пропорционально напряженности поля. Соответственно движение ее в свободном пространстве будет равноускоренным, так как отсутствует сопротивление среды.

Важным случаем тока переноса является движение элементарных обладающих зарядом частиц в пустоте. Не менее важным случаем тока переноса является электрический ток в газах. Выразим плотность тока переноса через среднюю объемную плотность  $\rho$  заряда движущихся частиц и их скорость  $v$ . С этой целью выделим в пространстве прямоугольный параллелепипед, имеющий объем

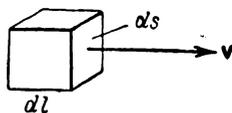


Рис. 46.

$dl ds$  (рис. 46). Пусть ребро  $dl$  параллельно вектору скорости. Заряд внутри параллелепипеда  $dq = \rho dl ds$ . Весь этот заряд пройдет через поверхность  $ds$  за такой промежуток времени  $dt$ , в течение которого элементарные заряженные частицы проходят путь  $dl$ . Этот промежуток времени определяется условием  $dl = v dt$ . Следовательно, ток сквозь поверхность  $ds$  равен  $di = \frac{dq}{dt} = \rho v ds$ , и для плотности тока имеем:

$$\delta = \frac{di}{ds} = \rho v.$$

При движении частиц с отрицательным зарядом ( $\rho < 0$ ) условное положительное направление тока противоположно направлению движения, и между абсолютными значениями  $\delta$  и  $v$  существует соотношение:

$$\delta = -\rho v.$$

Оба соотношения для любого знака  $\rho$  объединяются в векторной форме:

$$\delta = \rho v.$$

При  $\rho > 0$  векторы  $\delta$  и  $v$  совпадают по направлению. При  $\rho < 0$  они противоположны.

Если одновременно имеет место движение положительно заряженных частиц со скоростью  $v_+$  при объемной плотности зарядов  $\rho_+$  и движение отрицательно заряженных частиц со скоростью  $v_-$  при объемной плотности зарядов  $\rho_-$ , то плотность тока переноса равна:  $\delta = \rho_+ v_+ + \rho_- v_-$ .

## § 20. Ток электрического смещения в диэлектрике

Диэлектрики, используемые в различных технических устройствах, имеют хотя и очень малую, но все же конечную удельную проводимость. При изучении явлений, которые нас будут непосредственно интересовать в этом параграфе, мы будем полностью пренебрегать электропроводностью диэлектриков и, следовательно, будем рассматривать диэлектрики как идеальные.

При всяком изменении электрического поля во времени изменяется поляризованность  $P$  диэлектрика. При этом в веществе диэлектрика движутся элементарные частицы с электрическими зарядами, входящие в состав атомов и молекул вещества. Этот вид электрического тока в диэлектрике называют *электрическим током поляризации*. Так как в диэлектрике заряженные частицы не являются свободными и могут только смещаться под действием электрического поля, то ток поляризации называют также электрическим током смещения, причем он составляет, как будет дальше отмечено, только часть общего тока смещения в диэлектрике. Нетрудно связать плотность  $\delta'$  этого тока с изменением поляризованности  $P$  вещества.

В § 9 величина  $P$  была выражена через электрический заряд  $dQ'$ , перенесенный заряженными частицами, сместившимися в веществе диэлектрика в процессе установления электрического поля сквозь элемент поверхности  $ds$ , нормальный к направлению смещения частиц, в виде:

$$P = \frac{dQ'}{ds}.$$

Если элемент поверхности  $ds$  ориентирован по отношению к направлению смещения заряженных частиц произвольно, то будем иметь соответственно:

$$P_n = \frac{dQ'}{ds},$$

где  $P_n$  — нормальная составляющая вектора  $\mathbf{P}$  к элементу поверхности  $ds$ .

При изменении величины  $\mathbf{P}$  во времени сквозь элемент поверхности  $ds$  будет проходить ток

$$di = \frac{d}{dt} (P_n ds) = \frac{dP_n}{dt} ds.$$

С другой стороны,

$$di = \delta'_n ds,$$

где  $\delta'_n$  — нормальная к элементу  $ds$  составляющая вектора плотности тока  $\delta'$ . Таким образом:

$$\delta'_n = \frac{dP_n}{dt}.$$

Так как расположение элемента поверхности  $ds$  может быть выбрано произвольно, то мы приходим к выводу, что составляющая вектора плотности тока  $\delta'$  по какому-либо направлению равна производной по времени от составляющей вектора поляризованности вещества  $\mathbf{P}$  по этому направлению. В частности, имеем:

$$\delta'_x = \frac{dP_x}{dt}; \quad \delta'_y = \frac{dP_y}{dt}; \quad \delta'_z = \frac{dP_z}{dt}.$$

Вектор плотности тока  $\delta'$ , таким образом, равен:

$$\delta' = \mathbf{i} \frac{dP_x}{dt} + \mathbf{j} \frac{dP_y}{dt} + \mathbf{k} \frac{dP_z}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{i}P_x + \mathbf{j}P_y + \mathbf{k}P_z),$$

где  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  — единичные векторы по осям  $OX$ ,  $OY$  и  $OZ$ .

Так как  $\mathbf{i}P_x + \mathbf{j}P_y + \mathbf{k}P_z = \mathbf{P}$ , то имеем:

$$\delta' = \frac{d\mathbf{P}}{dt}.$$

Итак, рассматриваемая часть вектора плотности тока смещения равна производной вектора поляризованности вещества по времени.

Выше уже было отмечено, что ток смещения и соответственно, плотность тока смещения  $\delta'$ , обязанные изменению поляризованности вещества, составляют только часть всего тока смещения и, соответственно, плотности тока смещения в диэлектрике. Действительно, вектор электрического смещения  $\mathbf{D}$  в диэлектрике имеет две составляющие  $\mathbf{D}_0$  и  $\mathbf{P}$ :

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 + \mathbf{P},$$

где  $\mathbf{D}_0 = \epsilon_0 \mathbf{E}$ . При изменении электрического поля изменяются обе составляющие, и соответственно, имеем:

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} = \frac{d\mathbf{D}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{P}}{dt}.$$

Вторая составляющая в последнем выражении, как только что было установлено, есть вектор плотности тока  $\delta'$  смещения, обязанного движению обладающих зарядами элементарных частиц в ве-

шестве диэлектрика. Очевидно, и первая составляющая имеет физическую размерность плотности тока. Она характеризует физический процесс в самом электрическом поле при его изменении во времени. Область пространства, рассматриваемого как форма существования материи в виде поля, т. е. область, в которой отсутствуют известные нам частицы материи, выше была названа пустотой. Следовательно, первую составляющую мы можем назвать плотностью *электрического тока смещения в пустоте*:

$$\delta_0 = \frac{d\mathbf{D}_0}{dt}.$$

Таким образом, вектор плотности *полного электрического тока смещения в диэлектрике* равен:

$$\delta = \frac{d\mathbf{D}}{dt} = \delta_0 + \delta' = \frac{d\mathbf{D}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{P}}{dt}.$$

В отношении первой составляющей наглядная интерпретация при современном состоянии науки не может быть дана, так как мы еще не имеем сколь-нибудь детального представления о внутреннем строении электромагнитного поля, о тех внутренних процессах, которые в нем совершаются. Однако, даже не имея для первой составляющей  $\delta_0$  плотности тока смещения представления столь же наглядного, как для второй его составляющей  $\delta'$ , мы можем высказать чрезвычайно важное предположение. Именно, следует ожидать, что важнейшее проявление электрического тока — появление связанного с ним магнитного поля — будет одинаковым для обеих составляющих. Опыт полностью подтверждает такое предположение.

Эти идеи впервые были высказаны Максвеллом и привели к созданию им теории электромагнитного поля. Действительно, согласно этим идеям при всяком изменении электрического поля, даже в предположении отсутствия в нем частиц вещества ( $\mathbf{P} = 0$ ), должно возникать в том же пространстве связанное с электрическим полем магнитное поле, т. е. образуется единое электромагнитное поле. Эти важные представления будут нами развиты подробнее в дальнейшем. Здесь важно отметить, что выводы из максвелловой теории электромагнитного поля полностью подтверждены опытом. Они были подтверждены экспериментальными исследованиями электромагнитных волн Г. Герца и П. Н. Лебедева. Наиболее ярким подтверждением их явились замечательные работы А. С. Попова и изобретение им радио, приведшие к современному исключительно широкому развитию радиотехники. При этом все достигнутые к настоящему времени практические результаты в области излучения и распространения электромагнитных волн находятся в полном согласии с теорией электромагнитного поля, в основу которой положено

представление об электрических токах смещения в диэлектрике и пустоте.

Итак, вектор плотности тока смещения, представляющий сумму векторов плотности тока  $\delta_0$  и  $\delta'$ , равен производной вектора электрического смещения по времени:

$$\delta = \frac{d\mathbf{D}}{dt}.$$

Эту производную следует понимать в векторном смысле. Если в точке  $A$  вектор смещения изменяется не только по величине, но и по направлению (рис. 47), то вектор плотности тока  $\delta$  уже не будет

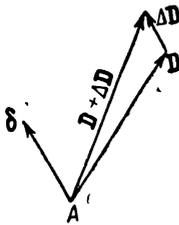


Рис. 47.

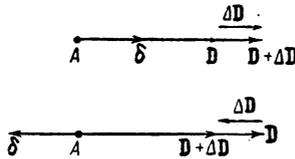


Рис. 48



Рис. 49.

совпадать по направлению с вектором смещения. Направление вектора  $\delta$  есть направление, к которому стремится направление приращения  $\Delta\mathbf{D}$  вектора смещения  $\mathbf{D}$ , происходящего за промежуток времени  $\Delta t$ , когда  $\Delta t \rightarrow 0$ .

На рис. 48 и 49 приведены частные случаи, когда  $\mathbf{D}$  меняется только по величине или только по направлению.

Для составляющих вектора плотности тока смещения имеем во всех случаях выражения:

$$\delta_x = \frac{dD_x}{dt}; \quad \delta_y = \frac{dD_y}{dt}; \quad \delta_z = \frac{dD_z}{dt}.$$

При переменном поле ток смещения, принципиально говоря, существует не только в диэлектриках, но также и в полупроводящих и проводящих веществах. Действительно, под действием внешнего поля молекулы этих веществ должны поляризоваться так же, как и молекулы диэлектрика, и, кроме того, должно возникнуть смещение в пустоте. В полупроводящих веществах с токами смещения приходится считаться только при достаточно высоких частотах изменения электрического поля. В проводящих же веществах токи смещения ничтожно малы по сравнению с токами проводимости даже при весьма высоких частотах. С другой стороны, в изолирующем веществе наряду с токами смещения обычно существуют токи проводимости, хотя они весьма малы по сравнению с первыми уже при низких частотах.

Наличие групп материалов, резко различных по своей проводимости, обеспечивает возможность создания желательных для нас путей тока, как, например, линий передач, электрических сетей, обмоток машин и т. д.

### § 21. Принцип непрерывности электрического тока

Вообразим в диэлектрике замкнутую поверхность  $s$  (рис. 50) и представим, что заряжается тело  $A$ , расположенное внутри этой поверхности. При увеличении заряда  $q$  тела усиливается окружающее его электрическое поле и возрастает электрическое смещение в диэлектрике. Поэтому сквозь поверхность  $s$  изнутри наружу протекает ток смещения. Поток вектора смещения сквозь поверхность  $s$  равен свободному заряду  $q$ , заключенному внутри поверхности:

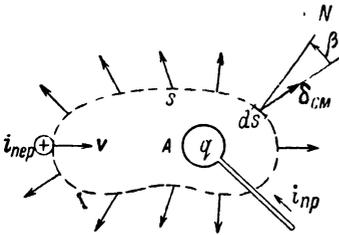


Рис. 50.

$$\oint_s \mathbf{D} ds = q.$$

Возьмем производную от этого равенства по времени. Получим.

$$\oint_s \frac{d\mathbf{D}}{dt} ds = \frac{dq}{dt}.$$

Величина

$$\oint_s \frac{d\mathbf{D}}{dt} ds = \oint_s \delta ds = i_{cm}$$

есть ток смещения сквозь поверхность  $s$  изнутри наружу.

Величина  $\frac{dq}{dt}$  есть скорость нарастания свободного заряда, заключенного внутри поверхности  $s$ . Увеличение свободного положительного заряда в объеме пространства, ограниченного поверхностью  $s$ , возможно только путем переноса положительных зарядов из внешнего пространства внутрь объема или отрицательных зарядов в обратном направлении. Этот перенос может быть осуществлен либо в процессе тока проводимости  $i_{np}$  в проводниках, пересекающих поверхность  $s$ , либо в процессе тока переноса  $i_{nep}$ , когда заряды переносятся сквозь поверхность на заряженных телах или движущимися в пространстве элементарными заряженными частицами. Если  $\frac{dq}{dt} > 0$ , то положительные заряды переносятся из внешнего пространства внутрь объема, ограниченного поверхностью  $s$ , а следовательно, сумма токов ( $i_{np} + i_{nep}$ ) будет отри-

цательна, так как положительной мы считаем внешнюю нормаль. Таким образом,

$$\frac{dq}{dt} = -(i_{np} + i_{nep}).$$

Равенство  $\oint_s \frac{dD}{dt} ds = \frac{dq}{dt}$  теперь может быть написано в виде:

$$i_{см} = -(i_{np} + i_{nep}) \text{ или } i_{см} + i_{np} + i_{nep} = 0.$$

Следовательно, *сумма токов всех родов — проводимости, переноса и смещения — сквозь любую замкнутую поверхность равна нулю.*

Если обозначить через  $\delta$  без индекса плотность тока независимо от его рода и через  $i$  — весь ток сквозь поверхность, то для любой замкнутой поверхности будем иметь:

$$i = \oint_s \delta ds = 0,$$

что и является общим выражением принципа непрерывности электрического тока. Этот важный принцип гласит: *полный электрический ток сквозь любую взятую в какой угодно среде замкнутую поверхность равен нулю.* При этом выходящий из поверхности ток считается положительным, входящий — отрицательным.

Таким образом, линии тока нигде не имеют ни начала, ни конца, — они принципиально являются замкнутыми линиями. Электрический ток протекает всегда по замкнутым путям.

Из всего сказанного ясно, что принцип непрерывности или, что то же, принцип замкнутости тока приобретает всеобщее значение только с введением понятия о токе смещения в диэлектрике и именно с учетом тока смещения в пустоте.

Чтобы лучше уяснить роль токов смещения в вопросе о замкнутости тока, рассмотрим ряд примеров, относящихся к важным практическим случаям или имеющих принципиальное значение.

Прежде всего рассмотрим процессы в электрической цепи с последовательно включенным конденсатором, происходящие при заряде (рис. 51) и при разряде (рис. 52) конденсатора. Если не принимать во внимание токов смещения, то эта цепь кажется разомкнутой.

Предположим, что при помощи ключа  $K$  незаряженный конденсатор включается в некоторый момент времени в цепь источника э. д. с. (рис. 51). Конденсатор заряжается; электрические заряды, переносимые от одной обкладки конденсатора к другой по соединяющему их проводнику, собираются на обкладках. При увеличении заряда на обкладках возрастает электрическое поле между ними, и в диэлектрике возникают токи электрического смещения. Если мы охватим одну из обкладок, например обкладку  $A$ , замкнутой по-

верхностью  $s$ , то во время, когда по проводнику, пересекающему эту поверхность, протекает к обкладке  $A$  ток проводимости  $i_{np}$  в диэлектрике образуется ток смещения, проходящий сквозь поверхность  $s$  изнутри наружу и в точности равный току  $i_{np}$  в проводнике. Линии тока смещения в диэлектрике являются продолжением линий тока в проводнике. Действительно, электрическое поле

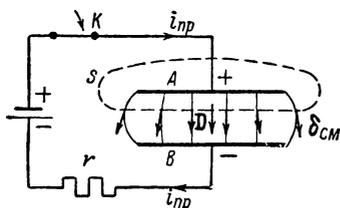


Рис. 51.

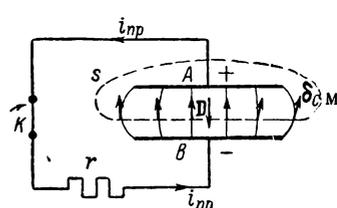


Рис. 52.

направлено от положительной обкладки  $A$  к отрицательной  $B$  и при этом возрастает. Следовательно, линии тока смещения направлены также от положительной обкладки к отрицательной. Электрический ток, протекающий в проводнике к положительной обкладке в форме тока проводимости, продолжается в диэлектрике в виде тока смещения и далее от отрицательной обкладки в проводнике вновь в форме тока проводимости. Таким образом, цепь электрического тока является замкнутой.

Если отключить заряженный конденсатор от источника э. д. с. и затем замкнуть его на сопротивление  $r$  (рис. 52), то конденсатор начнет разряжаться. Ток  $i_{np}$  в проводнике будет протекать от положительной обкладки  $A$  к отрицательной  $B$ . В диэлектрике электрическое поле

по-прежнему остается направленным от положительной обкладки к отрицательной. Однако теперь поле ослабевает и, следовательно, вектор плотности тока направлен против вектора смещения  $\mathbf{D}$ . Линии тока смещения направлены от отрицательной обкладки к положительной и являются продолжением линий тока в проводнике.

В качестве другого примера рассмотрим линию передачи (рис. 53). Емкость между проводами распределена вдоль всей линии. При переменном напряжении между проводами в диэлектрике возникают токи смещения. Проведем замкнутую поверхность  $s$  так, чтобы она охватила часть одного провода линии. Токи в проводе, входящий в поверхность и выходящий из нее, разнятся между собой на величину тока смещения в диэлектрике, проходящего сквозь поверхность  $s$ . Поэтому переменный ток в проводе в один и тот же момент

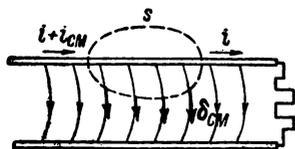


Рис. 53.

времени различен в разных поперечных сечениях провода. С этим обстоятельством приходится считаться при быстрых изменениях напряжения между проводами и в случае очень длинных линий.

В качестве последнего примера рассмотрим, как осуществляется замкнутость линий тока в случае тока переноса, т. е. в случае движущихся заряженных тел или частиц. Этот случай имеет глубокое принципиальное значение, так как всякий электрический ток, кроме тока смещения в пустоте, представляет собой движение большого числа отдельных заряженных элементарных частиц.

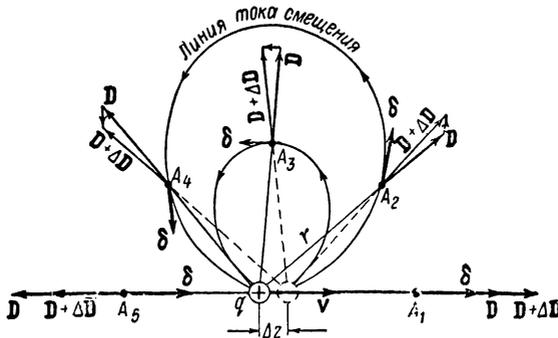


Рис. 54.

Рассмотрим уединенный точечный заряд  $q$ , движущийся в пустоте со скоростью  $v$  (рис. 54). В каждый момент времени вектор  $\mathbf{D}$  в любой точке пространства направлен по радиальной прямой, исходящей из центра заряда, и имеет величину, равную  $D = \epsilon_0 E = \frac{q}{4\pi r^2}$  (предполагаем, что  $v$  значительно меньше скорости света, и, следовательно, поле имеет такой же характер, как и для неподвижного заряда).

За промежуток времени  $\Delta t$  заряд проходит путь  $\Delta z = v\Delta t$ . Соответственно новому положению заряда вектор смещения в каждой точке пространства получает новое значение  $\mathbf{D} + \Delta\mathbf{D}$ . Вектор плотности тока смещения  $\boldsymbol{\delta} = \frac{d\mathbf{D}}{dt}$  всюду имеет направление, к которому стремится направление  $\Delta\mathbf{D}$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ . На рис. 54 построены векторы плотности тока в некоторых точках пространства. Если бы мы произвели это построение в достаточно большом числе точек пространства, то получили бы возможность провести линии тока смещения. Они имели бы вид линий, изображенных на рисунке. Мы видим, что ток смещения является продолжением тока переноса, и линии тока оказываются замкнутыми.

При большом числе движущихся элементарных заряженных частиц картина линий тока смещения усложняется, но по-прежнему линии тока оказываются замкнутыми, так как эта сложная картина получается наложением простых, изображенных на рис. 54.

## § 22. Законы электрических цепей постоянного тока

Установленные в §§ 18 и 21 соотношения между величинами, характеризующими электрические явления в проводящей среде, и принцип непрерывности электрического тока дают возможность рассчитывать электрические цепи постоянного тока. Электрическая цепь может быть подразделена на участки. Весь участок цепи, вдоль которого ток имеет одно и то же значение, называется *ветвью* цепи. Место соединения трех или большего числа ветвей называется *узлом* цепи. Основная задача расчета цепи состоит в определении токов во всех ветвях цепи по заданному э. д. с. источников, действующих в этой цепи, и по характеристикам элементов, образующих данную цепь, т. е. по так называемым *параметрам* цепи.



Рис. 55.

Из установленных общих соотношений вытекают законы электрических цепей постоянного тока, используемые при расчете цепей.

а) **З а к о н О м а**. Характеризующее ток в проводящей среде соотношение  $\delta = \gamma E$  при  $\gamma = \text{const}$  приводит к заключению, что при постоянном токе падение напряжения на участке проводника, не содержащем источников э. д. с., пропорционально току в проводнике.

Пусть два поперечных сечения  $s_1$  и  $s_2$  проводника (рис. 55) проведены так, что каждое из них является поверхностью равного потенциала. Потенциалы этих поверхностей обозначим через  $U_1$  и  $U_2$ . Предположим, что в участке проводника между рассматриваемыми сечениями нет источников э. д. с. Падение напряжения на этом участке или, что то же, разность потенциалов обозначим, согласно ранее принятому, одной буквой  $u$ :

$$u = U_1 - U_2.$$

Выделим внутри участка проводника (рис. 55) весьма тонкую трубку тока. Пусть  $\Delta s$  — нормальное сечение трубки, вообще говоря, изменяющееся вдоль трубки,  $dl$  — элемент длины трубки и  $l$  — длина трубки между сечениями  $s_1$  и  $s_2$ . Вектор  $E$  в изотропной среде всюду совпадает с направлением трубки. Имеем:

$$u = \int_l E dl = \int_l E \Delta s dl = \int_l \rho \delta dl.$$

Подставив сюда выражение для плотности тока  $\delta = \frac{\Delta i}{\Delta s}$  и замечая, что ток  $\Delta i$  может быть вынесен за знак интеграла, так как он, согласно принципу непрерывности тока, одинаков во всех сечениях трубки, получаем:

$$u = \int_l \frac{\rho \Delta i}{\Delta s} dl = \Delta i \int_l \frac{\rho}{\Delta s} dl.$$

Отсюда видно, что  $\Delta i$  пропорционально  $u$ , если  $\rho$  не зависит от  $\delta$ . Так как разность потенциалов  $u = U_1 - U_2$  одинакова для всех трубок тока внутри рассматриваемого участка проводника между его сечениями  $s_1$  и  $s_2$ , то, вычисляя ток  $i$  во всем проводнике путем суммирования всех токов  $\Delta i$  в отдельных трубках, мы приходим к заключению, что ток  $i$  пропорционален  $u$ :

$$u = ri.$$

Величину  $r$  называют *электрическим сопротивлением* рассматриваемого участка проводника. Соотношение

$$i = \frac{u}{r}$$

выражает собой закон Ома в применении к участку проводника. Он гласит, что *ток в проводнике равен отношению падения напряжения на участке проводника к электрическому сопротивлению участка.*

В системе единиц МКЭА единицей электрического сопротивления является *ом* (1 ом).

Величину  $g = \frac{1}{r}$ , обратную сопротивлению, называют *электрической проводимостью* данного участка проводника. Соответственно закон Ома может быть представлен в форме

$$i = gu.$$

Заметим здесь, что соотношения  $\delta = \frac{E}{\rho} = \gamma E$  следует рассматривать как выражения закона Ома в дифференциальной форме.

Рассмотрим простейший случай прямолинейного проводника постоянного сечения. В этом случае сечение  $\Delta s$  каждой трубки тока постоянно по ее длине и может быть вынесено за знак интеграла. Если проводник однороден, то и  $\rho = \text{const}$ , и мы можем написать:

$$\Delta i = \frac{u}{\Delta s \int \frac{\rho}{\rho l} dl} = \frac{u}{\rho l} \Delta s. \text{ Так как напряжение } u \text{ одинаково для всех}$$

трубок тока, то  $i = \sum \Delta i = \frac{u}{\rho l} \sum \Delta s = \frac{s}{\rho l} u$ . Следовательно, выражение для электрического сопротивления такого проводника имеет вид:

$$r = \frac{\rho l}{s} = \frac{l}{\gamma s}.$$

Заметим, что в данном случае ток распределяется равномерно по сечению проводника, так как все трубки одинаковых сечений имеют одинаковые сопротивления. Для линейных проводников, т. е. таких, в которых линейные размеры поперечного сечения малы по сравнению с длиной проводника, можно пользоваться последней формулой при вычислении сопротивления даже в том случае, если в отдельных местах проводники изогнуты, как, например, в случае

электрической проводки, или даже если проводники изогнуты по всей длине, но радиус кривизны значительно превосходит поперечные размеры проводника, как, например, в случае обмотки катушки или реостата.

В более сложных случаях, когда линейные размеры поперечного сечения проводника сравнимы с его длиной и проводник имеет сложную форму, для расчета сопротивления должны быть использованы методы теории поля. Эти методы будут изложены в последней части курса.

Рассмотрим замкнутую электрическую цепь, в которой содержится источник э. д. с., например гальванический элемент (рис. 56).

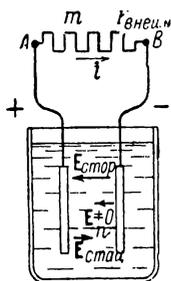


Рис. 56.

Под действием э. д. с.  $e$  источника в контуре возникает ток  $i$ . Так как удельное сопротивление  $\rho$  среды, в которой протекает ток внутри источника, отлично от нуля, то и результирующая напряженность поля  $E$  внутри источника также отлична от нуля и связана с плотностью тока соотношением  $E = \rho \delta$ . Это результирующее поле должно быть направлено внутри источника в направлении линий тока, т. е. от отрицательного полюса к положительному. Напомним, что при рассмотрении в § 8 случая разомкнутого элемента мы имели внутри его всюду  $E = 0$ , что непосредственно вытекает и из соотношения  $E = \rho \delta$ , так как в разомкнутом элементе ток отсутствует и  $\delta = 0$ .

Рассматривая так же, как и в § 8, результирующее поле внутри элемента в контактных слоях между электродами и электролитом как результат наложения на стационарное поле с напряженностью  $E_{стат}$ , образованное зарядами электродов и электролита, дополнительного поля с напряженностью  $E_{стат}$ , имеющего неэлектростатическое происхождение, имеем в этих слоях:  $E = E_{стат} + E_{стат}$ . Поле в электролите и в проводниках, соединяющих электроды с зажимами элемента, является также при постоянном токе стационарным полем с напряженностью  $E_{стат} = \rho \delta$ .

Составляя линейный интеграл напряженности поля от отрицательного зажима  $B$  по пути  $n$  внутри источника к положительному зажиму  $A$ , получаем:

$$\int_{BnA} E dl = \int_{BnA} E_{стат} dl + \int_{BnA} E_{стат} dl. \quad (*)$$

Последний интеграл, согласно изложенному в § 8, равен э. д. с. источника:

$$\int_{BnA} E_{стат} dl = e.$$

Линейный интеграл напряженности  $E_{\text{стац}}$  стационарного поля, так же как и электростатического, не зависит от выбора пути интегрирования. Следовательно,

$$\int_{ВнА} E_{\text{стац}} dl = \int_{ВнА} E_{\text{стац}} dl = - \int_{АнВ} E_{\text{стац}} dl.$$

Таким образом, равенство (\*) можно представить в виде:

$$e = \int_{АнВ} E_{\text{стац}} dl + \int_{ВнА} E dl.$$

Заметив еще, что во внешней части цепи, т. е. на пути  $АнВ$ , результирующая напряженность  $E$  равна  $E_{\text{стац}}$ , так как на этом пути нет источников э. д. с., напомним окончательно:

$$e = \int_{АнВ} E dl + \int_{ВнА} E dl.$$

Первый интеграл представляет собой не что иное, как падение напряжения  $u = r_{\text{внешн}} i$  во внешней части цепи, имеющей сопротивление  $r_{\text{внешн}}$ . Второй интеграл представляет собой падение напряжения внутри источника э. д. с., равное  $r_{\text{внутр}} i$ , если через  $r_{\text{внутр}}$  обозначить внутреннее сопротивление источника. Соответственно перепишем последнее уравнение в виде:

$$e = u + r_{\text{внутр}} i \text{ или } u = e - r_{\text{внутр}} i,$$

т. е. напряжение на зажимах источника равно э. д. с. источника за вычетом падения напряжения во внутреннем его сопротивлении.

Заменяя  $u$  через  $r_{\text{внешн}} i$ , напомним:

$$e = r_{\text{внешн}} i + r_{\text{внутр}} i = (r_{\text{внешн}} + r_{\text{внутр}}) i = r i,$$

где  $r$  — электрическое сопротивление всей замкнутой цепи.

Отсюда получаем формулировку закона Ома в применении ко всей замкнутой цепи:

$$i = \frac{e}{r},$$

т. е. ток в замкнутой электрической цепи равен э. д. с. источника, действующей в этой цепи, деленной на сопротивление всей цепи.

В общем случае, когда в замкнутой цепи действует несколько источников э. д. с., под  $e$  следует понимать сумму э. д. с. всех источников.

б) Первый закон Кирхгофа. Рассмотрим узел электрической цепи (рис. 57). Охватив узел цепи замкнутой по-

верхностью  $s$  и пользуясь принципом непрерывности электрического тока, получим:

$$\oint_s \delta ds = \sum_{k=1}^{k=n} i_k = 0,$$

где  $i_1, i_2, \dots, i_n$  — токи в проводниках, сходящихся к узлу. Уравнение

$$\sum_{k=1}^{k=n} i_k = 0$$

выражает собою первый закон Кирхгофа, который гласит:

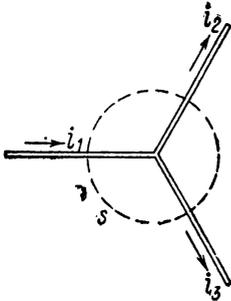


Рис. 57.

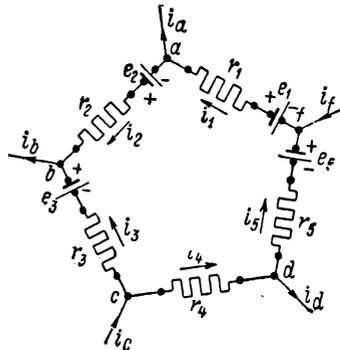


Рис. 58.

*сумма токов в проводниках, сходящихся к узлу электрической цепи, равна нулю.*

При этом сумму следует понимать алгебраически, считая токи, уходящие от узла, положительными, а токи, приходящие к узлу, отрицательными.

Так как при расчете сложных цепей во многих случаях заранее не известно действительное направление токов в участках цепи, то необходимо предварительно задаться условными положительными направлениями токов во всех участках цепи, обозначив на схеме эти направления стрелками. При составлении уравнения по первому закону Кирхгофа необходимо при этом перед алгебраическим выражением тока ставить знак плюс, если условное положительное направление этого тока выбрано от узла, и знак минус, если условное положительное направление выбрано к узлу. Так, при выборе положительных направлений токов, изображенных стрелками на рис. 57, уравнение должно быть написано в виде:

$$-i_1 + i_2 + i_3 = 0.$$

Если в результате расчета цепи какой-нибудь ток получит отрицательное числовое значение, то это значит, что действительное

направление этого тока противоположно условно выбранному и обозначенному на схеме стрелкой направлению.

в) В т о р о й з а к о н К и р х г о ф а. Рассмотрим замкнутый контур (рис. 58) какой-либо электрической цепи. В общем случае в контуре действует несколько источников э. д. с. Пусть от контура в точках  $a, b, c, \dots$  ответвляются токи  $i_a, i_b, i_c, \dots$  во внешнюю по отношению к нему цепь. Эти точки делят контур на ряд участков, не имеющих разветвлений. Пусть  $e_1, e_2, e_3, \dots$  — э. д. с. источников в отдельных неразветвленных участках и  $i_1, i_2, i_3, \dots$  — токи в этих участках. Если в каком-либо участке включено последовательно несколько источников, то соответствующая э. д. с. этого участка равна алгебраической сумме э. д. с. источников, находящихся в этом участке. Обозначим через  $r_1, r_2, r_3, \dots$  сопротивления участков, причем включим в эти сопротивления и внутренние сопротивления источников.

Составим линейный интеграл напряженности поля вдоль всего замкнутого контура  $abcdfa$ :

$$\oint \mathbf{E} \, dl = \oint (\mathbf{E}_{\text{смац}} + \mathbf{E}_{\text{смор}}) \, dl = \oint \mathbf{E}_{\text{смац}} \, dl + \oint \mathbf{E}_{\text{смор}} \, dl.$$

Так как

$$\oint \mathbf{E}_{\text{смац}} \, dl = 0,$$

то

$$\oint \mathbf{E} \, dl = \oint \mathbf{E}_{\text{смор}} \, dl.$$

Левая часть равенства представляет собой сумму падений напряжений во всех участках контура. Ее можно представить в форме:

$$\oint \mathbf{E} \, dl = \sum_{k=1}^{k=n} r_k i_k, \text{ где } n \text{ — число неразветвленных участков контура.}$$

Правая часть равенства представляет собой сумму э. д. с. всех источников, действующих в замкнутом контуре:  $\oint \mathbf{E}_{\text{смор}} \, dl = \sum_{k=1}^{k=n} e_k$ .

Таким образом, имеем:

$$\sum_{k=1}^{k=n} e_k = \sum_{k=1}^{k=n} r_k i_k.$$

Это соотношение выражает собой второй закон Кирхгофа, который гласит:

*сумма э. д. с. источников в любом замкнутом контуре электрической цепи равна сумме падений напряжений во всех участках контура.*

Обратим особое внимание на то, что при составлении уравнений на основе второго закона Кирхгофа необходимо учитывать знаки

в. д. с. Если при выбранном направлении обхода контура внутри источника э. д. с. мы проходим от отрицательного полюса к положительному, то перед э. д. с. этого источника следует ставить знак плюс. Кроме того, необходимо условно задаться положительными направлениями токов во всех участках контура, обозначив на схеме эти направления стрелками. Перед падением напряжения следует ставить знак плюс в тех участках, в которых направление обхода контура совпадает с выбранным положительным направлением тока, и знак минус в тех участках, в которых эти направления противоположны.

г) **З а к о н Л е н ц а — Д ж о у л я.** Пусть за промежуток времени  $dt$  сквозь поперечное сечение проводника переносится заряд  $dq$ . Работа, совершаемая силами электрического поля на некотором участке проводника, не имеющем разветвлений и не содержащем источников в э. д. с., за этот промежуток времени, равна:

$$dA = u dq,$$

где  $u$  — падение напряжения на участке. Эта работа затрачивается на поддержание тока и расходуется на выделение тепла в рассматриваемом участке проводника.

Мощность, необходимая для поддержания тока в проводнике, равна:

$$p = \frac{dA}{dt} = u \frac{dq}{dt} = ui.$$

Пользуясь равенствами  $u = ri$  и  $\frac{1}{r} = g$ , где  $r$  — сопротивление и  $g$  — проводимость участка проводника, получаем:

$$p = i^2 r = \frac{u^2}{r} = u^2 g.$$

Эти соотношения и выражают собою закон Ленца — Джоуля.

Для всей замкнутой неразветвленной цепи соответственно имеем:

$$p = i^2 r = \frac{e^2}{r},$$

где  $e$  — сумма э. д. с. источников, действующих в цепи,  $r$  — сопротивление всей замкнутой цепи.

Напишем выражение для закона Ленца — Джоуля в применении к бесконечно малому отрезку трубки тока, имеющему длину  $dl$  и нормальное сечение  $ds$ . Мощность, связанная с выделением тепла в объеме  $dV = dl ds$  отрезка трубки, равна:

$$dp = du di = E dl \delta ds = E \delta dV.$$

Мощность, отнесенная к единице объема, имеет выражение:

$$p' = \frac{dp}{dV} = E \delta = \delta^2 \rho = E^2 \gamma.$$

Эти соотношения представляют собой выражения закона Ленца — Джоуля в дифференциальной форме.

## ГЛАВА ПЯТАЯ

### РАСЧЕТ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

#### § 23. Линейные и нелинейные электрические цепи

Из соотношений, выражающих законы Ома, Кирхгофа и Ленца—Джоуля, следует, что *параметрами* элементов электрических цепей постоянного тока являются их *сопротивления* или *проводимости*.

Во многих практических случаях эти параметры можно считать величинами постоянными, не зависящими ни от токов в элементах цепи, ни от напряжений на их зажимах.

*Характеристика* такого элемента, т. е. зависимость напряжения от тока, является *линейной*:  $u = ri = \frac{i}{g}$ , где  $r = \text{const}$  и  $g = \text{const}$ .

Графически она изображается прямой линией (рис. 59). Соответственно, такие элементы цепи называют *линейными элементами*.

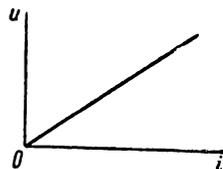


Рис. 59.

Применяя к электрическим цепям постоянного тока, параметры всех элементов которых не зависят от тока в них или от напряжения на их зажимах, законы Ома и Кирхгофа, мы получаем линейные алгебраические связи между э. д. с., напряжениями и токами. Такого рода цепи называют *линейными электрическими цепями*.

К расчету линейных цепей может быть применен принцип наложения, и, следовательно, по отношению к ним справедливы все рассмотренные ниже методы расчета сложных цепей, которые являются следствием этого принципа.

Следует отметить, что, строго говоря, параметры элементов цепей всегда зависят от тока в этих элементах, хотя бы уже потому, что сопротивление проводов зависит от их температуры, а температура проводов изменяется с изменением тока, так как при этом изменяется мощность, поглощаемая в проводах. Однако во многих случаях эта зависимость выражена не очень резко, и в первом приближении можно считать параметры элементов цепи не зависящими от тока и напряжения, т. е. цепь рассматривать как линейную. Такое допущение имеет исключительно большое практическое значение, так как для расчета сложных линейных электрических це-

пей мы имеем весьма широкие возможности, поскольку процессы в этих цепях описываются системой линейных уравнений.

После того как такой расчет произведен и найдены токи во всех элементах цепи, могут быть внесены, если это требуется, поправки в величины сопротивлений элементов цепи в соответствии с найденными токами и произведен второй более уточненный расчет. Однако во многих случаях такое уточнение не требуется.

На практике встречаются элементы цепи, параметры которых резко зависят от тока в элементе или от напряжения на его зажимах. *Характеристика* такого элемента, т. е. зависимость напряжения на его зажимах от тока в нем [ $u = f(i)$ ], а также соответствующая обратная зависимость [ $i = f(u)$ ], является *нелинейной*. Эти характеристики часто называют вольтамперными. Элементы цепи с нелинейной характеристикой называют *нелинейными элементами*.

Применяя к электрическим цепям постоянного тока, содержащим нелинейные элементы, законы Ома и Кирхгофа, мы получаем систему нелинейных алгебраических уравнений, связывающих э. д. с., напряжения и токи. Такого рода цепи называют *нелинейными электрическими цепями*.

Для расчета нелинейных электрических цепей мы имеем меньшие возможности, чем для расчета линейных цепей, и этот расчет получается значительно более сложным. Нелинейные электрические цепи обладают рядом особых свойств и вследствие этого получают в настоящее время все более широкое применение в системах автоматического управления, регулирования, измерения и т. д.

Электрические цепи могут иметь, вообще говоря, очень сложное строение. Мы в первую очередь рассмотрим простейшие электрические цепи, образуемые путем последовательного и параллельного соединения приемников, и лишь затем перейдем к рассмотрению более сложных цепей.

В настоящей главе излагаются методы расчета линейных электрических цепей постоянного тока. В следующей главе будут рассмотрены методы расчета нелинейных электрических цепей постоянного тока.

## § 24. Последовательное, параллельное и смешанное соединения приемников

Последовательным соединением элементов электрической цепи называют такое их соединение, при котором через все эти элементы проходит один и тот же ток. Рассмотрим цепь, состоящую из ряда последовательно соединенных приемников (рис. 60). Пусть к зажимам цепи приложено напряжение  $u$ . Обозначим сопротивления отдельных приемников через  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , а напряжения на за-

жимах этих приемников через  $u_1, u_2, \dots, u_n$ . Имеем:

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 + \dots + u_n = r_1 i + r_2 i + \dots + r_n i = \\ &= (r_1 + r_2 + \dots + r_n) i = r i, \end{aligned}$$

если положить

$$r_1 + r_2 + \dots + r_n = r.$$

Следовательно, сопротивление  $r$  всей цепи, состоящей из ряда последовательно соединенных приемников, равно сумме сопротивлений всех этих приемников.

При последовательном соединении напряжения на отдельных участках цепи относятся между собой, как сопротивления этих участков.

Параллельным соединением элементов электрической цепи называют такое их соединение, когда все эти элементы присоединены к одной и той же паре узлов, т. е. когда они находятся под одним и тем же напряжением. Рассмотрим цепь, состоящую из нескольких параллельно соединенных приемников, к зажимам которой приложено напряжение  $u$  (рис. 61). Обозначим проводимости отдельных приемников через  $g_1, g_2, \dots, g_n$ , а токи в этих приемниках через  $i_1, i_2, \dots, i_n$ . Тогда по первому закону Кирхгофа для тока  $i$  в неразветвленной части цепи имеем:

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 + \dots + i_n = g_1 u + g_2 u + \dots + g_n u = \\ &= (g_1 + g_2 + \dots + g_n) u = g u, \end{aligned}$$

если положить

$$g_1 + g_2 + \dots + g_n = g.$$

Следовательно, проводимость  $g$  всей цепи, состоящей из нескольких параллельно соединенных приемников, равна сумме проводимостей этих приемников.

При параллельном соединении токи в отдельных ветвях цепи относятся между собой, как проводимости этих ветвей, и, следовательно, обратно пропорциональны сопротивлениям этих ветвей.

Методы расчета цепей при последовательном и при параллельном соединениях можно применить при смешанном соединении приемников, представляющем собой сочетание последовательного и параллельного соединений. Покажем это на примере цепи, схема которой дана на рис. 62.

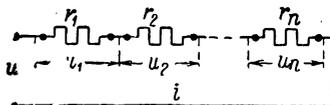


Рис. 60.

Эквивалентная проводимость  $g$  разветвленной части цепи, состоящей из двух параллельно соединенных ветвей, равна:

$$g_{23} = g_2 + g_3 = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{r_2 + r_3}{r_2 r_3}.$$

Эквивалентное сопротивление  $r_{23}$  этой части цепи равно:

$$r_{23} = \frac{1}{g_{23}} = \frac{r_2 r_3}{r_2 + r_3}.$$

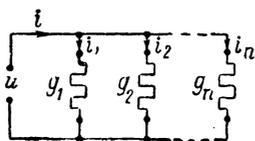


Рис. 61.

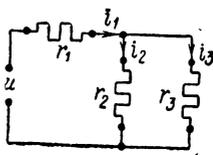


Рис. 62.

Суммируя  $r_{23}$  с сопротивлением  $r_1$  неразветвленной части цепи, получим эквивалентное сопротивление всей цепи:

$$r = r_1 + r_{23}.$$

Теперь, зная напряжение  $u$  на зажимах всей цепи, можно найти токи в отдельных ветвях цепи и напряжения на их зажимах. Для тока  $i_1$  в неразветвленной части цепи имеем  $i_1 = \frac{u}{r}$ . Умножая  $i_1$  на  $r_1$ , найдем напряжение  $u_1 = r_1 i_1$  на зажимах первой ветви, а умножая  $i_1$  на  $r_{23}$ , найдем напряжение  $u_{23} = r_{23} i_1$  на зажимах разветвленной части цепи. После этого токи  $i_2$  и  $i_3$  можно определить, разделив  $u_{23}$  соответственно на  $r_2$  и  $r_3$ .

Мощность, расходуемую в каждой из ветвей цепи, можно найти, умножая сопротивление этой ветви на квадрат тока в ней или умножая проводимость ветви на квадрат напряжения на ее зажимах. Мощность, расходуемая во всей цепи, равна сумме мощностей, расходуемых в отдельных ветвях цепи.

## § 25. Передача энергии по двухпроводной линии

Рассмотрим простейший случай передачи энергии по двухпроводной линии на расстояние, равное  $l$ , при условии, что величина напряжения  $u_0$  на входных зажимах линии постоянна.

Предположим, что утечкой тока через изоляцию между проводами можно пренебречь. При этом мы имеем последовательное соединение проводов линии с приемником на конце линии. Так как все приемники электромагнитной энергии изготавливаются для работы

при определенном напряжении, и для каждого типа приемников имеются границы допустимого понижения напряжения на их зажимах, при переходе за которые нормальная работа приемников существенно нарушается, то при передаче энергии весьма важен вопрос о потере напряжения в линии  $\Delta u$  и о напряжении  $u_2$  на зажимах приемника.

Обозначая сопротивления линии и приемника соответственно через  $r_1$  и  $r_2$ , а ток в линии через  $i$  (рис. 63), имеем:

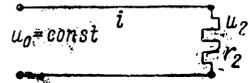


Рис. 63.

$$\Delta u = r_1 i; \quad u_2 = u_0 - \Delta u = u_0 - r_1 i,$$

т. е. и  $\Delta u$  и  $u_2$  при  $u_0 = \text{const}$  и  $r_1 = \text{const}$  связаны с током  $i$  линейными зависимостями, графики которых даны на рис. 64. При холостом ходе линии, т. е. при  $r_2 = \infty$ , получим:

$$i = 0, \quad \Delta u = 0; \quad u_2 = u_0,$$

а при коротком замыкании линии, т. е. при  $r_2 = 0$ , найдем:

$$i = \frac{u_0}{r_1}; \quad \Delta u = u_0; \quad u_2 = 0.$$

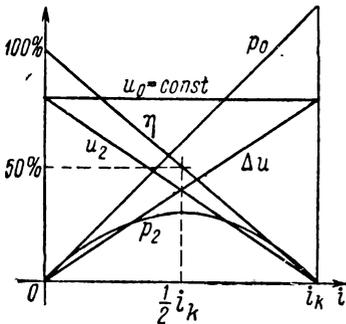


Рис. 64.

Вторым важным вопросом является вопрос о коэффициенте полезного действия  $\eta$  линии передачи, причем под  $\eta$  понимают отношение мощности  $p_2$ , переданной приемнику, к мощности  $p_0$ , подводенной ко входным зажимам линии. Обозначив через  $\Delta p$  мощность, теряемую в линии, имеем:

$$p_0 = u_0 i; \quad \Delta p = r_1 i^2;$$

$$p_2 = p_0 - \Delta p = u_0 i - r_1 i^2,$$

и, следовательно,

$$\eta = \frac{p_2}{p_0} = \frac{u_0 i - r_1 i^2}{u_0 i} = 1 - \frac{r_1}{u_0} i = 1 - \frac{i}{i_k},$$

где  $i_k = \frac{u_0}{r_1}$  — ток короткого замыкания. Таким образом, коэффициент полезного действия  $\eta$  линии связан с током  $i$  линейной зависимостью (рис. 64), причем при холостом ходе  $\eta = 1$ , а при коротком замыкании  $\eta = 0$ .

Исследуя выражение для  $p_2$ , нетрудно установить, что  $p_2$  имеет максимум при  $i = \frac{u_0}{2r_1} = \frac{i_k}{2}$ , т. е. тогда, когда сопротивление

приемника равно сопротивлению линии. При этом  $p_{2\text{макс}} = \frac{u_0^2}{4r_1}$

и  $\eta=0,5=50\%$ . При передаче сколь-нибудь значительных мощностей такое низкое значение  $\eta$  недопустимо.

При проектировании линии передачи обычно известны мощность  $P_2$  и допустимая величина относительной потери напряжения  $\epsilon = \frac{\Delta u}{u_2}$ , а следовательно, и величина коэффициента полезного действия линии  $\eta$ , так как  $\eta = \frac{u_2}{u_0} = \frac{1}{1 + \epsilon}$ . Для  $\epsilon$  имеем:

$$\epsilon = \frac{\Delta u}{u_2} = \frac{i r_1}{u_2} = \frac{P_2 r_1}{u_2^2} = \frac{P_2}{u_2^2} \rho \frac{2l}{s},$$

где  $\rho$  — удельное сопротивление,  $s$  — поперечное сечение и  $2l$  — длина обоих проводов линии. Таким образом, при заданных значениях  $P_2$ ,  $l$ ,  $\rho$  и  $\epsilon$ , а следовательно и  $\eta$ , сечение проводов обратно пропорционально квадрату напряжения. Отсюда вытекает, что энергию выгодно передавать при высоких напряжениях, так как, повышая напряжение в  $n$  раз, мы уменьшаем вес проводов в  $n^2$  раз.

Передача энергии постоянным током впервые была осуществлена в Петербурге в 1874 г. Ф. А. Пироцким. В 1877 г. Ф. А. Пироцкий опубликовал статью «О передаче работы воды, как движителя, на всякое расстояние посредством гальванического тока», выдвигая этим идею осуществления электрической передачи энергии большой мощности на большое расстояние за много лет до ее практического осуществления в крупных масштабах. Первое теоретическое исследование вопроса о передаче электромагнитной энергии вдоль линии принадлежит Д. А. Лачинову, который в опубликованной им в 1880 г. статье «Электромеханическая работа» показал, что при повышении мощности и дальности электрической передачи энергии высокая экономичность может быть достигнута путем повышения напряжения.

Интересно отметить, что, хотя в последующем развитие дальних электропередач пошло путем применения переменного тока, обеспечивающего легкость изменения напряжения с помощью простых устройств — трансформаторов, однако при тех огромных мощностях и дальностях передач энергии, на которые предъявляет требования современное развитие энергетики, особенно в СССР, вновь оказывается целесообразным вернуться к осуществлению идеи передачи энергии при постоянном токе, но уже при сверхвысоком напряжении. Эти практически важные и интересные в теоретическом отношении вопросы мы сможем более подробно обсудить после того, как будут изучены во второй части курса основные явления в цепях переменного тока.

## § 26. О расчете сложных электрических цепей

Электрические цепи, не сводящиеся к последовательному и параллельному соединению приемников, мы будем называть *сложными* цепями. Расчет любой сложной цепи можно произвести, составив на основе законов Кирхгофа систему уравнений и решив ее.

Пусть сложная цепь состоит из  $p$  ветвей и имеет  $q$  узлов.

Если заданы э. д. с. всех источников в цепи и сопротивления всех ветвей, то неизвестными являются  $p$  токов в ветвях. Применяя к каждому из узлов первый закон Кирхгофа, мы получим  $q$  уравнений, причем только  $(q-1)$  из них независимы друг от друга. Независимость уравнений для первых  $(q-1)$  узлов вытекает из того, что всегда можно установить такой порядок выбора этих узлов, при котором каждый последующий узел будет отличаться от предыдущих по крайней мере одной новой ветвью. Для этого, приняв один из узлов за исходный, к нему следует добавлять один за другим соседние узлы с наименьшим числом новых ветвей, как это указано, например, на рис. 65. При этом последний  $q$ -ый узел новых ветвей содержать не может.

Суммируя уравнения для первых  $(q-1)$  узлов, мы увидим, что все токи, кроме токов, сходящихся в последнем  $q$ -ом узле, сократятся, так как каждый из них войдет в сумму два раза и притом с различными знаками, а токи, сходящиеся в  $q$ -ом узле, войдут в эту сумму по одному разу, и в результате получится уравнение, гласящее, что сумма токов, сходящихся в  $q$ -ом узле, равна нулю, т. е. уравнение для последнего  $q$ -го узла. В связи с этим мы будем говорить, что цепь с  $q$  узлами имеет лишь  $(q-1)$  *независимых узлов*.

Применяя второй закон Кирхгофа, можно составить столько уравнений, сколько имеется замкнутых контуров в цепи. Однако при этом одни уравнения могут оказаться следствиями других. Для независимости уравнений или, как говорят, для независимости контуров, эти контуры следует выбрать так, чтобы каждый последующий отличался от предыдущих по крайней мере одной новой ветвью. Число  $n$  *независимых контуров* равно  $(p-q+1)$ . Справедливость равенства  $n = p - q + 1$  очевидна для цепи, состоящей из трех ветвей и имеющей два узла (рис. 66). Присоединяя к этой цепи новую ветвь между двумя узлами или между узлом и произвольной точкой цепи или, наконец, между произвольными точками цепи, мы увеличиваем число независимых контуров на единицу, причем  $(p - q + 1)$  увеличивается также на единицу. Таким

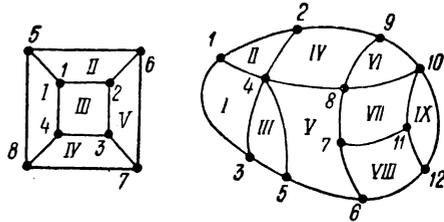


Рис. 65.

образом, во всех этих случаях соотношение  $n = p - q + 1$  сохраняет свою силу, откуда и вытекает справедливость его для любой сложной цепи.

Из изложенного следует, что законы Кирхгофа позволяют получить систему из  $(q - 1) + (p - q + 1) = p$  независимых урав-

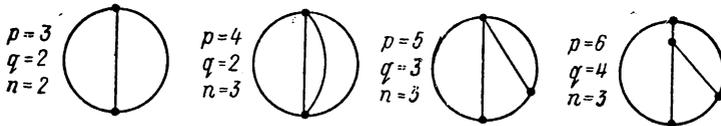


Рис. 66.

нений, решив которую, можно определить токи во всех  $p$  ветвях сложной цепи, если известны ее параметры и э. д. с., действующие в этой цепи.

В виде примера рассмотрим цепь с постоянными параметрами, изображенную на рис. 67, имеющую  $p = 3$  ветви,  $q = 2$  узла и два источника э. д. с. Направление э. д. с. источников указано стрелками. Внутренние сопротивления источников пусть входят в величины сопротивлений  $r_1$  и  $r_2$ . Зададимся положительными направлениями токов, отметив их также стрелками на рисунке. По первому закону Кирхгофа можно составить одно  $(q - 1) = 1$  независимое уравнение:

$$i_1 + i_2 = i_3.$$

Число независимых контуров  $p - q + 1 = 2$ . Выберем в качестве них контур, содержащий э. д. с.  $e_1$  и сопротивления  $r_1$  и  $r_3$ , и контур, содержащий э. д. с.  $e_2$  и сопротивления  $r_2$  и  $r_3$ . Составляя для них уравнения по второму закону Кирхгофа, получаем:

$$e_1 = r_1 i_1 + r_3 i_3; \quad e_2 = r_2 i_2 + r_3 i_3.$$

Умножая первое из этих уравнений на  $r_2$ , а второе на  $r_1$  и складывая их, получим с учетом, что  $i_1 + i_2 = i_3$ , выражение для тока  $i_3$ :

$$i_3 = \frac{e_1 r_2 + e_2 r_1}{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1} = \frac{e_1 r_2 + e_2 r_1}{D},$$

где обозначено

$$D = r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1.$$

Из уравнений, написанных выше согласно второму закону Кирхгофа, получаем, используя найденное выражение для тока  $i_3$ , выражения для других токов:

$$i_1 = \frac{e_1(r_2 + r_3) - e_2 r_3}{D}; \quad i_2 = \frac{e_2(r_1 + r_3) - e_1 r_3}{D}.$$

Если, например,  $e_2 r_3 > e_1(r_2 + r_3)$ , то ток  $i_1 < 0$ . Это значит, что в этом случае действительный ток в первой ветви направлен против стрелки, т. е. против условно выбранного положительного направления. При этом ток  $i_1$  направлен против э. д. с.  $e_1$  источника в этой ветви, т. е. этот источник поглощает энергию. Эта энергия, так же как и энергия, поглощаемая в сопротивлениях  $r_1$ ,  $r_2$  и  $r_3$  ветвей, вырабатывается источником э. д. с.  $e_2$ .

Аналогичным путем составляются и решаются уравнения для любой сколь угодно сложной линейной цепи.

Так, например, для цепи, изображенной на рис. 68 ( $p = 6$ ,  $q - 1 = 3$ ,  $p - q + 1 = 3$ ), при принятых и указанных на рисунке стрелками условных положительных направлениях э. д. с. и токов имеем уравнения:

узел  $a$

$$-i_1 + i_4 + i_3 = 0;$$

узел  $b$

$$-i_4 - i_5 + i_6 = 0;$$

узел  $c$

$$-i_2 + i_5 - i_3 = 0;$$

контур  $r_1, e_4, r_4, r_6$

$$e_4 = r_1 i_1 + r_4 i_4 + r_6 i_6;$$

контур  $e_2, r_2, r_5, r_6$

$$e_2 = r_2 i_2 + r_5 i_5 + r_6 i_6;$$

контур  $e_3, r_3, r_5, r_4, e_4$

$$e_3 - e_4 = r_3 i_3 + r_5 i_5 - r_4 i_4.$$

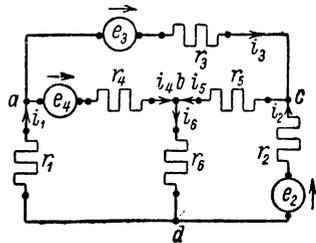


Рис. 68.

Трудность расчета сложных линейных цепей заключается в необходимости решать совместно  $p$  линейных алгебраических уравнений. В связи с этим представляют ценность методы, позволяющие тем или иным путем упростить задачу. Эти методы дают возможность



Решая систему уравнений, для контурного тока  $i_k$  в контуре  $k$  найдем:

$$i_k = e_{11} \frac{\Delta_{k1}}{\Delta} + e_{22} \frac{\Delta_{k2}}{\Delta} + \dots + e_{mm} \frac{\Delta_{km}}{\Delta} + \dots + e_{nn} \frac{\Delta_{kn}}{\Delta},$$

где  $\Delta$  — главный определитель системы, причем

$$\Delta = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & \dots & r_{2n} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & \dots & r_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & r_{n3} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix},$$

а  $\Delta_{k1}, \Delta_{k2}, \dots, \Delta_{km}, \dots, \Delta_{kn}$  — его алгебраические дополнения, получаемые из  $\Delta$  путем вычеркивания в последнем  $k$ -ой строки и  $m$ -го столбца и умножения вновь полученного определителя на  $(-1)^{k+m}$ . Весьма существенно заметить, что  $\Delta_{km} = \Delta_{mk}$ . Действительно,  $\Delta_{km}$  получается из  $\Delta$  путем вычеркивания  $k$ -ой строки и  $m$ -го столбца, а  $\Delta_{mk}$  — путем вычеркивания  $m$ -ой строки и  $k$ -го столбца. Так как  $r_{mk} = r_{km}$ , то в результате вычеркиваний получаются два определителя, в которых элементы строк одного равны элементам соответствующих столбцов другого, а такие определители, как известно, равны друг другу.

В качестве примера рассмотрим ту же цепь, которая была рассчитана в предыдущем параграфе общим методом составления уравнений Кирхгофа (рис. 67).

Изберем в качестве независимых контуров те же контуры, для которых в предыдущем параграфе были составлены уравнения по второму закону Кирхгофа. Положительные направления контурных токов  $i_1$  и  $i_2$  направим так, как указано стрелками на рис. 69. Контурные токи  $i_1$  и  $i_2$  в данном частном случае равны действительным токам в первой и во второй ветвях. Действительный же ток в третьей ветви равен сумме контурных токов  $i_1$  и  $i_2$ . Пользуясь методом контурных токов, имеем только два уравнения:

$$r_{11}i_1 + r_{12}i_2 = e_{11}; \quad r_{21}i_1 + r_{22}i_2 = e_{22},$$

причем собственные сопротивления контуров равны:

$$r_{11} = r_1 + r_3 \quad \text{и} \quad r_{22} = r_2 + r_3,$$

и взаимное сопротивление равно:

$$r_{12} = r_{21} = r_3;$$

кроме того,  $e_{11} = e_1$ ,  $e_{22} = e_2$ .

Определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = r_{11}r_{22} - r_{21}^2 = (r_1 + r_3)(r_2 + r_3) - r_3^2 = \\ = r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = D.$$

Соответственно:

$$\Delta_{11} = r_{22} = r_2 + r_3; \quad \Delta_{22} = r_{11} = r_1 + r_3; \quad \Delta_{12} = \Delta_{21} = -r_{12} = -r_3.$$

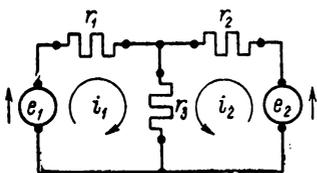


Рис. 69.

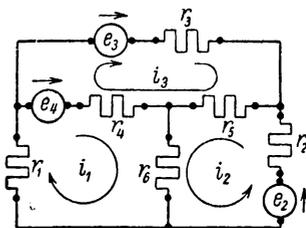


Рис. 70.

Получаем:

$$i_1 = \frac{e_1(r_2 + r_3) - e_2r_3}{D}; \quad i_2 = \frac{-e_1r_3 + e_2(r_1 + r_3)}{D},$$

что совпадает с решением, приведенным в предыдущем параграфе. Ток  $i_3$  получается суммированием токов  $i_1$  и  $i_2$ :

$$i_3 = i_1 + i_2 = \frac{e_1r_2 + e_2r_1}{D}.$$

Составим уравнения по методу контурных токов для цепи, изображенной на рис. 68, причем выберем независимые контуры и положительные направления токов в них согласно рис. 70. Этих уравнений будет только три и они имеют вид:

$$r_{11}i_1 + r_{12}i_2 + r_{13}i_3 = e_{11};$$

$$r_{21}i_1 + r_{22}i_2 + r_{23}i_3 = e_{22};$$

$$r_{31}i_1 + r_{32}i_2 + r_{33}i_3 = e_{33},$$

причем:

$$r_{11} = r_1 + r_4 + r_6, \quad r_{22} = r_2 + r_5 + r_6, \quad r_{33} = r_3 + r_5 + r_4;$$

$$r_{12} = r_{21} = r_6, \quad r_{13} = r_{31} = -r_4, \quad r_{23} = r_{32} = r_5;$$

$$e_{11} = e_4, \quad e_{22} = e_2, \quad e_{33} = e_3 - e_4.$$

§ 28. Принцип наложения

В выражении для  $i_k$ , полученном в предыдущем параграфе, величины  $e_{11}, e_{22}, \dots, e_{kk}$  представляют каждая сумму э. д. с. всех источников, входящих в соответствующий контур. Выписав эти суммы явно и сгруппировав члены, содержащие э. д. с. отдельных источников, мы получим выражение для  $i_k$  в виде ряда слагаемых, каждое из которых будет иметь множителем э. д. с. того или иного источника. Отсюда следует, что контурный ток в любом контуре равен сумме токов, вызываемых в этом контуре каждой из э. д. с. в отдельности. Это весьма важное положение о независимости действия э. д. с., известное под наименованием *принципа наложения*,

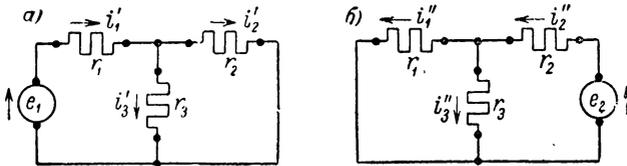


Рис. 71.

вытекает из *линейности* уравнений, получаемых на основании законов Кирхгофа для *линейных* цепей, и, следовательно, для цепей с *постоянными параметрами*. Принцип наложения справедлив не только для любого контурного тока, но и для тока в любой ветви, так как совокупность контуров всегда можно выбрать так, что интересующая нас ветвь войдет только в один контур.

Следует иметь в виду, что к мощностям принцип наложения неприменим и в линейных цепях, так как мощности являются квадратичными функциями э. д. с. и токов.

Принцип наложения позволяет расчлнить сложную задачу на ряд более простых, в каждой из которых действует в рассматриваемой сложной цепи только одна э. д. с., а все другие источники э. д. с. предполагаются замкнутыми накоротко, причем их внутренние сопротивления должны быть включены в сопротивления соответствующих ветвей.

Применяя, например, принцип наложения для расчета цепи, изображенной на рис. 67, получаем две более простые задачи, соответственно рис. 71, а и б, токи для которых находятся элементарно:

$$i'_1 = \frac{e_1}{r_1 + \frac{r_2 r_3}{r_2 + r_3}} = \frac{e_1 (r_2 + r_3)}{D};$$

$$i'_2 = i'_1 \frac{r_3}{r_2 + r_3} = \frac{e_1 r_3}{D}; \quad i'_3 = i'_1 \frac{r_2}{r_2 + r_3} = \frac{e_1 r_2}{D};$$

$$i_2'' = \frac{e_2}{r_2 + \frac{r_1 r_3}{r_1 + r_3}} = \frac{e_2 (r_1 + r_3)}{D};$$

$$i_1'' = i_2'' \frac{r_3}{r_1 + r_3} = \frac{e_2 r_3}{D}; \quad i_3'' = i_2'' \frac{r_1}{r_1 + r_3} = \frac{e_2 r_1}{D}.$$

Следовательно, действительные токи в ветвях при действии обоих источников э. д. с., с учетом направления стрелок на рис. 67 и 71, равны:

$$i_1 = i_1' - i_1'' = \frac{e_1 (r_2 + r_3) - e_2 r_3}{D};$$

$$i_2 = i_2'' - i_2' = \frac{e_2 (r_1 + r_3) - e_1 r_3}{D};$$

$$i_3 = i_3' + i_3'' = \frac{e_1 r_2 + e_2 r_1}{D},$$

что совпадает с выражениями, полученными выше другими методами.

Задача расчета цепи, изображенной на рис. 68, с помощью принципа наложения соответственно может быть расчленена на три более простые задачи расчета той же цепи при действии одной э. д. с.  $e_2$ ,  $e_3$  или  $e_4$ .

### § 29. Принцип взаимности

Рассмотрим две ветви  $ab$  и  $cd$  сложной линейной цепи, причем совокупность независимых контуров выберем так, чтобы ветвь  $ab$  входила только в один контур  $k$ , а ветвь  $cd$  — только в один контур  $m$ , что по отношению к двум ветвям всегда можно сделать. Тогда из равенства  $\Delta_{mk} = \Delta_{km}$  вытекает весьма важный принцип взаимности, установленный Максвеллом и гласящий, что если э. д. с.  $e_{ab} = e$ , действуя в ветви  $ab$  сколь угодно сложной цепи, при отсутствии прочих э. д. с. вызывает в другой ветви  $cd$  этой цепи ток  $i_{cd} = i$ , то такая же э. д. с.  $e_{cd} = e$ , действуя в ветви  $cd$ , при отсутствии прочих э. д. с. вызовет в ветви  $ab$  такой же ток  $i_{ab} = i$ . В самом деле, из равенств:

$$i_{ab} = i_k = e \frac{\Delta_{km}}{\Delta} \quad \text{и} \quad i_{cd} = i_m = e \frac{\Delta_{mk}}{\Delta}$$

следует, что  $i_{ab} = i_{cd}$ , так как  $\Delta_{mk} = \Delta_{km}$ .

Например, для цепи, изображенной на рис. 67, из вышеприведенных общих выражений для  $i_1$  и  $i_2$  следует, что при  $e_1 = 0$  и  $e_2 = e$

$$i_1 = \frac{-e r_3}{D},$$

а при  $e_1 = e$  и  $e_2 = 0$

$$i_2 = \frac{-e r_3}{D}.$$

### § 30. Условия эквивалентности источников электродвижущей силы и источников тока

Источники энергии в электрических цепях обычно рассматриваются как *источники э. д. с.  $e$*  (рис. 72, а), обладающие некоторым внутренним сопротивлением  $r_2$ . Однако иногда целесообразнее рассматривать источники энергии как *источники тока  $i$*  (рис. 72, б), обладающие некоторой внутренней проводимостью  $g_2$ .

Будем называть источник э. д. с. и источник тока эквивалентными, если замена одного из них другим не будет изменять режима в остальной цепи. В частности, если к источнику э. д. с. и к источнику тока присоединены приемники с одинаковыми сопротивлениями  $r_{np}$  (рис. 72, а) и  $r_{np} = \frac{1}{g_{np}}$  (рис. 72, б), то условием эквивалентности этих источников будет равенство токов  $i_{np}$  в приемнике в обоих случаях.

В случае источника э. д. с. имеем:

$$i_{np} = \frac{e}{r_2 + r_{np}} = \frac{\frac{e}{r_2}}{1 + \frac{r_{np}}{r_2}}.$$

В случае источника тока:

$$i_{np} = i \frac{g_{np}}{g_2 + g_{np}} = \frac{i}{1 + \frac{g_2}{g_{np}}}.$$

Так как равенство этих токов должно соблюдаться при любом значении сопротивления приемника  $r_{np} = \frac{1}{g_{np}}$ , то должно иметь место равенство:  $1 + \frac{r_{np}}{r_2} = 1 + \frac{g_2}{g_{np}}$ .

Следовательно, между внутренним сопротивлением  $r_2$  источника э. д. с. и внутренней проводимостью  $g_2$  эквивалентного источника тока должно иметь место соотношение:

$$r_2 g_2 = 1.$$

Кроме того, как видно из выражений для тока  $i_{np}$ , между э. д. с.  $e$  источника э. д. с. и током  $i$  эквивалентного источника тока должно иметь место соотношение:

$$i = \frac{e}{r_2} \quad \text{или} \quad e = \frac{i}{g_2}.$$

Из приведенных выражений следует, что взаимная замена источников э. д. с. с внутренним сопротивлением  $r_2$  источником тока с внутренней проводимостью  $g_2$  всегда возможна, если ни  $r_2$ , ни  $g_2$  не равны ни нулю, ни бесконечности. Возможность замены источников э. д. с. эквивалентными источниками тока позволяет упростить решение некоторых вопросов. Пусть, например, требуется найти ветвь, эквивалентную двум параллельно соединенным ветвям, содержащим источники э. д. с.  $e_1$  и  $e_2$  и сопротивления  $r_1 = \frac{1}{g_1}$  и

$r_2 = \frac{1}{g_2}$  (рис. 73). Рассматривая эти ветви как источники э. д. с.

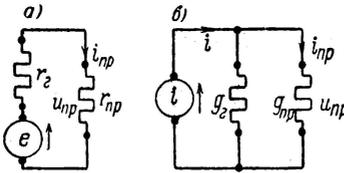


Рис. 72.

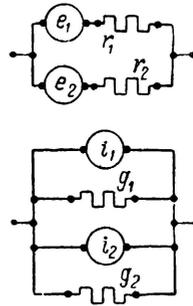


Рис. 73.

с соответствующими внутренними сопротивлениями и заменяя их источниками тока  $i_1 = e_1 g_1$  и  $i_2 = e_2 g_2$  с внутренними проводимостями  $g_1$  и  $g_2$ , можно эти два источника тока объединить в один источник тока  $i = i_1 + i_2$  с внутренней проводимостью  $g = g_1 + g_2$  и перейти от него к эквивалентному источнику э. д. с.  $e = \frac{i}{g} = \frac{e_1 g_1 + e_2 g_2}{g_1 + g_2}$  с внутренним сопротивлением  $r = \frac{1}{g_1 + g_2}$ . Применяя

этот способ к случаю  $n$  параллельно соединенных ветвей, найдем, что эквивалентная им ветвь будет содержать источник э. д. с.

$$e = \frac{e_1 g_1 + e_2 g_2 + \dots + e_n g_n}{g_1 + g_2 + \dots + g_n}$$

и сопротивление  $r = 1 : (g_1 + g_2 + \dots + g_n)$ .

В качестве примера рассмотрим вновь ту же цепь, изображенную на рис. 67. Заменяем ветви, содержащие источники э. д. с.  $e_1$  и  $e_2$  и сопротивления  $r_1$  и  $r_2$  одной эквивалентной ветвью с э. д. с., равной

$$e = \frac{e_1 g_1 + e_2 g_2}{g_1 + g_2} = \frac{\frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2}}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} = \frac{e_1 r_2 + e_2 r_1}{r_1 + r_2},$$

и сопротивлением, равным

$$r = \frac{1}{g_1 + g_2} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

Получаем простую схему, представленную на рис. 74. Ток в ней равен току  $i_3$  в действительной цепи. Имеем:

$$i_3 = \frac{e}{r + r_3} = \frac{e_1 r_2 + e_2 r_1}{D}.$$

Теперь из уравнения  $e_1 = i_1 r_1 + i_3 r_3$  легко находится ток  $i_1$  и из уравнения  $i_1 + i_2 = i_3$  определяется ток  $i_2$ .

Обратим внимание на то, что при замене источника э. д. с. эквивалентным источником тока мощность, теряемая в источнике, вообще говоря, изменяется. Например, при  $r_{np} = \infty$  (рис. 72) потери в источнике напряжения равны нулю, а в источнике тока они равны  $\frac{i^2}{g_2} = i^2 r_2 \neq 0$ . Одна-

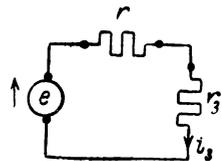


Рис. 74.

ко это не имеет значения, так как замену источника э. д. с. эквивалентным источником тока мы производим для расчета токов и напряжений в остальной, не подвергаемой преобразованию части цепи. В этой же части цепи остаются без изменения токи и напряжения, а следовательно, остается без изменения и мощность.

### § 31. Теорема об эквивалентном генераторе

Предположим, что имеется сложная цепь с несколькими источниками э. д. с. и ставится задача определить ток  $i_{ab}$ , возникающий под действием этих э. д. с. в некоторой определенной ветви (рис. 75, а), имеющей сопротивление  $r_{ab}$ .

Теорема об эквивалентном генераторе гласит: по отношению к выделенной ветви с сопротивлением  $r_{ab}$  вся прочая часть сложной цепи, содержащая источники э. д. с. (обведенная на рис. 75, а пунктиром), может быть заменена одним эквивалентным генератором с э. д. с.  $e_2$  и внутренним сопротивлением  $r_2$ , которые определяются через известные э. д. с. и сопротивления этой прочей части сложной цепи (рис. 75, б). Покажем возможность такой замены и определим величины  $e_2$  и  $r_2$ .

Если разорвать ветвь с сопротивлением  $r_{ab}$  (рис. 76), то на месте разрыва под действием всех э. д. с. в цепи возникнет напряжение  $u_0$ .

Теперь введем в эту разомкнутую ветвь две дополнительные э. д. с.  $e'$  и  $e''$ , равные друг другу по величине и направленные взаимно противоположно (рис. 77, а). Так как эти э. д. с. взаимно компенсируются, то напряжение  $u_0$  в месте разрыва останется тем же.

Выберем величину э. д. с.  $e''$  равной напряжению  $u_0$  на разрыве, т. е.  $e'' = u_0$ . При этом будем иметь  $e' = -u_0$ . Электрические потенциалы точек  $a$  и  $c$  одинаковы, так как при переходе от точки  $c$  к точке  $d$  потенциал возрастает на величину  $u_0$ , а при переходе от точки  $d$  к точке  $a$  уменьшается на ту же величину. Поэтому, если соединить точки  $a$  и  $c$  накоротко проводником  $amc$ , как показано на рис. 77,  $a$  пунктиром, то в цепи ничто не изменится и ток  $i_{ab}$  останется равным нулю. При этом схема принимает вид рис. 77, б, причем цепь замкнута и полностью соответствует заданной цепи,

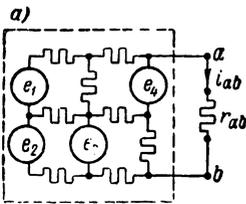


Рис. 75.

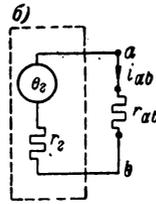
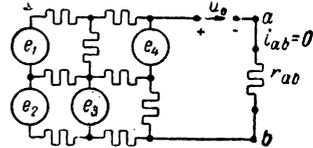


Рис. 76.



но режим в ней отличается от заданного наличием дополнительной э. д. с.  $e'$  и равенством нулю тока  $i_{ab}$ .

Рассмотрим теперь другой режим, когда все заданные источники э. д. с. замкнуты накоротко, при сохранении в цепи их внутренних сопротивлений, и в рассматриваемую ветвь включена дополнительная э. д. с.  $e'' = u_0$  (рис. 77, в). Под действием этой э. д. с. пойдет ток  $i_{ab}$ , который будет равен искомому току в реальной схеме (рис. 75, а). Последнее вытекает из принципа наложения. Действительно, осуществляя наложение режимов, соответствующих схемам на рис. 77, б и 77, в, мы приходим к исходной системе э. д. с. (рис. 75, а), и так как в одном из этих режимов (рис. 77, б) ток в рассматриваемой ветви равен нулю, в другом режиме (рис. 77, в) он равен искомому току  $i_{ab}$ .

Обозначим через  $r_z$  сопротивление всей части цепи, обведенной на рис. 75, а пунктиром, между точками  $a$  и  $b$  при замкнутых накоротко источниках э. д. с. Оно равно сопротивлению между точками  $a'$  и  $b'$  цепи на рис. 77, в слева от этих точек.

Схема, изображенная на рис. 77, в, соответствует схеме рис. 75, б, свидетельствуя о возможности замены всей части сложной цепи, обведенной на рис. 75, а пунктиром, эквивалентным генератором.

Таким образом, искомый ток  $i_{ab}$  может быть вычислен по формуле:

$$i_{ab} = \frac{u_0}{r_z + r_{ab}},$$

т. е. для его определения необходимо экспериментально или расчетным путем найти напряжение  $u_0$  при разрыве ветви  $ab$  и сопро-

тивление  $r_2$  всей прочей части цепи при замкнутых накоротко содержащихся в ней источниках э. д. с.

Обозначим ток в ветви  $ab$  при  $r_{np} = 0$ , т. е. при коротком замыкании эквивалентного генератора, через  $i_k$ . Тогда из выражения для  $i_{np}$  получим  $r_2 = u_0 : i_k$ , т. е. внутреннее сопротивление эквивалентного генератора можно определить как отношение напряжения  $u_0$  на его зажимах при холостом ходе к току  $i_k$  при коротком замыкании.

Применим теорему об эквивалентном генераторе для определения токов в цепи, изображенной на рис. 67. Для определения тока  $i_1$  разомкнем первую ветвь и найдем напряжение на ее зажимах (рис. 78), причем положительное направление  $u_0$  примем совпадающим с принятым на рисунке положительным направлением искомого тока  $i_1$ . Имеем:

$$\begin{aligned} u_0 + ir_3 &= e_1, \\ u_0 &= e_1 - ir_3 = \\ &= e_1 - \frac{e_2}{r_2 + r_3} r_3 = \\ &= \frac{e_1(r_2 + r_3) - e_2r_3}{r_2 + r_3}. \end{aligned}$$

Сопrotивление  $r_2$  найдем как сопротивление всей прочей цепи между этими зажимами при замкнутых накоротко источниках э. д. с. (рис. 79):

$$r_2 = \frac{r_2r_3}{r_2 + r_3}.$$

Следовательно, искомый ток равен:

$$i_1 = \frac{u_0}{r_1 + r_2} = \frac{e_1(r_2 + r_3) - e_2r_3}{D}.$$

Для определения этим методом тока  $i_3$  разомкнем третью ветвь (рис. 80). Напряжение на ее зажимах при этом имеет значение:

$$u_0 = e_1 - ir_1 = e_1 - \frac{e_1 - e_2}{r_1 + r_2} r_1 = \frac{e_1r_2 + e_2r_1}{r_1 + r_2}.$$

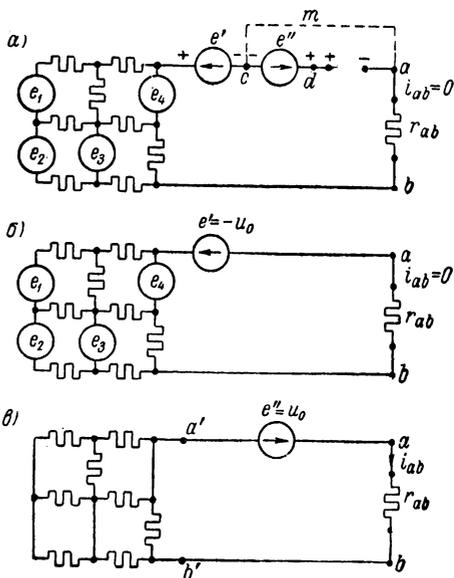


Рис. 77.

Величина  $r_2$  в этом случае равна:

$$r_2 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

Следовательно:

$$i_3 = \frac{u_0}{r_3 + r_2} = \frac{e_1 r_2 + e_2 r_1}{D}.$$

Из примера определения методом эквивалентного генератора тока  $i_3$  в этой схеме видно, что этот метод в данном случае полностью

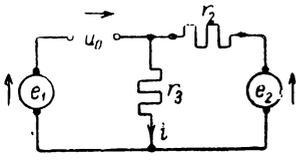


Рис. 78.

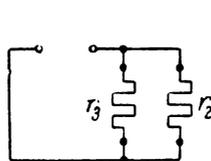


Рис. 79.

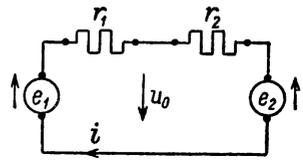


Рис. 80.

совпадает с рассмотренным в § 30 методом замены нескольких параллельно соединенных ветвей с постоянными э. д. с. и сопротивлениями одним эквивалентным источником э. д. с. с эквивалентным внутренним сопротивлением. Но метод эквивалентного генератора является более общим, так как он дает возможность заменить эквивалентным генератором любую более сложную цепь с источниками э. д. с., приключенную к ветви, в которой определяется ток.

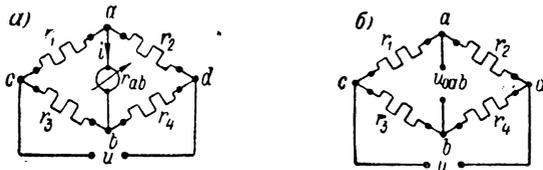


Рис. 81.

В частности, это было видно на примере той же цепи (рис. 67) при определении в ней тока  $i_1$ .

В качестве еще одного примера применения теоремы об эквивалентном генераторе рассмотрим задачу об определении тока  $i_0$  в ветви  $ab$  нулевого прибора неуравновешенного моста (рис. 81,  $a$ ) в случае, когда можно пренебречь внутренним сопротивлением источника э. д. с., питающего мост. Предположив, что ветвь  $ab$  разомкнута (рис. 81,  $b$ ), найдем, что напряжение  $u_{0ab}$  на ее зажимах будет:

$$u_{0ab} = u_{cb} - u_{ca} = u \left( \frac{r_3}{r_3 + r_4} - \frac{r_1}{r_1 + r_2} \right).$$

Для сопротивления  $r_2$  цепи между точками  $a$  и  $b$  при разомкнутой ветви нулевого прибора и при замыкании накоротко точек  $c$  и  $d$  имеем:

$$r_2 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} + \frac{r_3 r_4}{r_3 + r_4}.$$

Следовательно, искомый ток  $i_0$  равен:

$$i_0 = u \left( \frac{r_3}{r_3 + r_4} - \frac{r_1}{r_1 + r_2} \right) : \left( \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} + \frac{r_3 r_4}{r_3 + r_4} + r_{ab} \right),$$

где  $r_{ab}$  — сопротивление нулевого прибора.

Теорему об эквивалентном генераторе можно преобразовать, заменив генератор э. д. с.  $u_0$  с внутренним сопротивлением  $r_2$  генератором тока  $i_k = \frac{u_0}{r_2}$  с внутренней проводимостью  $g_2 = \frac{1}{r_2}$ . При этом следует иметь в виду, что ток  $i_k$  — это ток, получающийся в ветви  $ab$  при ее коротком замыкании, т. е. при  $r_{np} = 0$ . Выполнив указанную замену для напряжения  $u_{np} = i_{np} r_{np}$  на зажимах элемента  $r_{np} = \frac{1}{g_{np}}$ , получим (§ 30):

$$u_{np} = \frac{i_k}{g_2 + g_{np}}.$$

Из этого выражения следует, что по отношению к элементу  $g_{np}$  всю прочную часть сложной цепи можно рассматривать как генератор тока  $i_k$  с внутренней проводимостью  $g_2$ .

В заключение заметим, что, если в цепи, кроме источников э. д. с., введены источники тока, то при определении внутреннего сопротивления  $r_2$  или внутренней проводимости  $g_2$  эквивалентного генератора эти источники тока следует разомкнуть, оставив в цепи их внутренние проводимости.

### § 32. Преобразование соединения трехлучевой звездой в соединении треугольником

Нередко в некоторой части сложной цепи мы имеем случай, когда от одного узла отходят  $n$  ветвей. Эти  $n$  ветвей, присоединенные каждая одним из своих концов к общему узлу, образуют так называемое *соединение звездой* ( $n$ -лучевой).

Встречается нередко также случай, когда  $n$  ветвей образуют замкнутый многоугольник, т. е. образуют так называемое *соединение многоугольником* ( $n$ -угольником). Для частного случая, когда число элементов равно трем, на рис. 82, *а* показано *соединение звездой*, а на рис. 82, *б* — *соединение треугольником*.

Расчет линейных цепей иногда можно значительно упростить, заменив в какой-нибудь части их соединение треугольником эквивалентным соединением звездой, или наоборот. Так, расчет неурав-

новешенного моста упрощается при замене треугольника  $r_{12}$ ,  $r_{23}$ ,  $r_{31}$  звездой  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  (рис. 83), так как после замены задача сводится к расчету последовательно-параллельного соединения.

Установим условия эквивалентности треугольника  $r_{12}$ ,  $r_{23}$ ,  $r_{31}$ , а звезды  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  (рис. 82). Для эквивалентности необходимо и достаточно, чтобы при замене треугольника звездой и обратно токи, а следовательно, и напряжения, в остальной цепи не изменялись, т. е. чтобы сопротивление или проводимость между любой парой точек 1, 2, 3 при соединении треугольником и при соединении звездой были одинаковы.

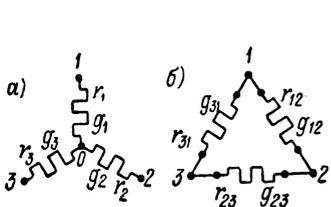


Рис. 82.

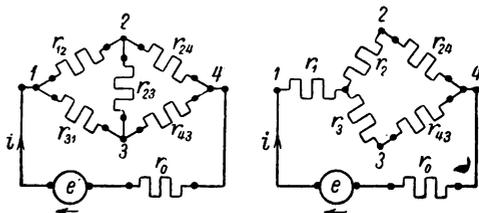


Рис. 83.

Для сопротивления между вершинами 1 и 2 треугольника имеем:

$$1 : \left( \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{23} + r_{31}} \right) = \frac{r_{12}(r_{23} + r_{31})}{r_{12} + r_{23} + r_{31}}.$$

Этому сопротивлению должно быть равно сопротивление между точками 1 и 2 эквивалентной звезды, т. е.  $r_1 + r_2$ . Применяя такое же рассуждение к точкам 2 и 3, а затем к точкам 3 и 1, получим три уравнения:

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= \frac{r_{12}(r_{23} + r_{31})}{r_{12} + r_{23} + r_{31}}; & r_2 + r_3 &= \frac{r_{23}(r_{31} + r_{12})}{r_{12} + r_{23} + r_{31}}; \\ r_3 + r_1 &= \frac{r_{31}(r_{12} + r_{23})}{r_{12} + r_{23} + r_{31}}. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения относительно  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$ , найдем:

$$r_1 = \frac{r_{31}r_{12}}{r_{12} + r_{23} + r_{31}}; \quad r_2 = \frac{r_{12}r_{23}}{r_{12} + r_{23} + r_{31}}; \quad r_3 = \frac{r_{23}r_{31}}{r_{12} + r_{23} + r_{31}},$$

откуда для соответствующих проводимостей получим:

$$\begin{aligned} g_1 &= g_{31} + g_{12} + \frac{g_{31}g_{12}}{g_{23}}; & g_2 &= g_{12} + g_{23} + \frac{g_{12}g_{23}}{g_{31}}; \\ g_3 &= g_{23} + g_{31} + \frac{g_{23}g_{31}}{g_{12}}. \end{aligned}$$

При решении обратной задачи о преобразовании трехлучевой звезды в эквивалентный треугольник необходимо выразить  $r_{12}$ ,

$r_{23}$ ,  $r_{31}$  через  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$ . Из выражений для  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  имеем:

$$r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1 = \frac{r_{12} r_{23} r_{31}}{r_{12} + r_{23} + r_{31}}.$$

Разделив последнее равенство по очереди на каждое из равенств, определяющих  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$ , найдем:

$$r_{12} = r_1 + r_2 + \frac{r_1 r_2}{r_3}; \quad r_{23} = r_2 + r_3 + \frac{r_2 r_3}{r_1}; \quad r_{31} = r_3 + r_1 + \frac{r_3 r_1}{r_2},$$

откуда, переходя к проводимостям, получим:

$$g_{12} = \frac{g_1 g_2}{g_1 + g_2 + g_3}; \quad g_{23} = \frac{g_2 g_3}{g_1 + g_2 + g_3}; \quad g_{31} = \frac{g_3 g_1}{g_1 + g_2 + g_3}.$$

Польза, которая может быть получена заменой треугольника эквивалентной звездой, была показана на примере неуравновешенного моста (рис. 83). Обратное преобразование соединения звездой в эквивалентное соединение треугольником целесообразно применить, например, при расчете цепи, изображенной на рис. 67. Ветви с сопротивлениями  $r_1$ ,  $r_2$  и  $r_3$  в этой цепи соединены звездой. Заменяя эту звезду эквивалентным треугольником, получаем схему, изображенную на рис. 84, токи  $i_1$ ,  $i_2$  и  $i_3$  в которой равны искомым токам в действительной цепи (рис. 67). Расчет этих токов в схеме на рис. 84 весьма прост. Имеем:

$$i_1 = i_{12} + i_{13} = \frac{e_1 - e_2}{r_{12}} + \frac{e_1}{r_{31}};$$

$$i_2 = -i_{12} + i_{23} = -\frac{e_1 - e_2}{r_{12}} + \frac{e_2}{r_{23}}.$$

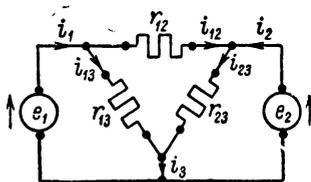


Рис. 84.

Согласно вышеприведенным формулам:

$$r_{12} = r_1 + r_2 + \frac{r_1 r_2}{r_3} = \frac{D}{r_3}; \quad r_{23} = \frac{D}{r_1}; \quad r_{31} = \frac{D}{r_2}.$$

Следовательно:

$$i_1 = \frac{(e_1 - e_2) r_3 + e_1 r_2}{D} = \frac{e_1 (r_3 + r_2) - e_2 r_3}{D}$$

и

$$i_2 = \frac{-(e_1 - e_2) r_3 + e_2 r_1}{D} = \frac{e_2 (r_1 + r_3) - e_1 r_3}{D},$$

что и было получено ранее другими методами.

Звезду, имеющую  $n$  лучей, можно преобразовать в полный  $n$ -угольник, т. е. в  $n$ -угольник, все вершины которого попарно соединены между собой и который, следовательно, имеет  $\frac{1}{2} (n-1) \cdot n$  сторон. При этом для проводимости  $g_{km}$  между вершинами  $k$  и  $m$





где

$$g_{11} = g_{10} + g_{12} + g_{13} = \frac{1}{r_{10}} + \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{13}};$$

$$g_{22} = g_{20} + g_{21} + g_{23}, \quad g_{33} = g_{30} + g_{31} + g_{32},$$

$$i_1 = -e_{12}g_{12} - e_{13}g_{13}, \quad (e_{10} = 0)$$

$$i_2 = e_{12}g_{12}, \quad (e_{23} = 0, \quad e_{20} = 0);$$

$$i_3 = e_{13}g_{13} + e_{03}g_{30} \quad (e_{32} = 0).$$

Решив систему из трех уравнений относительно узловых напряжений  $u_{10}$ ,  $u_{20}$  и  $u_{30}$ , легко находим напряжения на ветвях и токи в них.

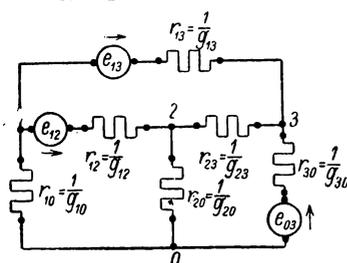


Рис. 86.

Заметим, что обозначение токов в ветвях и напряжений на их зажимах двумя индексами, соответствующими обозначению узлов, имеет то достоинство, что при этом в аналитической записи указывается принятое условное положительное направление тока, напряжения или э. д. с. Для этого достаточно условиться, что это положительное направление принимается от узла, соответствующего

первому индексу, к узлу, соответствующему второму индексу. Такая запись и была осуществлена выше и будет использована в дальнейшем. Очевидно, имеют место соотношения:

$$i_{ab} = -i_{ba}; \quad u_{ab} = -u_{ba}; \quad e_{ab} = -e_{ba}.$$

Сопротивления же и проводимости ветвей являются их параметрами, не имеющими направления. Поэтому для них порядок индексов безразличен, т. е.:

$$r_{ab} = r_{ba}; \quad g_{ab} = g_{ba}.$$

• В заключение отметим, что метод контурных токов и метод узловых напряжений как бы дополняют друг друга. Если первый применяется к независимым контурам цепи, то второй к независимым узлам цепи. Вопрос о том, каким методом целесообразнее воспользоваться, зависит от конфигурации цепи, а именно от того, что является меньшим, число независимых контуров ( $p - q + 1$ ) или число независимых узлов ( $q - 1$ ). В первом случае лучше воспользоваться методом контурных токов, во втором — методом узловых напряжений.

---

---

## ГЛАВА ШЕСТАЯ

### РАСЧЕТ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

#### § 34. Нелинейные элементы электрической цепи постоянного тока

Нелинейными элементами в электрической цепи постоянного тока являются те или иные устройства, электрическое сопротивление и, соответственно, электрическая проводимость которых зависят от тока в них или от напряжения на их зажимах, т. е. характеристики  $u = f(i)$  которых нелинейны.

Характеристики, выражающие зависимость постоянного напряжения от соответствующих значений постоянного тока, называются *статическими*. Характеристики, полученные при достаточно быстрых изменениях тока, называются *динамическими* и могут отличаться от статических вследствие, например, тепловой инерции.

Вводят в рассмотрение *статические* сопротивление и проводимость нелинейного элемента:

$$r_{cm} = \frac{u}{i} = f_1(i) \quad \text{и} \quad g_{cm} = \frac{i}{u} = F_1(i),$$

определяемые из статической характеристики, и *динамические* сопротивление и проводимость его:

$$r_{\partial} = \lim_{\Delta i \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta i} = \frac{du}{di} = f_2(i) \quad \text{и} \quad g_{\partial} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta i}{\Delta u} = \frac{di}{du} = F_2(i),$$

определяемые из динамической характеристики.

Рассматривая нелинейные элементы в цепи постоянного тока, мы будем определять как статические, так и динамические сопротивления и проводимости из статических характеристик, так как при достаточно медленном изменении тока динамические характеристики совпадают со статическими.

Очевидно, имеют место соотношения:

$$r_{cm}g_{cm} = 1 \quad \text{и} \quad r_{\partial}g_{\partial} = 1.$$

Вообще говоря,  $r_{cm} \neq r_{\partial}$  и  $g_{cm} \neq g_{\partial}$ .

По виду характеристики  $u = f(i)$  различают *симметричные* и *несимметричные* элементы. У симметричных элементов характе-

ристика изображается симметричной относительно осей кривой, т. е. сопротивление таких элементов зависит от тока одинаково для обоих направлений тока в элементе. Несимметричные элементы обладают несимметричной характеристикой, их сопротивление различно зависит от тока при разных направлениях тока в элементе.

Статическое сопротивление пропорционально тангенсу угла  $\alpha$  наклона луча, проведенного из начала координат в данную точку характеристики (рис. 87):

$$r_{cm} = k \operatorname{tg} \alpha.$$

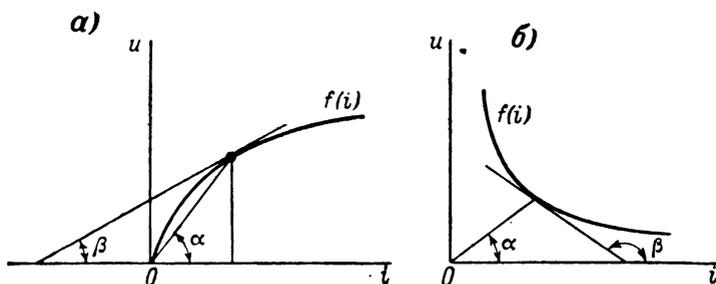


Рис. 87.

Динамическое сопротивление пропорционально тангенсу угла  $\beta$  наклона касательной в данной точке характеристики:

$$r_d = k \operatorname{tg} \beta.$$

При этом  $k = \frac{v}{a}$ ,  $v$  и  $a$  — масштабы напряжения и тока.

Соответственно:

$$g_{cm} = \frac{1}{k} \operatorname{ctg} \alpha; \quad g_d = \frac{1}{k} \operatorname{ctg} \beta.$$

Все эти параметры изменяются при переходе от одной точки характеристики к другой. Для так называемых *пассивных* элементов, т. е. не содержащих источников энергии, всегда  $r_{cm} > 0$  и  $g_{cm} > 0$ , но  $r_d$  и  $g_d$  положительны, только когда данная точка характеристики лежит на ее *восходящей* части (рис. 87, а), и отрицательны, если данная точка лежит на *падающей* части характеристики (рис. 87, б).

Рассмотрим наиболее характерные и наиболее часто встречающиеся нелинейные элементы в цепях постоянного тока.

К симметричным элементам относятся, например, лампы накаливания и термосопротивления, тиритовые элементы, бареттеры, лампы с тлеющим разрядом, электрическая дуга между одинаковыми электродами.

*Лампы накаливания* работают при высокой температуре, и вследствие зависимости сопротивления нити накала от температуры со-

противление лампы при номинальном токе существенно отличается от ее сопротивления в холодном состоянии, т. е. при токах, которые много меньше номинального. На рис. 88 представлены характеристика лампы с вольфрамовой нитью (кривая 1), температурный коэффициент сопротивления которой положителен, и характеристика лампы с угольной нитью (кривая 2), имеющей отрицательный температурный коэффициент сопротивления.

С нелинейностью осветительной нагрузки электрических сетей приходится особенно считаться при исследовании таких вопросов, как влияние характеристик приемника на нагрузку генераторов

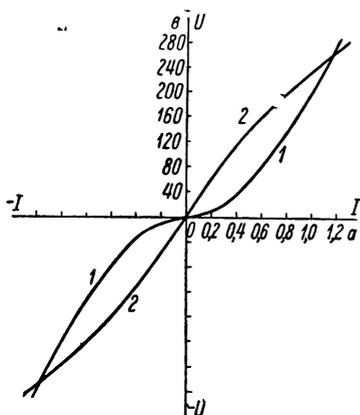


Рис. 88.

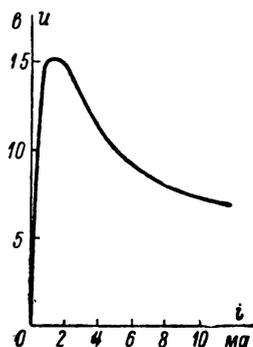


Рис. 89.

при аварийных процессах, сопутствуемых обычно резкими колебаниями напряжения на приемниках.

На принципе зависимости сопротивления от температуры специально создаются так называемые *термосопротивления*, имеющие обычно характеристику типа 2 на рис. 88. Они используются в приборах и аппаратах для компенсации изменения их сопротивления с изменением температуры, для измерения и для автоматического регулирования температуры, в реле с выдержкой времени и т. д. Осуществляют также термосопротивления из полупроводникового материала, именуемые термисторами, обладающие характеристикой, представленной на рис. 89, значительная часть которой имеет падающий характер. Одна из конструкций термистора представляет собой шарик из смеси окислов металлов (окиси никеля, магния и др.) с добавкой тонкоизмельченного медного порошка для увеличения проводимости. Через этот шарик соединены две проволоочки из иридиевой платины, служащие для подвода тока. Все это устройство заключают в защитную стеклянную оболочку. Такие термисторы применяются для электрических измерений в технике высокой частоты,

В технике высокого напряжения находят применение нелинейные элементы, выполненные из тирита — керамического материала, проводимость которого резко возрастает с увеличением напряжения. Для тиритовых элементов связь между током и напряжением можно выразить в виде:

$$|i| = A |u|^n,$$

где  $n \approx 3,5$ , причем характеристика является симметричной.

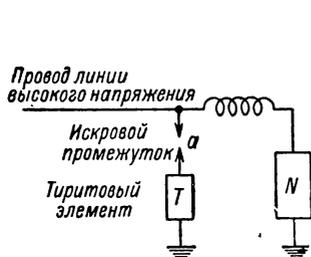


Рис. 90.

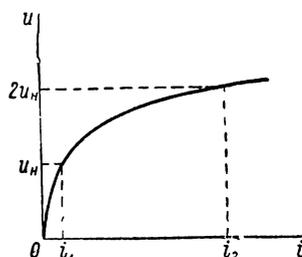


Рис. 91.

Следовательно, для проводимости этих элементов имеем:

$$g_{cm} = \frac{i}{u} = \frac{|i|}{|u|} = A |u|^{n-1} \approx A |u|^{2,5};$$

$$g_{\partial} = \frac{di}{du} = \frac{d|i|}{d|u|} = An |u|^{n-1} \approx An |u|^{2,5}.$$

Такой характер зависимости проводимости тиритовых элементов от напряжения дает возможность использовать их для защиты установок высокого напряжения — электрических станций, подстанций, трансформаторов и т. д. — от перенапряжений. Осуществляют так называемые тиритовые разрядники, представляющие собою столб  $T$  из тиритовых дисков, включаемые через искровой промежуток  $a$  параллельно с защищаемой установкой  $N$ , обычно между проводом линии переменного тока высокого напряжения и землей (рис. 90).

При номинальном напряжении искровой промежуток не пробит, и через разрядник ток не проходит. При повышении напряжения в линии выше номинального искровой промежуток пробивается, и через тиритовый столб проходит большой ток, так как с повышением напряжения сопротивление его резко падает. В итоге линия разряжается через тиритовый разрядник, и напряжение на ней падает. При уменьшении напряжения сопротивление разрядника возрастает, и ток через него резко падает. Резкое уменьшение тока приводит к прекращению газового разряда в искровом промежутке, а следовательно, к полному прекращению тока в цепи разрядника.

На рис. 91 приведена примерная характеристика тиритовых дисков, используемых для разрядников. При увеличении напряжения в два раза, по сравнению с номинальным, ток увеличивается примерно в 10 раз.

На рис. 92 изображена характеристика *бареттера*, представляющего собой запаянный и заполненный водородом стеклянный баллон, внутри которого помещена железная нить, присоединенная к выводам из баллона. Изменение температуры нити при изменении тока в ней, а также соответствующие условия ее охлаждения приводят к нелинейной зависимости между током и напряжением, показан-

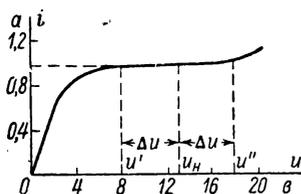


Рис. 92.

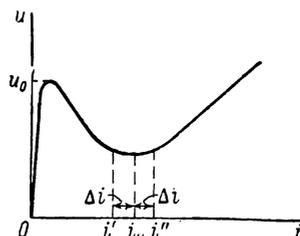


Рис. 93.

ной на рисунке. В пределах изменения напряжения на зажимах бареттера от  $u'$  до  $u''$  ток почти не изменяется. Поэтому бареттеры используются для *стабилизации* тока. С этой целью их включают последовательно с приемником, в котором необходимо стабилизировать ток. Если подобрать нормальный режим работы схемы так, чтобы разность напряжения питающей сети и приемника, приходящаяся на зажимы бареттера, равнялась  $u_n$  (рис. 92), то при колебаниях напряжения сети в пределах  $\pm \Delta u$  эти колебания практически полностью приходятся на бареттер, так как ток остается неизменным и соответственно неизменным остается напряжение на зажимах приемника при постоянстве его сопротивления. Ток в цепи остается постоянным также и при изменениях сопротивления приемника, хотя при этом напряжение на приемнике изменяется. Для стабилизации тока важно только, чтобы колебания разности напряжения сети и приемника не выходили за пределы  $u'$  и  $u''$  (рис. 92).

В качестве нелинейных элементов широко используются *лампы с тлеющим разрядом* (неоновые лампы, стабиливольты и т. д.). Эти лампы представляют собой заполненные инертным газом запаянные баллоны, в которые введены два электрода, между которыми имеется газовый промежуток. На рис. 93 дана характеристика такой лампы. Если постепенно увеличивать напряжение на негорящей лампе, то ток, оставаясь ничтожным по величине, немного возрастает. При достижении напряжения  $u_0$  возникает между электродами тлеющий разряд — лампа загорается, т. е. газ начинает светиться. На одном

участке характеристика лампы является падающей вследствие роста степени ионизации газа при увеличении тока и соответственного увеличения проводимости газового промежутка. В пределах изменения тока от  $i'$  до  $i''$  напряжение на лампе практически остается неизменным, что используется для стабилизации напряжения с помощью так называемых стабилитронов. Стабилитрон представляет собой лампу с тлеющим разрядом с последовательно включенным с ней линейным сопротивлением  $r$  (рис. 94). Приемник  $N$ , на зажимах которого необходимо стабилизировать напряжение, подключается параллельно лампе. Нормальный режим всей цепи подбирают так, чтобы ток в лампе равнялся  $i_n$  (рис. 93). При изменении напряжения  $u_1$  сети изменяется ток  $i_1 = i + i_2$  в сопротивлении  $r$ , но если эти колебания тока не выходят за пределы  $\pm \Delta i$  (рис. 93), то они практически полностью приходятся на ток  $i$  в лампе. Напряжение же  $u_2$  на лампе и на приемнике и ток  $i_2$  в приемнике практически не изменяются. Напряжение  $u_2$  остается стабильным и при изменении сопротивления приемника. При этом изменение тока  $i_2$  компенсируется изменением тока  $i$  в лампе. Для стабилизации напряжения  $u_2$  необходимо, чтобы при колебаниях напряжения сети и сопротивления приемника ток в лампе оставался в пределах  $i'$  и  $i''$  (рис. 93).

Весьма большое практическое применение имеет *электрическая дуга*, являющаяся также нелинейным элементом электрической цепи.

Явление, называемое электрической дугой, открыто профессором В. В. Петровым в 1802 г. На рис. 95 схематически изображена электрическая дуга между угольными электродами, горящая в воздухе при атмосферном давлении и питаемая от источника э. д. с. Активная часть  $K$  катода, излучающая электроны, имеет температуру порядка 2700—3150° С. Часть  $A$  анода, бомбардируемая электронами и имеющая обычно вогнутую форму, называется *кратером* электрической дуги. Температура кратера достигает 3500—3900° С. Между активной частью катода и кратером располагается сама дуга  $D$ , температура которой достигает 4800° С. Газы и пары в занятом ею пространстве находятся в ионизированном состоянии. Таким образом, электрические заряды переносятся в дуге как электронами, так и ионами, но в основном ток определяется потоком электронов. Собственно дуга окружена ореолом  $B$  — оболочкой, в которой происходит сгорание паров и частиц угля, а также образование продуктов горения воздуха, т. е. окислов азота.

Академик В. Ф. Миткевич в 1902—1905 гг. произвел ряд исследований электрической дуги, в которых он установил общие условия горения дуги, а также показал, что основными носителями тока в дуге являются электроны. Из опытов, поставленных В. Ф. Миткевичем, следует, что основным условием образования и существования электрической дуги является эмиссия электронов из катода

При термоэлектронной эмиссии (случай, исследованный В. Ф. Миткевичем) необходима, как обязательное условие горения дуги, высокая температура катода. Высокая температура анода имеет второстепенное значение. Согласно последним исследованиям предполагают, что в том случае, когда созданы условия для достаточно мощной автоэлектронной эмиссии из катода, возможно существование дуги и при холодном катоде. Таким образом, *основным условием возникновения электрической дуги является достаточно мощная эмиссия электронов из катода.*

Электрическая дуга находит применение в ряде областей электротехники. Изобретение в 1876 г. П. Н. Яблочковым его знамени-

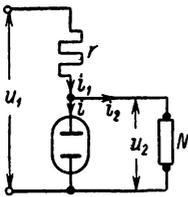


Рис. 94.

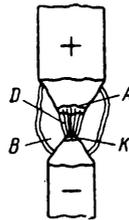


Рис. 95.

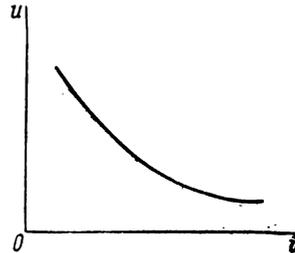


Рис. 96.

той электрической свечи положило начало широкому использованию электричества для освещения. В настоящее время как источник света электрическая дуга используется в прожекторах и проекционных аппаратах. В металлургии мощные дуги применяют в так называемых дуговых электрических печах. Весьма распространен метод электросварки электрической дугой, в своей основе данный Н. Г. Славяновым и Н. Н. Бенардосом. В химической промышленности дуга используется для фиксации атмосферного азота. Широко применяется электрическая дуга в приборах, служащих для выпрямления переменного тока.

Электрическая дуга имеет ярко выраженную нелинейную характеристику. С увеличением тока  $i$  падение напряжения  $u$  в дуге уменьшается, т. е. дуга имеет падающую характеристику (рис. 96). При одинаковых электродах характеристика дуги симметрична (рис. 97).

К несимметричным нелинейным элементам относятся, например, электрическая дуга при неоднородных электродах, лампа с тлеющим разрядом при неодинаковых по форме электродах, ртутный вентиль, кенотрон, газотрон, полупроводниковый вентиль.

То обстоятельство, что основным носителем тока в электрической дуге является мощный поток электронов — частиц с отрицательным зарядом — и что для существования дуги необходима мощная эмиссия электронов из катода — отрицательного электрода, — приводит к заключению, то при разнородных электродах характеристика

дуги должна быть несимметричной. Наиболее резко несимметрия проявляется, если один из электродов поставлен в условия, при которых из него возникает мощная эмиссия электронов, а другой электрод находится в условиях, при которых сколь-нибудь заметная эмиссия электронов из него невозможна. Например, один электрод нагрет до высокой температуры, достаточной для мощной термоэлектронной эмиссии, а другой искусственно поддерживается холодным, или — у одного электрода могут образовываться высокие напряженности поля, достаточные для мощной автоэлектронной эмиссии, а у поверхности другого электрода такие напряженности

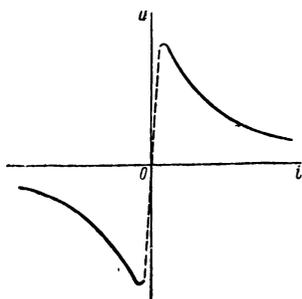


Рис. 97.

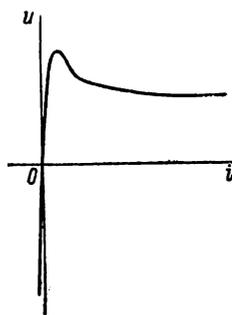


Рис. 98.

поля не могут возникать. При таких условиях устройство проводит ток только в одном направлении и может служить для выпрямления переменного тока. Весьма важным представителем таких устройств является *ртутный вентиль*, представляющий собой сосуд, из которого по возможности тщательно удален воздух и который заполнен парами ртути и имеет катодом жидкую ртуть, а в качестве анодов — железные или графитовые цилиндры. Электрическая дуга горит в парах ртути. Эмиссия электронов происходит из так называемого катодного пятна на поверхности жидкой ртути. Таким образом, ток при принятом его положительном направлении может проходить через ртутный вентиль только от анода к катоду. Катодное пятно обычно поддерживается от постороннего источника энергии с помощью дуги возбуждения, горящей между катодом и вспомогательными анодами, расположенными вблизи катода. Характеристика ртутного вентиля, т. е. зависимость напряжения  $u$  между главным анодом и катодом от тока  $i$  при наличии дуги возбуждения, показана на рис. 98. При горении дуги падение напряжения на вентиле невелико (15—30 в) и мало зависит от тока. Ток в ртутной дуге осуществляется не только движением электронов от катода к аноду, но и движением положительных ионов ртути в направлении от анода к катоду. Поэтому ртутные вентили принадлежат к *ионным приборам*. При изменении знака напряжения на вентиле обратный ток через вентиль ничтожен. Ртутные вентили изготов-

ляют как незначительной мощности — в запаянных стеклянных сосудах, так и весьма большой мощности — в железных сосудах, откачиваемых насосами. Возможность построения ртутных вентилях на весьма большие обратные напряжения, порядка сотен тысяч вольт, и одновременно на большие токи, порядка нескольких сотен ампер, имеет исключительное значение для создания преобразовательных устройств переменного тока в постоянный, и обратно — на концах линий передачи энергии постоянного тока высокого напряжения, о чем будет речь в соответствующем разделе теории переменных токов.

Важным представителем нелинейных несимметричных элементов, применяемых для выпрямления переменных токов, является *кентрон* — пустотная лампа с двумя электродами. Один электрод кентрона накаливается при помощи особого источника тока до столь высокой температуры, что с его поверхности излучаются электроны, в то время как второй электрод имеет температуру, достаточно низкую для того, чтобы излучения электронов с его поверхности не происходило. Поэтому ток в кентронах может проходить, только когда анод положителен по отношению к катоду. Так как в кентронах ток осуществляется движением только электронов, то кентроны принадлежат к *электронным приборам*.

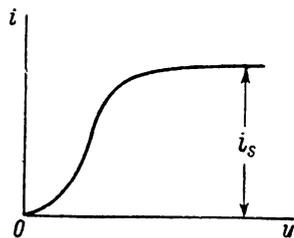


Рис. 99.

Характеристика кентрона, т. е. зависимость тока  $i$  в нем от напряжения  $u$  между анодом и катодом, показана на рис. 99. При достижении напряжением  $u$  значения, при котором все электроны, излучаемые катодом, переносятся к аноду, ток  $i$  получает предельное значение  $i_s$ , называемое *током насыщения*. Значение тока насыщения можно увеличить, лишь повышая температуру катода. Это обстоятельство, что ток не достигает тока насыщения при малых напряжениях, связано с наличием в пространстве между катодом и анодом отрицательного объемного заряда электронов, находящихся в данный момент в этом пространстве и движущихся от катода к аноду. Этот отрицательный объемный заряд создает у катода электрическое поле, противоположное полю положительно заряженного анода, что и приводит к ограничению тока при данном напряжении между анодом и катодом. В начальной части характеристики зависимость между  $i$  и  $u$  может быть представлена, как это можно вывести теоретически, в виде  $i = ku^{3/2}$ . Кентроны легко выполнить на высокое напряжение, так как в них осуществлен высокий вакуум. Существенным их недостатком является значительное в них падение напряжения, связанное с появлением отрицательного выше отрицательного объемного заряда. Ионные приборы в этом

отношении выгодно отличаются от кенотронов — падение напряжения в них невелико, так как положительный заряд ионов в значительной мере компенсирует отрицательный заряд электронов.

К ионным приборам, используемым для выпрямления переменного тока, относятся, кроме упомянутых выше ртутных вентиляей, также *газотроны*, представляющие собой, как и кенотроны, лампы с накаливаемым от постороннего источника твердым катодом, но наполненные или одним из благородных газов, или парами ртути. В последнем случае в баллон вводится капля жидкой ртути, над поверхностью которой и образуются насыщенные пары ртути. Вид характеристики газотрона аналогичен виду характеристики ртутного вентиля (рис. 98).

### § 35. Полупроводниковые диоды, как нелинейные элементы электрической цепи

Полупроводниковые диоды, обладающие несимметричной нелинейной характеристикой, получили исключительно широкое распространение. Уже в течение длительного времени для целей выпрямления переменного тока используются медно-закисные и селеновые полупроводниковые вентили.

На рис. 100 приведена нелинейная характеристика *полупроводникового вентиля*, состоящего из медной пластины, покрытой слоем закиси меди, и наложенной на нее свинцовой пластины. Эти вентили обладают большой проводимостью в направлении от закиси меди и очень малой проводимостью в обратном направлении.

Особый интерес представляют получающие все более широкое распространение германиевые и кремниевые полупроводниковые вентили. Рассмотрим несколько подробнее процессы в этих вентилях, так как такое рассмотрение понадобится в последующем для выяснения принципа действия германиевых триодов.

Германий и кремний относятся к четвертой группе элементов — атомы их имеют во внешней электронной оболочке по четыре валентных электрона. В кристалле германия атомы расположены так, что каждый атом находится между четырьмя соседними атомами, расположенными по отношению к нему на равных расстояниях и под одинаковыми углами. Четыре валентных электрона каждого атома входят в так называемые ковалентные связи с четырьмя соседними атомами. Таким образом, в каждой ковалентной связи участвуют два электрона соседних атомов. На рис. 101 структура кристаллической решетки германия условно представлена на плоскости. Ядро атома с остальными электронами представляет собой инертный в отношении химических свойств и в отношении электропроводности остаток с положительным зарядом, по абсолютной величине равным четырем зарядам электрона.

Энергетический зазор между валентной зоной и зоной проводимости у полупроводников имеет порядок 1 электронвольта (у гер-

мания 0,72 эв, у кремния 1,11 эв), т. е. значительно меньше, чем у диэлектриков. Поэтому при комнатной температуре у полупроводников большее количество электронов, чем у диэлектриков, способно преодолеть этот зазор и перейти в зону проводимости. При этом в валентной зоне образуются незанятые электронами места, т. е. положительные дырки. Этот процесс схематически показан на рис. 102, а на модели решетки кристалла и на рис. 102, б на энергетической диаграмме. Электроны в зоне проводимости и дырки в валентной зоне определяют электропроводность полупроводника.

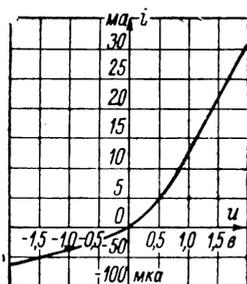


Рис. 100.

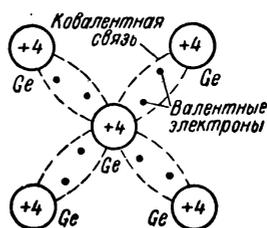


Рис. 101.

Удельное сопротивление чистого германия при  $t = 20^\circ \text{C}$  имеет порядок  $\rho = 0,6 \text{ ом} \cdot \text{м}$ , в то время как такой диэлектрик, как слюда, имеет  $\rho = 9 \cdot 10^{13} \text{ ом} \cdot \text{м}$ . С возрастанием температуры увеличивается количество электронов, способных преодолеть энергетический зазор, и вследствие этого удельное сопротивление чистого германия убывает с ростом температуры, т. е. чистый германий имеет отрицательный температурный коэффициент сопротивления.

Чрезвычайно важно, что имеется возможность влиять на величину и характер проводимости германия путем внесения в него ничтожно малых количеств примесей элементов третьей (бор, индий) или пятой (мышьяк, сурьма) групп.

Предположим, что в кристалл германия добавлена в небольшом количестве примесь элемента пятой группы, атомы которого имеют пять валентных электронов. Атомы примеси замещают в решетке кристалла атомы германия. При этом четыре валентных электрона примесного атома входят в ковалентные связи с четырьмя соседними атомами германия, а пятый валентный электрон примесного атома, оставшийся вне этих связей, оказывается слабо связанным со своим атомом. Он легко освобождается под влиянием, например, теплового движения, становясь свободным электроном проводимости.

Примеси этого типа называют «донорами» или «источниками» электронов. Полупроводники с такими примесями, характеризующиеся преобладанием свободных электронов, называют полупровод-

никами типа *n*. На рис. 103, *a* изображено схематически на модели кристаллической решетки германия образование свободного электрона вследствие замещения одного атома германия примесным атомом сурьмы. На энергетической диаграмме (рис. 103, *б*) уровни доноров располагаются в энергетическом зазоре вблизи зоны проводимости, соответственно тому, что требуется незначительная энергия для освобождения их избыточного электрона и перевода его в зону проводимости. После ухода этого электрона атом примеси будет представлять собой закрепленный в решетке положительный

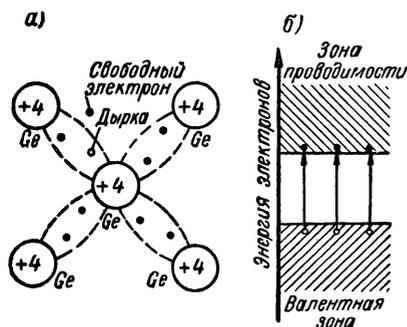


Рис. 102.

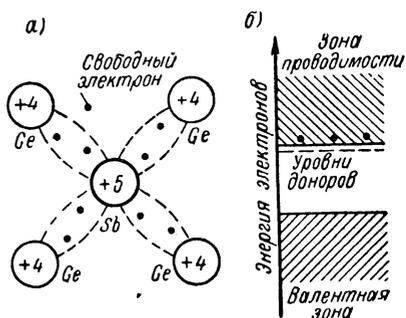


Рис. 103.

ион. Ничтожное добавление такой примеси существенно увеличивает электрическую проводимость германия. Так, добавление одного донорного атома на  $10^8$  атомов германия снижает его удельное сопротивление при комнатной температуре до  $\rho = 0,04 \text{ ом} \cdot \text{м}$ .

Предположим теперь, что в германий добавлена в небольшом количестве примесь элемента третьей группы, атомы которого имеют три валентных электрона. Эти атомы также замещают в решетке кристалла атомы германия. При этом три валентных электрона примесного атома входят в ковалентные связи с тремя соседними атомами германия, но в ковалентной связи с четвертым атомом германия образуется незанятое электроном место, т. е. дырка. В это незанятое место сравнительно легко может перейти электрон из соседней ковалентной связи, оставив в ней дырку. В эту вновь образовавшуюся дырку может перейти электрон из следующей ковалентной связи и т. д. Все происходит так, как будто перемещается положительно заряженная частица, эквивалентная дырке.

Примеси этого типа называют «акцепторами» или «приемниками» электронов. Полупроводники с такими примесями, характеризующиеся дырочной проводимостью, называют полупроводниками типа *p*. На рис. 104, *a* на модели кристаллической решетки схематически изображено образование дырки в случае замещения одного атома германия примесным атомом индия. На энергетической диаграмме

(рис. 104, б) уровни акцепторов располагаются в энергетическом зазоре вблизи валентной зоны, в соответствии с тем, что требуется незначительная энергия для перевода на этот уровень электрона из валентной зоны с образованием в последней дырки. После ухода дырки атом примеси будет представлять собой закрепленный в решетке отрицательный ион.

Возможность создания полупроводников с различным характером проводимости позволяет создать устройства для выпрямления переменного тока.

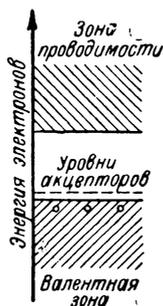
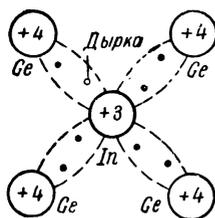


Рис. 104.

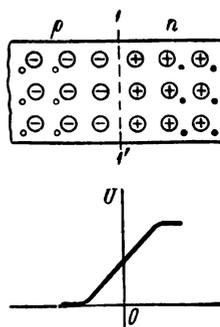


Рис. 105.

Предположим, что в образце германия слева от плоскости  $I-I'$  (рис. 105) введены акцепторные примеси, а справа от нее донорные примеси, т. е. слева мы имеем германий типа  $p$ , а справа германий типа  $n$ . Говорят, что около плоскости  $I-I'$  имеется  $p-n$  переход. Дырки в германии типа  $p$  и электроны в германии типа  $n$  являются основными носителями тока. Дырки будут диффундировать слева направо из области  $p$  в область  $n$ . Свободные электроны будут диффундировать в противоположном направлении. В итоге слева от плоскости  $I-I'$  образуется избыточный отрицательный заряд и справа — избыточный положительный заряд. Вследствие рекомбинации электронов и дырок в близлежащих к плоскости  $I-I'$  областях не будет ни дырок, ни свободных электронов, и избыточный заряд по существу будет создаваться слева отрицательными ионами акцептора, а справа положительными ионами донора. В месте  $p-n$  перехода возникает электрическое поле, направленное справа налево и препятствующее дальнейшей диффузии дырок и электронов. Между областью  $p$  и областью  $n$  образуется разность электрических потенциалов, т. е. возникает так называемый потенциальный барьер. Распределение потенциала в районе  $p-n$  перехода показано внизу на рис. 105 и на рис. 106, а, причем здесь и далее за нуль потенциала условно принят потенциал в области германия типа  $p$  непосредственно около  $p-n$  перехода, где уже нет объемного заряда.

Приключим такой образец к источнику постоянного напряжения

так, как показано на рис. 105, б. При таком включении напряжение источника снизит величину потенциального барьера и основные носители тока (дырки слева и электроны справа) получают возможность проходить через  $p$ — $n$  переход. В цепи возникнет так назы-

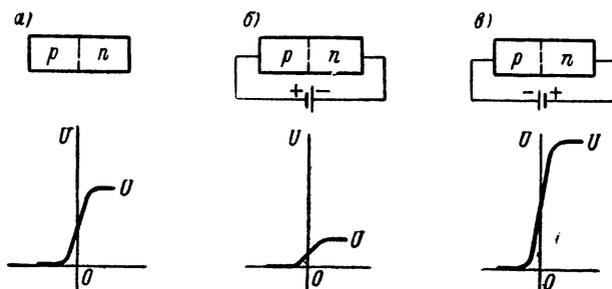


Рис. 106.

ваемый прямой ток, который будет возрастать с увеличением напряжения источника (рис. 107). Если к образцу приложить от источника напряжение противоположного предыдущему случаю знака (рис. 106, в), то потенциальный барьер возрастет на величину этого напряжения и основные носители тока не смогут проходить через плоскость раздела  $1-1'$ . Однако ток все же не будет полностью отсутствовать.

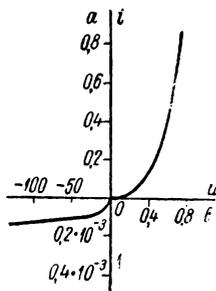


Рис. 107.

Кроме основных носителей тока, вызванных наличием примесей, и в  $p$  и в  $n$  областях имеются в небольшом количестве так называемые неосновные носители тока, имеющие знаки зарядов, противоположные знакам зарядов основных носителей, а именно в области  $p$  присутствуют также в небольшом количестве свободные электроны, а в области  $n$ —дырки. Они появляются в обеих областях вследствие образования электронодырочных пар в итоге воздействий теплового движения

согласно схеме, показанной на рис. 102. Очевидно, эти неосновные носители тока свободно переходят через потенциальный барьер, так как электрическое поле здесь не препятствует, а способствует их прохождению. Они образуют так называемый обратный ток. С увеличением обратного напряжения этот обратный ток быстро достигает своего предельного значения, определяемого числом электронодырочных пар, порождаемых в образце в единицу времени. Обратный ток во много раз меньше прямого. На рис. 107 приведена характеристика германиевого вентиля. Чтобы можно было на одном рисунке изобразить и прямой и обратный токи, они даны в различных масштабах.

Выпрямители с полупроводниковыми вентилями находят исключительно широкое применение в электроизмерительных приборах и в устройствах автоматики.

**§ 36. Последовательное, параллельное и смешанное соединения участков электрической цепи, содержащих нелинейные элементы и не содержащих источников э. д. с.**

Пусть электрическая цепь (рис. 108) состоит из двух последовательно соединенных нелинейных элементов, характеристики которых  $u_1 = F_1(i_1)$  и  $u_2 = F_2(i_2)$  известны. В этом случае имеем:

$$u = u_1 + u_2, \quad i_1 = i_2 = i.$$

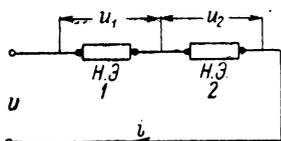


Рис. 108.

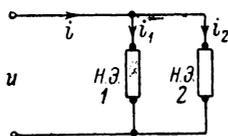


Рис. 110.

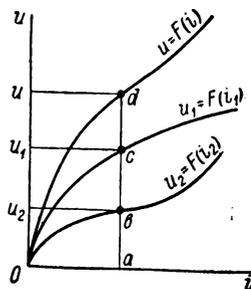


Рис. 109.

Изобразив на рис. 109 заданные характеристики отдельных элементов в виде кривых и складывая ординаты этих кривых для разных значений тока, получаем точки характеристики  $u = F(i)$ , относящейся ко всей цепи в целом. Например,  $ab + ac = ad$ . Располагая этой характеристикой, уже нетрудно находить значения  $i$ ,  $u_1$  и  $u_2$  при любом заданном значении  $u$ .

Очевидно, этот метод может быть распространен на случай любого числа последовательно включенных нелинейных и линейных элементов.

Пусть электрическая цепь (рис. 110) состоит из двух параллельно соединенных нелинейных элементов с известными характеристиками. В этом случае имеем:

$$i = i_1 + i_2; \quad u_1 = u_2 = u.$$

Складывая на рис. 111 абсциссы кривых  $u_1 = F_1(i_1)$  и  $u_2 = F_2(i_2)$ , получаем точки характеристики  $u = F(i)$ , относящейся ко всей цепи в целом. Например,  $ab + ac = ad$ .

При смешанном соединении, состоящем из последовательного и параллельного соединения отдельных участков цепи, для получе-

ния характеристики всей цепи в целом могут быть использованы те же приемы. На рис. 112 приведен пример смешанного соединения трех элементов, причем один из них, а именно третий элемент, обладает линейной характеристикой. Имеем уравнения:

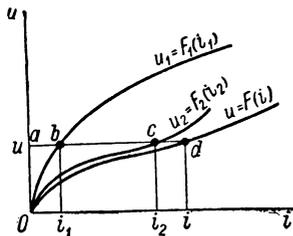


Рис. 111.

$$u = u_{23} = u_2 + u_3; \quad u_3 = r_3 i_2;$$

$$i = i_1 + i_2; \quad (i_3 = i_2, \quad u_{23} = u_1 = u).$$

Складываем сначала ординаты кривых  $u_2 = F_2(i_2)$  и  $u_3 = r_3 i_2 = r_3 i_2$  (рис. 113). Получаем кривую  $u = F_{23}(i_2)$ , изображающую характеристику последовательно соединенных второго и третьего элементов. Например,  $ab + ac = ad$ . Складывая затем абсциссы кривых  $u = F_{23}(i_2)$  и  $u = F_1(i_1)$ , изображающих характеристики параллельно соединенных ветвей, получаем характеристику  $u = F(i)$  всей цепи. Например,  $gk + gm = gt$ . Располагая совокуп-

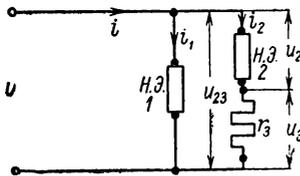


Рис. 112.

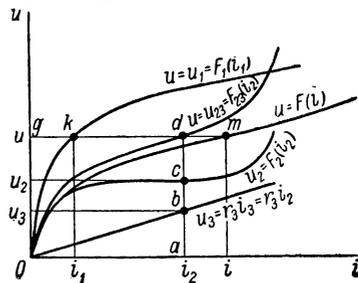


Рис. 113.

ностью характеристик на рис. 113, нетрудно найти напряжения и токи на всех участках цепи, если задано одно из этих напряжений ( $u$ ,  $u_2$  или  $u_3$ ) или один из этих токов ( $i$ ,  $i_1$  или  $i_2$ ).

### § 37. Последовательное, параллельное и смешанное соединения участков электрической цепи, содержащих нелинейные элементы и источники э. д. с.

Пусть имеется ветвь с последовательно соединенными нелинейным элементом и источником э. д. с. (рис. 114), причем заданы характеристика  $u_{ab} = F(i)$  нелинейного элемента и величина и направление э. д. с.  $e$ . Напряжение на всей ветви между точками  $a$  и  $c$  равно:

$$u_{ac} = u_{ab} + u_{bc} = u_{ab} - e_{bc}.$$

Это соотношение получается, если применить второй закон Кирхгофа к контуру, указанному на рис. 114 круговой стрелкой:

$$e_{bc} = u_{ca} + u_{ab} = -u_{ac} + u_{ab} \quad \text{или} \quad u_{ac} = u_{ab} - e_{bc}.$$

Если э. д. с.  $e$  действует в направлении выбранного положительного направления тока, т. е.  $e_{bc} > 0$ , то при положительном токе она способствует прохождению тока и при  $e_{bc} < u_{ab}$  уменьшает величину  $u_{ac}$ . На рис. 115, а изображена характеристика нелинейного элемента  $u_{ab} = F(i)$  и отложена прямая, соответствующая  $e_{bc} > 0$ . Здесь же нанесена результирующая характеристика  $u_{ac} = F_1(i)$  для всей ветви.

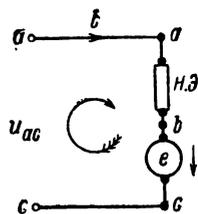


Рис. 114.

На рис. 115, б произведено то же построение при  $e_{bc} < 0$ , т. е. когда э. д. с. источника в рассматриваемой ветви действует против принятого положительного направления тока.

Предположим, что электрическая цепь (рис. 116) между зажимами  $ab$  состоит из любого числа последовательно и параллельно соединенных участков, содержащих линейные и нелинейные элементы и источники э. д. с. К зажимам  $a$  и  $b$  приложено заданное напряжение  $u_{ab}$ . Задаемся положительными направлениями токов во всех ветвях цепи. Направления и величины э. д. с. во всех ветвях заданы и заданы характеристики всех элементов ветвей. Строим только что

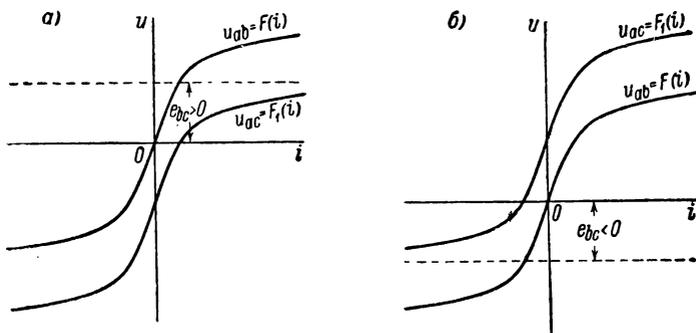


Рис. 115.

изложенным методом результирующие характеристики всех ветвей (рис. 117, 118, 119, 120, 121).

Располагая этими характеристиками, пользуемся дальше теми приемами для расчета смешанного соединения, которые были изложены в предыдущем параграфе. Так, для цепи, изображенной на рис. 116, складываем абсциссы кривых  $u_{ab} = F(i_4)$  и  $u_{ab} = F(i_5)$ , изображающих характеристики ветвей  $d-4-b$  и  $d-5-b$ , так как эти ветви соединены параллельно. Получаем характеристику  $u_{ab} = F(i_3)$  параллельно соединенных этих ветвей, изображенную на рис. 122. Складывая затем ординаты кривой  $u_{ab} = F(i_3)$  с ордина-

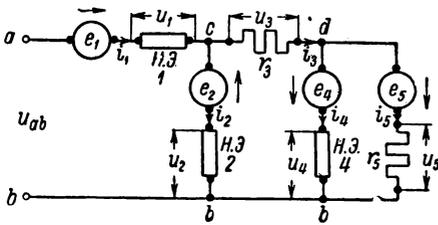


Рис. 116.

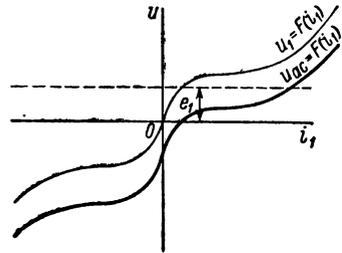


Рис. 117.

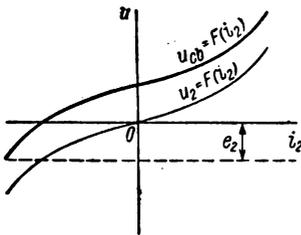


Рис. 118.

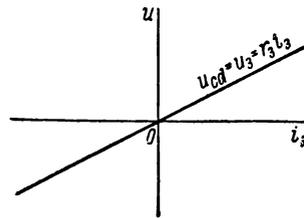


Рис. 119.

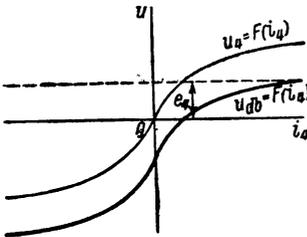


Рис. 120.

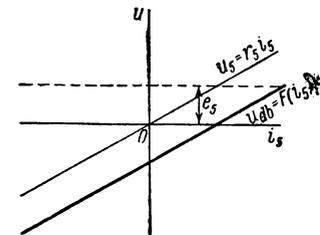


Рис. 121.

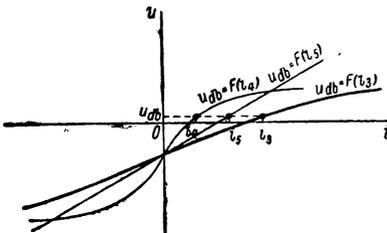


Рис. 122.

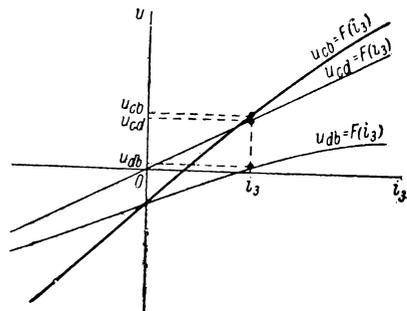


Рис. 123.

тами кривой  $u_3 = r_3 i_3$ , так как третий участок соединен последовательно с параллельно соединенными четвертым и пятым участками, получаем характеристику всех этих трех участков  $u_{cb} = F(i_3)$ , (рис. 123).

К абсциссам этой кривой прибавляем абсциссы кривой  $u_{cb} = F(i_2)$ , изображающей характеристику второй ветви. Получаем характеристику  $u_{cb} = F(i_1)$  части всей цепи между зажимами  $c$  и  $b$  (рис. 124). Наконец, складывая ординаты этой кривой с ординатами кривой  $u_{ac} = F(i_1)$ , находим характеристику всей цепи между за-

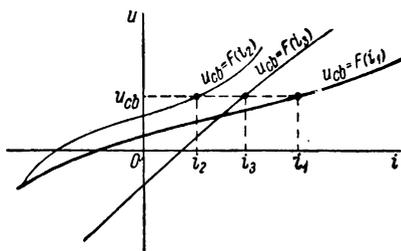


Рис. 124.

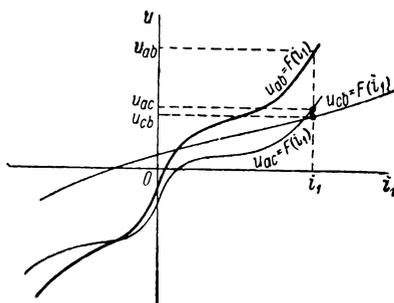


Рис. 125.

жимами  $a$  и  $b$  (рис. 125). Располагая построенными характеристиками, легко находим токи во всех ветвях и напряжения на всех ветвях, если задано приложенное ко всей цепи напряжение  $u_{ab}$ . Если задан один из токов или задано напряжение на каком-либо участке ветви, то из этих характеристик определяются токи и напряжения во всех остальных ветвях и напряжение  $u_{ab}$  на зажимах всей цепи. Пунктирными линиями на рис. 122, 123, 124, 125 показано решение для одного из таких частных режимов. Заметим, что если зажимы  $a$  и  $b$  замкнуты накоротко, то токи в цепи возникают только под действием всех источников э. д. с., содержащихся в самой цепи. При этом  $u_{ab} = 0$  и, следовательно, решение определяется точкой пересечения характеристики  $u_{ab} = F(i_1)$  на рис. 125 с осью абсцисс.

### § 38. Расчет сложной электрической цепи с одним нелинейным элементом

Для расчета электрической цепи любой сложности, в общем случае не образованной последовательно или параллельно соединенными участками, имеющей любое число источников э. д. с., но содержащей только один нелинейный элемент, может быть применен метод эквивалентного генератора.

Пусть нелинейный элемент включен в ветвь  $ab$  сложной цепи,

Выделим на рис. 126 эту ветвь, изобразив всю остальную часть сложной цепи условно прямоугольником. Часть цепи, содержащаяся внутри этого прямоугольника, состоит только из линейных элементов и источников э. д. с., и, следовательно, к ней в отдельности применим принцип наложения. Принцип наложения не применим к ветви  $ab$  с нелинейным элементом и вследствие этого не применим ко всей цепи в целом, содержащей этот элемент.

Принцип наложения не применим к ветви с нелинейным элементом потому, что сопротивление  $r$  этого элемента зависит от тока  $i$  в нем. В самом деле, предположим, что искомым действительным режимом с током  $i$  в нелинейном элементе мы разложили на два частных режима с токами  $i'$  и  $i''$  в этом элементе, причем  $i = i' + i''$ . Напряжения на нелинейном элементе в действительном и в этих частных режимах равны:  $u = ri$ ,  $u' = r'i'$  и  $u'' = r''i''$ . Так как  $r$  зависит от  $i$ , то, вообще говоря,  $r' \neq r'' \neq r$ , и, следовательно:  $u \neq u' + u''$ . Поэтому, налагая друг на друга частные режимы, мы не получим действительного режима с током  $i$  и напряжением  $u$ .

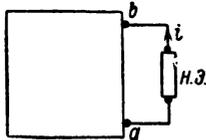


Рис. 126.

Однако результат наложения будет правильным, если в одном из частных режимов ток  $i'$  в нелинейном элементе и напряжение  $u'$  на нем отсутствуют, т. е.  $i' = 0$  и  $u' = 0$ , а в другом частном режиме ток  $i''$  равен току  $i$  в действительном режиме, а следовательно, и напряжение  $u''$  равно напряжению  $u$  в действительном режиме. При этом имеем:

$$i = 0 + i'' \quad \text{и} \quad u = 0 + u''.$$

Для того чтобы эти два частных режима при наложении давали действительные токи и напряжения во всей сложной цепи, содержащей данный нелинейный элемент, необходимо, чтобы э. д. с.  $e'_k$  и  $e''_k$  в этих режимах в любой  $k$ -той ветви в сумме были равны действительной э. д. с.  $e_k$  в этой ветви, т. е. чтобы было  $e'_k + e''_k = e_k$ .

Всем этим требованиям удовлетворяет метод эквивалентного генератора. Пользуясь этим методом, введем для получения требуемого первого режима в ветвь  $ab$  с нелинейным элементом такую дополнительную э. д. с.  $e'_0$ , чтобы при действии во всех остальных ветвях э. д. с.  $e'_k$ , равных заданным э. д. с.  $e_k$ , ток в нелинейном элементе стал бы равен нулю:  $i' = 0$ . Пусть характеристика нелинейного элемента такова, что при этом  $u' = 0$ . Э. д. с.  $e'_0$  равна и противоположна напряжению  $u_0$ , создаваемому всеми заданными источниками э. д. с. при размыкании ветви с нелинейным элементом в месте разрыва этой ветви, т. е.  $e'_0 = -u_0$ .

Во втором частном режиме введем в ветвь с нелинейным элементом э. д. с.  $e''_0 = -e'_0 = u_0$ , а все заданные источники э. д. с. зам-

кнем накоротко, сохранив в ветвях их внутренние сопротивления, т. е. положим  $e_k'' = 0$ .

Налагая эти два частных режима друг на друга, получаем во всех ветвях линейной части цепи:

$$e_k' + e_k'' = e_k + 0 = e_k; \quad i_k' + i_k'' = i_k,$$

и в ветви  $ab$ :

$$e_0' + e_0'' = 0; \quad u' + u'' = 0 + u'' = u, \quad i' + i'' = 0 + i'' = i,$$

т. е. получаем искомый действительный режим во всей цепи.

Обозначая, как и ранее, через  $r_2$  сопротивление всей линейной

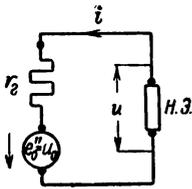


Рис. 127.

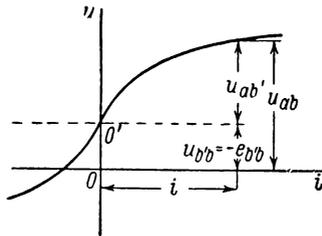


Рис. 128.

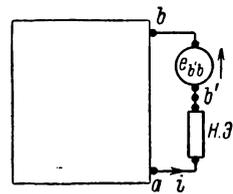


Рис. 129.

части цепи между зажимами  $a$  и  $b$  при замкнутых накоротко источниках э. д. с. в ней, получаем:

$$i = \frac{u_0}{r_2 + r(i)},$$

где  $r(i)$  — сопротивление нелинейного элемента при токе  $i$  в нем. Таким образом, всю сложную линейную часть цепи мы заменяем эквивалентным генератором с э. д. с.  $e_0'' = u_0$  и с внутренним сопротивлением  $r_2$  (рис. 127). Вычисления величин  $u_0$  и  $r_2$  являются чисто линейными задачами и могут быть выполнены изложенными в §§ 27—33 методами. Отыскание тока  $i$  в цепи, представленной на рис. 127, легко выполняется графическим построением, изложенным в § 36, если задана кривая, изображающая характеристику  $u = F(i)$  нелинейного элемента.

В вышеизложенном была сделана только одна оговорка, что характеристика  $u = F(i)$  проходит через начало координат, т. е. что при  $i = 0$  также и  $u = 0$ . Если это не имеет места (рис. 128), то, перенеся ось абсцисс так, чтобы характеристика прошла через новое начало координат  $O'$ , видим, что действительный нелинейный элемент с характеристикой  $u_{ab} = F(i)$ , не проходящей через начало координат, может быть заменен последовательным соединением (рис. 129) нелинейного элемента с характеристикой  $u_{ab'} = F'(i) = F(i) - u_{b'b} = F(i) + e_{b'b}$ , проходящей через начало координат,

и источника э. д. с.  $e_{b'b}$  с внутренним сопротивлением, равным нулю.

Если этот источник э. д. с. отнести к линейной части цепи, то по отношению к зажимам  $a$  и  $b'$  будут справедливы все вышеприведенные рассуждения.

### § 39. Расчет сложной электрической цепи с двумя нелинейными элементами

Пусть сколь угодно сложная цепь с источниками э. д. с. содержит две ветви  $ab$  и  $cd$  с нелинейными элементами. Выделим на рис. 130 эти ветви, обозначив всю остальную линейную часть цепи условно прямоугольником. Используем идею метода, изложенного в предыдущем параграфе, в применении к этой цепи.

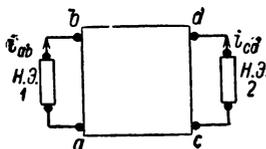


Рис. 130.

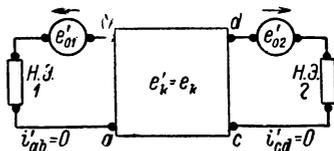


Рис. 131.

Введем в ветви  $ab$  и  $cd$  такие э. д. с.  $e'_{01}$  и  $e'_{02}$ , чтобы при действии в линейной части цепи всех заданных э. д. с. токи в обоих нелинейных элементах *одновременно* стали равными нулю (рис. 131). Пусть характеристики обоих нелинейных элементов таковы, что напряжения на них равны нулю при отсутствии токов в них. В таком случае э. д. с.  $e'_{01}$  и  $e'_{02}$  равны и противоположны напряжениям  $u_{01}$  и  $u_{02}$ , возникающим при *одновременном* размыкании обоих ветвей с нелинейными элементами в местах разрыва этих ветвей (рис. 132). Отыскание этих напряжений является линейной задачей.

Если теперь замкнуть накоротко все заданные источники э. д. с. в линейной части цепи ( $e''_k = 0$ ), сохранив в ветвях внутренние сопротивления этих источников, и ввести в ветви  $ab$  и  $cd$  источники с э. д. с.  $e''_{01} = -e'_{01} = u_{01}$  и  $e''_{02} = -e'_{02} = u_{02}$  (рис. 133), то на основе рассуждений, проведенных в предыдущем параграфе, можно утверждать, что токи в нелинейных элементах в этом режиме будут равны искомому токам  $i_{ab}$  и  $i_{cd}$ , возникающим в них в действительной сложной цепи (рис. 130) под действием всех заданных э. д. с.

Упрощение задачи заключается в том, что вместо большого числа заданных э. д. с., действующих в ветвях сложной цепи, теперь имеем только две эквивалентные э. д. с.  $e''_{01}$  и  $e''_{02}$ , включенные в ветви с нелинейными элементами. При этом вся сложная линейная часть цепи стала, как говорят, *пассивной*, т. е. не содержащей источников э. д. с.

Этот прием поэтому может быть назван *методом вынесения э. д. с.* из всей сложной линейной части цепи в рассматриваемые выделенные ветви.

Таким образом, задача сводится к расчету линейной цепи, изображенной на рис. 132, и к расчету цепи, приведенной на рис. 133. Токи во всех ветвях получаются суммированием токов, найденных в этих двух задачах,

в частности, токи в нелинейных ветвях получаются сразу из решения второй задачи, так как в первой задаче они равны нулю.

Решение второй нелинейной задачи (рис. 133) выполняется путем замены сложной линейной части цепи (на рис. 133) простой эквивалентной схемой, которая ведет себя по отношению к зажимам  $a$  и  $b$  и зажимам  $c$  и  $d$  так же, как действительная сложная цепь, т. е. при тех же напряжениях на этих зажимах токи, входящие через эти зажимы, оказываются в эквивалентной схеме такими же, как и в действительной сложной цепи.

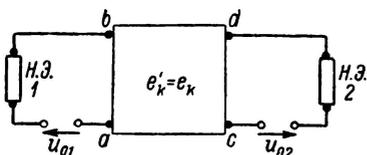


Рис. 132.

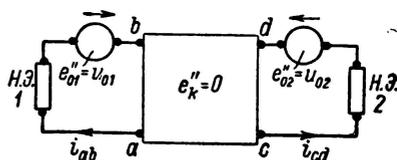


Рис. 133.

Покажем возможность такой замены и найдем вид простейшей эквивалентной схемы.

Сколь угодно сложную электрическую цепь, имеющую две пары зажимов, причем в каждой паре один зажим является входным, а другой выходным по отношению к соответствующей внешней цепи, называют *четыреполюсником*. Если внутри четырехполюсника содержатся источники э. д. с. (или источники тока), то его называют *активным* четырехполюсником. Так, например, четырехполюсник, изображенный на рис. 130, между зажимами  $a$  и  $b$  и зажимами  $c$  и  $d$ , является активным. Если же внутри четырехполюсника нет источников э. д. с. (или источников тока), то такой четырехполюсник называют *пассивным*. Четыреполюсник, изображенный на рис. 133, между зажимами  $a$  и  $b$  и зажимами  $c$  и  $d$ , является пассивным. В дальнейшем мы рассмотрим общую теорию четырехполюсника, в которой исследуется связь между токами  $i_1$  и  $i_2$  и напряжениями  $u_1 = u_{ba}$  и  $u_2 = u_{dc}$ , приложенными к входным и выходным зажимам (рис. 134). В настоящий момент ограничимся задачей отыскания простейшей эквивалентной схемы пассивного четырехполюсника, содержащего внутри себя только линейные элементы.

Пусть вторичная внешняя цепь разомкнута ( $i_2 = 0$ ), а к зажимам  $a$  и  $b$  со стороны первичной внешней цепи подано напряжение  $u'_1$ , под действием которого в четырехполюснике через зажим  $b$  входит и через зажим  $a$  выходит ток  $i_1$ . В силу линейности всех элементов четырехполюсника ток  $i_1$  пропорционален напряжению  $u'_1$ . Точно так же напряжение  $u'_2$ , которое при этом появляется на разомкнутых вторичных зажимах, будет пропорционально току  $i_1$ . Имеем:

$$u'_1 = R_{11} i_1; \quad u'_2 = R_{21} i_1,$$

где величины  $R_{11}$  и  $R_{21}$  имеют размерность сопротивления. Они могут быть вычислены из расчета цепи при только что рассмотренном режиме или определены экспериментально.

Пусть теперь разомкнута первичная цепь ( $i_1 = 0$ ), а ко вторичным зажимам подано напряжение  $u'_2$ , под действием которого идет ток  $i_2$ . На разом-

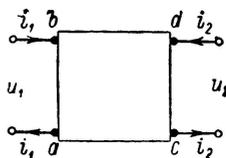


Рис. 134.

кнутых первичных зажимах при этом появляется напряжение  $u_1''$ . Можно написать:

$$u_1'' = R_{12}i_2; \quad u_2'' = R_{22}i_2.$$

При этом режиме могут быть вычислены или определены экспериментально параметры  $R_{22}$  и  $R_{12}$ . Налагая эти два режима, получаем уравнения четырехполюсника при действии одновременно напряжений  $u_1 = u_1' + u_1''$  и  $u_2 = u_2' + u_2''$  на первичных и вторичных зажимах:

$$u_1 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2; \quad u_2 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2.$$

На основе принципа взаимности можно утверждать, что  $R_{12} = R_{21}$ . Действительно, пусть вторичная цепь замкнута накоротко ( $u_2 = 0$ ), а в первичной, имеющей также нулевое сопротивление, включен источник э. д. с.  $e_1 = u_1$ . При этом имеем:

$$e_1 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2; \quad 0 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2.$$

Выражая из второго уравнения  $i_1$  через  $i_2$  и подставляя в первое, получаем:

$$e_1 = \frac{R_{12}R_{21} - R_{11}R_{22}}{R_{21}} i_2.$$

Если, наоборот, замкнуть накоротко первичные зажимы и включить в обладающую нулевым сопротивлением вторичную цепь источник э. д. с.  $e_2 = u_2$ , то будем иметь:

$$0 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2; \quad e_2 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2,$$

откуда находим:

$$e_2 = \frac{R_{21}R_{12} - R_{22}R_{11}}{R_{12}} i_1.$$

Согласно принципу взаимности при  $e_2 = e_1$  в этих режимах должно быть  $i_1 = i_2$ , т. е. равны величины, стоящие множителями перед  $i_2$  и перед  $i_1$ , что имеет место при  $R_{12} = R_{21}$ .

Таким образом, уравнения четырехполюсника содержат только три независимых параметра:  $R_{11}$ ,  $R_{22}$  и  $R_{12}$ . Соответственно, простейшая эквивалентная схема должна иметь только три элемента. Таких схем может быть две, они изображены на рис. 135. Первую называют Т-образной схемой, вторую П-образной схемой. Вторая получается из первой преобразованием соединения звездой в эквивалентное соединение треугольником. Т-образная схема представляет собой цепь с двумя независимыми контурами с контурными токами  $i_1$  и  $i_2$  и написанные выше уравнения четырехполюсника

$$u_1 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2; \quad u_2 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2,$$

являются уравнениями контурных токов для этой схемы.

Очевидно, собственные сопротивления контуров равны:

$$R_{11} = r_1 + r_3; \quad R_{22} = r_2 + r_3,$$

а взаимное сопротивление равно  $R_{12} = r_3$ .

Отсюда определяются сопротивления  $r_1, r_2$  и  $r_3$  Т-образной эквивалентной схемы через вычисленные или определенные экспериментально вышеуказанным способом параметры  $R_{11}, R_{22}$  и  $R_{12}$  четырехполюсника.

Заменив на рис. 133 четырехполюсник его эквивалентной Т-образной схемой, получим цепь на рис. 136, которая легко рассчитывается с помощью графических построений, изложенных в § 37.

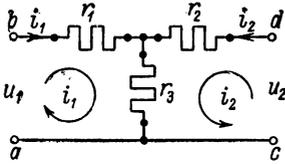


Рис. 135.

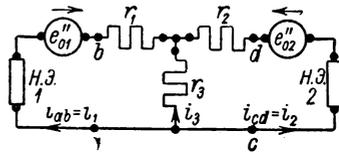
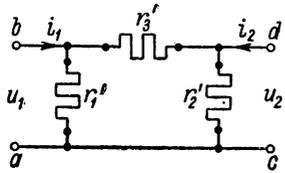


Рис. 136.

### § 40. Расчет сложной электрической цепи с тремя нелинейными элементами

Пусть сколь угодно сложная электрическая цепь с источниками э. д. с. содержит три ветви  $ab, cd$  и  $gk$  с нелинейными элементами. Выделим на рис. 137 эти ветви, обозначив всю остальную линейную часть условно шестиугольником.

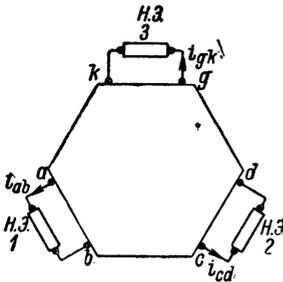


Рис. 137.

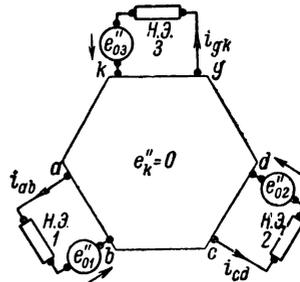


Рис. 138.

Эта часть, имеющая три пары зажимов, причем в каждой паре один является входным, а другой выходным по отношению к соответствующей внешней цепи (или ветви), представляет так называемый *шестиполюсник*. В данном случае шестиполюсник является *активным*, так как он содержит внутри себя источники э. д. с.

Введем во все вынесенные нелинейные ветви такие э. д. с.  $e'_{01}, e'_{02}$  и  $e'_{03}$ , чтобы при действии всех заданных э. д. с. токи  $i_{ab}, i_{cd}$  и  $i_{gk}$  в нелинейных элементах *одновременно* были равны нулю. Эти э. д. с.  $e_{01}, e_{02}$  и  $e_{03}$  равны по величине

и противоположны по знаку напряжениям  $u_{01}$ ,  $u_{02}$  и  $u_{03}$ , которые появляются в местах размыкания ветвей  $ab$ ,  $cd$  и  $gk$  под действием всех заданных э. д. с.

Если теперь ввести в нелинейные ветви э. д. с.  $e_{01} = -e_{01}' = u_{01}$ ,  $e_{02}' = -e_{02}' = u_{02}$ ,  $e_{03}'' = -e_{03}'' = u_{03}$  и замкнуть накоротко все заданные источники э. д. с., сохранив в соответствующих ветвях их внутренние сопротивления (рис. 138), то токи в нелинейных ветвях будут равны искомым токам  $i_{ab}$ ,  $i_{cd}$  и  $i_{gk}$  в действительной задаче. При этом шестиполусник между зажимами  $a$  и  $b$ ,  $c$  и  $d$ ,  $g$  и  $k$  является пассивным.

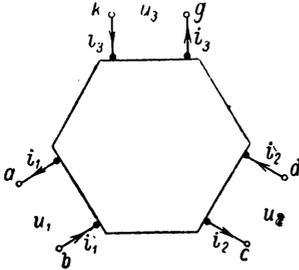


Рис. 139.

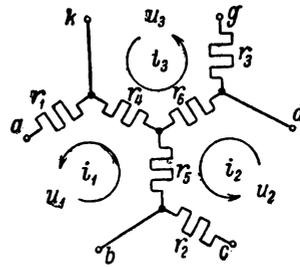


Рис. 140.

Для пассивного линейного шестиполусника (рис. 139) имеют место уравнения:

$$u_1 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2 + R_{13}i_3;$$

$$u_2 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2 + R_{23}i_3;$$

$$u_3 = R_{31}i_1 + R_{32}i_2 + R_{33}i_3,$$

где  $u_1 = u_{ba}$ ,  $u_2 = u_{dc}$  и  $u_3 = u_{kg}$  — приложенные извне к зажимам шестиполусника напряжения.

Эти уравнения легко получить, используя принцип наложения. Если приложить напряжение  $u_1$  только к зажимам  $b$  и  $a$ , а вторую и третью внешние цепи разомкнуть ( $i_2 = 0$  и  $i_3 = 0$ ), то будем иметь:

$$u_1' = R_{11}i_1; \quad u_2' = R_{21}i_1; \quad u_3' = R_{31}i_1.$$

Приложив напряжение  $u_2''$  к зажимам  $d$  и  $c$  и разомкнув первую и третью внешние цепи, получим:

$$u_1'' = R_{12}i_2; \quad u_2'' = R_{22}i_2; \quad u_3'' = R_{32}i_2.$$

Наконец, при действии внешнего напряжения  $u_3'''$  между зажимами  $k$  и  $g$  при разомкнутых внешних первой и второй цепях имеем:

$$u_1''' = R_{13}i_3; \quad u_2''' = R_{23}i_3; \quad u_3''' = R_{33}i_3.$$

Накладывая эти три режима и полагая  $u'_1 + u''_1 + u'''_1 = u_1$ ,  $u''_2 + u'''_2 + u'''_2 = u_2$  и  $u'_3 + u''_3 + u'''_3 = u_3$ , получим написанные выше уравнения пассивного линейного шестиполюсника. Входящие в эти уравнения параметры определяются расчетным или опытным путем из только что рассмотренных трех частных режимов.

На основе принципа взаимности можно утверждать, что  $R_{21} = R_{12}$ ,  $R_{32} = R_{23}$  и  $R_{31} = R_{13}$ . Таким образом, уравнения шестиполюсника содержат только шесть независимых параметров, и, следовательно, простейшая эквивалентная схема шестиполюсника должна иметь шесть элементов. На рис. 140 изображена одна из таких возможных схем, имеющая три независимых контура с контурными токами  $i_1$ ,  $i_2$  и  $i_3$ . Уравнения шестиполюсника и представляют собой уравнения контурных токов для этой эквивалентной схемы.

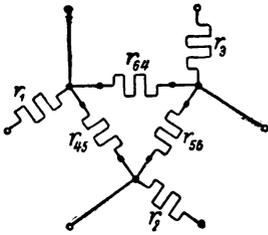


Рис. 141.

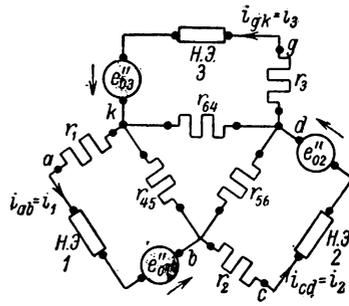


Рис. 142.

Собственные сопротивления контуров равны:

$$R_{11} = r_1 + r_4 + r_5; \quad R_{22} = r_2 + r_5 + r_6; \quad R_{33} = r_3 + r_6 + r_4.$$

Взаимные сопротивления  $R_{12}$ ,  $R_{23}$  и  $R_{31}$  отрицательны, так как положительные направления контурных токов в общих ветвях контрвоположны, а в уравнениях шестиполюсника все члены нами написаны со знаком «плюс». Имеем:

$$R_{12} = R_{21} = -r_5; \quad R_{23} = R_{32} = -r_6; \quad R_{13} = R_{31} = -r_4.$$

Из этих уравнений определяются сопротивления элементов эквивалентной схемы через параметры шестиполюсника.

Заменим соединение звездой из сопротивлений  $r_4$ ,  $r_5$  и  $r_6$  на рис. 140 эквивалентным соединением треугольником. Получим другую возможную эквивалентную схему шестиполюсника (рис. 141), используя которую приведем схему на рис. 138 к виду, изображенному на рис. 142.

В этой схеме ветви с индексами 1 и 4 5, 2 и 5 6, а также 3 и 6 4 соединены попарно параллельно, а образованные этими парами ветвей контуры соединены между собой последовательно. В трех ветвях содержится нелинейные элементы и источники э. д. с. Такая цепь легко рассчитывается с помощью графических построений, изложенных в § 37.

Отметим, что в частном случае, когда в заданной действительной сложной цепи все три ветви с нелинейными элементами сходятся к одному узлу, образуя соединение звездой, при одновременном размыкании этих ветвей этот узел оказывается отключенным от всей цепи, его потенциал по отноше-

нию к другим точкам цепи получается неопределенным, а следовательно, неопределенными оказываются и напряжения на местах разрыва. Однако в этом случае достаточно разорвать только две ветви с нелинейными элементами, так как ток в третьей ветви с нелинейным элементом при этом также будет равен нулю. Соответственно при расчете токов в нелинейных элементах достаточно будет ввести только два эквивалентных источника э. д. с., например  $e_{01}$  и  $e_{02}$ . В случае, когда характеристика нелинейного элемента не проходит через начало координат, этот нелинейный элемент может быть заменен нелинейным элементом с характеристикой, проходящей через начало координат, и источником э. д. с., как было показано в конце § 38.

### § 41. Расчет сложной электрической цепи с четырьмя и более нелинейными элементами. Метод последовательных приближений

В том случае, когда входящая в состав сложной электрической цепи группа ветвей, содержащих нелинейные элементы, присоединена к остальной части цепи двумя зажимами и имеет внутри себя только последовательное и параллельное соединения, то, пользуясь методами, изложенными в §§ 36, 37, эту группу можно заменить одной эквивалентной ветвью с общей эквивалентной нелинейной характеристикой. Если таких групп окажется не более трех, то задача решается методами, указанными в предыдущих трех параграфах.

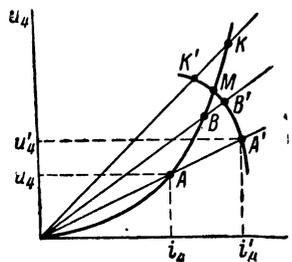


Рис. 143.

Может, однако, получиться, что образовать такие группы невозможно. Пусть, например, цепь содержит четыре ветви с нелинейными элементами, не объединяемые такими группами. Если выделим из сложной цепи эти четыре ветви, то оставшаяся линейная часть цепи образует активный восьмиполусник. Можно, пользуясь изложенным в предыдущих параграфах приемом,

вынести из этого восьмиполусника все э. д. с., заменив их четырьмя эквивалентными э. д. с. в четырех нелинейных ветвях. Однако оставшийся пассивный восьмиполусник в общем случае не представляется возможным заменить такой эквивалентной схемой, чтобы образованная ею вместе с четырьмя нелинейными ветвями цепь содержала в себе только последовательное и параллельное соединения. Поэтому не представляется возможным воспользоваться для решения графическим построением, изложенным в § 37.

В таком сложном случае можно воспользоваться методом последовательных приближений. Зададимся произвольно значением тока  $i_4$  в четвертой нелинейной ветви. По известной характеристике этой ветви (рис. 143) определяем напряжение  $u_4$  (точка  $A$  характеристики) и сопротивление  $r_4 = \frac{u_4}{i_4}$  ветви. Заменим четвертую нелинейную ветвь линейной с таким же сопротивлением  $r_4$ , но не зависящим от тока, т. е. заменим нелинейную характеристику на рис. 143 прямой, идущей из начала координат через точку  $A$ . При этом задача сводится к задаче с тремя нелинейными ветвями, которая решается методом, изложенным в предыдущем параграфе. Выполнив такое решение, найдем значения тока  $i'_4$  и напряжения  $u'_4$  (точка  $A'$  на рис. 143), которые имели бы место, если бы вместо четвертого нелинейного сопротивления было включено линейное сопротивление  $r_4$ . Точка  $A'$  не лежит на характеристике нелинейного сопротивления, следовательно, найденные значения  $i'_4$  и  $u'_4$  не являются решениями нашей задачи. Зададимся другим значением  $r_4$ ,

например, соответствующим точке  $B$  характеристики нелинейной ветви и, полагая  $r_4 = \text{const}$ , вновь произведем расчет цепи. При этом получим новые значения  $i'_4$  и  $u_4$ , которые определяют точку  $B'$  на прямой, проходящей из начала координат через точку  $B$ . Так как точка  $B'$  также не лежит на характеристике нелинейной ветви, то и новые  $i'_4$  и  $u_4$  не являются решениями действительной задачи. Поскольку при первом решении для точки  $A'$  получились большие токи и напряжения, чем для точки  $A$ , то естественно было выбрать точку  $B$  для второго решения по характеристике выше точки  $A$ . При этом следует ожидать, что точка  $B'$  окажется ближе к характеристике, чем точка  $A'$ . Производим такой расчет для ряда точек до тех пор, пока для некоторой точки, например  $K$ , соответствующая ей точка  $K'$  не окажется по другую сторону характеристики. Если теперь провести кривую через точки  $A', B', \dots, K'$ , то точка  $M$  пересечения этой кривой с характеристикой нелинейной четвертой ветви даст искомого значения величин  $i_4$

и  $u_4$  и сопротивления  $r_4 = \frac{u_4}{i_4}$ . Выполнив теперь еще раз расчет всей электрической цепи с тремя нелинейными элементами при этом значении  $r_4 = \text{const}$ , найдем токи и напряжения во всех остальных ветвях.

Если электрическая цепь содержит пять нелинейных ветвей, не объединяемых в группы ветвей с последовательным и параллельным соединениями, то можно, пользуясь методом последовательных приближений, поступить следующим образом.

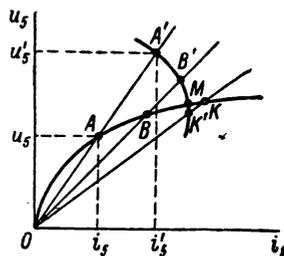


Рис. 144.

Задаемся значением  $r_5$  сопротивления пятой нелинейной ветви, соответствующим некоторой точке ее характеристики. При этом значении  $r_5 = \text{const}$  производим расчеты для ряда значений  $r_4$ , как только что было изложено, и находим решение, удовлетворяющее характеристике  $u_4 = F(i_4)$ . Однако полученные при этом значения  $u'_5$  и  $i'_5$  не будут, вообще говоря, отвечать характеристике пятой ветви  $u_5 = F(i_5)$ ; например, заданное значение  $r_5$  соответствует точке  $A$  характеристики  $u_5 = F(i_5)$  (рис. 144), а найденные значения  $i'_5$  и  $u'_5$  определяют точку  $A'$ . Задаемся новым значением  $r_5$  (точка  $B$  на рис. 144) и вновь производим серию расчетов до удовлетворения характеристике  $u_4 = F(i_4)$ . Получаем новые значения  $i'_5$  и  $u'_5$  (точка  $B'$  на рис. 144). Выполнив несколько серий таких расчетов при различных  $r_5$ , получаем истинное значение (точка  $M$ ) на пересечении кривой, проходящей через точки  $A', B', \dots, K'$  на рис. 144 с характеристикой пятой ветви.

Рассмотренные методы охватывают собой практически все важные случаи. Действительно, электрические цепи с элементами, обладающими резко выраженной нелинейностью, на практике создают для получения особых свойств этих цепей. Об этих особых свойствах будет речь в следующем параграфе. Однако предугадать способ соединения нелинейных элементов и вид их характеристик, обеспечивающих в наилучшем виде получение требуемых особых свойств, при очень большом числе нелинейных элементов и чрезвычайно сложной конфигурации цепи вряд ли возможно. Поэтому, как правило, и не возникает необходимости образования для этих целей слишком сложных цепей с весьма большим числом нелинейных элементов. Однако, если все же подобная электрическая цепь встретится на практике, то для анализа процессов в ней приходится обращаться к экспериментальному исследованию, так как расчет ее, если и возможен, то оказывается чрезвычайно громоздким.

#### § 42. Аналитическое исследование особых свойств нелинейных электрических цепей постоянного тока при малых отклонениях от заданного режима

Нелинейная зависимость между токами и напряжениями в нелинейных электрических цепях придает этим цепям ряд особых замечательных свойств, которые с успехом используются в различных практических устройствах, особенно в электроизмерительных и автоматических устройствах. Эти особые свойства проявляются в своеобразном поведении нелинейных цепей при отклонении токов и напряжений от их значений при заданном режиме. Некоторые из этих свойств были отмечены в § 34 при рассмотрении нелинейных элементов электрической цепи.

Так, например, можно осуществить устройства, в которых при отклонении в известных пределах напряжения  $u_1$  на входных зажимах от номинального его значения напряжение  $u_2$  на выходных зажимах остается неизменным или практически неизменным. Такое устройство служит стабилизатором напряжения. Примером такого устройства является стабилонольт, описанный в § 34. Аналогично можно с помощью нелинейных элементов, например, с помощью бареттера, добиться стабилизации тока.

С помощью мостовой электрической цепи с нелинейными элементами можно получить, что напряжение  $u_2$  на выходных зажимах в диагонали моста будет равно нулю только при одном определенном заданном значении напряжения  $u_1$  на входных зажимах в другой диагонали моста. При отклонении величины  $u_1$  от этого значения появляется напряжение  $u_2$ , отличное от нуля. При этом увеличению  $u_1$  соответствует напряжение  $u_2$  одного знака, уменьшению  $u_1$  соответствует напряжение  $u_2$  другого знака. Такое устройство может служить указателем (индикатором) отклонения напряжения  $u_1$  от заданного его значения и может быть использовано для автоматического поддержания этого напряжения вблизи заданного значения.

Для аналитического исследования поведения нелинейной электрической цепи при небольших отклонениях от заданного режима нет необходимости располагать аналитическим выражением всей характеристики каждого нелинейного элемента, входящего в состав цепи. Достаточно выразить уравнением небольшую часть характеристики вблизи точки  $A$ , соответствующей заданному режиму. Обычно бывает достаточно заменить этот участок характеристики отрезком прямой, касательной к характеристике в точке  $A$  (рис. 145). Уравнение этой прямой имеет вид:

$$u = u_0 + r_d i,$$

где  $u_0$  определяется точкой пересечения прямой с осью ординат (рис. 145), а  $r_d = k \operatorname{tg} \beta$  есть динамическое сопротивление нелиней-

ного элемента в точке  $A$  характеристики, причем  $k$  есть отношение масштаба напряжения к масштабу тока. Величина  $u_0$  может быть как положительной (рис. 145), так и отрицательной (рис. 146). Величина  $r_0$  также может быть положительной, если  $u$  растет при увеличении  $i$ , и отрицательной в случае падающей характеристики.

Метод замены характеристики на некотором ее участке отрезком прямой называют *линеаризацией* задачи в соответствующих пределах. Воспользуемся этим методом для аналитического исследования работы стабиловольта вблизи некоторого заданного режима.

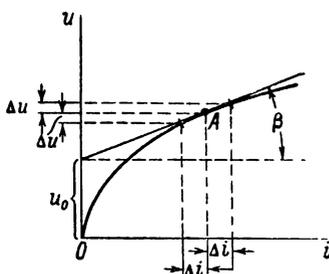


Рис. 145.

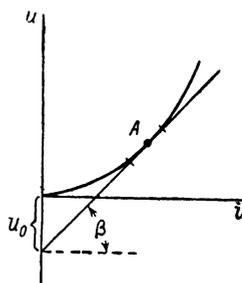


Рис. 146.

Схема стабиловольта показана на рис. 94. Обозначим сопротивление приемника  $N$  через  $r_2$ . Имеем систему уравнений:

$$u_1 = r i_1 + u_2; \quad u_2 = r_2 i_2; \quad u_2 = u_0 + r_0 i; \quad i_1 = i + i_2.$$

Подставив в третье уравнение  $i = i_1 - i_2$  из четвертого и заменив  $i_2$  через  $u_2/r_2$  из второго, выразим  $i_1$  через  $u_2$ . Подставив это выражение для  $i_1$  в первое уравнение, получаем связь между  $u_2$  и  $u_1$  в виде:

$$u_2 = \frac{r_2 r_0}{r r_0 + r_2 r + r_2 r_0} u_1 + \frac{r r_2}{r r_0 + r_2 r + r_2 r_0} u_0.$$

Качество работы стабилизатора напряжения характеризуют так называемым коэффициентом стабилизации  $k$ , равным отношению относительного изменения  $\frac{\Delta u_1}{u_1}$  первичного напряжения к относительному изменению  $\frac{\Delta u_2}{u_2}$  вторичного напряжения, т. е. равным:

$$k = \frac{\Delta u_1}{u_1} : \frac{\Delta u_2}{u_2} = \frac{u_2}{u_1} : \frac{\Delta u_2}{\Delta u_1}.$$

Из уравнения связи между  $u_2$  и  $u_1$  имеем:

$$\frac{\Delta u_2}{\Delta u_1} = \frac{r_2 r_0}{r r_0 + r_2 r + r_2 r_0};$$

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{r_2 r_\partial}{r r_\partial + r_2 r + r_2 r_\partial} + \frac{r r_2}{r r_\partial + r_2 r + r_2 r_\partial} \frac{u_0}{u_1} = \frac{\Delta u_2}{\Delta u_1} \left( 1 + \frac{r}{r_\partial} \frac{u_0}{u_1} \right).$$

Следовательно, искомый коэффициент стабилизации имеет выражение:

$$k = 1 + \frac{r}{r_\partial} \frac{u_0}{u_1}.$$

Желательно иметь  $k$  возможно большим, так как при этом большому относительному изменению первичного напряжения будет соответствовать малое относительное изменение вторичного напряжения. Из последнего выражения видно, что  $k = \infty$  при  $r_\partial = 0$ , т. е. если

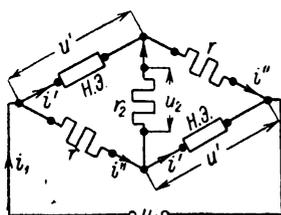


Рис. 147.

точка  $A$  лежит на горизонтальном участке характеристики. В этом случае вторичное напряжение  $u_2$  остается постоянным при изменении первичного  $u_1$ .

Полученное выражение позволяет вычислить коэффициент стабилизации для любой точки характеристики и любого значения  $u_1$ .

В действительности характеристика нелинейного элемента стабиловольта в используемой рабочей ее части имеет некоторый наклон к оси абсцисс, различный в разных точках. Пользуясь графическим методом, изложенным в § 36, возможно найти для различных значений первичного напряжения  $u_1$  и сопротивления  $r_2$  нагрузки положение точки  $A$  на характеристике и соответствующие ей значения  $r_\partial$  и  $u_0$ . Располагая этими значениями, нетрудно по последней формуле получить величину  $k$ . Таким путем можно найти зависимости  $k = F(u_1)$  при различных  $r_2$ .

Подчеркнем, что стабилизация напряжения достигается только благодаря нелинейным свойствам цепи. Действительно, если заменить нелинейный элемент линейным с постоянным сопротивлением, то мы имели бы  $u_0 = 0$  и  $k = 1$ , т. е. относительные изменения первичного и вторичного напряжения были бы равны друг другу и никакой стабилизации не было бы.

В качестве другого примера исследуем симметричный мост с двумя одинаковыми нелинейными элементами в двух противоположных плечах (рис. 147) и двумя одинаковыми постоянными (линейными) сопротивлениями  $r$  в других плечах. Имеем уравнения:

$$u_1 = u' + r i''; \quad u' = u_2 + r i'';$$

$$i' = i'' - i_2; \quad u' = u_0 + r_\partial i'; \quad u_2 = r_2 i_2.$$

Подставим  $i'$  из третьего уравнения в четвертое. Найденное выражение для  $u'$  подставим в первое и второе уравнения и заменим

$i_2$  через  $u_2$  согласно пятому уравнению. Получим два уравнения, содержащие  $u_1$ ,  $u_2$  и  $i''$ , исключая из которых  $i''$ , найдем связь между  $u_2$  и  $u_1$  в виде:

$$u_2 = \frac{r_\partial - r}{r + r_\partial + \frac{2rr_\partial}{r_2}} u_1 + \frac{2r}{r + r_\partial + \frac{2rr_\partial}{r_2}} u_0.$$

При  $r_\partial = r$  напряжение  $u_2$  на выходе не зависит от напряжения  $u_1$  на входе, т. е. мост работает как стабилизатор напряжения. Коэффициент стабилизации равен:

$$k = \frac{u_2}{u_1} : \frac{\Delta u_2}{\Delta u_1} = 1 + \frac{2r}{r_\partial - r} \frac{u_0}{u_1}.$$

При  $r_\partial = r$  имеем  $k = \infty$ , т. е. полную стабилизацию вторичного напряжения, которое при этом равно:

$$u_2 = \frac{1}{1 + \frac{r}{r_2}} u_0.$$

Тот же мост можно использовать и как указатель отклонения  $\Delta u_1$  первичного напряжения от некоторого заданного его значения  $u_1$ . С этой целью уравновесим мост при этом значении напряжения  $u_1$  на его входе. Очевидно, равновесие, т. е.  $u_2 = 0$ , будет достигнуто, когда статическое сопротивление нелинейных элементов в плечах моста будет равно сопротивлению  $r$  в других линейных плечах, т. е. при  $r_{cm} = r$ .

Воспользовавшись уравнением, связывающим  $u_2$  и  $u_1$ , и беря приращения  $\Delta u_2$  и  $\Delta u_1$ , найдем:

$$\frac{\Delta u_2}{\Delta u_1} = \frac{r_\partial - r}{r + r_\partial + \frac{2rr_\partial}{r_2}} = \mu.$$

Величину  $\mu$  называют коэффициентом усиления моста.

Мощность, передаваемая во вторичную цепь, равна:

$$p_2 = \frac{(\Delta u_2)^2}{r_2} = (\Delta u_1)^2 \frac{(r_\partial - r)^2}{r_2 \left( r + r_\partial + \frac{2rr_\partial}{r_2} \right)^2}.$$

Можно подобрать сопротивление  $r_2$  вторичной цепи таким, чтобы мощность  $p_2$  была наибольшей при заданных  $\Delta u_1$ ,  $r_\partial$  и  $r$ . Взяв производную от  $p_2$  по  $r_2$  и приравняв ее нулю, находим:

$$r_2 = \frac{2rr_\partial}{r + r_\partial} \text{ или } r_2 = \frac{2r_{cm}r_\partial}{r_{cm} + r_\partial}.$$

так как  $r = r_{cm}$ .

Коэффициент усиления в этом случае равен:

$$\mu = \frac{r_{\partial} - r_{cm}}{2(r_{cm} + r_{\partial})} = \frac{1}{2} \frac{\frac{r_{\partial}}{r_{cm}} - 1}{\frac{r_{\partial}}{r_{cm}} + 1}.$$

При любых  $r_{\partial} > 0$  абсолютное значение  $\mu$  не превышает 0,5. Тем не менее такое устройство дает возможность наблюдать весьма малые относительные отклонения  $\frac{\Delta u_1}{u_1}$  первичного напряжения от заданного его значения  $u_1$ , так как при заданном значении  $u_1$  напряжение  $u_2$  во вторичной цепи равно нулю, и, следовательно, для отсчета величины  $\Delta u_2$  может быть взят прибор с весьма большой чувствительностью. Отклонения прибора во вторичной цепи можно использовать путем воздействия на соответствующие регулирующие устройства для автоматического поддержания заданного значения  $u_1$  с весьма большой точностью.

Из рассмотренных примеров мы видим, что метод линеаризации характеристики нелинейного элемента вблизи ее рабочей точки  $A$  может быть с успехом использован для аналитического исследования ряда важных свойств нелинейных электрических цепей.

Отметим, что кроме рассмотренных особых свойств нелинейных электрических цепей, можно получить в этих цепях еще другие весьма ценные свойства. Так, при наличии в цепи нелинейных элементов с падающей характеристикой возможны, как мы убедимся в последующем, неустойчивые режимы. При этом оказывается возможным осуществить устройства, в которых при плавном изменении напряжения  $u_1$  на входных зажимах в момент достижения им некоторого заданного значения напряжение  $u_2$  на выходных зажимах изменяется скачком. Это свойство может быть использовано в релейных устройствах.

Исследование устойчивости режимов в нелинейных электрических цепях, содержащих элементы с падающей характеристикой, требует рассмотрения процессов в цепях при переменных токах в них. Этому интересному и важному вопросу мы уделим внимание в конце второй части курса.

---

## ГЛАВА СЕДЬМАЯ

### МАГНИТНЫЙ ПОТОК И ЯВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

#### § 43. Магнитное поле

В первом параграфе было отмечено, что электрически заряженные элементарные частицы материи, находящиеся в непрерывном движении, окружены электромагнитным полем. Эти частицы нельзя мыслить без их электромагнитного поля, с которым они представляют единое сложное целое. Электромагнитное же поле может существовать как будучи связанным с заряженными частицами, так и отдельно от частиц, в форме свободного, излученного электромагнитного поля.

Электромагнитное поле, являющееся особым видом материи, характеризуется двумя его сторонами — электрической и магнитной. В предыдущих главах мы исследовали одну из сторон единого электромагнитного поля — поле электрическое. В настоящей главе мы изучим другую сторону электромагнитного поля, называемую *магнитным* полем.

Так как электрическое и магнитное поля являются разными сторонами одного и того же вида материи — электромагнитного поля, то между ними существует неразрывная связь. Поэтому, вводя величины, характеризующие магнитное поле, мы тут же будем устанавливать взаимосвязь между ними и величинами, характеризующими электрическое поле, рассматривая эту задачу как важнейшую.

Магнитное поле обнаруживается в пространстве, окружающем электрические токи того или иного вида, например, в пространстве, окружающем проводниковые контуры с электрическими токами. В этом пространстве мы обнаруживаем ряд особых явлений. В проводниках, движущихся около контуров с токами, возникают (индуцируются) электродвижущие силы. Магнитная стрелка, расположенная вблизи контуров с токами, стремится определенным образом ориентироваться по отношению к ним. Посторонний проводник с током, внесенный в это пространство, испытывает механические силы, направленные определенным образом и зависящие от ориентации внесенного проводника с током по отношению к основным контурам с токами. Эти механические силы обнаруживаются и в том случае, когда суммарный электрический заряд

внесенного проводника с током равен нулю, т. е. когда силы, действующие на проводник со стороны электрического поля, отсутствуют, даже если бы это электрическое поле и существовало в рассматриваемой области пространства.

Все эти особые явления мы рассматриваем как проявления *магнитного поля*, существующего в этом пространстве. Любое из них может быть использовано для обнаружения и для определения магнитного поля. В соответствии с этим мы можем дать, например, следующее определение:

*магнитным полем мы называем одну из двух сторон электромагнитного поля, выявляемую, например, по возникновению электродвижущих сил в движущихся в нем проводниках, или по возникновению механических сил, действующих на незаряженный проводник с электрическим током.*

Для выявления магнитного поля необходимо взять *незаряженный* проводник с током, так как на заряженный проводник с током действует не только магнитное, но и электрическое поле.

#### § 44. Магнитная индукция

Для количественной характеристики магнитного поля мы выберем первое из указанных в предыдущем параграфе его проявлений. Общие соображения в пользу этого мы приведем в заключительном параграфе настоящей части, после того как будут рассмотрены все основные проявления магнитного поля и установлены связи между полями электрическим и магнитным как двумя сторонами единого электромагнитного поля. Тогда будут ясны существенные преимущества такого выбора.

Явление электромагнитной индукции, заключающееся в возникновении индуцированных электродвижущих сил в проводниках, движущихся в магнитном поле, или в неподвижных проводниках, находящихся в переменном магнитном поле, имеет исключительно важное значение. Поэтому в дальнейшем мы уделим особое внимание рассмотрению этого явления. Здесь же воспользуемся им, как только что было отмечено, для того чтобы охарактеризовать магнитное поле с количественной стороны.

Расположим вблизи электрической цепи, по которой протекает ток, например, вблизи соленоида с током (рис. 148) плоский круговой виток  $K$  из очень тонкой проволоки. Назовем этот виток пробным. Проволоки, идущие от витка, плотно перевьем между собой, чтобы не образовывалось дополнительных витков, и присоединим к баллистическому гальванометру, удаленному на весьма большое расстояние от соленоида. Баллистический гальванометр позволяет измерить электрический заряд  $q$ , протекший в цепи, в которую он включен, т. е. величину электрического заряда, перенесенного сквозь поперечное сечение проводов цепи в процессе тока в цепи. Отброс подвижной части баллистического гальванометра пропорционален

величине  $q$  при условии, что ток в цепи гальванометра существует в течение достаточно малого промежутка времени по сравнению с периодом колебаний подвижной системы гальванометра.

Отнесем пробный виток на значительное расстояние от соленоида. При этом, как показывает опыт, отброс гальванометра, а следовательно, и величина  $q$  зависит только от начального положения пробного витка по отношению к соленоиду и совсем не зависит от конечного положения витка, если он уносится на достаточно большое расстояние от соленоида.

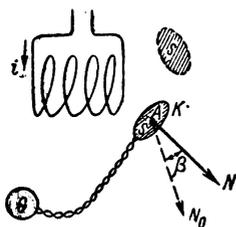


Рис. 148.

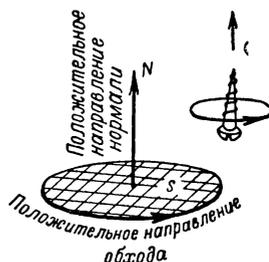


Рис. 149.

Повторяя этот опыт при одном и том же начальном положении пробного витка, но при различных значениях электрического сопротивления  $r$  цепи, образованной витком, соединительными проводниками и гальванометром, мы обнаруживаем, что значение величины  $q$  изменяется обратно пропорционально сопротивлению.

Выберем некоторое направление вдоль пробного витка в качестве положительного направления обхода витка. Величину  $q$  будем считать положительной, когда положительный заряд переносится в положительном направлении обхода витка. За положительное направление нормали  $N$  к плоскости витка условимся принимать направление поступательного движения оси правого винта, головка которого вращается в сторону, определяемую положительным направлением обхода витка (рис. 149).

Оставим теперь электрическое сопротивление цепи неизменным и будем воспроизводить опыт, сначала уменьшая размеры поверхности  $s$ , ограниченной витком, а затем изменяя направление положительной нормали  $N$  в начальном положении витка. Условимся при этом центр плоской поверхности  $s$ , ограниченной витком, совмещать каждый раз с одной и той же точкой  $A$ , фиксированной в пространстве по отношению к соленоиду (рис. 148).

Опыт показывает, что при достаточно малых размерах поверхности  $s$  величина  $q$  изменяется пропорционально величине этой поверхности.

Кроме того, существует такое направление  $N_0$  положительной нормали, при котором  $q$  получается при данной величине  $s$  наибольшим. При любом другом направлении положительной нормали  $N$  величина  $q$  оказывается пропорциональной косинусу угла  $\beta$  между этим направлением и направлением  $N_0$ .

Все эти результаты можно выразить общей зависимостью:

$$q = B \cos \beta \frac{s}{r}.$$

Величина  $B$  уже не зависит от условий опыта (от  $s$ ,  $r$  и  $\beta$ ) и определяется только положением точки  $A$  по отношению к соленоиду с током. Следовательно, величина  $B$  характеризует собою магнитное поле в данной его точке. Ее называют *магнитной индукцией*.

Магнитную индукцию следует рассматривать как векторную величину. Направление вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$  мы совмещаем с указанным выше направлением  $N_0$ .

Во всех вышеописанных опытах вместо удаления пробного витка на большое расстояние от соленоида можно производить выключение тока в соленоиде — эффект получается тот же самый. Этого и следует ожидать, так как в первом случае виток удаляется за пределы магнитного поля, во втором — магнитное поле исчезает вместе с исчезновением тока в соленоиде.

В дальнейшем мы увидим, что магнитная индукция определяет собой также и механические силы, которые действуют в магнитном поле на проводники с электрическими токами и на движущиеся частицы и тела с электрическими зарядами. Поэтому мы должны рассматривать магнитную индукцию как основную характеристику магнитного поля.

#### § 45. Магнитный поток

*Поток вектора магнитной индукции* сквозь некоторую поверхность  $s$  (рис. 150) называют кратко *магнитным потоком* сквозь эту поверхность и обозначают через  $\Phi$ . Имеем:

$$\Phi = \int_s B \cos \beta ds = \int_s \mathbf{B} ds.$$

Магнитная индукция является *плотностью магнитного потока* в данной точке поля. Действительно, проведя поверхность нормально к вектору  $\mathbf{B}$ , будем иметь:

$$\cos \beta = 1; d\Phi = B ds; B = \frac{d\Phi}{ds}.$$

Единицей магнитного потока в системе единиц МКСА является *вебер* (1 вб). Соответственно, единицей магнитной индукции в этой системе является *вебер на квадратный метр* (1 вб/м<sup>2</sup>).

Если поверхность  $s$  столь мала, что в пределах ее магнитное поле можно считать однородным, то можно написать:

$$\Phi = \int_s B \cos \beta \, ds = B \cos \beta \, s.$$

Учитывая это, мы можем соотношение, которое характеризовало описанные в предыдущем параграфе опыты, написать в следующем виде:

$$q = \frac{B \cos \beta \, s}{r} = \frac{\Phi}{r}.$$

Таким образом, электрический заряд, который переносится в этих опытах сквозь поперечное сечение проволоки пробного витка, равен отношению магнитного потока  $\Phi$  сквозь поверхность  $s$ , охватываемую витком в его начальном положении, к электрическому сопротивлению  $r$  всей замкнутой цепи витка.

Магнитное поле в пространстве, окружающем контуры с токами, существует независимо от наших опытов с пробным витком. Эти опыты необходимы лишь для обнаружения магнитного поля и для измерения магнитного потока и магнитной индукции. Поэтому мы можем говорить о магнитном потоке сквозь поверхность, ограниченную некоторым воображаемым контуром, например контуром, изображенным на рис. 148 пунктиром. Ясно, что для измерения этого потока необходимо совместить с таким воображаемым контуром линейный проводящий контур и затем измерить электрический заряд  $q$ , переносимый сквозь поперечное сечение проводящего контура при удалении его за пределы магнитного поля. Значение потока определится при этом из соотношения  $\Phi = rq$ .

Магнитный поток по отношению к контуру мы считаем положительным, если при исчезновении потока положительный заряд переносится в положительном направлении контура.

В вышеописанных опытах пробный виток выносился за пределы поля, и проходящий сквозь ограниченную витком поверхность магнитный поток изменялся от начального значения  $\Phi$  до нуля. Если в этих опытах не выносить виток за пределы поля, а только перемещать его в поле из одного положения в другое, то при каждом таком перемещении, вообще говоря, обнаруживается отброс гальванометра. Пусть при перемещении витка из положения  $A$  в положение  $D$  в цепи гальванометра переносится заряд  $\Delta q$ . Если пере-

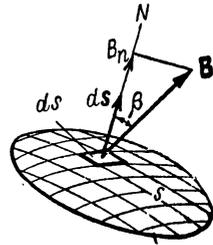


Рис. 150.

местить виток из положения  $A$  сначала в некоторое положение  $C$ , а затем переместить его из положения  $C$  в то же конечное положение  $D$ , то сумма зарядов, переносимых в цепи гальванометра при этих двух перемещениях, также оказывается равной  $\Delta q$ . Отсюда ясно, что в общем случае  $\Delta q$  определяется изменением  $\Delta\Phi$  потока, проходящего сквозь поверхность  $s$ , ограниченную контуром витка. В описанных выше опытах приращение потока равнялось по абсолютному значению величине потока в начальном положении витка только потому, что поток, пронизывающий виток, в конце опыта оказывался равным нулю. Однако и в этих опытах такое равенство имеет место только между абсолютными значениями

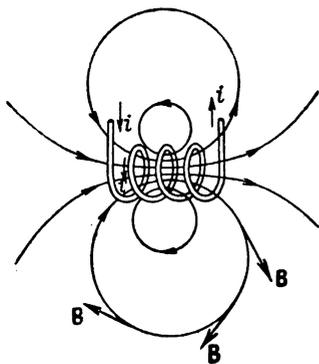


Рис. 151.

потока и его приращения. Так, если поток  $\Phi$  в начальном положении пробного витка был *положителен* по отношению к контуру витка, то ясно, что при уменьшении потока до нуля его приращение будет *отрицательным* и равным:  $\Delta\Phi = -\Phi$ . Так как согласно определению знака потока мы имеем  $\Phi > 0$  ( $\Delta\Phi < 0$ ) при  $q > 0$ , то в общем случае должно иметь место соотношение:

$$\Delta q = -\frac{\Delta\Phi}{r},$$

являющееся одной из основных формулировок закона электромагнитной индукции.

Обследуя при помощи пробного витка все пространство вокруг какого-либо контура с током (рис. 151), можно определить вектор  $\mathbf{B}$  во всех точках пространства и затем провести ряд линий таким образом, чтобы в каждой точке этих линий касательные к ним совпадали по направлению с вектором  $\mathbf{B}$ . Эти линии называют *линиями магнитной индукции*. Их снабжают стрелками, указывающими направление вектора  $\mathbf{B}$ .

Часть пространства, ограниченная трубчатой поверхностью, образованной совокупностью линий магнитной индукции, называется *трубкой магнитной индукции*. Можно себе представить все магнитное поле подразделенным на трубки магнитной индукции и условиться изображать каждую такую трубку одной линией магнитной индукции, совпадающей с осью трубки.

Трубки магнитной индукции, поток сквозь поперечное сечение которых равен единице, называют *единичными* трубками. Соответственно, линии магнитной индукции, изображающие единичные трубки, называют *единичными* линиями магнитной индукции.

### § 46. Принцип непрерывности магнитного потока

Принцип непрерывности магнитного потока имеет в теории электромагнитных явлений фундаментальное значение. Этот принцип гласит, что линии магнитной индукции нигде не имеют ни начала, ни конца — они всюду непрерывны.

Мы убеждаемся в справедливости этого важного принципа во всех без исключения случаях, когда магнитное поле существует в воздухе или вообще в такой среде, в которой поле может быть непосредственно обследовано опытным путем. Так, например, линии магнитной индукции около прямолинейного провода с током являются окружностями, имеющими центры на оси провода (рис. 152). Направление линий связано с направлением тока правилом правого винта. На рис. 152 изображено нормальное сечение провода, причем ток уходит от наблюдателя, что показано косым крестом, изображающим хвост стрелки. В том случае, когда ток направлен на наблюдателя, ставят условно точку, изображающую острие стрелки.

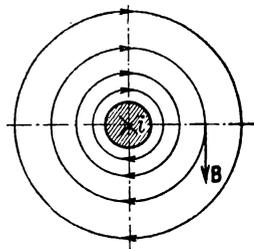


Рис. 152.

Как бы ни была сложна форма контура электрического тока, линии магнитной индукции, окружающие этот контур, всегда оказываются непрерывными. В виде примера можно указать поле соленоида с током, картина линий которого изображена на рис. 151.

Подлежит особому рассмотрению вопрос о непрерывности линий магнитной индукции в том случае, когда в магнитном поле расположены твердые тела, и мы лишены возможности непосредственно обследовать поле внутри этих тел. Так, например, поле постоянного магнита изучить непосредственно опытным путем возможно только в пространстве вне магнита. Поэтому необходимо установить на основе каких-либо дополнительных фактов или каких-либо соображений, продолжают ли линии магнитной индукции и внутри тела самого магнита. Действительно, существование поля вне магнита можно было бы объяснить наличием на поверхности полюсов магнита особых источников магнитного потока, называемых *магнитными массами*. Согласно такому представлению на северном полюсе магнита, где, нам кажется, начинаются линии магнитной индукции, должна быть расположена положительная магнитная масса, и на южном, где линии кончаются, — отрицательная магнитная масса. Такое представление о природе магнитных явлений и сложилось исторически до эпохи, началом которой явилось открытие магнитного поля электрических токов.

Если бы поле создавалось магнитными массами ( $m$ ), то поле внутри магнита должно было бы выглядеть так, как это изображено на рис. 153, — линии магнитной индукции внутри магнита, так же,

как и вне его, оказались бы направленными от северного полюса к южному.

В настоящее время намагниченность магнита, или вообще намагниченность тела, мы объясняем существованием элементарных токов внутри вещества тела, являющихся результатом движения электронов по орбитам в атомах, а также существованием магнитных моментов элементарных частиц. Хотя внутреннее строение эле-

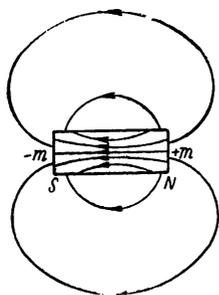


Рис. 153.

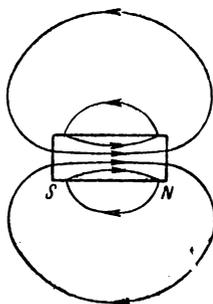


Рис. 154.

ментарных частиц и соответственно природа их магнитных моментов в настоящее время еще не изучены, но можно высказать предположение, что и магнитные моменты элементарных частиц являются результатом внутреннего движения в этих частицах, имеющего характер электрических токов. Об этом будет сказано в § 54, посвященном рассмотрению намагниченности вещества.

Исходя из этих представлений, мы приходим к заключению, что внутри магнита линии магнитной индукции должны идти так

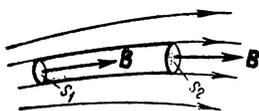


Рис. 155.

же, как в соленоиде (рис. 151), — они должны представлять собой продолженные линии, расположенных вне магнита. Такая правильная картина поля изображена на рис. 154.

Эти соображения приводят нас к заключению, что магнитных масс в действительности не существует. Такое заключение подтверждается опытом с ломанием магнита. На какие бы мелкие части мы не дробили магнит, никогда невозможно получить такие части магнита, на которых наблюдалось бы наличие избытка магнитной массы одного знака.

Все эти соображения остаются в силе по отношению к любому телу, через которое проходит магнитный поток.

Итак, магнитное поле всегда связано с электрическим током. Во всех без исключения случаях линии магнитной индукции непрерывны.

Математически принцип непрерывности магнитного потока формулируется следующим образом:

$$\oint_s \mathbf{B} \, ds = 0,$$

т. е. магнитный поток сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю.

Применяя уравнение  $\oint_s \mathbf{B} \, ds = 0$  к поверхности произвольного отрезка трубки магнитной индукции (рис. 155), нетрудно убедиться, что поток, входящий сквозь сечение  $s_1$  трубки, равен потоку, выходящему через сечение  $s_2$ . Следовательно, поток сквозь различные поперечные сечения трубки имеет одно и то же значение.

### § 47. Закон электромагнитной индукции

Явление электромагнитной индукции открыто в 1831 г. Фарадеем, который в итоге серии опытных исследований установил основной закон, характеризующий количественно это явление.

Закон электромагнитной индукции был сформулирован в § 45 в форме, несколько отличной от той, в которой он был дан Фарадеем. В § 45 было получено соотношение:

$$\Delta q = - \frac{\Delta \Phi}{r},$$

которое гласит: *электрический заряд  $\Delta q$ , переносимый в процессе электромагнитной индукции в течение некоторого промежутка времени сквозь поперечное сечение цепи, равен взятому с обратным знаком отношению приращения за тот же промежуток времени магнитного потока  $\Delta \Phi$  сквозь поверхность, ограниченную контуром цепи, к сопротивлению  $r$  цепи.*

Эту формулировку закона электромагнитной индукции следует рассматривать как основную. Как мы увидим, она отличается от формулировки, данной Фарадеем, только смыслом, который придается величине, стоящей в числителе правой части равенства.

Обратим внимание на то, что поток  $\Phi$  сквозь поверхность, ограниченную контуром цепи, в общем случае вызывается как внешними по отношению к рассматриваемой цепи токами и намагниченными телами, так и током в самой рассматриваемой цепи. Таким образом, в общем случае в выражении закона электромагнитной индукции  $\Delta \Phi$  есть приращение результирующего потока сквозь поверхность, ограниченную контуром цепи. В частности, при бесконечно малом изменении результирующего потока будем иметь:

$$dq = - \frac{d\Phi}{r},$$

причем  $dq = idt$  есть электрический заряд, переносимый через поперечное сечение цепи за промежуток времени  $dt$ , в течение которого поток изменяется на  $d\Phi$ . Имеем:

$$i dt = - \frac{d\Phi}{r},$$

или

$$ir = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

Произведение  $ir$  представляет собой падение напряжения вдоль всей замкнутой цепи. Согласно второму закону Кирхгофа, оно равно электродвижущей силе  $e$ , действующей в этой цепи. Следовательно, мы должны признать, что величина, стоящая в правой части последнего равенства, представляет собой электродвижущую силу, возникающую в цепи в процессе электромагнитной индукции.

Таким образом, имеем:

$$e = - \frac{d\Phi}{dt},$$

т. е. электродвижущая сила, индуцируемая в цепи при изменении магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную контуром цепи, равна скорости изменения потока, взятой со знаком «минус». Эта последняя формулировка закона электромагнитной индукции принадлежит Максвеллу.

Обе приведенные формулировки содержат изменение потока  $\Phi$  сквозь поверхность  $s$ , ограниченную контуром, в котором индуцируется э. д. с. Так как конечная незамкнутая поверхность ограничивается всегда замкнутым контуром, то только по отношению к замкнутым контурам, но отнюдь не к их отрезкам, применимы вышеприведенные формулировки.

Магнитный поток  $\Phi$  сквозь поверхность  $s$  равен числу  $N$  единичных трубок магнитной индукции (числу единичных линий магнитной индукции), охватываемых контуром, ограничивающим эту поверхность.

Нам известно, что линии магнитной индукции всюду непрерывны. Поэтому линия магнитной индукции может войти внутрь контура индуцированного тока или выйти из него, только перерезав где-либо этот контур. Таким образом, изменение  $\Delta\Phi$  потока, охватываемого контуром, должно равняться числу единичных линий магнитной индукции  $\Delta N$ , перерезанных контуром:

$$\Delta\Phi = \Delta N.$$

Закон электромагнитной индукции может быть представлен теперь в форме:

$$\Delta q = - \frac{\Delta N}{r},$$

т. е. *электрический заряд, перенесенный в течение некоторого промежутка времени через поперечное сечение цепи индуктированного тока, равен взятому со знаком «минус» отношению числа единичных линий магнитной индукции, перерезанных за это время контуром цепи, к сопротивлению цепи.*

В такой форме закон электромагнитной индукции и был дан Фарадеем. Фарадей представлял себе магнитный поток как совокупность трубок магнитной индукции, являющихся, по его представлениям, физическими элементами потока, и каждое явление, наблюдаемое в магнитном поле, рассматривал как проявление особых свойств таких трубок. В частности, явление электромагнитной индукции по этим представлениям возникает всегда вследствие пересечения контура индуктированного тока трубками магнитной индукции.

Равенство  $\Delta\Phi = \Delta N$  должно быть справедливо для любого изменения потока, происходящего в течение любого промежутка времени. Так, можно положить  $d\Phi = dN$  и представить выражение для индуктированной э. д. с. в виде:

$$e = - \frac{dN}{dt},$$

т. е. *электродвижущая сила, индуктируемая в контуре, равна скорости пересечения контура единичными линиями магнитной индукции, взятой с обратным знаком.*

Эту формулировку закона электромагнитной индукции, вытекающую из основной формулировки Фарадея, мы будем называть также фарадеевой формулировкой.

В применении к замкнутым контурам формулировки Максвелла и Фарадея тождественны, и для э. д. с., возникающей в замкнутом контуре, всегда можно написать:

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{dN}{dt}.$$

Однако, если максвеллово выражение для индуктированной э. д. с. по своему существу может быть применено только к замкнутым контурам, то фарадеево выражение для э. д. с., в котором все внимание обращается на акт пересечения контура единичными линиями магнитной индукции, может быть применено и к отрезкам контура. В этом отношении последнее выражение оказывается более универсальным.

Рассмотрим прямолинейный отрезок проводника длиной  $l$ , который движется со скоростью  $v$  в однородном магнитном поле (рис. 156). Предположим, что направление движения перпендикулярно к линиям магнитной индукции и к оси проводника и, кроме того, ось проводника перпендикулярна к линиям магнитной индукции. В течение промежутка времени  $dt$  отрезок проводника пере-

местится на расстояние, равное  $v dt$ , и опишет площадку, равную  $lv dt$ . Все линии магнитной индукции сквозь эту площадку будут пересечены отрезком проводника. Так как число единичных линий, проходящих сквозь единицу поверхности, нормальной к линиям магнитной индукции, равно величине магнитной индукции  $B$ , то число единичных линий магнитной индукции, пересеченных отрезком проводника в единицу времени, получается равным  $\frac{Blvdt}{dt} = Blv$ . Следовательно, для абсолютного значения э. д. с.  $e$ , индуктируе-

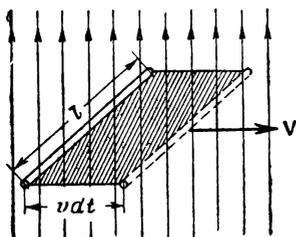


Рис. 156.

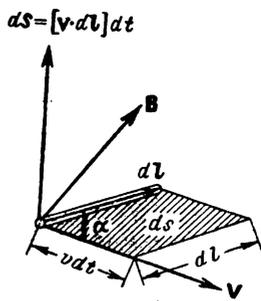


Рис. 157.

мой в отрезке проводника, согласно фарадеевой формулировке закона электромагнитной индукции, можем написать выражение:

$$e = Blv.$$

Направление э. д. с. можно определить, пользуясь правилом правой руки. Если большой, указательный и средний пальцы правой руки расположить взаимно перпендикулярно и так, чтобы большим пальцем был направлен в сторону движения, а указательный — в сторону поля, то средний палец будет указывать направление э. д. с. Это правило легко запоминается, если обратить внимание на то, что порядок пальцев на руке: большой, указательный, средний соответствует порядку по алфавиту начальных букв слов: движение, поле, э. д. с., или: движение, поле, ток.

Выражением для э. д. с. в последней форме обычно пользуются для вычисления э. д. с., индуктируемых в стержнях обмоток электрических машин. Ясно, что это выражение остается справедливым для мгновенного значения э. д. с. и в том случае, когда индукция изменяется в направлении движения проводника, лишь бы индукция была постоянной по длине проводника. При постоянной скорости движения проводника кривая, выражающая зависимость мгновенного значения э. д. с. от времени, подобна кривой, изображающей изменение индукции в пространстве в направлении движения проводника. Пользуясь этим обстоятельством, мы можем получить в обмотке якоря электрической машины э. д. с., имеющую

желательную для нас форму кривой, если при конструировании машины позаботимся о надлежащем распределении магнитного потока в воздушном зазоре машины.

В общем случае, когда проводник имеет произвольную форму и движется в неоднородном поле, можно написать выражение для бесконечно малой э. д. с.  $de$ , индуктируемой в отрезке  $dl$  проводника. Пусть  $d\mathbf{l}$  — вектор, направленный по оси проводника в сторону, условно считаемую положительной, и равный по величине длине отрезка. Пусть вектор скорости  $\mathbf{v}$  составляет угол  $\alpha$  с вектором  $d\mathbf{l}$  (рис. 157). Тогда поверхность, которую описывает отрезок  $dl$  за время  $dt$ , получается равной  $ds = v dt dl \sin\alpha$ . Изображая эту поверхность вектором  $ds$ , направленным нормально к ней, можем написать:

$$ds = [\mathbf{v} dt \cdot d\mathbf{l}] = [\mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}] dt,$$

где  $[\mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}]$  — векторное произведение векторов  $\mathbf{v}$  и  $d\mathbf{l}$ . Поток  $d\Phi = \mathbf{B} ds = \mathbf{B} [\mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}] dt$  сквозь эту площадку равен числу единичных линий магнитной индукции, перерезанных отрезком  $dl$  проводника за время  $dt$ . Следовательно, э. д. с., индуктируемая в отрезке  $dl$ , равна:

$$de = - \frac{d\Phi}{dt} = - \mathbf{B} [\mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}] = \mathbf{B} [d\mathbf{l} \cdot \mathbf{v}].$$

Если получается  $de > 0$ , то это значит, что э. д. с. действует в положительном направлении отрезка  $dl$ .

Нетрудно убедиться, что вышеприведенное правило правой руки непосредственно вытекает из последней формулы для частного случая, когда все векторы  $\mathbf{B}$ ,  $d\mathbf{l}$  и  $\mathbf{v}$  взаимно перпендикулярны.

В § 22 было отмечено, что сумма падений напряжений вдоль замкнутого контура электрической цепи равна линейному интегралу напряженности электрического поля вдоль этой цепи, т. е.

$$ir = \oint \mathbf{E} d\mathbf{l}.$$

С другой стороны, как только что было получено, в случае, когда сцепляющийся с электрической цепью магнитный поток изменяется во времени, имеет место равенство:

$$ir = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

Следовательно, можно написать:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

Максвелл обобщил это равенство на случай контура, расположенного в любой среде. Мы также считаем это равенство справед-

ливым для любого замкнутого контура, не обязательно образованного проводником. В общем случае этот контур может быть и воображаемым контуром, расположенным целиком в диэлектрике или частично в проводящей среде и частично в диэлектрике. Во всех без исключения случаях при изменении во времени магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную любым контуром, в последнем возникает э. д. с. В проводящей среде э. д. с. может вызвать токи проводимости, в диэлектрике переменная э. д. с. вызывает токи электрического смещения. Последнее равенство свидетельствует, что при изменении во времени магнитного поля появляется в том же пространстве связанное с ним электрическое поле, причем электрическое напряжение вдоль любого замкнутого контура равно э. д. с., индуцируемой в этом контуре.

*По сути дела оба эти поля — магнитное и электрическое — являются двумя сторонами единого электромагнитного поля.*

Понимаемое в таком широком смысле последнее уравнение является одним из основных уравнений электромагнитного поля.

#### § 48. Потокосцепление

Магнитный поток  $\Phi$  сквозь поверхность  $s$ , ограниченную каким-либо контуром, например контуром проводящей цепи, равен поверхностному интегралу вектора магнитной индукции, распространенного по поверхности  $s$ :

$$\Phi = \int_s \mathbf{B} ds.$$

Это выражение справедливо для любой поверхности, ограниченной сколь угодно сложным контуром. В общем случае такая поверхность может иметь весьма сложную форму. Так, на рис. 158 штриховкой показана поверхность, натянутая на контур, расположенный по винтовой линии и образующий катушку из трех витков. Отдельные линии магнитной индукции пронизывают эту поверхность несколько раз: линии 4, 5, 6, 7 и 8 — три раза, линия 3 — два раза.

Рассматривать такую сложную поверхность представляется затруднительным, и поэтому в тех случаях, когда витки катушки прилегают плотно друг к другу, обычно пользуются упрощенным представлением. Можно вообразить, что каждый виток катушки почти замкнут, как это показано на рис. 159. Тогда одну сложную поверхность  $s$  можно подразделить на несколько простых, именно на поверхности  $s_1, s_2, s_3$ , ограниченные отдельными витками катушки и поверхность  $s_0$ , ограниченную контуром источника э. д. с., подводными проводами и отрезками проводов, соединяющими отдельные витки катушки. При таком упрощении каждый виток становится вполне определенным, и оказывается возможным говорить о потоке, сцепляющемся с одним витком.

Принято через  $\Phi$  обозначать поток сквозь поверхность, ограниченную контуром одного витка. До сих пор, пользуясь этим обозначением потока, мы во всех случаях рассматривали только такие простые контуры.

В отличие от потока, сцепляющегося с одним витком, поток сквозь всю поверхность  $s = s_0 + s_1 + s_2 + s_3$ , ограниченную контуром всей электрической цепи, принято обозначать буквою  $\Psi$  и называть *потокоосцеплением*. Очевидно имеем:

$$\Psi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3,$$

где  $\Phi_0$  — поток, сцепляющийся с контуром подводящей цепи, а  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  — потоки, сцепляющиеся с отдельными витками катушки.

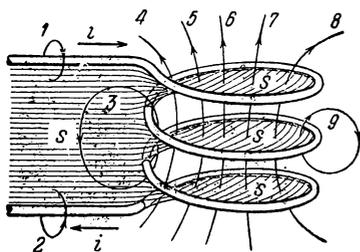


Рис. 158.

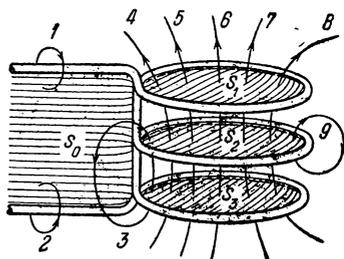


Рис. 159.

Термин *потокоосцепление* связан с тем обстоятельством, что отдельные линии магнитной индукции несколько раз сцепляются со всей цепью. Потокоосцепление можно найти, не прибегая к искусственному преобразованию действительного контура цепи (рис. 158) в эквивалентный контур, представленный на рис. 159. Величину  $\Psi$  всегда можно получить, умножая поток каждой единичной линии магнитной индукции на число витков цепи, с которыми она сцепляется, и складывая полученные числа. Сложение следует производить алгебраически, причем положительными следует считать линии магнитной индукции, направление которых связано с положительным направлением тока в контуре электрической цепи правилом правого винта.

Ясно, что э. д. с., индуцируемая во всей цепи, определяется потокоосцеплением  $\Psi$ . Действительно, при уменьшении потока до нуля каждая линия магнитной индукции столько раз пересечет контур тока, сколько раз она с ним сцепляется. Поэтому должно иметь место равенство:

$$e = - \frac{dN}{dt} = - \frac{d\Psi}{dt}.$$

Потоки  $\Phi_1, \Phi_2$  и т. д., сцепляющиеся с отдельными витками катушки, вообще говоря, различны. Поэтому различны и э. д. с.,

индуктируемые в отдельных витках. В ряде случаев приближенно можно считать, что все линии магнитной индукции сцепляются со всеми  $w$  витками катушки. Тогда потокосцепление катушки связывается с потоком в одном витке простым соотношением:  $\Psi = w\Phi$ , причем сюда не включается поток  $\Phi_0$ , сцепляющийся с подводящей ток цепью. В таком случае э. д. с., индуктируемая в катушке, равна:

$$e = - \frac{d\Psi}{dt} = - w \frac{d\Phi}{dt}.$$

Таким упрощенным расчетом обычно можно пользоваться при вычислении э. д. с., индуктируемых в катушках с замкнутыми сердечниками из ферромагнитных материалов.

#### § 49. Электродвижущие силы самоиндукции и взаимной индукции

В простейшем случае одного контура с электрическим током магнитный поток, сцепляющийся с этим контуром, определяется током  $i$ , протекающим в этом же контуре. Такой поток называют *потоком самоиндукции*. *Потокосцепление самоиндукции* некоторого электрического контура или, что то же, некоторой неразветвленной электрической цепи обозначают  $\Psi_L$ . Мы можем представить его в виде:

$$\Psi_L = Li.$$

Величину  $L$  называют *собственной индуктивностью* или просто *индуктивностью* контура. Индуктивность зависит от размеров и формы контура, а также от магнитных свойств среды, в которой существует магнитное поле.

При изменении потока самоиндукции в контуре возникает *электродвижущая сила самоиндукции*. Изменение потока  $\Psi_L$  может происходить как вследствие изменения тока, так и вследствие изменения его индуктивности. Поэтому в общем случае э. д. с. самоиндукции  $e_L$  может быть представлена в виде суммы двух членов:

$$e_L = - \frac{d\Psi_L}{dt} = - \frac{d(Li)}{dt} = - L \frac{di}{dt} - i \frac{dL}{dt}.$$

При  $L = \text{const}$  имеем:

$$e_L = - L \frac{di}{dt}.$$

В случае двух или нескольких контуров с токами магнитный поток, сцепляющийся с одним из этих контуров, вообще говоря, определяется токами во всех контурах. Рассмотрим два контура и предположим, что ток протекает только в первом из них (рис. 160). Может оказаться, что часть линий магнитной индукции потока самоиндукции первого контура сцепляется также и со вторым контуром. При этом поток, сцепляющийся со вторым контуром и оп-

ределяемый током в первом контуре, называют *поток взаимной индукции*. Потокосцепление взаимной индукции со вторым контуром мы будем обозначать  $\Psi_{2M}$  или  $\Psi_{21}$ . Первый индекс всегда будет указывать, с какой цепью рассматривается сцепление потока. Второй индекс ( $M$  или  $1$ ) указывает, что поток определяется током, протекающим в другой, в данном случае первой, цепи. Можно написать:

$$\Psi_{2M} = M_{21} i_1.$$

Величину  $M_{21}$  называют *взаимной индуктивностью* контуров. Она зависит от размеров и формы контуров, от их взаимного расположения и от магнитных свойств среды.

При изменении потока взаимной индукции, сцепляющегося со вторым контуром, в этом контуре возникает *электродвижущая сила взаимной индукции*. Поток  $\Psi_{2M}$  может изменяться либо вследствие изменения тока  $i_1$ , либо вследствие изменения взаимной индуктивности  $M_{21}$ . Соответственно, э. д. с. взаимной индукции, возникающая во втором контуре, может быть представлена в виде:

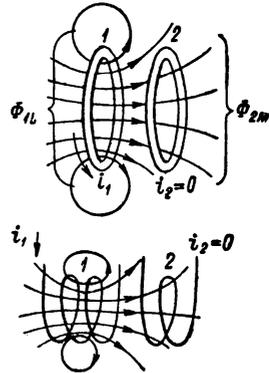


Рис. 160.

$$e_{2M} = - \frac{d\Psi_{2M}}{dt} = - \frac{d(M_{21}i_1)}{dt} = -M_{21} \frac{di_1}{dt} - i_1 \frac{dM_{21}}{dt}.$$

Если  $M_{21} = \text{const}$ , то  $e_{2M} = -M_{21} \frac{di_1}{dt}$ .

### § 50. Невозможность построения бесколлекторной машины постоянного тока, основанной на явлении электромагнитной индукции

Электрические машины постоянного тока, основанные на явлении электромагнитной индукции, для получения постоянного напряжения на их зажимах снабжают коллектором. В обмотке якоря машины индуцируется переменная э. д. с., имеющая среднее за период значение, равное нулю. Для выпрямления этой э. д. с. и служит коллектор. Коллектор удорожает машину и требует постоянного ухода во время работы машины. Наличие коллектора ограничивает предельное напряжение и мощность, на которые может быть осуществлена отдельная машина, так как при больших напряжениях и при большой мощности трудно становится бороться с искрением на коллекторе. Понятно, что мысль изобретателей неоднократно обращалась к попыткам создания бесколлекторных электрических машин постоянного тока, в которых полностью отсутствовали бы какие бы то ни было скользящие контакты в главной цепи индуцированного тока. В таком виде удастся осуществить генераторы переменного тока, в которых обмотку индуцированного тока располагают на неподвижной части машины, называемой статором, и выводы этой обмотки присоединяют непосредственно без каких-либо скользящих кон-

тактов к зажимам внешней цепи. На вращающейся части машины, называемой ротором, располагают обмотку возбуждения, питаемую постоянным током, который подводит через щетки, трущиеся о вращающиеся кольца, закрепленные на валу ротора. Наличие этих скользящих контактов во вспомогательной цепи возбуждения не создает осложнений при конструировании машины, так как мощность в цепи возбуждения мала по сравнению с мощностью в цепи обмотки статора. Отсутствие скользящих контактов в главной цепи машины переменного тока позволяет осуществлять эти машины весьма большой мощности, 300 тысяч и более киловатт, при напряжении более десяти тысяч вольт.

Представляется весьма заманчивым осуществить и машину постоянного тока, не имеющую скользящих контактов в главной цепи, т. е. не имеющую обычного коллектора. Если бы такая возможность существовала, то она имела бы исключительное значение для решения проблемы передачи энергии больших мощностей на большие расстояния постоянным током высокого напряжения.

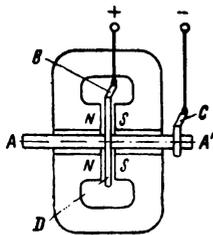


Рис. 161.

Однако все имевшие место попытки создать бесколлекторные машины постоянного тока были обречены на неудачу. Покажем, что осуществить такую машину, используя явление электромагнитной индукции, принципиально невозможно.

Контур цепи индуктированного тока такой машины должен быть электрически неизменяемым контуром, т. е. в нем не должно производиться никаких изменений, нарушающих его непрерывность, — в этом основная цель, которая преследуется при попытках создания бесколлекторной машины.

Электрически неизменяемый контур нигде и никогда не претерпевает разрыва, и ни одна его часть никогда не замыкается накоротко, т. е. две различные точки контура никогда не соединяются электрически между собой. Для такого контура всегда применима формулировка закона электромагнитной индукции в виде:  $e = - \frac{d\Psi}{dt}$ . Машина постоянного тока должна развивать

на своих зажимах постоянную э. д. с. или, во всяком случае, эта э. д. с. должна иметь постоянную составляющую. Итак, требуется, чтобы было соблюдено условие:  $e = e_0 + e_{\sim}$ , где  $e_0 = \text{const}$ , а  $e_{\sim}$  — переменная периодическая составляющая э. д. с., среднее значение которой за период равно нулю.

Имеем:  $-\frac{d\Psi}{dt} = e_0 + e_{\sim}$ . Интегрируя это уравнение, находим:

$$\Psi = -e_0 t - \int e_{\sim} dt + \text{const.}$$

Отсюда с очевидностью следует, что для соблюдения условия  $e_0 \neq 0$  магнитный поток, охватываемый контуром обмотки, наложенной на статор, по абсолютному значению должен беспредельно возрастать. Совершенно ясно, что осуществить возрастание потока с конечной скоростью в течение сколь угодно длительного промежутка времени не представляется возможным. Поэтому нельзя построить электрическую машину без коллектора, действие которой основано на явлении электромагнитной индукции и которая дает постоянную э. д. с. в течение сколь угодно длительного промежутка времени.

Необходимо сделать оговорку, что так называемые униполярные машины нельзя рассматривать как бесколлекторные. На рис. 161 изображена принципиальная схема униполярной машины. Между круглыми полюсами магнита или электромагнита вращается закрепленный на валу проводящий диск. Радиусы диска пересекают линии магнитной индукции, и, следовательно, в диске индуктируется э. д. с., направленная вдоль радиусов.

Между валом и наружным краем диска возникает напряжение, которое может быть передано зажимам машины при помощи щеток  $B$  и  $C$ , трущихся о край диска и о кольцо, насаженное на валу. При постоянной скорости вращения машины и напряжение на ее зажимах получается постоянным. Здесь мы имеем коллекторную машину с бесконечно большим числом коллекторных пластин, так как при вращении машины под щетку подходят все новые и новые радиальные элементы диска.

С помощью униполярных машин не решается задача, для решения которой имели место неудачные попытки создания бесколлекторной машины постоянного тока. В униполярной машине главная цепь имеет только один виток и, следовательно, в ней невозможно получить сколь-нибудь значительной э. д. с.

Итак, для получения постоянного напряжения на зажимах электрической машины, в которой используется явление электромагнитной индукции, необходимо снабдить эту машину коллектором, с помощью которого осуществляется переключение секций обмотки машины.

Есть еще один путь получения постоянного тока, который непосредственно можно усмотреть из выражения закона электромагнитной индукции в форме:  $\Delta q = -\frac{\Delta\Phi}{r}$ . Если в цепь, состоящую из генератора переменного

тока и приемника, включить последовательно устройство, сопротивление которого изменяется периодически синхронно, т. е. в такт с изменением потока в машине, то можно получить в цепи ток, имеющий постоянную составляющую. Пусть, например, в интервале времени, когда поток увеличивается ( $\Delta\Phi > 0$ ),  $r$  велико и, соответственно, величина  $\Delta q$ , являясь отрицательной, мала по абсолютному значению, а в интервале времени, когда поток уменьшается ( $\Delta\Phi < 0$ ),  $r$  мало и, соответственно, величина  $\Delta q$ , являясь положительной, оказывается значительной. Следовательно, при отсутствии постоянной составляющей в индуктированной потоком э. д. с. ток в цепи и напряжение на приемнике будут содержать постоянные составляющие. Именно таким путем осуществляются выпрямители переменного тока с различного рода вентилями (кенотронами, газотронами, полупроводниковыми вентилями и т. д.), обладающими различными сопротивлениями при различных направлениях тока в них. Характеристики таких вентилях были рассмотрены в §§ 34, 35 — о нелинейных элементах, процессы же в выпрямительных устройствах будут исследованы при рассмотрении нелинейных цепей переменного тока (ч. II).

### § 51. Электромагнитная инерция. Принцип Ленца

Знак «минус» в выражении для индуктированной э. д. с. свидетельствует о том, что эта э. д. с. стремится вызвать токи, направленные таким образом, чтобы воспрепятствовать изменению магнитного потока. Это положение выражает собой сформулированный Ленцем принцип электромагнитной инерции. В самом деле, предположим, что поток, сцепляющийся с контуром, убывает, т. е.  $d\Psi < 0$ . В таком случае имеем:  $e = -\frac{d\Psi}{dt} > 0$  и, следовательно, возникающая в контуре э. д. с. стремится вызвать ток в положительном направлении и тем самым воспрепятствовать убыванию потока. Наоборот, если поток возрастает, то  $d\Psi > 0$  и  $e < 0$ . В этом случае э. д. с. в контуре стремится вызвать ток в отрицательном направлении и этим воспрепятствовать увеличению потока. Мы видим, что индуктированные э. д. с. имеют характер сил инерции.

На основании сказанного мы можем сформулировать принцип электромагнитной инерции в отношении электромагнитных процессов, совершающихся в системе контуров с электрическими токами. Именно: *в системе контуров с электрическими токами существует тенденция к сохранению неизменными магнитных потоков, сцепляющихся с отдельными контурами системы. При всякой попытке изменить потоки, сцепляющиеся с контурами, в контурах возникают электродвижущие силы, стремящиеся воспрепятствовать этому изменению.* В простейшем случае одного контура с током возникает э. д. с. самоиндукции, равная:

$$e = - \frac{d(Li)}{dt} = - L \frac{di}{dt}.$$

В простейшем случае, который рассматривается в динамике, именно в случае движения свободной материальной точки, принцип инерции заключается в том, что свободной материальной точке свойственно сохранять свое количество движения. Если под действием внешних сил изменяется количество движения точки, то, вводя в рассмотрение силы инерции, равные и противоположные внешним силам, мы можем рассматривать эти силы инерции как препятствующие изменению количества движения. Если направление силы совпадает с направлением скорости  $v$ , то сила инерции имеет выражение:

$$f = - \frac{d(mv)}{dt} = - m \frac{dv}{dt},$$

где  $m$  — масса материальной точки.

Мы видим, что магнитный поток можно рассматривать как количество движения в электромагнитном процессе, индуктивность контура — как коэффициент электромагнитной инерции, ток — как электрическую скорость. Электрической координатой системы при этом является электрический заряд  $q$ , перенесенный через поперечное сечение контура от некоторого начального момента времени, так как  $i = \frac{dq}{dt}$ .

Силы инерции наиболее полно проявляются в системе, не имеющей трения. Соответственно и электромагнитная инерция вывлетается наиболее полно в контурах, электрическое сопротивление которых равно нулю. Таковую сверхпроводящую цепь можно осуществить на опыте. Явление сверхпроводимости заключается в том, что некоторые металлы, например свинец, олово, ртуть, при весьма низких температурах (порядка нескольких градусов Кельвина) имеют удельное сопротивление, практически равное нулю. Удельное сопротивление этих металлов убывает при понижении температуры сначала по плавной кривой (рис. 162), но при некоторой температуре, свойственной данному металлу, внезапно падает до чрезвычайно малой величины и при дальнейшем понижении температуры остается ни-

чтожно малым, практически равным нулю. На рис. 162 по оси ординат отложено отношение удельного сопротивления указанных выше металлов при данной температуре  $T$  к их удельному сопротивлению при температуре  $273^\circ \text{K}$ .

Предположим, что свинцовое кольцо внесено во внешнее магнитное поле (рис. 163, *a*) и затем заморожено, т. е. сделано сверхпроводящим. Пусть при этом с кольцом сцепляется внешний поток  $\Psi_M = \Psi_0$ . Будем теперь выносить кольцо из внешнего поля. В кольце возникает внешняя э. д. с.  $e_M = -\frac{d\Psi_M}{dt}$ , под действием которой

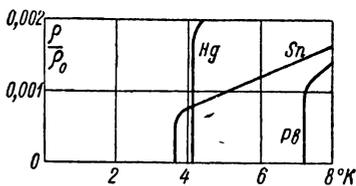


Рис. 162.

в контуре кольца появляется ток  $i$  и образуется поток самоиндукции  $\Psi_L$ . Сумма внешней э. д. с. и э. д. с. самоиндукции должна быть равна падению напряжения  $ir$  в контуре. Так как  $r = 0$ , то получаем:

$$-\frac{d\Psi_M}{dt} - \frac{d\Psi_L}{dt} = 0,$$

откуда следует, что

$$\Psi_M + \Psi_L = \text{const.}$$

В начальном положении контура  $\Psi_M = \Psi_0$  и  $\Psi_L = 0$  (рис. 163, *a*). Следовательно,  $\Psi_M + \Psi_L = \Psi_0$ . Когда контур будет вынесен за пределы внешнего поля (рис. 163, *б*), будем иметь:  $\Psi_M = 0$  и  $\Psi_L = Li = \Psi_0$ .

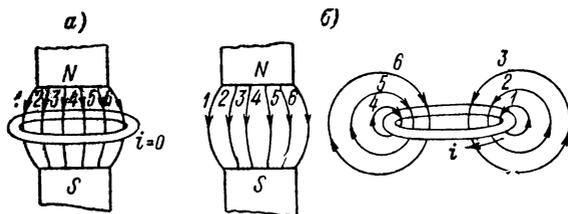


Рис. 163.

Мы видим, что при  $r = 0$  электромагнитная инерция проявляется в полной мере — результирующее потокоцепление остается постоянным и лишь совершается преобразование внешнего потока в поток самоиндукции.

## § 52. Электродвижущая сила, напряжение, разность потенциалов

Вернемся к основным определениям терминов: «электродвижущая сила», «электрическое напряжение» и «разность электрических потенциалов», чтобы ясно себе представить, в каких случаях можно пользоваться тем или иным из этих терминов.

Э. д. с., действующая вдоль некоторого пути, равна линейному интегралу вдоль этого пути напряженности стороннего электрического поля, а также электрического поля, индуктированного изменяющимся магнитным полем. Появление э. д. с. может быть обусловлено различными причинами. Если в электрической цепи содержатся участки с электролитической проводимостью, то э. д. с. может возникать вследствие электрохимических процессов. В месте контакта двух проводников из различных металлов возникает контактная э. д. с. При изменении магнитного потока в контурах, расположенных в любой среде, возникают э. д. с. индукции.

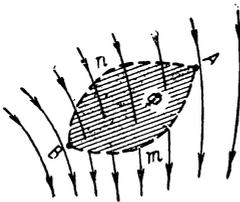


Рис. 164.

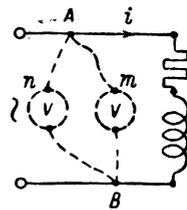


Рис. 165.

Понятие «электрическое напряжение» или «падение напряжения» связано с результирующим электрическим полем. *Электрическое напряжение вдоль некоторого пути от точки A до точки B равно линейному интегралу напряженности результирующего электрического поля (электростатического, стационарного, стороннего, индуктированного) вдоль этого пути.*

Необходимо подчеркнуть, что напряжение между двумя точками A и B (рис. 164) при переменном магнитном поле зависит от выбора пути, по которому мы составляем линейный интеграл напряженности электрического поля от точки A к точке B. Действительно, для замкнутого контура  $AmBnA$  в переменном магнитном поле имеем:

$$\oint_{AmBnA} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_{AmB} \mathbf{E} d\mathbf{l} + \int_{BnA} \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

где  $\Phi$  — магнитный поток сквозь поверхность, ограниченную этим контуром. Следовательно,

$$\int_{AmB} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_{AnB} \mathbf{E} d\mathbf{l} - \frac{d\Phi}{dt}.$$

В виде примера рассмотрим цепь переменного тока (рис. 165). Магнитное поле, окружающее проводники такой цепи, изменяется во времени. Поэтому в контурах, которые мы можем себе представить мысленно в диэлектрике, индуктируются электродвижущие силы. Вследствие этого напряжение между точками A и B цепи *зависит от выбора пути* от точки A к точке B. И действительно, показание

вольтметра в этом случае в принципе зависит от положения вольтметра и соединительных проводников по отношению к контуру цепи. Отсюда ясно, что по отношению к цепям переменного тока, если поступать строго, нельзя говорить о напряжении между двумя точками цепи или о напряжении на зажимах цепи, не делая оговорок, вдоль какого пути определяется напряжение. Однако мы часто пользуемся выражением «напряжение на зажимах цепи переменного тока» без всяких оговорок, так как указанная неопределенность в обычных цепях при низких частотах и не слишком больших токах практически незначительна, если, конечно, не выбирать путей интегрирования в местах, где переменные магнитные поля особенно сильны. Эта неопределенность становится практически ощутимой при очень высоких частотах и при весьма больших токах в цепи. В таких случаях возможно говорить только о напряжении между двумя точками цепи вдоль определенного заданного пути.

Как ранее было показано, линейный интеграл напряженности электрического поля совершенно не зависит от выбора пути между точками  $A$  и  $B$  в электростатическом поле и электрическом поле постоянных токов, протекающих в неподвижных проводниках, если путь интегрирования не проходит через источники э. д. с. В таких полях э. д. с. в любом замкнутом контуре, не проходящем через источники э. д. с., равна нулю. Такие поля могут быть полностью охарактеризованы скалярным электрическим потенциалом, т. е. являются потенциальными полями. По отношению к ним применим термин «разность потенциалов в точках  $A$  и  $B$ ».

Таким образом, понятие «разность потенциалов», применимое только к потенциальным полям, имеет более узкий смысл, чем понятие «напряжение», применимое к любым электрическим полям.

*Разность электрических потенциалов двух точек равна линейному интегралу напряженности потенциального (электростатического и стационарного) электрического поля от одной данной точки до другой.*

В случае потенциального поля понятия «напряжение между точками  $A$  и  $B$ » и «разность потенциалов в точках  $A$  и  $B$ » по существу совпадают.

Рассмотрим несколько подробнее только что высказанные общие положения на конкретных примерах. Вернемся сначала к примеру цепи, изображенной на рис. 165.

Если бы ток в этой цепи был постоянным, то электрическое поле было бы стационарным и потенциальным, т. е. при этом можно было бы написать:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{стац}} \quad \text{или} \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{пот}}$$

Это электрическое поле связано с зарядами на поверхности проводов и в данном случае является результатом наличия падения напряжения в сопротивлении цепи.

Электрическое напряжение между точками  $A$  и  $B$  в этом случае,

как только что было отмечено, не зависит от выбора пути, и напряжение вдоль любого замкнутого контура равно нулю:  $\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$ . Последнее согласуется с тем, что э. д. с. в любом заданном контуре  $e = -\frac{d\Phi}{dt}$  в таком поле равна нулю, так как  $\Phi = \text{const}$ .

Если ток в проводах цепи станет изменяться во времени, то физически это поведет к изменению электромагнитного поля около проводов. В этом переменном поле напряжение между точками  $A$  и  $B$  в каждый момент времени зависит от выбора пути между точками  $A$  и  $B$ . При этом формально можно результирующее электрическое поле рассматривать как наложение двух полей — стационарного (*потенциального*) электрического поля, так же как при постоянном токе связанного с зарядами на поверхности проводов, и индуктированного (так называемого *вихревого*) электрического поля, вызванного изменяющимся магнитным полем, и соответственно иметь:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{стац}} + \mathbf{E}_{\text{инд}} \quad \text{или} \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{пот}} + \mathbf{E}_{\text{вихр}}.$$

Для стационарного (потенциального) поля для любого замкнутого контура имеем:

$$\oint \mathbf{E}_{\text{стац}} d\mathbf{l} = 0.$$

Для индуктированного (вихревого) поля, соответственно, имеем:

$$\oint \mathbf{E}_{\text{инд}} d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \neq 0$$

и для результирующего поля получаем:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = \oint (\mathbf{E}_{\text{стац}} + \mathbf{E}_{\text{инд}}) d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \neq 0.$$

При принятом определении понятия «электродвижущая сила» только величина  $\oint \mathbf{E}_{\text{инд}} d\mathbf{l}$  рассматривается как электродвижущая сила. Ее можно представить как сумму э. д. с. на отдельных участках контура, например (рис. 165) в виде:

$$\oint_{A \rightarrow B \rightarrow A} \mathbf{E}_{\text{инд}} d\mathbf{l} = \int_{A \rightarrow B} \mathbf{E}_{\text{инд}} d\mathbf{l} + \int_{B \rightarrow A} \mathbf{E}_{\text{инд}} d\mathbf{l}.$$

Пользуясь принятыми определениями понятий «напряжение» и «электродвижущая сила», имеем для замкнутого контура:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = \oint \mathbf{E}_{\text{инд}} d\mathbf{l}, \quad (*)$$

т. е. напряжение вдоль замкнутого контура равно э. д. с., индуктируемой в этом контуре. Это получается всегда, так как  $\oint \mathbf{E}_{\text{стац}} d\mathbf{l} = 0$ . Для отдельных же участков контура напряжение

и э. д. с. на участке не равны друг другу, например:

$$u_{AmB} = \int_{AmB} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_{AmB} \mathbf{E}_{стат} d\mathbf{l} + \int_{AmB} \mathbf{E}_{инд} d\mathbf{l} \neq \int_{AmB} \mathbf{E}_{инд} d\mathbf{l},$$

так как

$$\int_{AmB} \mathbf{E}_{стат} d\mathbf{l} \neq 0.$$

Равенство (\*) имеет тот же смысл, что и второй закон Кирхгофа, но оно применено в данном случае к мысленному контуру, расположенному в диэлектрике.

В качестве другого примера рассмотрим контур неразветвленной электрической цепи (рис. 166), содержащей индуктивные катушки, конденсаторы, генераторы и различные источники э. д. с.—аккумуляторы, термоэлементы и т. д., а также соединительные проводники.

Пусть  $\Psi$  — потокосцепление со всей цепью, включающее в себя магнитные потоки, сцепляющиеся со всеми отдельными элементами цепи, в том числе и с обмотками генераторов.

Возьмем замкнутый контур интегрирования вдоль соединительных проводов, вдоль проводов, образующих индуктивные катушки и обмотки генераторов, внутри источников э. д. с. и внутри конденсаторов между их обкладками.

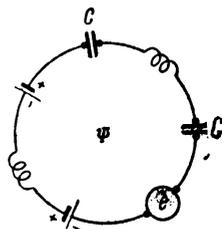


Рис. 166.

Величина  $\oint \mathbf{E} d\mathbf{l}$ , отвечающая левой части равенства, при этом будет представлять собой сумму падений напряжений на всех участках контура — падений напряжений  $i r$  в сопротивлениях всех проводов и во внутренних сопротивлениях источников э. д. с. и напряжений  $u_c$  между обкладками всех конденсаторов.

Эта величина будет равна сумме всех этих э. д. с., действующих в контуре, в которую войдут сумма э. д. с.

$$\sum e_{инд\ k} = \oint \mathbf{E}_{инд} d\mathbf{l} = - \frac{d\Psi}{dt},$$

индуцируемых изменяющимся потокосцеплением  $\Psi$  в катушках, генераторах и соединительных проводах, и сумма э. д. с.

$$\sum e_{стоп\ k} = \oint \mathbf{E}_{стоп} d\mathbf{l}$$

всех других источников энергии, в которых э. д. с. определяется сторонним электрическим полем.

Таким образом, вместо уравнения (\*) теперь будем иметь:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = \oint \mathbf{E}_{инд} d\mathbf{l} + \oint \mathbf{E}_{стоп} d\mathbf{l}$$

или

$$\sum ir_k + \sum u_{Ck} = \sum e_{\text{инд } k} + \sum e_{\text{стор } k}.$$

Это уравнение следует рассматривать как обобщение второго закона Кирхгофа на случай рассмотренной цепи, справедливое как для постоянного, так и для переменного тока. В частности, при постоянном токе  $\sum e_{\text{инд } k} = 0$ . В рассматриваемой цепи постоянный ток равен нулю, так как он не может проходить через конденсаторы. Следовательно, имеем:

$$\sum u_{Ck} = \sum e_{\text{стор } k}.$$

Если же замкнуть конденсаторы накоротко, то

$$\sum u_{Ck} = 0 \quad \text{и} \quad \sum ir_k = \sum e_{\text{стор } k},$$

что соответствует закону Кирхгофа, приведенному выше для цепей постоянного тока.

---

## ГЛАВА ВОСЬМАЯ

### НАПРЯЖЕННОСТЬ МАГНИТНОГО ПОЛЯ И ЗАКОН ПОЛНОГО ТОКА

#### § 53. Связь магнитного поля с электрическим током

Магнитное поле во всех без исключения случаях связано с электрическим током. Электрический ток и его магнитное поле всегда существуют одновременно и, по сути дела, являются лишь разными характеристиками единого физического процесса. В настоящем параграфе мы поставим перед собой задачу установить связь между ними.

Рассмотрим произвольной формы проводящий контур, по которому протекает электрический ток  $i$  (рис. 167). Вокруг него существует магнитное поле. Предположим, что контур находится в пустоте.

Составим линейный интеграл магнитной индукции вдоль некоторого замкнутого контура, охватывающего контур с током и изображенного на рисунке пунктиром. Назовем этот контур контуром интегрирования. Опыт показывает, что независимо от формы контура интегрирования интеграл магнитной индукции вдоль него пропорционален току, охватываемому этим контуром, т. е. имеет место равенство:

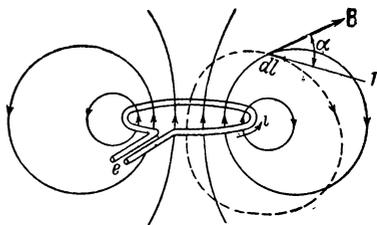


Рис. 167.

$$\oint B \cos \alpha \, dl = \oint \mathbf{B} \, dl = \mu_0 i.$$

Величину  $\mu_0$  мы назовем *магнитной постоянной*. Она имеет физическую размерность, связанную с размерностью электрической постоянной  $\epsilon_0$ . Действительно, левая часть равенства имеет следующую размерность

$$[Bl] = \left[ \frac{\Phi}{l} \right] = \left[ \frac{ut}{l} \right] = [Et] = \left[ \frac{qt}{\epsilon_0 l^2} \right].$$

Учитывая размерность электрического тока  $[i] = \left[ \frac{q}{t} \right]$ , получаем размерность магнитной постоянной  $\mu_0$ .

$$[\mu_0] = \left[ \frac{t^2}{\varepsilon_0 i^2} \right] = \left[ \frac{1}{\varepsilon_0 v^2} \right].$$

Следовательно, размерность  $\mu_0$  равна размерности величины, обратной произведению электрической постоянной  $\varepsilon_0$  на квадрат скорости. Числовое значение величины  $\mu_0$  зависит от выбора системы единиц измерения.

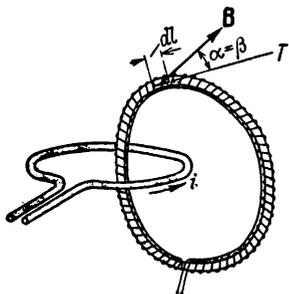


Рис. 168.

Единицей магнитной постоянной в системе единиц МКСА является *генри на метр* (1 *гн/м*). Действительно, из приведенной связи между интегралом магнитной индукции по замкнутому контуру и током  $i$  видно, что единицей  $\mu_0$  в системе единиц МКСА является  $1 \frac{\text{вб}}{\text{м}^2} \cdot \frac{\text{м}}{a} = 1 \frac{\text{вб}}{a \cdot \text{м}}$ . Но 1 *вб/а*, как мы

увидим дальше, есть единица индуктивности 1 *генри*. В этой системе единиц при рациональной форме уравнений магнитная постоянная имеет значение (см. приложение)

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \approx 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ гн/м.}$$

Справедливость равенства

$$\oint \mathbf{B} \, dl = \mu_0 i$$

может быть проверена следующим опытом.

Возьмем тонкую гибкую ленту из изолирующего материала. Обовьем эту ленту равномерно по всей ее длине тонкой проволокой (рис. 168). Пусть  $\omega_1$  — число витков обмотки на единицу длины ленты,  $s$  — сечение ленты, нормальное к ее оси, и  $dl$  — элемент длины ленты. Магнитный поток сквозь сечение ленты равен:  $\Phi = \int \mathbf{B} \, ds$ . Ввиду малости сечения ленты можно считать в пределах

каждого сечения в отдельности поле однородным, т. е. при вычислении потока считать индукцию постоянной. Следовательно,  $\Phi = B \cos \beta s$ , где  $\beta$  — угол между нормалью к сечению  $s$  и направлением вектора  $\mathbf{B}$ . Но нормаль к сечению совпадает по направлению с  $dl$ . Следовательно, угол  $\beta$  равен углу  $\alpha$  между направлением вектора  $\mathbf{B}$  и касательной  $T$  к оси ленты. Итак, поток, пронизывающий один виток обмотки, равен:

$$\Phi = B \cos \alpha s.$$

Потокосцепление с витками на отрезке  $dl$  ленты имеет значение:

$$d\Psi = \Phi \omega_1 dl = B \cos \alpha s \omega_1 dl.$$

Потокосцепление со всеми витками обмотки ленты на всей ее длине равно:

$$\Psi = s \omega_1 \oint B \cos \alpha dl.$$

Таким образом, измеряя потокосцепление  $\Psi$  и зная величины  $s$  и  $\omega_1$ , мы получаем возможность измерить интеграл  $\oint B \cos \alpha dl$  вдоль оси ленты. Описанную ленту для краткости мы будем называть *магнитным поясом*. Потокосцепление  $\Psi$  при постоянном токе  $i$  можно измерить с помощью баллистического гальванометра, выключая ток или размыкая ленту и быстро удаляя ее за пределы поля. При переменном токе амплитуду потока можно определить, измеряя амплитуду э. д. с., индуцируемой в обмотке ленты.

Производя опыты с магнитным поясом, мы убеждаемся, что интеграл  $\oint \mathbf{B} dl$  по замкнутому контуру, охватывающему контур с током  $i$ , не зависит от формы контура интегрирования и пропорционален току  $i$ . Заметим при этом, что, если положительное направление обхода контура интегрирования связано с положительным направлением тока  $i$  правилом правого винта, то  $\oint \mathbf{B} dl$  и  $i$  получаются одного знака. Если контур интегрирования не охватывает тока, то интеграл  $\oint \mathbf{B} dl$  вдоль него равен нулю, независимо от формы контура интегрирования.

Соотношение  $\oint \mathbf{B} dl = \mu_0 i$  выражает неразрывную связь магнитного поля и тока. Действительно, если совместить в магнитном поле контур интегрирования с любой линией магнитной индукции, которые всегда замкнуты, и выбрать направление обхода вдоль контура интегрирования в направлении вектора  $\mathbf{B}$ , то будем иметь  $\oint \mathbf{B} dl > 0$  и, следовательно,  $i > 0$ . Таким образом, каждая линия магнитной индукции обязательно охватывает собой электрический ток. Соответственно, электрический ток всегда окружен магнитным полем.

Магнитное поле является основным признаком существования электрического тока. О существовании электрического тока мы можем, вообще говоря, судить по различным признакам, например по тепловому или по электрохимическому действию тока. Однако эти проявления тока имеют место лишь при надлежащих условиях, магнитное же поле неизменно сопутствует электрическому току. В отдельных случаях мы можем судить о наличии электрического тока только по его магнитному полю. Таким случаем является ток

в сверхпроводящем контуре, протекающий без сколь-нибудь заметного выделения тепла.

Обобщим соотношение  $\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 i$  на случай более сложных контуров. Пусть имеется несколько контуров с электрическими токами, которые охватываются контурами интегрирования (рис. 169). Всегда можно при помощи дополнительных линий разделить этот контур на несколько контуров, охватывающих каждый только один ток. Так, изображенный на рис. 169 контур  $ambncpa$ , охватываю-

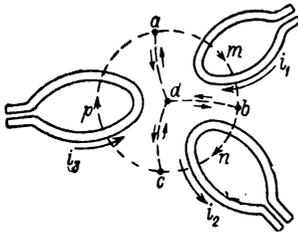


Рис. 169.

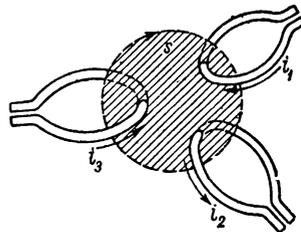


Рис. 170.

щий три тока, можно линиями  $ad$ ,  $bd$  и  $cd$  разделить на контуры  $ambda$ ,  $bncdb$  и  $cpadc$ , охватывающие каждый по одному току. Имеем:

$$\oint_{ambda} \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 i_1; \quad \oint_{bncdb} \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 i_2; \quad \oint_{cpadc} \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 i_3.$$

Сложим эти равенства. При этом составляющие интегралов вдоль линий  $ad$ ,  $bd$  и  $cd$  попарно скомпенсируются и в левой части останется интеграл вдоль контура  $ambncpa$ . Получаем:

$$\oint_{ambncpa} \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 (i_1 + i_2 + i_3).$$

Правая часть уравнения представляет собой сумму всех токов, проходящих сквозь поверхность, ограниченную контуром интегрирования. На рис. 170 эта поверхность заштрихована и обозначена через  $s$ . Положительными мы должны считать токи, направленные в сторону поступательного движения правого винта, головка которого вращается в направлении выбранного положительного обхода контура интегрирования, так как при этом направление линий магнитной индукции поля тока совпадает с положительным направлением обхода контура интегрирования. В случае, изображенном на рис. 169, токи  $i_1$  и  $i_3$  положительны, а ток  $i_2$  отрицателен.

Может оказаться, что условные положительные направления токов в электрических контурах заданы независимо от выбора

положительного направления обхода контура интегрирования. В этом случае в правой части перед алгебраическим выражением каждого тока должен быть поставлен знак плюс или минус в зависимости от того, соответствуют или не соответствуют правилу правого винта условные положительные направления тока и обхода контура интегрирования.

Рассмотрим важный частный случай, когда имеется катушка, состоящая из витков, по которым протекает ток  $i$ , и контур интегрирования охватывает все витки катушки (рис. 171). Сумма токов,

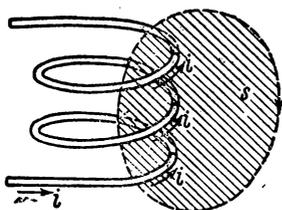


Рис. 171.

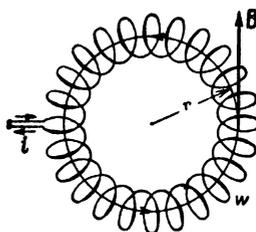


Рис. 172.

проходящих сквозь поверхность  $s$ , ограниченную контуром интегрирования, при этом равна  $w i$ . Следовательно,

$$\oint \mathbf{B} \, dl = \mu_0 w i.$$

В отдельных простейших случаях полученные соотношения могут быть использованы для определения магнитной индукции.

В качестве примера рассмотрим кольцевой соленоид, состоящий из  $w$  витков, распределенных равномерно по его длине (рис. 172). Линии магнитной индукции являются окружностями, сцепляющимися со всеми витками, если витки плотно прилегают друг к другу. Величина  $B$  постоянна вдоль такой окружности. Следовательно,

$$\oint \mathbf{B} \, dl = B \oint dl = B l = \mu_0 w i \quad \text{и} \quad B = \frac{\mu_0 w i}{l} = \frac{\mu_0 w i}{2\pi r},$$

где  $l = 2\pi r$  — длина линии магнитной индукции и  $r$  — ее радиус.

#### § 54. Намагниченность вещества и напряженность магнитного поля

В предыдущем параграфе был рассмотрен случай, когда магнитное поле контуров с токами существует в пустоте. Опыт показывает, что если те же контуры с теми же токами окружить веществом или хотя бы в части пространства около них расположить тела

из того или иного вещества, то магнитное поле в большей или меньшей мере изменяется. Это изменение поля является следствием возникновения в самом веществе под действием внешнего магнитного поля определенной ориентации элементарных внутримолекулярных и внутриатомных электрических токов.

Элементарные токи существуют внутри всякого вещества и при отсутствии внешнего поля. Мы представляем себе эти токи как движение электронов по орбитам внутри атомов вещества и как вращение электронов вокруг своих осей.

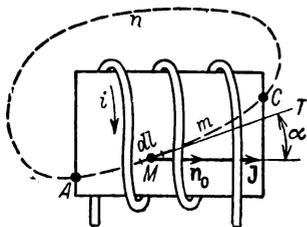


Рис. 173.

К понятию «элементарный электрический ток» мы здесь относим и то еще не изученное внутреннее движение в элементарных частицах, которое приводит к появлению магнитных моментов этих частиц, о чем будет сказано в конце этого параграфа. Если элементарные токи внутри вещества ориентированы хаотически, то при макроскопическом рассмотрении явления они не создают магнитного поля. Однако если под действием внешнего поля, в которое вносится вещество, появляется в известной

мере согласованная ориентация элементарных токов, то они создают свое дополнительное магнитное поле, которое, налагаясь на внешнее поле, изменяет его.

Магнитные свойства вещества будут рассмотрены в специальном параграфе. Здесь отметим, что существуют вещества, в которых элементарные токи под действием внешнего поля располагаются так, что происходит усиление поля. К ним относятся так называемые парамагнитные и ферромагнитные вещества.

Существует другая группа веществ, называемых диамагнитными, в которых под действием внешнего магнитного поля возникают такие дополнительные элементарные токи, которые ослабляют вызвавшее их поле.

Рассмотрим катушку с током  $i$ , имеющую  $w$  витков, в которую внесено тело из какого-либо вещества (рис. 173).

Составим линейный интеграл магнитной индукции вдоль замкнутого контура  $AmCnA$ , охватывающего все витки катушки. Часть  $AmC$  контура интегрирования расположена внутри тела и часть  $CnA$  в пустоте.

Под действием магнитного поля, вызванного током  $i$  в катушке, тело намагничивается, т. е. элементарные токи в веществе тела ориентируются в известной мере между собой согласованно и создают свое магнитное поле. Сумма элементарных токов, охватывающих линию  $AmC$ , будет отличаться от нуля. Обозначим эту сумму через  $i'$ . Будем иметь:

$$\oint \mathbf{B} \, dl = \mu_0 w i + \mu_0 i'.$$

Пусть  $di'$  — сумма элементарных токов, охватывающих отрезок  $dl$  линии  $AmC$ . Величина  $\frac{di'}{dl}$  представляет собой охватывающий линию  $AmC$  элементарный ток, отнесенный к единице длины этой линии в данной ее точке  $M$ . Естественно, что величина  $\frac{di'}{dl}$  зависит от направления линии  $AmC$ , т. е. от направления отрезка  $dl$  в рассматриваемой точке  $M$ .

При некотором определенном направлении, которое мы обозначим единичным вектором  $\mathbf{n}_0$ , величина  $\frac{di'}{dl}$  имеет наибольшее значение. Обозначим отрезок  $dl$  в этом направлении через  $dn$  и введем векторную величину

$$\mathbf{J} = \frac{di'}{dn} \mathbf{n}_0,$$

которую назовем *намагниченностью* вещества.

*Намагниченность вещества по величине численно равна сумме элементарных токов, охватывающих единицу длины линии, проведенной через данную точку в таком направлении, чтобы эта сумма была наибольшей. Направление вектора  $\mathbf{J}$  и есть такое направление. Оно связано с направлением элементарных токов правилом правого винта.* Для произвольного направления отрезка  $dl$  имеем:

$$\frac{di'}{dl} = J \cos \alpha,$$

где  $\alpha$  — угол между направлением вектора  $\mathbf{J}$  и положительным направлением касательной к линии  $AmC$  в рассматриваемой точке  $M$ . Таким образом, сумма элементарных токов, охватывающих всю линию  $AmC$ , имеет значение:

$$i' = \int_{AmC} \frac{di'}{dl} dl = \int_{AmC} J \cos \alpha dl = \int_{AmC} \mathbf{J} dl.$$

Так как на участке  $CnA$  замкнутого контура интегрирования (рис. 173) нет элементарных токов, то имеем:

$$\oint_{AmCnA} \mathbf{J} dl = \int_{AmC} \mathbf{J} dl = i'.$$

Итак, имеем:

$$\oint \mathbf{B} dl = \mu_0 \omega i + \mu_0 i' = \mu_0 \omega i + \mu_0 \oint \mathbf{J} dl$$

или

$$\oint \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J} \right) dl = \omega i,$$

Векторную величину, стоящую в скобках под знаком интеграла, обозначают  $\mathbf{H}$  и называют *напряженностью магнитного поля*. Имеем:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J},$$

откуда

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{J}).$$

В частном случае пустоты  $\mathbf{J} = 0$  и  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ .

Вводя обозначение  $\mathbf{H}$  в выражение под знаком интеграла, получаем:

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \sum i.$$

Приведенное определение напряженности магнитного поля для общего случая ценно именно потому, что при этом интеграл напряженности магнитного поля вдоль *любого замкнутого* контура определяется *только макроскопическими токами*, протекающими в проводниках, охватываемых контуром интегрирования. Наличие элементарных токов в веществе *не влияет* на величину интеграла напряженности магнитного поля вдоль *замкнутого* контура.

Определив напряженность во всех точках магнитного поля, можно провести ряд линий, обладающих тем свойством, что во всех точках этих линий направление касательных к ним совпадает с направлением вектора  $\mathbf{H}$ . Такие линии называют *линиями напряженности магнитного поля*. Их снабжают на рисунках стрелками, указывающими направление вектора  $\mathbf{H}$ .

Намагниченности вещества  $\mathbf{J}$  можно дать еще другое определение, связанное с понятием о *магнитном моменте* элементарного тока. Магнитным моментом  $p_0$  элементарного тока  $i_0$  называют произведение величины  $i_0$  на площадку  $s_0$ , охватываемую этим током. Магнитный момент есть векторная величина. Направление вектора  $\mathbf{p}_0$  (рис. 174) принимают вдоль перпендикуляра к площадке  $s_0$  и связывают с направлением тока  $i_0$  правилом правого винта. Таким образом,

$$\mathbf{p}_0 = i_0 \mathbf{s}_0,$$

где  $\mathbf{s}_0$  — вектор, по величине численно равный  $s_0$  и имеющий указанное направление.

Выделим внутри намагниченного вещества цилиндр с длиной  $l$  и основанием  $s$  (рис. 175) и предположим, что вещество в объеме цилиндра намагничено в макроскопическом смысле однородно. Пусть  $\mathbf{p}$  — геометрическая сумма магнитных моментов  $\mathbf{p}_0$  всех элементарных токов в объеме цилиндра. Векторную величину  $\mathbf{p}$  называют *магнитным моментом данного объема вещества*.

Предположим, что цилиндр выделен так, что вектор  $\mathbf{p}$  направлен по его оси. Все элементарные токи в объеме цилиндра можно заме-

нить одним эквивалентным током  $i'_0$ , обтекающим поверхность цилиндра (рис. 175), выбрав величину  $i'_0$  так, чтобы сохранить значение магнитного момента  $p$ , т. е. положив

$$i'_0 s = p.$$

Такой выбор необходимо сделать потому, что магнитное поле элементарных токов полностью определяется их магнитными моментами.

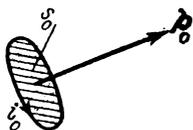


Рис. 174.

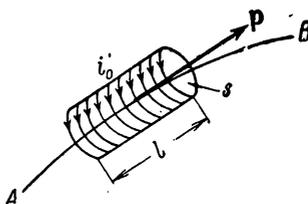


Рис. 175.

Проведем линию  $AB$ , проходящую по оси цилиндра. На длине  $l$  цилиндра эту линию охватывает ток  $i'_0$ . Следовательно, в соответствии с ранее данным определением намагниченности  $J$  вещества имеем  $i'_0 = J l$ , т. е.  $i'_0 s = p = J l s = J V$ , или

$$J = \frac{p}{V} \quad \text{и} \quad \mathbf{J} = \frac{\mathbf{p}}{V}.$$

Если вещество намагничено неоднородно, то необходимо перейти к пределу:

$$\mathbf{J} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta V} = \frac{d\mathbf{p}}{dV},$$

где  $\Delta p$  — магнитный момент объема  $\Delta V$  вещества.

Таким образом, намагниченность вещества в данной точке равна пределу отношения магнитного момента некоторого объема вещества, содержащего данную точку, к этому объему, когда последний стремится к нулю.

Выше было отмечено, что к понятию «элементарный ток» мы отнесли и то еще не изученное внутреннее движение в элементарных частицах, которое приводит к появлению их магнитных моментов. Магнитный момент электрона имеет определенное значение, т. е. имеет квантовый характер. Электрон обладает также определенным моментом количества движения. Магнитный момент и момент коли-

чества движения электрона можно рассматривать как проявление вращения (спина) электрона вокруг его оси. Действительно, круговое движение элементов заряда электрона около его оси представляет собой замкнутый круговой элементарный ток, который, как всякий электрический ток, окружен связанным с ним магнитным полем. Однако такое простое представление не дает возможности согласовать между собой величины магнитного момента и момента количества движения электрона с возможными значениями радиуса и угловой скорости вращения электрона. Магнитным моментом обладают также и элементарные частицы, не обладающие электрическим зарядом, например нейтрон. Таким образом, приходится признать, что магнитные моменты элементарных частиц являются результатом более сложных внутренних процессов в этих частицах, определяющих природу и основные свойства частиц. Однако здесь совершенно естественно продолжить те логические рассуждения, которые привели в свое время к отказу от представления о реальном существовании магнитных масс, подобных электрическим зарядам. То обстоятельство, что магнитное поле было обнаружено около проводников с макроскопическими электрическими токами, а не только около намагниченных тел, дало, как было выше отмечено, основание предположить, что и в случае намагниченных тел магнитное поле обуславливается также электрическими токами, существующими внутри вещества тела в форме элементарных (молекулярных) замкнутых токов. Существенно отметить, что в то время, когда было высказано впервые Ампером это предположение, еще не было развито представление об электромагнитном строении атомов и молекул вещества. Продолжая это рассуждение, мы в настоящее время можем высказать предположение, что и магнитный момент элементарных частиц также является результатом некоторого сложного внутреннего движения в этих частицах, имеющего характер замкнутых электрических токов, но это движение значительно более сложно, чем простое вращение электрона как целого вокруг своей оси. Существенно отметить, что и в квантовой теории формальное рассмотрение магнитного поля, обусловленного магнитными моментами электронов, приводит к некоторому общему выражению для плотности электрических токов.

Таким образом, имеются все основания понятием «элементарные токи» в веществе охватывать все явления, приводящие к намагниченности вещества, и в этом широком смысле сохранять утверждение, что во всех без исключения случаях магнитное поле связано с электрическими токами.

### § 55. Закон полного тока

В соответствии с определением напряженности магнитного поля, данным в предыдущем параграфе, линейный интеграл напряженности магнитного поля вдоль замкнутого контура равен электриче-

скому току, охватываемому этим контуром, т. е. току сквозь поверхность  $s$ , ограниченную этим контуром:

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = i.$$

В общем случае, когда ток  $i$  распределен по поверхности  $s$  с плотностью  $\delta$ , различной в разных точках поверхности, имеем соотношение:

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_s \delta ds = i.$$

Например, если контур интегрирования охватывает часть сечения проводника с током (рис. 176), то в правой части уравнения должна быть учтена только та часть тока в проводнике, которая охватывается контуром интегрирования.

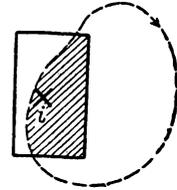


Рис. 176.

Согласно Максвеллу в правой части уравнения  $\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = i$  под величиной  $i$  следует подразумевать не только токи проводимости, но и токи переноса, а также и токи смещения сквозь поверхность, ограниченную контуром интегрирования. Сумма токов проводимости, переноса и смещения может быть названа *полным током* сквозь рассматриваемую поверхность. Соответственно соотношение  $\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = i$  именуют *законом полного тока*.

Линейный интеграл напряженности магнитного поля вдоль некоторого контура называют *магнитодвижущей силой* (м. д. с.) или *намагничивающей силой* вдоль этого контура. Магнитодвижущую силу принято обозначать буквой  $F$ .

Используя термин «магнитодвижущая сила», можно закон полного тока выразить следующими словами:

*магнитодвижущая сила вдоль замкнутого контура равна полному току, охватываемому этим контуром.*

Уравнение  $\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = i$  при отмеченной широкой трактовке его правой части становится одним из основных уравнений электромагнитного поля.

Действительно, предположим, что токи проводимости и переноса отсутствуют и имеют место только токи смещения. Но токи смещения в диэлектрике возникают только при изменении во времени электрического поля. Следовательно, уравнение

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = i$$

свидетельствует, что *при всяком изменении во времени электрического поля возникает в том же пространстве поле магнитное, тесным образом связанное с электрическим полем и с его изменениями и по сути представляющее с ним единое электромагнитное поле.*

Заметим, что понятие «магнитодвижущая сила» может быть применено и к отрезку линии от точки  $A$  до точки  $B$ . При этом имеем:

$$F_{AB} = \int_A^B \mathbf{H} dl.$$

Пользуясь понятием «магнитодвижущая сила», можно придать следующий смысл величине, которую мы называем напряженностью магнитного поля. Напряженность поля оказывается численно равной магнитодвижущей силе, приходящейся на единицу длины в направлении линии напряженности поля:  $H = \frac{dF}{dl}$ .

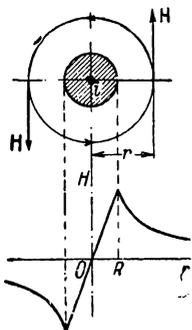


Рис. 177.

Отсюда видно, что единицей напряженности магнитного поля в системе единиц МКСА является *ампер на метр (а/м)*.

В качестве примера применения закона полного тока определим напряженность поля прямолинейного провода кругового сечения (рис. 177). Линии напряженности поля вследствие симметрии являются окружностями с центрами на оси провода. Напряженность поля постоянна вдоль каждой такой окружности. Если радиус  $r$  линии напряженности поля больше радиуса  $R$  сечения провода, то линия напряженности поля охватывает весь ток  $i$ , и согласно закону полного тока имеем:

$$H2\pi r = i,$$

т. е.

$$H = \frac{i}{2\pi r}.$$

Магнитное поле существует и внутри провода. Линии напряженности поля внутри провода охватывают только часть всего тока в проводе. В случае постоянного тока плотность тока одинакова во всех точках сечения и равна  $\delta = \frac{i}{s} = \frac{i}{\pi R^2}$ . Часть тока, охватываемая линией напряженности поля, имеющей радиус  $r$ , при этом равна  $\pi r^2 \delta = i \frac{r^2}{R^2}$ . Таким образом, получаем:

$$H \cdot 2\pi r = i \frac{r^2}{R^2},$$

откуда

$$H = \frac{i}{2\pi R^2} r.$$

На рис. 177 изображена зависимость  $H = f(r)$  для уединенного провода кругового сечения.

§ 56. Магнитное поле движущейся частицы с электрическим зарядом и элемента тока

В § 21 была исследована картина линий тока смещения, образуемого вокруг частицы с электрическим зарядом  $q$ , движущейся со скоростью  $v$ , малой по сравнению со скоростью света. На рис. 178 изображена эта картина. Ток переноса замыкается током смещения.

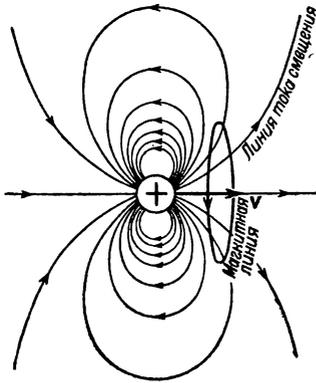


Рис. 178.

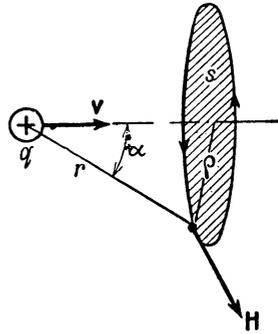


Рис. 179.

Вокруг движущейся частицы с электрическим зарядом образуется магнитное поле, линии напряженности которого по условию симметрии должны быть окружностями (рис. 178), лежащими в плоскостях, нормальных к вектору скорости  $v$ , и имеющими центры на прямой линии, являющейся продолжением вектора  $v$ . Линейный интеграл напряженности магнитного поля вдоль одной из линий напряженности поля, имеющей радиус  $\rho$  (рис. 179), равен:

$$\oint \mathbf{H} \, dl = \oint H \, dl = H \oint dl = 2\pi\rho H = 2\pi r \sin \alpha H,$$

так как в данном случае  $H = \text{const}$  вдоль линии напряженности поля. При этом  $r$  — расстояние от частицы с зарядом  $q$  до точек рассматриваемой линии напряженности поля и  $\alpha$  — угол, составляемый радиусом-вектором  $\mathbf{r}$  с вектором скорости  $\mathbf{v}$ .

На основании закона полного тока этот линейный интеграл равен току сквозь поверхность  $s$ , ограниченную контуром интегрирования, в данном случае — току электрического смещения  $i_{см}$  сквозь эту поверхность. Следовательно,

$$H = \frac{i_{см}}{2\pi r \sin \alpha}.$$

Таким образом, для нахождения величины  $H$  необходимо определить ток  $i_{см}$ .

Направим ось  $OZ$  в сторону движения заряда (рис. 180). Пусть  $z$  — координата центра заряда и  $\zeta$  — расстояние точек рассматриваемой окружности до плоскости  $XOY$ .

Согласно принципу непрерывности ток сквозь все поверхности, ограниченные рассматриваемой окружностью, имеет одно и то же значение. Определим ток смещения сквозь часть поверхности сферы радиуса  $r$  (рис. 180), ограниченную этой окружностью и имеющую центр в точке расположения заряда.

Поток вектора смещения сквозь такую поверхность равен:

$$\int_s \mathbf{D} ds = \int_s D ds = \int_s \frac{q}{4\pi r^2} ds.$$

Представив  $ds$  в виде полоски шириной  $r d\alpha'$  и длиной  $2\pi r' = 2\pi r \sin \alpha'$ , где  $\alpha'$  — угол, отвечающий радиусу  $r'$ , получаем:

$$\int_s D ds = \int_0^\alpha \frac{q}{4\pi r^2} 2\pi r \sin \alpha' r d\alpha' = \frac{q}{2} (1 - \cos \alpha).$$

Искомый ток равен:

$$i_{см} = \frac{d}{dt} \int_s D ds = \frac{q}{2} \frac{d}{d\alpha} (1 - \cos \alpha) \frac{d\alpha}{dz} \frac{dz}{dt} = \frac{q}{2} \sin \alpha \frac{d\alpha}{dz} \frac{dz}{dt}.$$

Между  $z$  и  $\alpha$  существует связь:  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\zeta - z}{\rho}$ . Дифференцируя это равенство, получаем:  $-\frac{dz}{\sin^2 \alpha} = -\frac{dz}{\rho}$ , и так как  $\rho = r \sin \alpha$ , то  $\frac{dz}{dz} = \frac{\sin \alpha}{r}$ . Замечая, кроме того, что  $\frac{dz}{dt} = v$ , получаем выражение для тока смещения:

$$i_{см} = \frac{qv}{2r} \sin^2 \alpha.$$

Используя это выражение для  $i_{см}$ , находим искомую напряженность магнитного поля движущейся частицы с зарядом  $q$ :

$$H = \frac{qv}{4\pi r^2} \sin \alpha.$$

Наиболее обстоятельные исследования магнитного поля токов переноса произведены в России в 1904 г. А. А. Эйхенвальдом. А. А. Эйхенвальд сравнивал магнитное поле, образующееся около заряженной кольцевой металлической полоски, вращающейся вокруг своей оси, с магнитным полем тока проводимости, протекающего по той же неподвижной полоске. Он установил тождествен-

ность этих полей. В 1911 г. А. Ф. Иоффе показал, что катодные лучи, т. е. быстро движущиеся электроны, создают вокруг себя магнитное поле. Результаты всех опытных исследований магнитного поля токов переноса подтверждают правильность последнего выражения для напряженности магнитного поля движущихся частиц, обладающих электрическим зарядом.

Ток  $i$  в проводнике мы рассматриваем так же, как движение в нем заряженных частиц. Пусть в объеме элемента проводника длиной  $dl$  (рис. 181) заключается заряд  $dq$  свободных частиц, принимающих

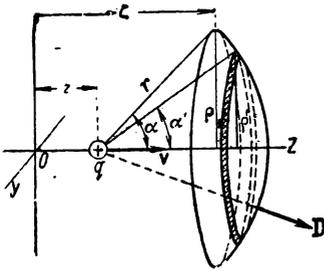


Рис. 180.

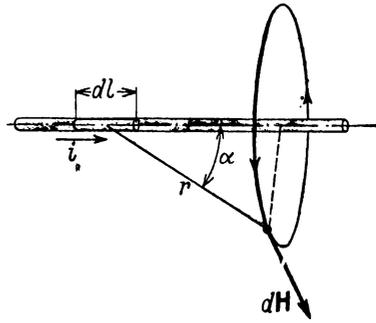


Рис. 181.

участие в движении вдоль проводника. Пусть  $dt$  — промежуток времени, за который заряд  $dq$  переносится на расстояние  $dl$ . При таком выборе промежутка  $dt$  через каждое поперечное сечение проводника переносится заряд, равный именно  $dq$ , и, следовательно,  $\frac{dq}{dt} = i$ . Стало быть,  $v dq = \frac{dl}{dt} i dt = i dl$ . Произведение  $idl$  называют *элементом тока*.

Заряд  $dq$ , переносимый со скоростью  $v$  вдоль элемента проводника, на некотором расстоянии от него можно рассматривать как точечный. Поэтому напряженность магнитного поля, являющегося результатом переноса заряда  $dq$  со скоростью  $v$ , определяется формулой:

$$dH = \frac{v dq}{4\pi r^2} \sin \alpha.$$

Заменяя произведение  $v dq$  на  $i dl$ , получаем формулу, выражающую закон *Био-Савара-Лапласа*:

$$dH = \frac{i dl}{4\pi r^2} \sin \alpha.$$

Вектор  $dH$  направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через  $dl$  и  $r$ , в сторону, определяемую вращением головки правого

винта, ось которого движется поступательно в направлении тока. Вводя вектор  $d\mathbf{l}$ , направленный в сторону положительного тока, и вектор  $\mathbf{r}$ , направленный от элемента тока к точке, в которой определяется  $d\mathbf{H}$ , мы можем написать:

$$d\mathbf{H} = \frac{i}{4\pi r^2} \left[ d\mathbf{l} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \right],$$

где  $\left[ d\mathbf{l} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \right]$  — векторное произведение вектора  $d\mathbf{l}$  на единичный вектор  $\frac{\mathbf{r}}{r}$ .

Выражение  $H = \frac{qv}{4\pi r^2} \sin \alpha$  для напряженности магнитного поля движущейся частицы с зарядом  $q$  справедливо только, если скорость  $v$  частицы значительно меньше скорости света  $c$  ( $v \ll c$ ), так как при выводе его предполагалось, что  $D = \frac{q}{4\pi r^2}$ , т. е. что электрическое поле имеет такой же характер, как для неподвижной частицы с зарядом  $q$ , а это приближенно справедливо только при  $v \ll c$ .

Действительно, при движении частицы в неподвижных мысленно взятых в окружающем ее пространстве контурах индуцируются э. д. с., так как пронизывающий эти контуры магнитный поток, определяемый магнитным полем движущейся частицы, изменяется во времени. Но появление индуцированной э. д. с. есть результат появления индуцированного переменным магнитным потоком электрического поля, что выражается законом электромагнитной индукции:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

Это индуцированное электрическое поле, налагаясь на симметричное электрическое поле, которое имеет место при очень медленном движении частицы с зарядом  $q$ , видоизменяет результирующее поле быстро движущейся частицы. Соответственно изменяется выражение для  $i_{cm}$  и для  $H$  по сравнению с приведенными выше.

Выражения для напряженностей электрического и магнитного полей быстро движущейся частицы с электрическим зарядом может быть найдено только путем решения уравнений электромагнитного поля такой частицы. Среди этих уравнений основными являются уравнения, выражающие закон полного тока и закон электромагнитной индукции:

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = i \quad \text{и} \quad \oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi}{dt},$$

а также максвеллов постулат и принцип непрерывности магнитного потока:

$$\oint \mathbf{D} ds = q \quad \text{и} \quad \oint \mathbf{B} ds = 0.$$

Вышеприведенное выражение для  $H$  при  $v \ll c$  получено с использованием закона полного тока и максвеллова постулата в предположении, что электрическое поле такое же, как у неподвижной частицы. Определим качественно характер изменения электрического поля быстро движущейся частицы, пользуясь законом электромагнитной индукции.

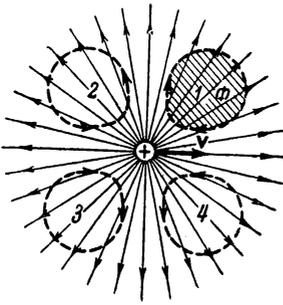


Рис. 182.

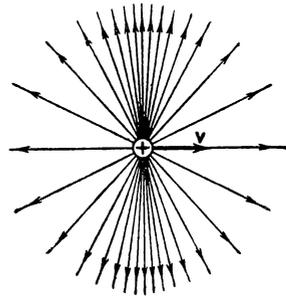


Рис. 183.

На рис. 182 изображены пунктиром четыре неподвижных контура, мысленно проведенные в пространстве. Относительно этих контуров движется со скоростью  $v$  частица с положительным зарядом  $q$ .

Магнитный поток  $\Phi$  сквозь поверхность, ограниченную контуром 1, возрастает, так как частица приближается к контуру, и линии потока  $\Phi$  направлены от плоскости к наблюдателю. В этом контуре возникает э. д. с., равная  $-\frac{d\Phi}{dt}$  и направленная, как указано стрелками на контуре. В последнем можно убедиться, вообразив проводниковый контур, совмещенный с пунктирным контуром. По принципу электромагнитной инерции в таком проводниковом контуре возникнет э. д. с., вызывающая ток, поток самоиндукции которого направлен против нарастающего внешнего потока  $\Phi$ , т. е. за плоскость рисунка. Пользуясь правилом правого винта, легко сообразить, что направление индуцируемой э. д. с. будет такое, как показано на рис. 182 стрелками, т. е. по часовой стрелке. Линии потока сквозь поверхность, ограниченную контуром 2, имеют такое же направление, но этот поток убывает, так как частица с зарядом  $q$  удаляется от этого контура. Поэтому э. д. с. в контуре 2 направлена против часовой стрелки.

Поток сквозь поверхность, ограниченную контуром 4, возрастает, и линии его направлены за плоскость рисунка. Поток сквозь поверхность, ограниченную контуром 3, убывает, и его линии направлены за плоскость рисунка. Соответственно э. д. с. в контуре 4 направлена против часовой стрелки, а в контуре 3 по часовой стрелке.

Из рисунка ясно, что электрическое поле усиливается около плоскости, проходящей через центр частицы перпендикулярно направлению движения, и ослабляется перед частицей и сзади нее около линии, вдоль которой направлен вектор скорости. Линии напряженности результирующего электрического поля сгущаются около указанной плоскости (рис. 183). Соответственно изменяется и магнитное поле быстро движущейся частицы с электрическим зарядом — оно усиливается около той же плоскости и ослабляется вблизи линии, вдоль которой движется частица.

Такая неравномерность распределения поля приводит к увеличению энергии полей по сравнению с той энергией, которая имела бы место, если бы распределение полей оставалось таким же, как при малой скорости движения частицы. В этом можно убедиться, рассматривая энергию электрического поля, выражение для объемной плотности которой  $W'_s = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$  нам уже известно.

Так как  $W'_s$  пропорциональна квадрату напряженности поля, то всякое увеличение неравномерности распределения поля ведет к увеличению всей энергии поля  $W_s = \int_V W'_s dV$ . То же самое следует сказать и об энергии магнитного поля, так как мы увидим в дальнейшем, что объемная плотность энергии магнитного поля пропорциональна  $H^2$ .

Из рассмотренного вытекают весьма важные выводы о характере изменения инертной массы  $m$  частицы с увеличением скорости  $v$ . Возникновение магнитного поля движущейся со скоростью  $v$  частицы с зарядом  $q$  с присущей этому полю энергией, объемная плотность которой пропорциональна  $H^2$ , а следовательно, пропорциональна  $v^2$ , следует рассматривать как сообщение частице кинетической энергии  $\frac{mv^2}{2}$ . Определяемая таким образом масса  $m$

частицы имеет электромагнитный характер — она определяется электромагнитным полем частицы. Ее называют электромагнитной массой. Можно предположить, что масса такой элементарной частицы, как электрон, является электромагнитной, и отсюда определить радиус электрона, сопоставляя кинетическую энергию движущегося электрона, выражаемую через  $m$  и  $v$ , с выражением энергии всего магнитного поля электрона. При этом получим различные значения радиуса при различных предположениях о распределении электрического заряда в электроне. Возможно, однако, что электромагнитная масса не является всей массой электрона.

Электромагнитная масса электрона остается неизменной, пока энергия, дополнительная к той, которой он обладает при  $v \approx 0$ , т. е. энергия, связываемая с его движением со скоростью  $v$  и именуемая кинетической энергией, изменяется пропорционально  $v^2$ . А это будет только до тех пор, пока распределение электрического и магнитного полей электрона вокруг него не изменится, оставаясь практически таким же, как и при весьма малой скорости. При больших скоростях движения, как мы видели, электромагнитное поле электрона видоизменяется так, что дополнительная его энергия, связанная

с движением электрона, возрастает быстрее  $v^2$ , что должно рассматриваться как увеличение массы электрона. Полное решение уравнений электромагнитного поля приводит к результату, что электромагнитная масса электрона, как и всякой частицы, обладающей электрическим зарядом, бесконечно возрастает по мере приближения скорости  $v$  частицы к скорости  $c$  света. При равномерном прямолинейном движении эта зависимость выражается в виде

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

где  $m_0$  — масса при весьма медленном движении, т. е. при  $v \ll c$ , так называемая масса покоя. Следует отметить, что согласно теории относительности этому соотношению удовлетворяет любая инертная масса, т. е. этому соотношению удовлетворяет вся масса электрона, даже если она не является полностью электромагнитной. Это обстоятельство и не дает возможности однозначно утверждать, что вся масса электрона имеет электромагнитный характер в указанном выше смысле. Однако изложенное выше представляет большой интерес в том отношении, что важнейшие положения теории относительности в применении к электромагнитным явлениям непосредственно вытекают из основных уравнений, основных взаимосвязей, характеризующих эти явления и представляющих непосредственный предмет нашего изучения в этом курсе.

Приведенное выражение зависимости  $m$  от  $v$  свидетельствует о том, что частицы материи, обладающие массой  $m_0$ , не могут двигаться со скоростями, превосходящими или даже равными скорости света  $c$ .

### § 57. Магнитные свойства вещества

В случае изотропного вещества векторы  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{J}$  совпадают по направлению, и можно написать:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \text{и} \quad \mathbf{J} = \kappa \mathbf{H}.$$

При этом имеем:

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{J}) = \mu_0 (1 + \kappa) \mathbf{H} = \mu \mathbf{H},$$

откуда

$$\mu = \mu_0 (1 + \kappa).$$

Величину  $\mu$  называют *абсолютной магнитной проницаемостью* вещества и величину  $\kappa$  — *магнитной восприимчивостью* вещества.

Отношение  $\frac{\mu}{\mu_0} = \mu_r$  называют *относительной магнитной проницаемостью* вещества или просто *магнитной проницаемостью* вещества.

Имеем:

$$\mu_r = 1 + \kappa.$$

Для парамагнитных веществ  $\mu > \mu_0$  и  $\kappa > 0$ . Для диамагнитных веществ  $\mu < \mu_0$  и  $\kappa < 0$ . Особую группу составляют ферромагнит-

ные вещества, для которых  $\mu \gg \mu_0$  и величина  $\mu$  зависит от напряженности поля и от предыдущих магнитных состояний.

В случае анизотропных веществ необходимо знать значения  $\mu$  и  $\chi$  по всем главным осям.

Если в анизотропном веществе расположить оси  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  произвольно, но определено по отношению к главным осям, то в случае, когда магнитная проницаемость и магнитная восприимчивость не зависят от напряженности поля, связь между проекциями на оси координат векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  и, соответственно, векторов  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{H}$  может быть записана в форме, аналогичной той, в которой была записана в § 9 связь между проекциями векторов  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{E}$ .

При этом магнитная проницаемость и магнитная восприимчивость являются тензорными величинами.

Атомы и молекулы парамагнитных веществ отличаются тем свойством, что магнитные поля элементарных токов, существующих внутри атома или молекулы, не компенсируются взаимно за пределами атома и молекулы, т. е. результирующее поле элементарных токов выходит за пределы атома или молекулы. Такие атомы и молекулы обладают и при отсутствии внешнего поля отличным от нуля магнитным моментом. Под действием внешнего магнитного поля они стремятся расположиться так, чтобы их поля совпали с внешним полем. Назовем магнитной осью атома (молекулы) ось, вдоль которой направлен магнитный момент  $\mathbf{p}$  атома (молекулы).

В парамагнитных газах, каковым является, например, кислород, повороту магнитных осей атомов или молекул в направлении поля препятствует тепловое движение, которое стремится разбросать атомы так, чтобы их магнитные оси имели всевозможные направления. Пусть  $N_1$  — число атомов (молекул) в единице объема вещества. При весьма больших значениях напряженности  $H$  внешнего поля, когда магнитные оси всех атомов расположились бы в направлении поля, было бы достигнуто насыщение, и намагниченность вещества приобрела бы наибольшее возможное значение  $\mathbf{J}_\infty = N_1 \mathbf{p}$ . Однако при обычной температуре даже при весьма сильных полях магнитное состояние парамагнитных веществ еще далеко до состояния насыщения и  $J$  растет пропорционально  $H$ . Магнитная восприимчивость  $\chi$  парамагнитных веществ обратно пропорциональна абсолютной температуре.

К диамагнитным относятся вещества, атомы (молекулы) которых при отсутствии внешнего поля не обладают магнитным моментом. Элементарные токи, существующие внутри атомов этих веществ, ориентированы таким образом, что их магнитные поля за пределами атома взаимно компенсируются. Атомы диамагнитных веществ не испытывают стремления расположиться определенным образом во внешнем поле. Диамагнитный эффект объясняется следующим образом. Элементарные токи внутри атомов этих веществ представ-

ляют собой движение электронов по орбитам. Эти токи не сопровождаются расходом энергии. Следовательно, их можно рассматривать как токи в сверхпроводящих контурах. Согласно принципу электромагнитной инерции магнитный поток, сцепленный с таким контуром, должен оставаться неизменным. Поэтому при внесении атома диамагнитного вещества во внешнее магнитное поле элементарные токи внутри атома должны измениться так, чтобы внешнее поле в пределах атома было скомпенсировано этим изменением токов. Иными словами, дополнительные элементарные токи создают поле, направленное навстречу внешнему, что и воспринимается нами как уменьшение абсолютной магнитной проницаемости  $\mu$  вещества по сравнению с  $\mu_0$ . Диамагнитный эффект проявляется вообще весьма слабо, так как непроницаемой для внешнего потока оказывается только та часть пространства, занятого веществом, в которой существуют элементарные токи. Во всем же остальном пространстве, именно в пространстве между атомами, внешнее поле устанавливается свободно. Диамагнитные свойства наиболее сильно проявляются у висмута, абсолютная магнитная проницаемость которого равна  $\mu \approx 0,99983 \mu_0$ .

Особую группу составляют ферромагнитные вещества. Основными ее представителями являются железо, никель, кобальт и их сплавы. Эти вещества имеют абсолютную магнитную проницаемость, значительно превышающую  $\mu_0$ , что обуславливает исключительное значение их как магнитных материалов. Характерным признаком ферромагнитных веществ является зависимость магнитной проницаемости от напряженности поля и от предыдущих магнитных состояний. Впервые весь ход зависимости  $\mu = f(J)$  для железа был установлен А. Г. Столетовым в 1871 г.

А. Г. Столетов в своем исследовании первый обнаружил, что магнитная восприимчивость железа с увеличением намагниченности сначала возрастает, достигает максимального значения и затем вновь убывает. Он указал в своей работе, что изучение магнитных свойств железа должно иметь большое практическое значение при создании электрических машин. В настоящее время мы знаем, насколько справедливо было это указание А. Г. Столетова. Рациональное построение современных электрических машин, трансформаторов, аппаратов и приборов невозможно без детального изучения магнитных свойств, применяемых в них различных ферромагнитных материалов.

Магнитная индукция в ферромагнитных веществах может иметь при одном и том же значении напряженности поля различные значения, зависящие от предыдущих магнитных состояний материала. Поэтому для того чтобы величиной  $\mu = \frac{B}{H}$  можно было пользоваться в качестве характеристики магнитных свойств ферромагнитных материалов, необходимо точно оговорить метод определения этой характеристики.

Рассмотрим процесс намагничивания ферромагнитного вещества. Предположим, что первоначально вещество было полностью размагничено, т. е. поле элементарных токов во внешнем пространстве не обнаруживалось. При монотонном увеличении напряженности внешнего поля индукция растет сначала быстро (кривая  $OD_1$  на рис 184), вследствие того, что элементарные токи ориентируются так, что их магнитные потоки добавляются к внешнему потоку. При больших значениях индукции скорость ее возрастания уменьшается. Магнитное состояние вещества приближается к насыщению.

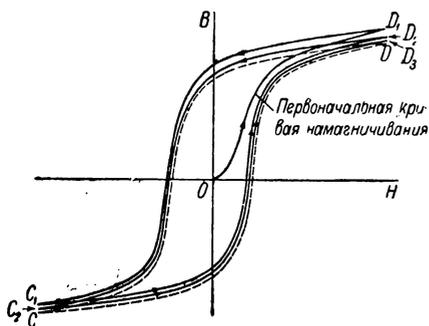


Рис. 184.

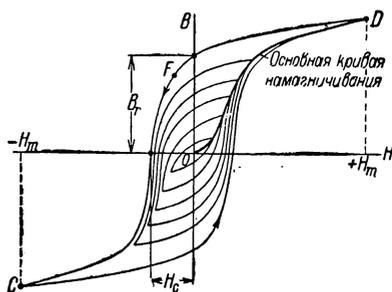


Рис. 185.

При этом уже почти все элементарные токи ориентированы так, что их магнитные поля совпадают по направлению с внешним полем. Кривая  $OD_1$  (рис. 184), получающаяся при условии, что вещество предварительно было размагничено, называется *начальной кривой намагничивания*.

Предположим, что напряженность поля была доведена до некоторого значения  $+H_m$  (точка  $D_1$  на рис. 184) и затем вновь уменьшается. Кривая  $B = f(H)$  при убывающей напряженности поля располагается выше начальной кривой намагничивания. При уменьшении величины  $H$  до нуля наблюдается остаточная намагничённость и соответствующая ей *остаточная индукция*. Это свидетельствует о том, что элементарные токи в известной мере сохранили свою упорядоченную ориентацию. Чтобы индукция стала равной нулю, напряженность поля должна принять отрицательное значение, называемое *коэрцитивной силой*. Если довести  $H$  до отрицательного значения  $-H_m$ , по абсолютной величине равного наибольшему положительному значению, то индукция примет отрицательное значение, соответствующее точке  $C_1$ . Вновь увеличивая напряженность до  $+H_m$ , мы получаем ветвь  $C_1D_2$ . Точка  $D_2$  лежит ниже точки  $D_1$ , так как кривая в нее приходит из точки отрицательной остаточной

индукции, тогда как в точку  $D_1$  кривая приходит из начала координат, т. е. из точки, соответствующей нейтральному состоянию вещества. Повторному уменьшению величины  $H$  соответствует кривая  $D_2C_2$ , последующему затем возрастанию напряженности соответствует кривая  $C_2D_3$  и т. д.

Таким образом, значение индукции при заданном значении напряженности поля зависит от истории процесса намагничивания. Это явление называется *явлением гистерезиса*. Только после достаточного числа (примерно десяти) перемагничиваний мы получаем *симметричную гистерезисную петлю (CD)*, изображенную на рис. 184 пунктиром. На рис. 185 изображено семейство симметричных гистерезисных петель, полученных при различных значениях  $H_m$ . Кривая  $B = f(H)$ , проходящая через вершины симметричных гистерезисных петель, называется *основной кривой намагничивания* и является вполне определенной для данного сорта материала. Поэтому принято определять магнитную проницаемость ферромагнитных материалов именно из основной кривой намагничивания. Точно так же остаточную индукцию  $B_r$  и коэрцитивную силу  $H_c$  обычно определяют из симметричной гистерезисной петли (рис. 185), причем  $H_m$  должно быть достаточно велико, чтобы при  $H_m$  вещество было близко к состоянию магнитного насыщения.

Известно, что ферромагнитное вещество при отсутствии внешнего поля состоит из отдельных областей, самопроизвольно намагниченных каждая в определенном направлении.

Магнитные поля отдельных самопроизвольно намагниченных областей не обнаруживаются во внешнем пространстве ввиду того, что разные области намагничены в различных направлениях. Намагниченность  $J_s$  областей зависит от абсолютной температуры. При абсолютном нуле температуры  $J_s$  равна намагниченности  $J_\infty$  полного насыщения. Тепловое движение уменьшает величину  $J_s$ , и при некоторой температуре  $\Theta$ , характерной для данного вещества, упорядоченное расположение элементарных токов в области полностью разрушается. Эта температура называется *точкой Кюри*. Она имеет значения: для железа около  $770^\circ \text{C}$ , для никеля около  $360^\circ \text{C}$  и для кобальта  $1120^\circ \text{C}$ . Выше точки Кюри вещество приобретает свойства обычных парамагнитных веществ — его относительная магнитная проницаемость оказывается немного больше единицы и магнитная восприимчивость подчиняется зависимости  $\chi = \frac{C}{T - \Theta}$ , отличающейся от соответствующей зависимости для обычных парамагнитных веществ только тем, что в знаменателе вместо абсолютной температуры  $T$  стоит разность  $T - \Theta$ , причем  $C = \text{const}$ .

Рассмотрим, каким образом объясняется процесс намагничивания технических ферромагнитных материалов.

Внутреннее поле, эквивалентное силам, удерживающим эле-

ментарные токи внутри области в ориентированном состоянии, как показывает подсчет, чрезвычайно велико. Так, для железа напряженность этого поля имеет порядок  $1,2 \cdot 10^9$  а/м. Поэтому при температурах, лежащих значительно ниже точки Кюри, под влиянием внешнего поля происходит только изменение направления намагниченности областей, но величина  $J_s$  практически остается неизменной.

Вектор  $J_s$  в каждой области при отсутствии поля располагается в некотором преимущественном направлении, которое зависит от кристаллической структуры вещества и от упругих напряжений. Последний фактор тесно связан с так называемой *магнитострикцией*, т. е. с изменением размеров тел при намагничивании. Так, например, железный стержень при намагничивании в сравнительно слабых полях удлиняется в направлении поля, в сильных полях укорачивается. Наблюдается также и обратный эффект. Именно, продольное растяжение железа в слабых полях повышает намагниченность, в сильных полях — снижает ее. Никель имеет отрицательную магнитострикцию — его длина сокращается в направлении поля. Соответственно при растяжении никеля его намагниченность в направлении тяжения при заданном поле уменьшается. Наоборот, сжатие никеля в каком-либо направлении облегчает его намагничивание в этом направлении. Изменения длины тел при их намагничивании весьма незначительны: они имеют порядок  $10^{-6}$  длины.

Явление магнитострикции используется в некоторых практических устройствах — например, в генераторах колебаний звуковых и ультразвуковых частот. В катушку, по которой протекает переменный ток звуковой частоты, помещают сердечник из материала со сравнительно значительной магнитострикцией, например, из никеля. Для ослабления вихревых токов сердечник выполняют из тонких изолированных друг от друга листов. В переменном магнитном поле катушки сердечник периодически изменяет свою длину с двойной частотой по сравнению с частотой тока в катушке, так как магнитный поток по абсолютному значению достигает максимума два раза за период тока в катушке. Погруженный в жидкость, например в воду, такой сердечник возбуждает в ней колебания. Эти колебания, отражаясь от дна или от каких-нибудь предметов, находящихся в воде, возвращаются обратно к приемнику. Зная направление, в котором были посланы колебания, скорость их распространения и отрезок времени между моментами посылки сигнала и его возвращения, можно определить место нахождения предмета, от которого произошло отражение колебаний.

Исследование магнитострикции имеет глубокое принципиальное значение, так как вышеприведенные факты свидетельствуют о том, что между явлением магнитострикции и влиянием внутренних напряжений на направление намагниченности самопроиз-

вольно намагниченных областей существует тесная связь. Можно сформулировать следующее правило: под влиянием тяжения устанавливается такое направление намагниченности областей, что связанная с этим магнитострикция еще больше увеличивает удлинение тела, возникающее в результате тяжения; под влиянием сжатия намагниченность областей устанавливается в таком направлении, что магнитострикция еще более увеличивает укорочение тела, возникающее в результате сжатия.

Поэтому в веществе, которое обладает положительной магнитострикцией, преимущественное направление намагниченности получается по направлению сил тяжения и под прямым углом к силам сжатия. В веществе, которое обладает отрицательной магнитострикцией (например никель), преимущественное направление намагниченности получается под прямым углом к силам тяжения и по направлению сил сжатия. Итак, направление намагниченности самопроизвольно намагниченных областей при отсутствии внешнего поля определяется упругими напряжениями в этих областях и их кристаллической структурой.

Изменение направления намагниченности областей под влиянием внешнего поля, как предполагается, происходит по двум схемам. Прежде всего возможен постепенный поворот намагниченности в направлении поля. Однако подсчет показывает, что такой поворот становится заметным только при достаточно сильных полях. Поэтому приходится предположить возможным изменение направления намагниченности путем смещения границы, разделяющей две соседние области. Увеличивается та область, намагниченность которой больше ориентирована в направлении внешнего поля. Смещение границы совершается обратимо только до известного предела, при котором наступает неустойчивое состояние и скачком перестраивается вся или некоторая доля оставшейся части второй области. Такой процесс является необратимым. В частности, быстрое изменение потока, происходящее при перестройке данной области, сопровождается местными токами и соответствующими им потерями. Эти необратимые процессы являются причиной возникновения потерь при перемагничивании ферромагнитных веществ в переменном магнитном поле, называемых *потерями на гистерезис*. Связь между величиной потерь на гистерезис и площадью гистерезисной петли и зависимость этих потерь от амплитуды магнитной индукции будет рассмотрена в следующем параграфе.

Изменение направления намагниченности областей путем смещения границ между ними наиболее интенсивно происходит на крутой части кривой намагничивания вещества. При более сильных полях, при которых кривая намагничивания вещества становится пологой, увеличение магнитной индукции происходит в основном за счет поворота намагниченности областей в сторону поля.

Если намагнитить вещество в определенном направлении, т. е. ориентировать намагниченность всех областей в этом направлении,

и затем уменьшить напряженность внешнего поля до нуля, то сохраняется некоторое преимущественное направление намагниченности областей, которое было насильственно создано до этого внешним полем. Такую намагниченность вещества мы называем остаточной и ей соответствующее значение магнитной индукции — остаточной индукцией.

Изложенное в настоящем параграфе дает общую картину явлений в ферромагнитных материалах. Изучению этих явлений посвящено большое количество работ различных авторов; обширные работы в этой области принадлежат Н. С. Акулову, В. К. Аркадьеву, А. С. Займовскому и др.

### § 58. Потери на гистерезис

При перемагничивании ферромагнитного вещества в нем происходят потери энергии на гистерезис.

Нетрудно убедиться, что площадь замкнутой гистерезисной петли в координатах  $B$  и  $H$ , умноженная на масштабы абсцисс и ординат, определяет собой эти потери за один цикл перемагничивания.

Предположим, что намагничиваемое тело из ферромагнитного вещества имеет форму тонкого кольца, длина которого  $l$  и поперечное сечение  $s$ . Кольцо намагничивается током  $i$  в обмотке, имеющей  $\omega$  витков, равномерно распределенных по длине кольца (рис. 186). Работа внешнего источника э. д. с., связанная с изменением  $d\Psi$  потокосцепления  $\Psi = \omega\Phi$  с обмоткой, определяется той частью  $\left(+\frac{d\Psi}{dt}\right)$  напряжения на зажимах обмотки, которая преодолевает э. д. с.  $\left(-\frac{d\Psi}{dt}\right)$ , индуктируемую изменяющимся потокосцеплением:

$$dA = i \frac{d\Psi}{dt} dt = i d\Psi = i\omega d\Phi.$$

Работа, затрачиваемая внешним источником э. д. с. на изменение магнитного состояния в единице объема вещества, равна:

$$dA' = \frac{dA}{ls} = \frac{i\omega}{l} d\left(\frac{\Phi}{s}\right) = H dB.$$

Эта работа определяется площадью полоски, имеющей длину  $H$  и ширину  $dB$  и густо заштрихованной на рис. 187, а.

При увеличении напряженности поля от  $-H_m$  до  $+H_m$  работа определяется разностью абсолютных значений площадей  $EDL$  и  $CLG$ . Площадь  $EDL$  положительна, так как  $H > 0$  и  $dB > 0$ . Площадь  $CLG$  отрицательна, так как  $H < 0$ , а  $dB > 0$ . Поэтому необходимо взять разность абсолютных значений этих площадей.

При уменьшении напряженности поля работа определяется разностью абсолютных значений площадей  $KCG$  и  $KED$  (рис. 187, б). Площадь  $KCG$  положительна, так как  $H < 0$  и  $dB < 0$ , площадь же  $KED$  отрицательна, так как  $H > 0$ , а  $dB < 0$ . Накладывая друг на друга рис. 187, а и 187, б, получаем рис. 187, в. Таким образом, работа внешнего источника, затрачиваемая на циклическое перемагничивание единицы объема вещества, определяется площадью  $S$  гистерезисной петли. Эта работа равна:

$$A' = \oint H dB = Shb,$$

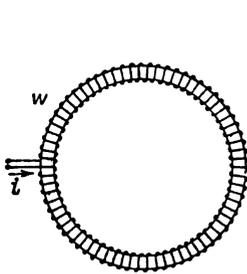


Рис. 186.

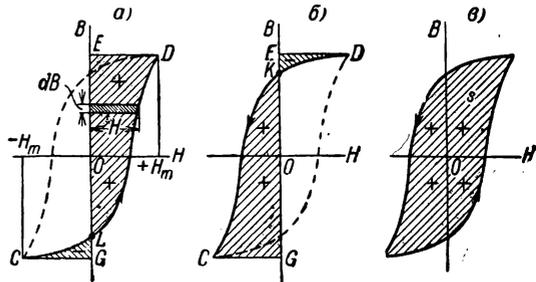


Рис. 187.

где  $h$  — масштаб по оси абсцисс и  $b$  — масштаб по оси ординат. После обхода замкнутой гистерезисной петли магнитное состояние вещества возвращается к тому, которое было до начала обхода. Следовательно, никаких изменений в запасе энергии в системе не происходит, и необходимо заключить, что работа  $A'$  идет на необратимые процессы, связанные с перемагничиванием вещества.

Обозначая энергию, отнесенную к единице объема вещества, теряемую вследствие явления гистерезиса за один полный симметричный цикл перемагничивания, через  $W'_2$ , имеем:

$$W'_2 = A' \quad \text{или} \quad W'_2 = \oint H dB.$$

Штейнмец предложил эмпирическую формулу вида:

$$W'_2 = \eta' B_m^{1,6},$$

где  $B_m$  — амплитуда магнитной индукции и  $\eta'$  — коэффициент, зависящий от рода материала. Формула с показателем 1,6 удовлетворительно сходится с опытом, если  $B_m$  лежит в интервале  $0,1 \frac{\text{вб}}{\text{м}^2} < B_m < 1 \frac{\text{вб}}{\text{м}^2}$ . При  $0 < B_m < 0,1 \frac{\text{вб}}{\text{м}^2}$ , а также при  $1 \frac{\text{вб}}{\text{м}^2} < B_m < 1,6 \frac{\text{вб}}{\text{м}^2}$  более правильные результаты дает формула:

$$W'_2 = \eta'' B_m^2.$$

Обе последние формулы можно объединить в одной, имеющей вид:

$$W'_z = \eta B_m^n.$$

При весьма больших значениях индукции для ряда материалов показатель  $n$  сначала возрастает с увеличением  $B_m$ , становится больше двух и затем вновь уменьшается. Поэтому приведенные эмпирические формулы следует рассматривать лишь как приближенно выражающие зависимость потерь энергии на гистерезис от амплитуды индукции при не слишком больших значениях  $B_m$  и в соответствующих интервалах изменения  $B_m$ .

Следует отметить, что при быстрых периодических изменениях напряженности магнитного поля вид петли, выражающей зависимость  $B = f(H)$ , вообще говоря, отличается от *статической* петли гистерезиса, получаемой при медленных изменениях напряженности поля, так как при этом магнитная индукция является функцией не только напряженности поля, но и ее производных по времени. Причиной этого являются вихревые токи, возникающие в ферромагнитном материале, и магнитная вязкость. *Вихревыми токами* называют электрические токи проводимости, возникающие и замыкающиеся внутри проводящего сплошного тела, находящегося в переменном магнитном поле. Площадь *динамической* петли, выражающей зависимость  $B = f(H)$ , определяет собою при этом полные потери в единице объема ферромагнитного вещества, на перемагничивание и на вихревые токи, за один период изменения напряженности поля.

## § 59. Магнитные свойства некоторых ферромагнитных материалов

Приведем магнитные характеристики некоторых ферромагнитных материалов, рассматривая их как иллюстрацию к вышеизложенному.

Железо всегда имеет некоторые трудно удалимые примеси, оказывающие влияние на его магнитные свойства. Так, наличие углерода и кислорода в небольших количествах заметно снижает магнитную проницаемость. На рис. 188 изображены основная кривая намагничивания и части циклов гистерезиса для промышленного чистого железа (кривая *a*), имеющего 0,1% примесей, и для лабораторной пробы, полученной путем специальной обработки (кривая *b*), в которой содержание примесей было уменьшено до 0,01%. При помощи особой обработки чистого железа был получен материал с исключительно высокой абсолютной магнитной проницаемостью, имеющей максимальное значение  $\mu_{\text{макс}} = 180\,000 \mu_0$ . Потери на гистерезис в этих пробах были весьма малы и составляли всего 0,045 *вт/кг* при  $f=50$  *гц* и при амплитуде индукции  $B_m = 1$  *вб/м<sup>2</sup>*. В электротехнических устройствах, предназначенных для ра-

боты при переменном магнитном потоке, чистое железо не применяется, так как оно обладает сравнительно малым удельным сопротивлением, и потери на вихревые токи оказываются большими. В указанных устройствах используется электротехническая сталь, в которой основной примесью является кремний (Si). Присадки кремния в небольшом количестве значительно увеличивают удельное сопротивление материала. Присадка кремния в количестве до 1,7% уменьшает также потери на гистерезис. Такого порядка содержание кремния имеет электротехническая сталь, применяемая в электромашиностроении. Листовая сталь, предназначенная для сердечников трансформаторов и участков магнитных цепей машин переменного тока, которые работают при больших переменных индукциях, содержит

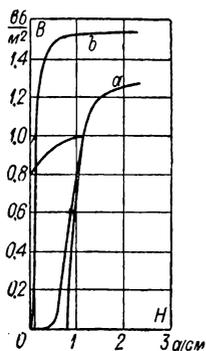


Рис. 188.



Рис. 189.

около 4% Si. Этим достигается значительное уменьшение потерь на вихревые токи. Общие потери на вихревые токи и на гистерезис в хороших сортах трансформаторной стали толщиной 0,35 мм имеют значение порядка 1 *вт/кг* при  $f = 50$  *гц* и  $B_m = 1$  *вб/м<sup>2</sup>*.

Из других сплавов особенный интерес представляют сплавы железа с никелем. Сплав, содержащий 78,5% Ni, имеет весьма высокое значение максимальной магнитной проницаемости  $\frac{\mu}{\mu_0} = 100\ 000 \div 200\ 000$ . Этот сплав называется *пермаллоем*. На рис. 189 приведены для сравнения кривые намагничивания пермаллоя и промышленного чистого железа.

Высокие качества пермаллоя достигаются только при особо тщательном соблюдении режима его тепловой обработки. Кроме того, механические напряжения и сотрясения легко снижают эти качества пермаллоя. Как нетрудно усмотреть из рис. 189, насыщение пермаллоя достигается уже при весьма слабых полях. В слабых полях пермаллой имеет проницаемость в 15—20 раз выше, чем обычная электротехническая сталь. Некоторые примеси, например молибден, еще более повышают магнитную проницаемость пермаллоя, одновременно улучшая его свойства в отношении увеличения удель-

ного сопротивления, и, соответственно, уменьшения потерь при перемагничивании в переменных полях. Например, супермаллой — сплав, содержащий 79% Ni, 16% Fe и 5% Mo, имеет максимальную магнитную проницаемость  $\frac{\mu}{\mu_0} = 800\,000$ . В соответствии с указанными свойствами, сплавы типа пермаллоя могут быть с успехом использованы в устройствах, работающих при слабых магнитных полях, например в трансформаторах тока.

Совершенно иные требования предъявляются к материалам, которые предназначены для изготовления постоянных магнитов. Магнитное состояние вещества постоянного магнита характеризуется некоторой точкой  $F$  (рис. 185) части гистерезисной петли, расположенной во втором квадранте.

От таких материалов требуется, чтобы они обладали высокой остаточной индукцией  $B_r$  и большой коэрцитивной силой  $H_c$ . Последнее необходимо для того, чтобы намагниченность постоянного магнита была устойчивой.

Одним из лучших материалов, отвечающих этим требованиям, является сплав *магнико*, состоящий из железа, никеля, алюминия, кобальта и меди и имеющий  $B_r = 1,25 \frac{\text{вб}}{\text{м}^2}$  и  $H_c = 44000 \frac{\text{а}}{\text{м}}$ . Маг-

нитные свойства этого сплава обусловлены не только его составом, но и специальной обработкой: после отливки магнит охлаждается в сильном магнитном поле.

Для изготовления сердечников катушек и трансформаторов, предназначенных для работы в полях высокой частоты, используются специальные ферромагнитные материалы, так называемые магнитодиэлектрики и ферриты.

Магнитодиэлектрики состоят из основы — порошка ферромагнитного материала — и связки — изолирующего вещества. Они изготавливаются прессованием основы со связкой. Основа придает магнитодиэлектрикам необходимые магнитные свойства; для уменьшения потерь на вихревые токи она должна быть из весьма мелких зерен, а связка изолирует зерна основы друг от друга. Магнитная проницаемость магнитодиэлектриков сравнительно невелика. Она имеет порядок нескольких единиц или десятков и мало меняется с ростом напряженности магнитного поля вплоть до насыщения. Наибольшее распространение получили магнитодиэлектрики, изготавливаемые на основе карбонильного железа, имеющего максимальную магнитную проницаемость  $\frac{\mu}{\mu_0} = 21\,000$  и получаемого сразу в виде весьма мелкого порошка. Эти магнитодиэлектрики имеют  $\frac{\mu}{\mu_0} = 8$ . По сравнению с другими магнитодиэлектриками они имеют наименьшие потери и обладают достаточно хорошей стабильностью во времени и при изменении температуры.

Ферриты — керамические материалы, изготавливаемые из смеси

твердых окислов железа с твердыми окислами других металлов (например никеля и цинка). Измельченные и перемешанные окислы прессуют, а затем обжигают при температуре от 800 до 1400°С, причем происходит их спекание. Изменяя состав, размер зерен, продолжительность и температуру обжига, можно получить ферриты с разными свойствами. По сравнению с магнитодиэлектриками ферриты обладают большей магнитной проницаемостью, порядка нескольких сотен или тысяч, и меньшими потерями.

Магний-цинковые ферриты отличаются прямоугольной петлей гистерезиса (рис. 190). Прямоугольную петлю гистерезиса приобретают также никель-цинковые ферриты в результате механического сжатия, что связано с проявлением в них эффекта, обратного магнитострикции. Тороиды из феррита с прямоугольной петлей гистерезиса получили широкое применение в быстродействующих вычислительных машинах и в различных устройствах импульсной техники.

Следует при этом иметь в виду, что при весьма быстрых изменениях магнитного потока, как было отмечено выше, петля гистерезиса деформируется вследствие магнитной вязкости и вихревых токов.

Развитие наших физических знаний о строении вещества открывает все новые и новые возможности создания материалов с теми или иными весьма ценными магнитными свойствами.

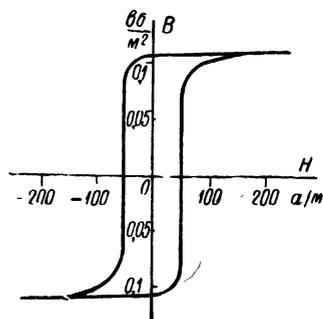


Рис. 190.

## ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

### РАСЧЕТ МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ

#### § 60. Магнитная цепь. Закон магнитной цепи

Магнитной цепью называют совокупность устройств, содержащих обычно ферромагнитные тела и образующих замкнутую цепь, в которой при наличии магнитодвижущей силы образуется магнитный поток и вдоль которой замыкаются линии магнитной индукции. Закон магнитной цепи устанавливает связь между магнитным потоком в магнитной цепи, магнитодвижущей силой вдоль нее,

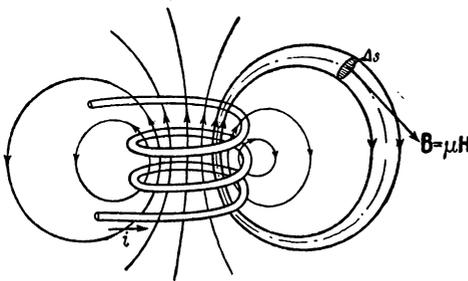


Рис. 191.

геометрическими размерами магнитной цепи и магнитными проницаемостями тел и сред, образующих магнитную цепь. Рассмотрим сначала контур тока произвольной формы, например катушку, состоящую из  $\omega$  витков (рис. 191), и выделим в его магнитном поле элементарную трубку магнитной индукции, линейные размеры поперечного сечения которой весьма малы по сравнению с ее длиной. На рисунке она выделена двумя жирными линиями. М. д. с. вдоль оси трубки равна:

ния которой весьма малы по сравнению с ее длиной. На рисунке она выделена двумя жирными линиями. М. д. с. вдоль оси трубки равна:

$$F = \oint \mathbf{H} \, dl = \oint H \cos \alpha \, dl = \omega i.$$

Вектор  $\mathbf{B}$  направлен по касательной к оси трубки. Ограничимся случаем изотропной среды. Тогда вектор  $\mathbf{H}$  всюду совпадает по направлению с вектором  $\mathbf{B}$  и, следовательно, направлен также по касательной к оси трубки магнитной индукции. Таким образом, имеем  $\cos \alpha = 1$  и можем написать:  $\oint H \, dl = \omega i$ .

Магнитный поток сквозь поверхность  $\Delta s$  сечения трубки, нормального к ее оси, равен  $\Delta \Phi = B \Delta s = \mu H \Delta s$ . Стало быть,

$$H = \frac{\Delta \Phi}{\mu \Delta s} \quad \text{и} \quad \oint \frac{\Delta \Phi}{\mu \Delta s} \, dl = \omega i.$$

Поток  $\Delta\Phi$  имеет постоянное значение вдоль всей трубки, и его можно вынести за знак интеграла. Находим:

$$\Delta\Phi \oint \frac{dl}{\mu\Delta s} = \omega i \quad \text{или} \quad \Delta\Phi = \frac{\omega i}{\oint \frac{dl}{\mu\Delta s}} = \frac{F}{R_m}.$$

Величина, стоящая в знаменателе, называется *магнитным сопротивлением*. В данном случае это магнитное сопротивление рассматриваемой трубки магнитной индукции.

В том простейшем случае, когда величины  $\mu$  и  $\Delta s$  постоянны вдоль всей трубки, получаем:  $R_m = \frac{l}{\mu\Delta s}$ . Таким свойством обладают трубки потока внутри кольцевого соленоида, изображенного на рис. 172 и 186.

Выражение  $R_m = \frac{l}{\mu s}$  для магнитного сопротивления может быть применено с большой степенью точности к замкнутым сердечникам любой формы из ферромагнитного материала при постоянных вдоль сердечника магнитной проницаемости и поперечного сечения  $s$ . Форма сердечника не играет существенной роли, так как практически все линии магнитной индукции направляются по сердечнику. При этом зависимость между магнитным потоком, магнитодвижущей силой и магнитным сопротивлением имеет вид:

$$\Phi = \frac{F}{R_m} = \frac{\omega i}{\frac{l}{\mu s}}.$$

Это соотношение и выражает собой *закон магнитной цепи*.

Закон магнитной цепи в этой форме может быть использован и при расчете магнитных цепей, в которых путь линий магнитной индукции почти полностью лежит в ферромагнитной среде, за исключением небольших участков магнитной цепи, так называемых воздушных зазоров, где линии магнитной индукции проходят по воздуху. Таковы, например, магнитные цепи электрических машин, в которых между вращающейся и неподвижной частями машины существует небольшой воздушный зазор. При этом формула  $R_m = \frac{l}{\mu s}$  должна быть применена к отдельным участкам магнитной цепи, так как магнитная проницаемость разных участков оказывается различной. О расчете сложных магнитных цепей будет сказано в следующих параграфах.

Закон магнитной цепи по форме аналогичен закону Ома для электрической цепи:

$$i = \frac{e}{r},$$

где  $i$  — ток в цепи,  $e$  — э. д. с., действующая в цепи, и  $r$  — электрическое сопротивление цепи, причем в случае цепи из однородного линейного проводника  $r = \frac{l}{\gamma s}$ .

Однако эта аналогия формальна. По своему внутреннему содержанию закон Ома и закон магнитной цепи существенно различаются между собой. Существование постоянной э. д. с. возможно без того, чтобы в электрической цепи под действием ее возникал электрический ток, если цепь из проводников разомкнута и сопротивление всей цепи бесконечно велико. Напротив, существование магнитодвижущей силы всегда связано с одновременным существованием магнитного потока. Последнее положение является лишь иной формулировкой ранее высказанного принципиального положения, согласно которому электрический ток и окружающее его магнитное поле должны рассматриваться как различные характеристики единого электромагнитного процесса.

### § 61. Расчет магнитной цепи с последовательным соединением участков

Магнитные цепи в практических устройствах обычно содержат участки из ферромагнитных материалов, магнитная проницаемость которых зависит от напряженности магнитного поля, т. е. обычно мы имеем дело с *нелинейными* магнитными цепями.

Если в первом приближении можно не учитывать так называемые *магнитные потоки рассеяния*, ответвляющиеся в воздух от главной магнитной цепи, то расчет сложной магнитной цепи оказывается аналогичным расчету соответствующей сложной нелинейной электрической цепи.

В простейшем случае последовательного соединения всех участков магнитной цепи полная магнитодвижущая сила  $F = \omega i$ , определяемая током  $i$  в обмотке, имеющей  $\omega$  витков, равна сумме магнитодвижущих сил на отдельных участках, т. е.

$$F = \oint \mathbf{H} \, dl = \omega i = \sum F_k.$$

Если можно пренебречь потоками рассеяния, то потоки  $\Phi$  во всех участках и во всех сечениях  $s_k$  данного участка будут одинаковы. Применяя закон магнитной цепи для всей магнитной цепи и для ее участков, будем иметь:

$$F = \Phi R_m; \quad F_k = \Phi R_{mk},$$

где  $R_m$  — магнитное сопротивление всей магнитной цепи,  $R_{mk}$  — магнитное сопротивление ее  $k$ -того участка. Подставляя эти выражения в равенство  $F = \sum F_k$  и сокращая на  $\Phi$ , получаем:

$$R_m = \sum R_{mk},$$

т. е. при последовательном соединении общее магнитное сопротивление вычисляется как сумма магнитных сопротивлений всех участков.

Пусть в частном случае сечение  $s_k$  участка постоянно вдоль него и можно пренебречь потоками рассеяния и считать, что поток распределен равномерно по сечению. В этом частном случае и при таких допущениях магнитная индукция будет одинакова во всех точках данного участка. Соответственно одинакова во всех точках будет и магнитная проницаемость, если весь участок состоит из однородного материала. В таком случае можно написать:

$$R_{mk} = \frac{l_k}{s_k \mu_k},$$

где  $l_k$  — длина и  $\mu_k$  — абсолютная магнитная проницаемость  $k$ -того участка, и соответственно:

$$R_m = \sum \frac{l_k}{s_k \mu_k}.$$

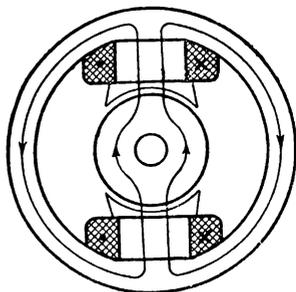


Рис. 192.

На рис. 192 схематически изображена магнитная цепь двухполюсной электрической машины. Хотя поток в ярме и разветвляется на две части, однако такую цепь можно рассматривать как неразветвленную, удвоив сечение ярма. Так поступить можно ввиду того, что обе части ярма имеют равные магнитные сопротивления. Конечно, цепь можно рассматривать как неразветвленную, только пренебрегая потоками рассеяния. Практически расчет ведут по следующей схеме. По большей части заданным является магнитный поток  $\Phi$ , который должен быть образован в рассчитываемой магнитной цепи, например в воздушном зазоре машины.

На основе общих данных выполняют эскиз магнитной цепи проектируемого устройства и выбирают материал для каждого участка магнитной цепи. Задают среднее значение магнитной индукции в каждом участке цепи. Величину этого среднего значения индукции выбирают в зависимости от рода материала участка и от того назначения, которое имеет данный участок цепи в общем устройстве. После этого определяют сечение  $s$  каждого участка, как отношение потока к индукции.

Далее, поскольку выбраны значения индукции и материал, можно по кривым намагничивания найти для каждого участка значение напряженности поля  $H$ . Но напряженность поля численно равна м. д. с., приходящейся на единицу длины. Поэтому м. д. с., необходимая для проведения потока через данный участок цепи, равна

произведению  $H_k l_k$ . В случае последовательного соединения всех участков цепи полная искомая м. д. с., необходимая для образования заданного потока, равна сумме м. д. с. на отдельных участках, т. е.

$$wi = \sum H_k l_k = H_1 l_1 + H_2 l_2 + \dots$$

В случае, если при заданной конструкции магнитной цепи заданной является м. д. с.  $wi$ , а не поток  $\Phi$ , следует пользоваться для расчета общим методом, изложенным в следующем параграфе.

При более точном подсчете должны быть учтены и потоки рассеяния. Вследствие наличия потоков рассеяния магнитный поток может быть различным в отдельных следующих друг за другом участках магнитной цепи, а также в различных сечениях одного и того же участка. Необходимо учесть также и то, что поток распределяется в отдельных местах неравномерно по сечению. Так, например, около краев полюсов машины (рис. 192) происходит сгущение линий магнитной индукции, и магнитная индукция в полюсных наконечниках в этих местах принимает весьма большие значения. Соответственно эти места полюсных наконечников сильно насыщены и магнитная проницаемость их сравнительно невелика. Последнее обстоятельство учитывают соответствующими опытными коэффициентами.

Мы видим, что точный расчет даже сравнительно простой магнитной цепи оказывается весьма сложным.

## § 62. Расчет разветвленных магнитных цепей

В общем случае разветвленной магнитной цепи необходимо применить к узлам цепи уравнение, вытекающее из принципа непрерывности магнитного потока. Окружим узел магнитной цепи (рис. 193) замкнутой поверхностью  $s$ . Согласно принципу непрерывности магнитный поток сквозь эту поверхность равен нулю:

$$\Phi = \oint_s \mathbf{B} \, ds = 0.$$

Следовательно, сумма потоков в участках магнитной цепи, сходящихся к одному узлу, равна нулю:

$$\sum \Phi_k = 0.$$

Это уравнение подобно первому уравнению Кирхгофа для электрических цепей. Для цепи, изображенной на рисунке, имеем:

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3.$$

М. д. с. по контуру  $AbBcA$  равна нулю. Следовательно, м. д. с. вдоль пути  $AbB$  равна м. д. с. вдоль пути  $AcB$ . Обозначим ее через  $F_{23}$ . Введем, кроме того, обозначения:  $R_{M1}$  — магнитное сопротивление участка  $BaA$ ,  $R_{M2}$  — участка  $AbB$  и  $R_{M3}$  — участка  $AcB$ . Имеем:

$$\Phi_2 = \frac{F_{23}}{R_{M2}}; \quad \Phi_3 = \frac{F_{23}}{R_{M3}}.$$

Следовательно,

$$\Phi_1 = \frac{F_{23}}{R_{M2}} + \frac{F_{23}}{R_{M3}} = F_{23} \left( \frac{1}{R_{M2}} + \frac{1}{R_{M3}} \right) = F_{23} \frac{1}{R_{M23}},$$

откуда

$$\frac{1}{R_{M23}} = \frac{1}{R_{M2}} + \frac{1}{R_{M3}}.$$

Величина, обратная магнитному сопротивлению, называется *магнитной проводимостью*. Таким образом, общая магнитная проводимость параллельно соединенных участков магнитной цепи равна сумме магнитных проводимостей этих участков. Магнитное сопротивление всей цепи, изображенной на рис. 193, равно:

$$R_M = R_{M1} + R_{M23},$$

и между м. д. с.  $\omega i$  и потоком  $\Phi_1$  существует соотношение:

$$\Phi_1 = \frac{\omega i}{R_M}.$$

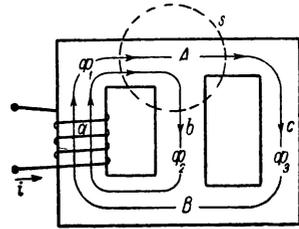


Рис. 193.

По отношению к любому замкнутому контуру сложной магнитной цепи можно написать закон, подобный второму закону Кирхгофа для электрической цепи. Именно, сумма м. д. с. вдоль замкнутого контура магнитной цепи равна сумме произведений магнитных потоков на магнитные сопротивления, составленных для всех неразветвленных участков контура магнитной цепи:

$$\sum \omega_k i_k = \sum \Phi_k R_{Mk}.$$

Действительно:

$$\sum \omega_k i_k = \sum F_k = \sum H_k l_k = \sum \mu_k s_k H_k \frac{l_k}{\mu_k s_k} = \sum \Phi_k R_{Mk}.$$

Таким образом, расчет сложной магнитной цепи, если не учитываются потоки рассеяния, аналогичен расчету соответствующей электрической цепи. Например, расчет магнитной цепи, изображенной на рис. 193, аналогичен расчету электрической цепи, приведенной

на рис. 194. При этом м. д. с.  $\omega i$  соответствует э. д. с.  $e$ , магнитным потокам  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$  соответствуют токи  $i_1$ ,  $i_2$  и  $i_3$  и магнитным сопротивлениям  $R_{м1}$ ,  $R_{м2}$  и  $R_{м3}$  — электрические сопротивления  $r_1$ ,  $r_2$  и  $r_3$ .

Расчет разветвленной магнитной цепи весьма усложняется, если магнитная проницаемость зависит от напряженности поля,

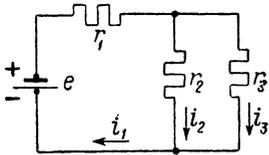


Рис. 194.

что и имеет место для ферромагнитных материалов. Все вышеприведенные уравнения остаются в силе, но входящие в них магнитные сопротивления участков цепи зависят от искомой напряженности поля в этих участках. Остается в силе и аналогия с расчетом электрической цепи, но участки соответствующей электрической цепи должны при этом обладать нелинейными

характеристиками  $i = f(u)$ , аналогичными нелинейным характеристикам  $\Phi = f(F)$  участков магнитной цепи. В этих случаях при расчете необходимо использовать кривую намагничивания материала, дающую зависимость магнитной индукции от напряженности поля (рис. 195). В виде примера рассмотрим цепь, изображенную на рис. 193.

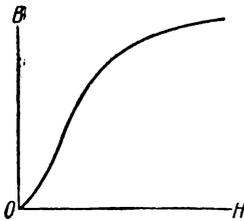


Рис. 195.

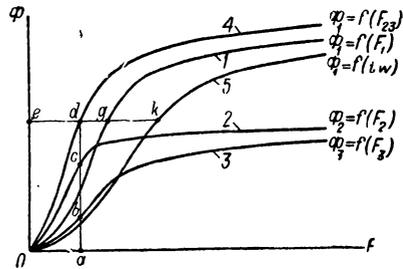


Рис. 196.

Пользуясь кривой намагничивания (рис. 195), строим кривые  $\Phi = f(F)$  для каждого участка в отдельности (кривые 1, 2 и 3 на рис. 196). Для построения этих кривых необходимо умножить ординаты кривой намагничивания, изображенной на рис. 195, на сечения участков и абсциссы — на длины участков. Например, кривая 1, дающая зависимость  $\Phi_1 = f(F_1)$ , получается умножением ординат кривой на рис. 195 на  $s_1$  и абсцисс — на  $l_1$ . Так как

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3 \quad \text{и} \quad F_2 = F_3 = F_{23},$$

то, складывая ординаты кривых 2 и 3 на рис. 196, определяющие зависимости  $\Phi_2 = f(F_2)$  и  $\Phi_3 = f(F_3)$ , получим кривую 4, дающую

зависимость  $\Phi_1 = f(F_{23})$ . Например, точка  $d$  кривой 4 находится из суммы:  $ad = ab + ac$ .

Полная м. д. с.  $i\omega$  равна сумме м. д. с.  $F_1$  и  $F_{23}$ , необходимых для проведения потока  $\Phi_1$  через первый участок и через параллельно соединенные второй и третий участки:

$$i\omega = F_1 + F_{23}.$$

Поэтому, складывая абсциссы кривых 1 и 4, определяющих зависимости  $\Phi_1 = (F_1)$  и  $\Phi_1 = f(F_{23})$ , получаем кривую 5, дающую связь  $\Phi_1 = f(i\omega)$ . Например, точка  $k$  кривой 5 находится из суммы  $ek = ed + eg$ .

Легко усмотреть, что метод расчета разветвленной магнитной цепи аналогичен методу расчета соответствующей электрической цепи с нелинейными элементами, изложенному в § 36.

Аналогия с электрическими цепями может быть с успехом использована и для расчета более сложных магнитных цепей, в которых имеются катушки с токами в различных ветвях магнитной цепи.

Наличие потоков рассеяния в сложных магнитных цепях чрезвычайно усложняет расчеты. Такие расчеты можно проводить методом последовательного приближения. Сначала находим распределение м. д. с. по участкам, пренебрегая потоками рассеяния. Затем на основе этого распределения, пользуясь методами расчета поля, находим потоки рассеяния и уточняем потоки в участках магнитной цепи. Это дает возможность уточнить распределение м. д. с. и, соответственно, величины потоков рассеяния и т. д.

### § 63. О расчете постоянных магнитов

Явление остаточного намагничивания, характерное для ферромагнитных веществ, широко используется при изготовлении постоянных магнитов.

Рассмотрим постоянный магнит в виде кольца с воздушным зазором (рис. 197). Будем обозначать все величины, относящиеся к зазору, индексом 2, и величины, относящиеся к телу магнита, индексом 1. Физически поле магнита создается элементарными токами в теле магнита. Однако напряженность поля  $H$ , с которой мы имеем дело во всех технических расчетах, определяется так, что  $\oint H dl$  равен только макроскопическим токам, протекающим в проводниках, охватываемых контуром интегрирования, и в его величину не входят элементарные токи в намагниченных телах. В случае постоянного магнита, так как макроскопических токов нет, имеем всюду  $\oint H dl = 0$ . В частности, этот интеграл также равен нулю вдоль

пути по оси магнита и зазора. Следовательно, имеем:

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = H_1 l_1 + H_2 l_2 = 0,$$

т. е.

$$H_1 l_1 = -H_2 l_2,$$

где  $l_1$  и  $l_2$  — длины осей магнита и зазора,  $H_1$  и  $H_2$  — напряженности поля в теле магнита и в зазоре. Для упрощения мы предполагаем поле однородным и в магните и в зазоре. Заметим, что в последних равенствах и дальше в настоящем параграфе под  $H$  мы подразумеваем не модуль вектора  $\mathbf{H}$ , который всегда положителен, а алгебраическую величину, которая может быть положительной или отрицательной в зависимости от того, совпадает направление вектора  $\mathbf{H}$  с направлением положительного обхода или ему противоположно.

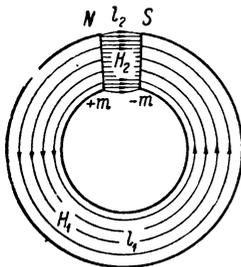


Рис. 197.

В общем случае неоднородного поля следует написать:  $F_1 = -F_2$ , где  $F_1$  и  $F_2$  — магнитодвижущие силы вдоль оси магнита и вдоль оси зазора.

На рис. 198 изображена часть гистерезисной петли, снятой при большом магнитном насыщении для замкнутого кольца, т. е. при отсутствии зазора, и характеризующей материал магнита.  $B_r$  — остаточная индукция,  $H_c$  — коэрцитивная сила. Ветвь  $abc$  называется *кривой размагничивания*. На рис. 199 эта ветвь перестроена в координатах  $F$  и  $\Phi$ , причем  $F$  — м. д. с. вдоль оси магнита, при однородном намагничивании равная  $H_1 l_1$ , и  $\Phi$  — поток в нейтральной зоне магнита, при однородном намагничивании равный  $B_1 s_1$ , где  $s_1$  — поперечное сечение магнита.

При отсутствии зазора  $B = B_r$ ,  $\Phi = \Phi_r$  и  $H$  всюду равно нулю. При наличии зазора на проведение магнитного потока через зазор, имеющий магнитное сопротивление  $R_{\mu 2}$ , требуется м. д. с.  $F_2 = R_{\mu 2} \Phi_2$ .

Если считать приближенно поле в зазоре однородным, то

$$F_2 = H_2 l_2 = \frac{l_2}{\mu_0 s_2} \Phi.$$

На рис. 199 прямая  $OL$  изображает связь между  $F_2$  и  $\Phi$ . Так как  $F_1 = -F_2$ , то прямая  $OM$ , дающая связь между  $F_1$  и  $\Phi$ , является зеркальным отражением прямой  $OL$  в оси ординат. Очевидно, точка  $b$  пересечения луча  $OM$  с кривой размагничивания  $abc$  и определяет магнитное состояние вещества магнита при наличии воздушного зазора.

Энергия магнитного поля в зазоре магнита определяется выражением:

$$\frac{\Phi F_2}{2},$$

которое при однородном поле приобретает вид:

$$\frac{B_2 s_2 H_2 l_2}{2} = \frac{B_2 H_2}{2} V_2,$$

где  $V_2$  — объем зазора. Эта энергия равна половине площади прямоугольника  $AbGO$  на рис. 199. Необходимо так проектировать маг-

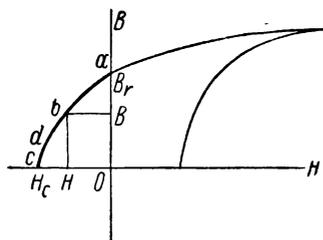


Рис. 198.

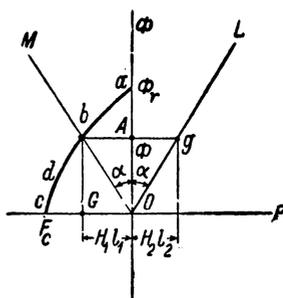


Рис. 199.

нит, чтобы эта площадь была максимальной. Соответственно точка  $b$  должна занимать на кривой размагничивания в координатах  $H$  и  $B$  (рис. 198) такое положение, чтобы произведение  $|BH|$  получилось наибольшим.

Трудность расчета реальных магнитов заключается в трудности вычисления магнитного сопротивления  $R_{m2}$  пути потока по воздуху с учетом неоднородности поля, в трудности учета потока рассеяния, выходящего через боковые поверхности магнита, и в трудности определения магнитного состояния магнита при неоднородном намагничивании.

#### § 64. О расчете магнитных цепей с постоянными магнитами

Если в воздушный зазор магнита внести тело из так называемого магнитномягкого вещества, т. е. из ферромагнитного вещества, которое легко намагничивается в сравнительно слабых полях, то можно пренебречь магнитным сопротивлением тела и утверждать, что внесение такого тела эквивалентно уменьшению зазора и уменьшению магнитного сопротивления зазора. Соответственно вместо прямой  $OM$  будем иметь прямую  $OM'$  (рис. 200). Однако магнитное состояние магнита не переходит в точку  $b'$  по кривой размагничи-

вания, а переходит в точку  $k$  по кривой  $bmk$ , и магнитный поток увеличивается до значения  $\Phi_k$ . Если вновь удалить тело из воздушного зазора, то магнитное состояние вернется в точку  $b$  по кривой  $knb$ . Петля  $bmknb$  носит наименование *частной петли гистерезиса*.

Такого рода явления происходят в электрических генераторах с постоянными магнитами, например в магнето (рис. 201). Полюсные наконечники и якорь магнето имеют малое магнитное сопротивление

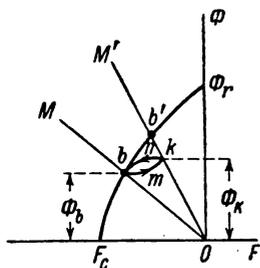


Рис. 200.

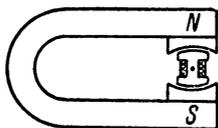


Рис. 201.

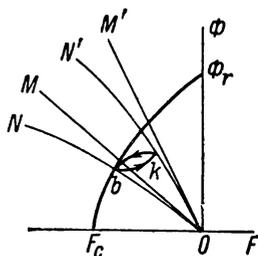


Рис. 202.

ние. Магнитное же сопротивление зазора меняется в зависимости от положения якоря. В положении, изображенном на рисунке, оно имеет наименьшее значение. При повороте якоря на угол  $\frac{\pi}{2}$  оно имеет наибольшее значение. Магнитный поток в магнитной цепи магнита при вращении якоря периодически изменяется в пределах от  $\Phi_k$  до  $\Phi_b$  (рис. 200). Поток же, пронизывающий обмотку якоря, изменяется по отношению к этой обмотке от  $+\Phi_k$  до  $-\Phi_k$  при повороте якоря и обмотки на угол  $\pi$  из положения, указанного на рисунке. Соответственно среднее значение э. д. с., индуцируемой в обмотке за половину оборота якоря в этих пределах, получается равным:

$$e_{cp} = \frac{2\Phi_k}{T/2},$$

где  $T$  — время полного оборота якоря.

Если учесть конечное магнитное сопротивление полюсных наконечников и якоря, то вместо прямых  $OM$  и  $OM'$  будем иметь кривые  $ON$  и  $ON'$  (рис. 202). Отрезки, параллельные оси  $OF$ , между кривыми  $ON$  и  $OM$  и между кривыми  $ON'$  и  $OM'$  представляют в масштабе по оси абсцисс значения магнитодвижущей силы вдоль полюсных наконечников и якоря при соответствующих значениях магнитного потока. Их можно получить из кривых намагничивания материала полюсных наконечников и якоря. Вершины  $b$  и  $k$  частной петли гистерезиса лежат при этом на кривых  $ON$  и  $ON'$ .

### § 65. Распределение напряженности магнитного поля вдоль неоднородной магнитной цепи

Рассмотрим вопрос о распределении напряженности магнитного поля вдоль неоднородной магнитной цепи. Именно, рассмотрим поле катушки с коротким сердечником из ферромагнитного материала (рис. 203). На фигуре 1а изображено поле вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$ , вызванное током в катушке при отсутствии сердечника. На фигуре 1б показано поле вектора  $\mathbf{B}$  при том же токе в катушке при внесенном сердечнике. Когда внутрь катушки вно-

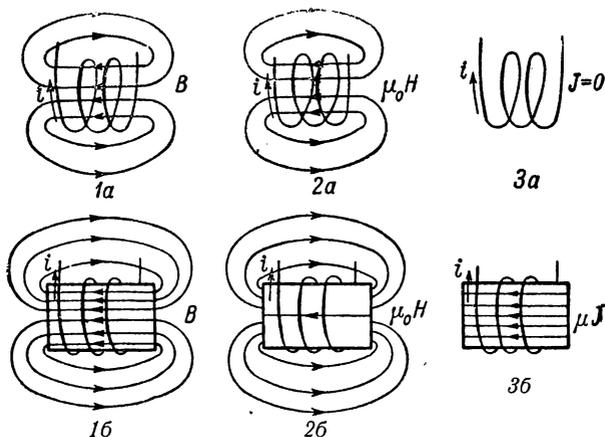


Рис. 203.

сится сердечник из ферромагнитного материала, общее магнитное сопротивление всей магнитной цепи уменьшается, вследствие чего при неизменной магнитодвижущей силе  $\omega i$ , т. е. при неизменном токе в обмотке катушки, возрастает магнитный поток и увеличивается индукция во всех точках пространства. Во всех случаях линии вектора  $\mathbf{B}$  непрерывны.

На фигуре 2а изображено поле вектора  $\mu_0 \mathbf{H}$ , пропорционального вектору  $\mathbf{H}$ , для случая, когда сердечник отсутствует. Поле на фигуре 2а не отличается от поля, изображенного на фигуре 1а, так как при отсутствии сердечника всюду  $\mathbf{J} = 0$  (фигура 3а) и  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ .

Однако при внесении сердечника поле вектора  $\mathbf{H}$  и, соответственно, вектора  $\mu_0 \mathbf{H}$  (фигура 2б) перераспределяется. Линейный интеграл напряженности поля вдоль всего магнитного пути, т. е. полная м. д. с., остается без изменения. Но эта м. д. с. теперь иначе перераспределяется между отдельными участками цепи. Сравнительно малая доля ее затрачивается на проведение потока через сердечник, имеющий малое магнитное сопротивление вследствие большой магнитной проницаемости ферромагнитного материала. Боль-

шая часть м. д. с. приходится на остальную часть пути потока по воздуху. В связи с этим происходит ослабление поля вектора  $\mathbf{H}$  внутри сердечника и усиление его вне сердечника (фигура 2б). Вне сердечника по-прежнему имеем  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ . Внутри же сердечника имеет место соотношение  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{J}$ , где  $\mathbf{J}$  — вектор намагниченности сердечника.

Обратим внимание, что при наличии сердечника линии вектора  $\mathbf{H}$  прерывны — они начинаются и кончаются на поверхности сердечника. Вообще линии вектора  $\mathbf{H}$  прерывны на границах раздела двух сред с различными магнитными проницаемостями, если магнитные линии (линии вектора  $\mathbf{B}$ ) пересекают эту поверхность. Линии вектора  $\mathbf{J}$  (фигура 3б) также прерывны, так как  $\mathbf{J} \neq 0$  только в веществе сердечника.

Заметим, что объяснение изменения картины поля при внесении сердечника с привлечением понятия о магнитном сопротивлении является формальным, так как в действительности усиление магнитного потока при внесении сердечника происходит не вследствие уменьшения магнитного сопротивления, а вследствие добавления к полю макроскопического тока в катушке поля элементарных токов в теле сердечника. Физически магнитное поле и при внесении сердечника существует в пустоте, но при этом оно создается не только макроскопическими, но и элементарными токами. Это действительно существующее поле изображено на фигуре 1б.

Тем не менее понятие о магнитном сопротивлении и о напряженности поля, определенной вышеуказанным способом, оказывается весьма полезным, так как оно дает возможность рассчитывать сложные магнитные цепи по аналогии с электрическими цепями.

Интересно отметить, что в частном случае однородного замкнутого сердечника из ферромагнитного вещества (рис. 18б), на который равномерно наложена обмотка, имеющая  $w$  витков, как поле вектора  $\mathbf{B}$ , так и поле вектора  $\mathbf{H}$  распределены равномерно вдоль сердечника. В этом частном случае поле вектора  $\mu_0 \mathbf{H}$  представляет собой то физическое поле, которое было бы при отсутствии сердечника и наличии тока в обмотке, а поле вектора  $\mu_0 \mathbf{J}$  представляет собой то физическое поле, которое было бы при наличии только одних элементарных токов в теле сердечника. Этот частный простейший случай имеет большую практическую ценность для исследования магнитных свойств вещества сердечника, так как при этом  $H$  вычисляется по формуле  $H = \frac{wi}{l}$  так же, как и при отсутствии сердечника, где  $l$  — длина сердечника, а  $B$  — может быть получено путем измерения магнитного потока в сердечнике, например, баллистическим методом,

---

---

## ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

### ИНДУКТИВНОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОНТУРОВ

#### § 66. Собственная индуктивность электрических контуров

Из соотношения  $\Psi_L = Li$  имеем:

$$L = \frac{\Psi_L}{i},$$

т. е. индуктивность электрической цепи равна отношению потокоцепления самоиндукции этой цепи к току в ней.

Определенная таким образом индуктивность называется *статической*, если величина  $\Psi_L$  определена при постоянном токе. Статическая индуктивность зависит только от размеров и формы контура и от значения магнитной проницаемости среды, в которой существует поток самоиндукции. Она не зависит от тока в контуре при условии, что магнитная проницаемость не зависит от напряженности поля.

Если среда однородна, т. е.  $\mu$  во всех точках пространства, в котором существует магнитный поток, имеет одно и то же значение, то можно написать:

$$L = \mu f(g),$$

где  $f(g)$  есть функция геометрических параметров, определяющих размеры и форму контура. Действительно, при  $\mu = \text{const}$  величина  $H$  в каждой точке пространства изменяется пропорционально току  $i$  в контуре. Поэтому поток вектора магнитной индукции  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$  пропорционален  $\mu$  и  $i$ , а следовательно, индуктивность пропорциональна  $\mu$  и некоторой функции  $f(g)$ , зависящей от размеров и формы контура. В более общем случае, когда магнитная проницаемость в различных точках имеет разные значения, она не может быть вынесена в выражении для  $L$  общим множителем, и это выражение должно быть написано в виде:

$$L = F(\mu, g).$$

Наконец, если  $\mu$  зависит от напряженности поля, то  $L$  зависит и от тока в контуре. Иногда статическую индуктивность мы будем отмечать индексом «ст», т. е. писать  $L_{cm}$ .

Нередко оказывается целесообразным пользоваться при расчетах так называемой *динамической индуктивностью*, равной пределу отношения приращения потокосцепления самоиндукции электрической цепи к приращению тока в ней, когда последнее стремится к нулю:

$$L_{\partial} = \lim_{\Delta i \rightarrow 0} \frac{\Delta \Psi_L}{\Delta i} = \frac{d\Psi_L}{di}.$$

При этом предполагается, что размеры контура, образующего цепь, не изменяются и, следовательно,  $\Psi_L$  возрастает только вследствие увеличения тока  $i$ .

Динамическую индуктивность можно представить еще и в ином виде. Именно:

$$L_{\partial} = \frac{\frac{d\Psi_L}{dt}}{\frac{di}{dt}} = - \frac{e_L}{di}.$$

Следовательно, *динамическая индуктивность геометрически неизменяемого контура равна отношению взятой с обратным знаком э. д. с. самоиндукции, возникающей в контуре, к скорости изменения тока в контуре.*

Для всякого электрического контура  $L > 0$ , так как невозможно существование электрического тока без магнитного поля и так как ток в контуре и поток самоиндукции всегда одного знака — направление тока и направление линий потока самоиндукции связаны между собой правилом правого винта.

Можно, когда это требуется, стремиться уменьшить индуктивность цепи, но невозможно осуществить цепь, совершенно не обладающую индуктивностью. Радикальной мерой, приводящей к уменьшению индуктивности цепи, является возможное сближение тех участков цепи, ток в которых протекает в противоположных направлениях. Этим способом пользуются для уменьшения индуктивности проводов переменного тока при весьма большом токе, например, в подводке к мощным электрическим печам. Этим способом широко пользуются при изготовлении так называемых безындукционных сопротивлений, предназначенных для различных измерительных цепей и приборов. С этой целью проволоку складывают вдвое, т. е. образуют так называемый бифиляр (рис. 204). Сложенную вдвое проволоку при большой ее длине наматывают на катушку. Однако и катушка с бифилярной обмоткой обладает, хотя и малой, но конечной индуктивностью, так как всегда остается поток, проходящий через тело самих проволок (рис. 205).

Если, наоборот, желают по возможности увеличить индуктивность цепи, то свивают проволоку таким образом, что в расположен-

ных рядом ее частях ток оказывается направленным в одну сторону (рис. 206). Так изготавливаются катушки самоиндукции.

В качестве первого примера определим индуктивность обмотки, равномерно навитой на сердечник, имеющий форму тороида прямоугольного сечения (рис. 207). В этом случае линии магнитной индукции суть окружности с центрами на оси тороида. М. д. с. имеет одно и то же значение вдоль всех линий, равно  $\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \omega i$ . Величина  $H$  постоянна вдоль каждой линии. Следовательно,

$$H \oint dl = H 2\pi r = \omega i \quad \text{и} \quad H = \frac{\omega i}{2\pi r},$$

где  $r$  — радиус данной линии.

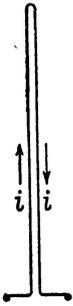


Рис. 204.

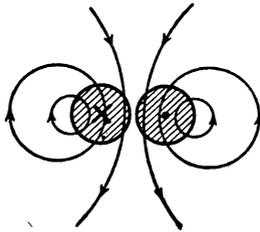


Рис. 205.

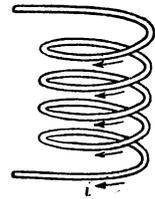


Рис. 206.

Напряженность поля изменяется вдоль радиуса, но одинакова во всех точках сечения сердечника, равноудаленных от оси тороида. В пределах полоски, имеющей поверхность  $ds = h dr$ , где  $h$  — высота сердечника, поле можно считать однородным. Поток сквозь эту полоску равен:

$$d\Phi = B ds = \mu H h dr = \frac{\mu \omega i h}{2\pi} \frac{dr}{r}.$$

Поток сквозь все сечение сердечника получается равным:

$$\Phi = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu \omega i h}{2\pi} \frac{dr}{r} = \frac{\mu \omega i h}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

где  $r_1$  и  $r_2$  — внутренний и наружный радиусы сердечника.

Предположение, что все линии магнитной индукции являются окружностями с центрами на оси тороида, связано с пренебрежением линиями, охватывающими отдельные витки обмотки, что возможно при достаточно плотной обмотке. При таком допущении каждая линия магнитной индукции сцепляется со всеми витками обмотки и, следовательно, потокосцепление самоиндукции равно:

$$\Psi_L = \Phi \omega = \frac{\mu \omega^2 i h}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Таким образом, индуктивность обмотки тороида выражается формулой:

$$L = \frac{\mu \omega^2 h}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

В качестве второго примера найдем выражение для индуктивности концентрического кабеля (рис. 208). Пусть  $r_1$  — радиус сечения внутреннего (прямого) провода,  $r_2$  — внутренний радиус сечения наружного (обратного) провода. Поток в теле обратного

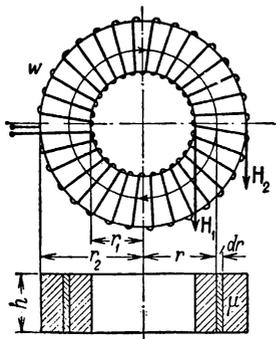


Рис. 207.

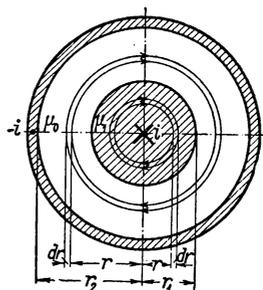


Рис. 208.

провода пренебрежем ввиду малой толщины этого провода. Поле вне кабеля отсутствует, так как сумма токов в прямом и обратном проводах равна нулю, и, следовательно, равен нулю линейный интеграл напряженности магнитного поля, взятый по любой контуре, охватывающему весь кабель. Таким образом, остается учесть поток в изолирующем веществе и поток в теле внутреннего провода. Оба эти потока определяются только током  $i$  во внутреннем проводе. Рассматриваемый пример особенно интересен тем, что здесь необходимо определить потокоцепление, которое определяется линиями магнитной индукции, проходящими в теле самого провода. Напряженность поля в изолирующем слое выражается формулой:

$$H = \frac{i}{2\pi r}$$

и в теле внутреннего провода формулой:

$$H = \frac{i}{2\pi r_1^2} r,$$

причем  $r$  — расстояние от оси кабеля до точки, в которой определяется  $H$ . Последняя формула справедлива только при условии

равномерного распределения тока по сечению провода, т. е. только при постоянном токе. Эти формулы были получены в § 55.

Разделим поток на кольцевые трубки, имеющие прямоугольное поперечное сечение  $ds = l dr$ , где  $l$  — длина кабеля. Поток сквозь сечение такой трубки равен:

$$d\Phi = B ds = \mu H l dr.$$

Трубки магнитной индукции, расположенные в слое изоляции, сцепляются один раз со всем током  $i$  и, следовательно, положив для вещества изоляции  $\mu = \mu_0$ , для этих трубок имеем:

$$d\Psi = d\Phi = \mu_0 \frac{i}{2\pi r} l dr.$$

Потокосцепление  $\Psi'$ , определяемое линиями магнитной индукции, расположенными в изолирующем слое, равно:

$$\Psi' = \int_{r_1}^{r_2} \mu_0 \frac{i}{2\pi} l \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0}{2\pi} i l \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Трубки магнитной индукции, расположенные в теле внутреннего провода, сцепляются только с частью тока. Если ток распределен равномерно по сечению провода, то часть тока  $i_r$ , охватываемая трубкой, имеющей радиус  $r$ , равна:

$$i_r = \frac{i}{\pi r_1^2} \pi r^2 = i \frac{r^2}{r_1^2}.$$

Если весь провод рассматривать как один виток, то отношение  $\frac{i_r}{i}$  представляет собой часть витка, охватываемую данной трубкой магнитной индукции. Поэтому поток  $d\Phi$  в трубке дает потоко-сцепление  $d\Psi$  со всем током  $i$ , равное:

$$d\Psi = \frac{i_r}{i} d\Phi = \frac{r^2}{r_1^2} \mu \frac{i}{2\pi r_1^2} r l dr = \frac{\mu}{2\pi} \frac{i l}{r_1^4} r^3 dr,$$

где  $\mu$  — абсолютная магнитная проницаемость материала провода. Потокосцепление  $\Psi''$ , определяемое линиями магнитной индукции, замыкающимися в теле провода, имеет значение:

$$\Psi'' = \int_0^{r_1} \frac{\mu}{2\pi} \frac{i l}{r_1^4} r^3 dr = \frac{\mu}{8\pi} i l.$$

Искомая индуктивность выражается формулой:

$$L = \frac{\Psi' + \Psi''}{i} = \frac{l}{2\pi} \left( \mu_0 \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{\mu}{4} \right).$$

Обратим внимание на то, что формулы, полученные в рассматриваемых примерах, иллюстрируют ранее высказанное общее утверждение, согласно которому статическая индуктивность зависит только от магнитной проницаемости среды и размеров и формы контура цепи. Когда  $\mu$  всюду имеет одно и то же значение, она входит в выражение для  $L$  общим множителем. Индуктивность не зависит от тока в цепи, если  $\mu$  не зависит от напряженности поля.

В случае катушек с замкнутыми или почти замкнутыми сердечниками приближенно можно считать, что все линии потока самоиндукции сцепляются со всеми витками катушки, и вычислять потокосцепление самоиндукции из соотношения  $\Psi_L = \Phi \omega$ . Поток  $\Phi$  в сечении сердечника может быть при этом вычислен на основании закона магнитной цепи:

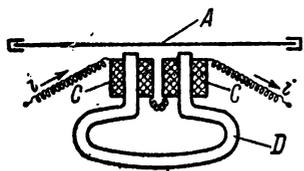


Рис. 209.

$$\Phi = \frac{\omega i}{R_m},$$

где  $R_m$  — магнитное сопротивление. Следовательно, для индуктивности получаем выражение:

$$L = \frac{\Psi_L}{i} = \frac{\omega^2}{R_m}.$$

При изменении размеров и формы контура электрической цепи или при изменении размеров магнитной цепи, в которой существует поток самоиндукции, индуктивность изменяется.

Примером цепи с переменной индуктивностью может служить цепь катушек телефона, эскизно изображенная на рис. 209. Индуктивность такой цепи приближенно может быть вычислена по последней формуле, причем  $R_m$  — магнитное сопротивление, равное сумме магнитных сопротивлений сердечника (обычно намагниченного), воздушного зазора и участка мембраны  $A$ . При колебаниях мембраны величина  $R_m$  изменяется вследствие изменения воздушного зазора между мембраной и полюсами сердечника, а следовательно, изменяется и индуктивность цепи.

## § 67. Взаимная индуктивность электрических контуров

Взаимная индуктивность двух электрических контуров определяется из приведенного в § 49 соотношения:

$$\Psi_{2M} = M_{21} i_1,$$

где  $\Psi_{2M}$  — потокосцепление взаимной индукции со вторым контуром, определяемое током, протекающим в первом контуре. Имеем:

$$M_{21} = \frac{\Psi_{2M}}{i_1}.$$

Когда ток протекает во втором контуре ( $i_2 \neq 0$ ), а в первом контуре ток отсутствует ( $i_1 = 0$ ), то возникает поток самоиндукции, окружающий второй контур. Часть линий этого потока будет сцепляться и с первым контуром, образуя поток взаимной индукции. Потокосцепление взаимной индукции  $\Psi_{1M}$  связано с током  $i_2$  соотношением:

$$\Psi_{1M} = M_{12}i_2,$$

откуда получаем:

$$M_{12} = \frac{\Psi_{1M}}{i_2}.$$

В § 72 будет показано, что для двух контуров при условии, что  $\mu$  не зависит от напряженности поля, всегда имеет место равенство:

$$M_{12} = M_{21},$$

и, следовательно, при этом условии мы можем опустить индексы у взаимных индуктивностей и написать:

$$M = \frac{\Psi_{1M}}{i_2} = \frac{\Psi_{2M}}{i_1}.$$

Таким образом, взаимная индуктивность двух цепей равна отношению потокосцепления взаимной индукции одной из цепей к току в другой цепи.

Эти выражения при постоянных токах определяют собой статическую взаимную индуктивность.

Динамическая взаимная индуктивность определяется из выражений:

$$M_{\partial} = \lim_{\Delta i_2 \rightarrow 0} \frac{\Delta \Psi_{1M}}{\Delta i_2} = \frac{d\Psi_{1M}}{di_2}, \quad \text{или} \quad M_{\partial} = \lim_{\Delta i_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta \Psi_{2M}}{\Delta i_1} = \frac{d\Psi_{2M}}{di_1}$$

или из выражений, содержащих э. д. с. взаимной индукции:

$$M_{\partial} = - \frac{e_{1M}}{di_2} = - \frac{e_{2M}}{di_1}.$$

При этом предполагается, что размеры и форма контуров, а также их взаимное расположение неизменны.

В том случае, когда магнитная проницаемость во всех точках поля имеет одно и то же значение, статическая взаимная индуктивность может быть представлена в виде произведения:

$$M = \mu f(g),$$

где  $f(g)$  — величина, зависящая от размеров и формы контуров и от их взаимного расположения. В более общем случае, когда величина  $\mu$  различна в разных точках среды, в которой существует поле, имеем:

$$M = F(\mu, g),$$

и, наконец, если магнитная проницаемость зависит от напряженности поля, то  $M$  зависит от тока.

Величина  $M$  может быть как положительной, так и отрицательной и, в частности, равной нулю. Положительные направления токов в обоих контурах всегда можно выбрать произвольно. Раз эти направления выбраны, то величину  $M$  мы должны считать положительной, когда при положительных токах потоки взаимной индукции, сцепляющиеся с контурами, оказываются также положи-

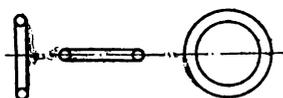


Рис. 210.

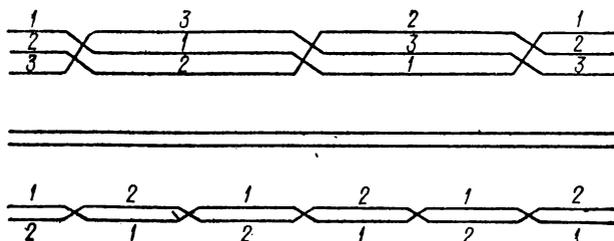


Рис. 211.

тельными, т. е. совпадают по знаку с потоками самоиндукции. Иными словами,  $M > 0$ , если при положительных токах магнитные потоки в контурах направлены согласно, и  $M < 0$ , если при положительных токах потоки направлены встречно.

Во многих случаях весьма важно по возможности уменьшить индуктивное влияние одной цепи на другие. Три витка или три цилиндрические катушки всегда можно расположить так (рис. 210), чтобы соблюдалось условие:

$$M_{12} = M_{23} = M_{31} = 0.$$

Линии передачи оказывают индуктивное действие на расположенные около них линии связи. Такое же индуктивное действие оказывают друг на друга отдельные пары проводов линий связи, протянутые параллельно одна другой. Для уничтожения этого вред-

ного влияния осуществляют через известные расстояния вдоль линии транспозицию проводов, т. е. изменяют расположение проводов как в линии сильного тока, так и в отдельных парах проводов линии связи (рис. 211). Этим самым индуктивное влияние на одних участках линии компенсируется влиянием на других участках.

В виде примера найдем выражение для взаимной индуктивности между двумя обмотками, равномерно распределенными на сердечнике в форме тороида прямоугольного сечения (рис. 212). Пусть число витков одной обмотки равно  $\omega_1$  и другой —  $\omega_2$ . Магнитный поток  $\Phi$  в сердечнике, согласно выражению, полученному в предыдущем параграфе, равен:

$$\Phi = \frac{\mu}{2\pi} \omega_1 i_1 h \ln \frac{r_2}{r_1},$$

где по-прежнему  $h$  — высота сердечника,  $r_1$  и  $r_2$  — его внутренний и наружный радиусы и  $\mu$  — абсолютная магнитная проницаемость сердечника.

Потокоцепление взаимной индукции со второй обмоткой имеет значение:

$$\Psi_{2M} = \Phi \omega_2 = \frac{\mu}{2\pi} \omega_1 \omega_2 i_1 h \ln \frac{r_2}{r_1},$$

и, следовательно, взаимная индуктивность выражается формулой:

$$M = \frac{\mu}{2\pi} \omega_1 \omega_2 h \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Примером цепей с переменной взаимной индуктивностью являются все электрические машины, в которых периодически изменяется взаимная индуктивность между катушками обмотки, расположенной на неподвижной части, и катушками обмотки, расположенной на вращающейся части машины.

## § 68. Связь между индуктивностями.

### Эквивалентные индуктивности

К общему вопросу о связи между индуктивностями относится прежде всего равенство:  $M_{kp} = M_{pk}$ , которое справедливо во всех случаях, когда магнитная проницаемость среды не зависит от напряженности поля и которое будет доказано в § 72. В ряде случаев оказывается, что одна из индуктивностей  $M_{kp} = \frac{\Psi_{kM}}{i_p}$  или

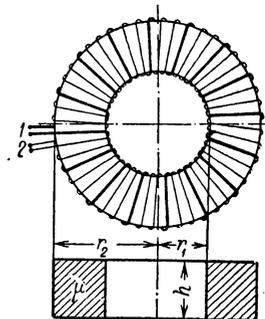


Рис. 212.

$M_{pk} = \frac{\Psi_{pM}}{i_k}$  вычисляется много проще другой. Существование равенства между ними позволяет выбирать любой способ вычисления.

Остановимся на соотношении между индуктивностями  $L_1$ ,  $L_2$  и  $M$  двух произвольных контуров. Пусть к зажимам первого контура приложено напряжение  $u_1$  (рис. 213), второй же контур коротко замкнут. Чтобы выпукло выделить явления, связанные с электро-

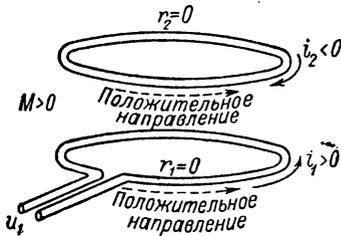


Рис. 213.

магнитной инерцией системы, предположим, что  $r_1 = 0$  и  $r_2 = 0$ , т. е. что контуры выполнены из сверхпроизводящего материала. Напряжение  $u_1$  вызывает в первом контуре ток  $i_1$ , который индуцирует во втором контуре э. д. с. взаимной индукции, равную

$$e_{2M} = -M \frac{di_1}{dt}.$$

Эта э. д. с. вызывает во втором контуре ток  $i_2$ , который изменяется так, чтобы э. д. с. самоиндукции уравновесила э. д. с.  $e_{2M}$ , т. е. сумма этих э. д. с. должна быть равна нулю:

$$-M \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} = 0, \text{ или } -M \frac{di_1}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt}.$$

Напряжение  $u_1$  на зажимах первого контура уравновешивается э. д. с. самоиндукции и взаимной индукции, т. е. оно должно иметь составляющие, противоположные по знаку этим э. д. с. Следовательно,

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}.$$

Подставляя производную  $\frac{di_2}{dt}$  из предпоследнего уравнения в последнее, находим:

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - \frac{M^2}{L_2} \frac{di_1}{dt} = L_1 \left( 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} \right) \frac{di_1}{dt} = L_1' \frac{di_1}{dt}.$$

Полученное выражение показывает, что электромагнитный процесс в первичной цепи протекает так, как если бы эта цепь была уединена и обладала при этом эквивалентной индуктивностью:

$$L_1' = L_1 \left( 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} \right).$$

Величина  $L'_1$  всегда положительна. Чтобы в этом убедиться, предположим, что  $L'_1 < 0$ , и покажем, что такое предположение противоречит закону сохранения энергии. Пусть до момента времени  $t = 0$  первичная цепь была отключена от источника э. д. с. и оба тока  $i_1$  и  $i_2$  были равны нулю и пусть в момент  $t = 0$  к зажимам цепи присоединяется источник постоянного напряжения  $u_1 = U_1 = \text{const}$ . Имеем:

$$u_1 = U_1 = L'_1 \frac{di_1}{dt} \quad \text{или} \quad \frac{di_1}{dt} = \frac{U_1}{L'_1} = \text{const}$$

и, следовательно,

$$i_1 = \frac{U_1}{L'_1} t + C = \frac{U_1}{L'_1} t.$$

Работа внешнего источника напряжения от момента включения цепи до момента  $t$  равна:

$$\int_0^t U_1 i_1 dt = \int_0^t \frac{U_1^2}{L'_1} t dt = \frac{U_1^2}{2L'_1} t^2.$$

Если бы величина  $L'_1$  была отрицательной, то отрицательной была бы также и работа, совершаемая внешним источником. Это означало бы, что энергия все время поступала бы из рассматриваемой нами системы двух контуров и отдавалась внешнему источнику. При этом энергия отдавалась бы системой в неограниченном количестве и с возрастающей до бесконечности мощностью. Такой процесс противоречит закону сохранения энергии, и, следовательно, предположение, что  $L'_1 < 0$ , неверно. Индуктивность  $L'_1$  также не может быть равна нулю, так как невозможно осуществить цепь, в которой при существовании тока полностью отсутствовал бы магнитный поток.

Итак, во всех случаях должно быть:

$$L'_1 = L_1 \left( 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} \right) > 0,$$

откуда получаем:

$$\frac{M^2}{L_1 L_2} < 1.$$

Отношение  $k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}}$  называют коэффициентом связи двух цепей.

Всегда соблюдается неравенство  $k < 1$ .

Полученное выражение для эквивалентной индуктивности  $L'_1$  позволяет найти характер влияния на индуктивность данного кон-

тура так называемых *вихревых токов* или *токов Фуко*, возникающих при переменном потоке в проводящих телах, расположенных в непосредственной близости от данного контура.

По сути дела, в этих случаях мы имеем наложение на поток самоиндукции потоков взаимной индукции, определяемых токами, которые индуктируются в посторонних телах. Однако в таких случаях обычно формально рассматривают измененный результирующий поток, сцепляющийся с данным контуром, как поток самоиндукции. Индуктивность контура, определенную в таких условиях, называют *эквивалентной*.

Для качественной оценки явления вихревых токов заменим сплошное проводящее тело, в котором возникают эти токи, некоторым эквивалентным короткозамкнутым контуром. Пусть  $L_1$  — индуктивность данного контура при отсутствии вихревых токов,  $L_2$  — индуктивность короткозамкнутого контура и  $M$  — взаимная индуктивность между ними. Если принять сопротивление контура вихревого тока  $r_2 = 0$ , то эквивалентная индуктивность первого контура определяется выражением:

$$L_1' = L_1 \left( 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} \right) = L_1 (1 - k^2),$$

т. е. при наличии короткозамкнутого вторичного контура она оказывается меньше индуктивности  $L_1$  уединенного первичного контура. Физически это уменьшение объясняется возникновением во вторичном контуре тока  $i_2$ , который создает в первичном контуре поток взаимной индукции  $Mi_2$ , противоположный по знаку потоку самоиндукции  $L_1 i_1$ . Действительно, интегрируя уравнение, выражающее равновесие э. д. с. во втором короткозамкнутом контуре:

$$-M \frac{di_1}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt},$$

и учитывая, что при  $i_1 = 0$  и  $i_2 = 0$ , получаем:

$$-Mi_1 = L_2 i_2 \quad \text{или} \quad \frac{i_2}{i_1} = -\frac{M}{L_2}.$$

Следовательно,

$$\frac{Mi_2}{L_1 i_1} = -\frac{M^2}{L_1 L_2} < 0,$$

т. е. потоки  $Mi_2$  и  $L_1 i_1$  имеют разные знаки.

Из равенства  $L_2 i_2 = -Mi_1$  получаем уравнение:  $L_2 i_2 + Mi_1 = 0$ , которое свидетельствует, что результирующее потокосцепле-

ние со вторичным контуром остается постоянным и равным нулю. Этого и следует ожидать, так как вторичный контур — сверхпроводящий. Согласно принципу электромагнитной инерции результирующее потокоцепление с таким контуром не может быть изменено никаким способом. В данном случае в начале процесса это потокоцепление было равно нулю и оно остается все время равным нулю.

При сверхпроводящем вторичном контуре уменьшение эквивалентной индуктивности не зависит от скорости изменения тока — оно одинаково как при переменном, так и при постоянном токе. Следовательно, в одинаковой мере уменьшаются как статическая, так и динамическая индуктивности. Это связано с тем, что постоянный ток в сверхпроводящем контуре может существовать сколь угодно долго без действия э. д. с.

Если  $r_2 \neq 0$ , то при переменном токе в первом контуре влияние вихревых токов, возникающих во вторичном короткозамкнутом контуре, на величину  $L'_1$  имеет тот же характер, что и при  $r_2 = 0$ , но лишь менее резко выражено. Оно тем менее выражено, чем меньше частота тока, так как при уменьшении частоты убывает э. д. с. взаимной индукции во вторичном контуре и уменьшается ток  $i_2$  при заданном сопротивлении  $r_2$ . При постоянном токе  $i_1$  при  $r_2 \neq 0$  ток  $i_2$  во вторичном контуре равен нулю, и, следовательно, получаем  $L'_1 = L_1$ . Таким образом, присутствие короткозамкнутых контуров, в которых могут возникать вихревые токи, в реальных условиях сказывается только на величине динамической индуктивности и не меняет величины статической индуктивности.

На величине индуктивности контура при переменном токе сказывается также так называемое явление *поверхностного эффекта*. Переменный ток распределяется неравномерно по сечению проводника, так как в разных нитях тока, на которые можно мысленно подразделить проводник, индуцируются различные э. д. с. Плотность тока оказывается больше вблизи поверхности проводника и убывает к центру сечения. Очевидно, изменение распределения тока по сечению проводника приводит к изменению потока, сцепляющегося с контуром, а следовательно, и к изменению эквивалентной индуктивности контура.

Влияние поверхностного эффекта в массивных проводниках на индуктивность контура, образованного этими проводниками, можно качественно оценить, пользуясь рассмотренным влиянием вихревых токов. Можно рассматривать неравномерно распределенный по сечению проводника переменный ток как результат наложения на равномерно распределенный ток вихревых токов, возникающих в теле самого проводника. Эти токи вызываются переменным магнитным потоком, существующим в теле самого проводника. Магнитный поток, создаваемый этими вихревыми токами, так же как в рассмотренном выше случае внешнего сплошного тела, ориентирован так, что появление его приводит к уменьшению результи-

рующего потока внутри проводника. Следовательно, явление поверхностного эффекта приводит к уменьшению эквивалентной динамической индуктивности.

### § 69. Нелинейная характеристика катушки с сердечником из ферромагнитного материала

Индуктивность электрического контура зависит от магнитных свойств среды, в которой существует магнитное поле, связанное с током в контуре.

В случае диамагнитной среды, для которой  $\mu < \mu_0$ , индуктивность контура оказывается меньше индуктивности, которую он имел бы, если бы магнитная проницаемость среды равнялась  $\mu_0$ . В случае парамагнитной среды  $\mu > \mu_0$ , что ведет к увеличению индуктивности контура. Наибольший практический интерес имеет случай ферромагнитной среды, когда  $\mu \gg \mu_0$ .

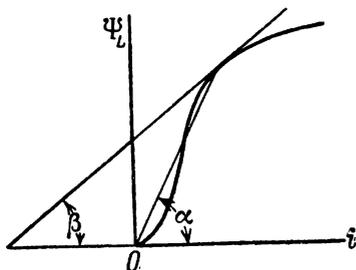


Рис. 214.

Рассмотрим катушку с сердечником из ферромагнитного материала. Связь между потокосцеплением с витками катушки и током  $i$  в катушке представлена в виде кривой на рис. 214 для случая воз-

растания тока от нуля при условии, что сердечник был предварительно размагничен. Эта кривая имеет тот же характер, что и первоначальная кривая намагничивания  $B = f(H)$  материала сердечника, так как потокосцепление  $\Psi_L$  определяется значениями магнитной индукции  $B$ , а ток  $i$  — значениями напряженности поля  $H$ . При однородном намагничивании замкнутого сердечника потокосцепления  $\Psi_L$  пропорционально  $B$ , ток  $i$  пропорционален  $H$  и кривые  $\Psi_L = F(i)$  и  $B = f(H)$  подобны. Потокосцепление  $\Psi_L$  не пропорционально току. Говорят, что катушка с сердечником из ферромагнитного материала имеет *нелинейную характеристику*  $\Psi_L = F(i)$ . Индуктивность такой катушки *зависит от тока*. Нетрудно усмотреть, что статическая и динамическая индуктивности катушки с сердечником из ферромагнитного материала различны. Действительно, статическая индуктивность равна (рис. 214):

$$L_{cm} = \frac{\Psi_L}{i} = k \operatorname{tg} \alpha = F_1(i),$$

динамическая же равна:

$$L_d = \frac{d\Psi}{di} = k \operatorname{tg} \beta = F_2(i),$$

где  $k$  зависит от масштабов по осям абсцисс и ординат. Заметим, что в общем случае динамическая индуктивность определяется из динамической характеристики катушки, которая при достаточно быстрых изменениях тока отличается от статической характеристики вследствие явлений вихревых токов и магнитной вязкости.

При периодических процессах динамическая характеристика имеет вид замкнутой петли, причем при достаточно низкой частоте тока она практически совпадает со статической петлей гистерезиса.

Когда нас интересует величина постоянного потокосцепления  $\Psi_L$  при заданном постоянном токе  $i$ , мы должны пользоваться статической индуктивностью. Если же необходимо вычислить э. д. с., индуцируемую в цепи при изменяющемся потоке, то следует пользоваться динамической индуктивностью.

---

---

## ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ

### ЭНЕРГИЯ И МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРОЯВЛЕНИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

#### § 70. Энергия системы контуров с электрическими токами

В электрических цепях при установлении в них токов возникают э. д. с. индукции. Внешние источники энергии, к которым приключены электрические цепи, при этом совершают работу, так как э. д. с. источников должны преодолевать э. д. с. индукции, возникающие в контурах цепей. Часть энергии, отдаваемой источниками, запасается в электрических цепях и может быть вновь полностью или частично возвращена при уменьшении токов в контурах цепей.

Напряжение  $u_k$ , создаваемое внешним источником энергии на зажимах  $k$ -той цепи, должно иметь составляющую, равную падению напряжения в сопротивлении цепи, и составляющую, уравновешивающую э. д. с., индуктируемую в этой цепи:

$$u_k = i_k r_k + \frac{d\Psi_k}{dt}.$$

Предположим, что внутреннее сопротивление источника энергии равно нулю или же что оно учтено в сопротивлении цепи. В таком случае э. д. с.  $e_k$  источника, приключенного к зажимам цепи, равна напряжению  $u_k$  и работа источника энергии, совершаемая за время  $dt$ , равна:

$$u_k i_k dt = i_k^2 r_k dt + i_k d\Psi_k.$$

Первое слагаемое представляет собой энергию, теряемую в проводниках цепи в связи с необратимым процессом выделения тепла. Второе слагаемое представляет собой часть работы источника, связанную с изменением потокоцепления  $\Psi_k$ . Эта часть работы нас непосредственно и будет интересовать. Обозначим ее:

$$i_k d\Psi_k = dA_k.$$

Пусть в рассматриваемой системе цепей имеется  $n$  отдельных контуров. Полная работа всех источников энергии, затрачиваемая

ними в связи с изменением потокосцеплений во всех  $n$  контурах системы от нуля до конечного значения, имеет выражение:

$$A = \sum_{k=1}^{k=n} A_k = \sum_{k=1}^{k=n} \int_0^{\Psi_k} i_k d\Psi_k.$$

Предположим, что магнитная проницаемость среды не зависит от напряженности поля и что токи устанавливаются весьма медленно. При этом в среде, окружающей проводники электрических цепей, не совершается никаких необратимых процессов. Все контуры будем считать геометрически неизменяемыми и неподвижными. Следовательно, в системе не совершается механической работы на перемещение контуров. При таких условиях мы можем утверждать на основании закона сохранения энергии, что вся работа  $A$  идет на создание запаса энергии  $W_m$  в системе электрических цепей, т. е.  $A = W_m$ .

При бесконечно медленно установлении токов магнитное поле, окружающее контуры с токами, может рассматриваться в каждый отдельный момент времени как постоянное поле. Поэтому токи в контурах и потоки, с ними сцепляющиеся, связаны между собой статическими собственными и взаимными индуктивностями. Эти индуктивности зависят только от геометрических координат системы и от значения магнитной проницаемости.

Поскольку принято, что величина  $\mu$  не зависит от напряженности поля, мы можем пользоваться принципом наложения и рассматривать потокосцепление  $\Psi_k$  с  $k$ -тым контуром, как сумму потокосцепления самоиндукции, определяемого током в этом же контуре, и потокосцеплений взаимной индукции, определяемых токами в остальных контурах:

$$\Psi_k = L_k i_k + \sum_{p=1}^{p=n} M_{kp} i_p \quad (p \neq k).$$

На основании закона сохранения энергии можно утверждать, что работа  $A$  не зависит от порядка установления токов. Иначе всегда можно было бы выбрать такой порядок установления токов и отличный от него такой порядок уменьшения токов вновь до нуля, чтобы энергия, затраченная внешними источниками, была меньше энергии, им возвращенной, что явилось бы нарушением закона сохранения энергии. Поэтому мы имеем право выбрать порядок установления токов по своему усмотрению. Интегрирование в выражении для работы  $A$  проще всего выполнить, если положить, что все токи возрастают пропорционально друг другу, т. е.  $i_p = \alpha_{kp} i_k$ , где  $\alpha_{kp} = \text{const}$ . При этом выражение для потоко-

сцепления можно привести к виду:

$$\Psi_k = L_k i_k + \sum_{p=1}^{p=n} M_{kp} \alpha_{kp} i_k = \left( L_k + \sum_{p=1}^{p=n} M_{kp} \alpha_{kp} \right) i_k = m_k i_k,$$

где

$$p \neq k \text{ и } m_k = \left( L_k + \sum_{p=1}^{p=n} M_{kp} \alpha_{kp} \right) = \text{const.}$$

Искомая работа получается равной

$$A = \sum_{k=1}^{k=n} \int_0^{\Psi_k} i_k d\Psi_k = \sum_{k=1}^{k=n} m_k \int_0^{i_k} i_k di_k = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{m_k i_k^2}{2} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{i_k \Psi_k}{2}.$$

Используя равенство  $A = W_{\mathcal{M}}$ , находим:

$$W_{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} i_k \Psi_k.$$

Следовательно, энергия системы контуров с токами равна сумме произведений токов в контурах на потокосцепления контуров.

Подставим в полученное нами выражение для энергии  $W_{\mathcal{M}}$  выражения потокосцеплений  $\Psi_k$  через токи в контурах и собственные и взаимные индуктивности контуров. Замечая, что  $M_{kp} = M_{pk}$ , получим:

$$W_{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + \dots + \frac{1}{2} L_k i_k^2 + \dots + \\ + M_{12} i_1 i_2 + M_{13} i_1 i_3 + \dots + M_{kp} i_k i_p + \dots$$

Таким образом, энергия системы контуров с токами есть квадратичная функция токов в контурах.

## § 71. Распределение энергии в магнитном поле

Энергию системы токов мы представляем себе распределенной в магнитном поле этих токов. Согласно этому энергию системы токов всегда можно выразить в виде объемного интеграла:

$$W_{\mathcal{M}} = \int_V W'_{\mathcal{M}} dV,$$

распространенного по всему полю, причем  $W'_{\mathcal{M}}$  — объемная плотность энергии магнитного поля.

Рассмотрим сначала простейший случай, когда поле можно считать однородным. Именно, рассмотрим тонкий кольцевой соленоид с равномерно распределенной обмоткой, имеющей  $\omega$  витков (см. рис. 186). Пусть  $s$  — поперечное сечение сердечника,  $l$  — его длина и  $\mu$  — абсолютная магнитная проницаемость материала сердечника. Величину  $\mu$  будем предполагать постоянной. При плотной обмотке все поле сосредоточено внутри сердечника и каждая линия магнитной индукции сцепляется со всеми витками обмотки. Следовательно, потокосцепление  $\Psi$  с обмоткой связано с потоком  $\Phi$  сквозь сечение сердечника соотношением:  $\Psi = \omega\Phi$ .

Согласно полученному в предыдущем параграфе выражению, энергия, запасенная в такой цепи, равна  $W_{\text{м}} = \frac{\Psi i}{2} = \frac{\Phi \omega i}{2}$ . Так как в пределах сечения  $s$  можно считать магнитную индукцию постоянной, то можно написать:  $\Phi = Bs$ . Кроме того, на основании закона полного тока имеем:  $\omega i = \oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = Hl$ , так как  $H = \text{const}$  вдоль сердечника. Таким образом, выражение для энергии может быть представлено в виде:  $W_{\text{м}} = \frac{BHsl}{2}$ . Величина  $sl = V$  есть объем пространства, занятого магнитным полем. Следовательно, объемная плотность энергии магнитного поля имеет выражение:

$$W'_{\text{м}} = \frac{W_{\text{м}}}{V} = \frac{BH}{2} = \frac{\mu H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu}.$$

Для анизотропной среды объемная плотность энергии поля должна иметь выражение:

$$W'_{\text{м}} = \frac{\mathbf{B}\mathbf{H}}{2},$$

где  $\mathbf{B}\mathbf{H} = BH \cos \alpha$  — скалярное произведение векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$ , имеющих в общем случае в анизотропной среде различные направления. Угол  $\alpha$  есть угол между векторами  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$ .

Покажем, что полученное выражение для объемной плотности энергии поля справедливо в самом общем случае неоднородного поля в анизотропной среде, т. е. что энергия всего поля может быть представлена в виде интеграла:

$$W_{\text{м}} = \int_V \frac{\mathbf{B}\mathbf{H}}{2} dV,$$

распространенного по всему полю.

С этой целью рассмотрим поле катушки, изображенной на рис. 215. Представим все поле разделенным на элементарные трубки магнитной индукции. Выделим в одной из таких трубок элементарный отрезок длиной  $d\mathbf{l}$ . Пусть  $d\mathbf{s}$  есть сечение трубки, нормальное к ее оси. В пределах бесконечно малого объема  $dV = d\mathbf{s} d\mathbf{l}$  отрезка

трубки поле можно считать однородным. Пользуясь выражением для объемной плотности энергии, получаем энергию поля в объеме  $dV$ :

$$W'_m dV = \frac{BH}{2} dV = \frac{BH \cos \alpha ds dl}{2}.$$

Вычислим теперь энергию  $dW_m$  в объеме всей элементарной трубки. С этой целью проинтегрируем полученное выражение вдоль оси трубки. Поток  $d\Phi = B ds$  сквозь сечение трубки имеет постоянное значение вдоль всей трубки и может быть вынесен за знак интеграла. Получаем:

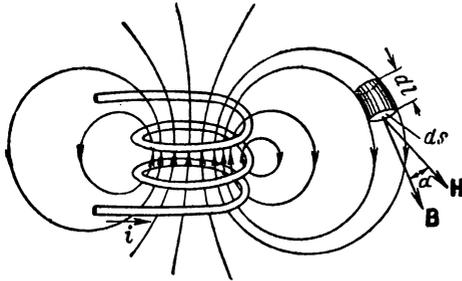


Рис. 215.

$$\begin{aligned} dW_m &= \oint_l \frac{BH \cos \alpha}{2} ds dl = \\ &= \frac{d\Phi}{2} \oint H \cos \alpha dl. \end{aligned}$$

На основании закона полного тока имеем:

$$\oint H \cos \alpha dl = \omega i,$$

где  $\omega$  — число витков, с которыми сцепляется данная трубка. Замечая, что  $\omega d\Phi = d\Psi$  есть доля потокоцепления, вносимая данной трубкой в величину потокоцепления всей цепи, получаем:

$$dW_m = \frac{d\Phi}{2} \omega i = \frac{id\Psi}{2}.$$

Для получения энергии  $W_m$  всего поля необходимо просуммировать энергии всех элементарных трубок. Выполняя такое суммирование, находим:

$$W_m = \int \frac{id\Psi}{2} = \frac{i}{2} \int d\Psi = \frac{i\Psi}{2},$$

т. е. приходим к выражению, полученному на основании закона сохранения энергии.

Таким образом, энергия всего магнитного поля в общем случае может быть представлена в виде интеграла:

$$W_m = \int_V \frac{BH}{2} dV,$$

где интегрирование распространяется по объему всего пространства, в котором существует магнитное поле.

## § 72. Принцип взаимности

Используя утверждение о независимости энергии магнитного поля системы контуров тока от последовательности установления токов, нетрудно показать, что имеет место равенство:

$$M_{kp} = M_{pk}$$

во всех случаях, когда магнитная проницаемость не зависит от напряженности магнитного поля.

Рассмотрим два контура тока. Энергия их магнитного поля имеет выражение:

$$\begin{aligned} W_{\mu} &= \sum_{k=1}^{k=2} \frac{i_k \Psi_k}{2} = \frac{i_1 \Psi_1}{2} + \frac{i_2 \Psi_2}{2} = \frac{i_1}{2} (L_1 i_1 + M_{12} i_2) + \\ &+ \frac{i_2}{2} (L_2 i_2 + M_{21} i_1) = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} + \frac{M_{12} + M_{21}}{2} i_1 i_2. \end{aligned}$$

При выводе этого выражения предполагалось, что все токи возрастают пропорционально друг другу.

Предположим теперь, что токи устанавливаются в иной последовательности. Пусть сначала устанавливается ток  $i_1$  в первом контуре до своего конечного значения, ток же во втором контуре при этом остается равным нулю. Э. д. с. источника энергии в первом контуре совершает работу

$$A_1 = \int_0^{\Psi_{1L}} i_1 d\Psi_{1L} = L_1 \int_0^{i_1} i_1 di_1 = \frac{L_1 i_1^2}{2}.$$

Теперь, оставляя неизменным ток  $i_1$ , будем увеличивать ток  $i_2$  от нуля до его конечного значения. Э. д. с. источника энергии во втором контуре совершает работу

$$A_2 = \int_0^{\Psi_{2L}} i_2 d\Psi_{2L} = \frac{L_2 i_2^2}{2}.$$

Э. д. с. источника энергии в первом контуре при этом также совершает работу, так как для поддержания тока  $i_1$  постоянным она должна преодолевать э. д. с. взаимной индукции, возникающую в первом контуре при изменении тока во втором контуре. Эта работа равна:

$$A_3 = \int_0^{\Psi_{1M}} i_1 d\Psi_{1M} = M_{12} i_1 \int_0^{i_2} di_2 = M_{12} i_1 i_2,$$

причем  $i_1$  выносится за знак интеграла как постоянная величина. Таким образом, энергия магнитного поля получается равной:

$$W_{\text{м}} = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} + M_{12} i_1 i_2.$$

Сопоставляя это выражение с полученным выше в предположении одновременного возрастания всех токов, имеем:  $\frac{M_{12} + M_{21}}{2} = M_{12}$  или  $M_{21} = M_{12}$ , что и требовалось показать.

На основании этого соотношения можно следующим образом сформулировать принцип взаимности в применении к магнитному полю контуров с электрическими токами:

*если ток  $i$ , протекающий в первом контуре, вызывает во втором контуре потокосцепление взаимной индукции  $\Psi$ , то такой же ток  $i$ , протекающий во втором контуре, вызывает в первом контуре потокосцепление взаимной индукции той же величины  $\Psi$ .*

### § 73. Электромагнитная сила

Проводники с электрическими токами, расположенные в магнитном поле, как показывает опыт, испытывают механические силы. Эти механические силы называют *электромагнитными силами* или *электродинамическими силами*. Электромагнитные силы возникают не только в контуре с током, расположенном во внешнем поле, но и в том случае, когда этот контур уединен, и поле, его окружающее, определяется током в самом контуре.

К электромагнитным силам мы относим также механические силы, действующие на тела из ферромагнитного материала, расположенные в магнитном поле, так как по существу и в этом случае мы имеем дело с механическими силами, которые испытывают в магнитном поле электрические токи. В данном случае это — элементарные токи, существующие в теле из ферромагнитного материала.

Таким образом, электромагнитными силами мы называем механические силы взаимодействия контуров с токами, силы, возникающие в уединенном контуре с током, силы взаимного притяжения или отталкивания магнитов, силы взаимодействия токов и магнитов и силы притяжения ферромагнитных тел к магнитам и к контурам с токами.

Рассмотрим систему, состоящую из  $n$  контуров с токами. Положение контуров определяется необходимым числом обобщенных геометрических координат  $g$ . Обобщенной геометрической координатой, как было разъяснено в § 16, может быть любая геометрическая величина, определяющая положение системы в пространстве. Механические силы, стремящиеся изменить координаты

системы, при этом также должны рассматриваться как обобщенные силы.

Пусть под действием силы  $f$  некоторая координата  $g$  системы получает приращение  $dg$  в направлении действия силы. Предположим, что все остальные координаты системы остаются неизменными. Например, один из контуров системы (рис. 216) перемещается в некотором направлении, все же остальные контуры остаются неподвижными. Сила  $f$  при этом совершает работу  $f dg$ . В результате изменения координаты  $g$  в общем случае произойдет изменение энергии магнитного поля контуров с токами на величину  $d_g W_m$ . Индексом  $g$  мы отмечаем, что изменяется только одна геометрическая координата.

Предположим, что в среде, окружающей проводники, отсутствуют необратимые процессы. В таком случае работа внешних источников энергии, действующих на зажимах контуров системы, будет расходоваться на выделение тепла в контурах, на изменение запаса энергии в магнитном поле и на механическую работу  $f dg$ , совершаемую электромагнитной силой. Сказанное может быть выражено уравнением:

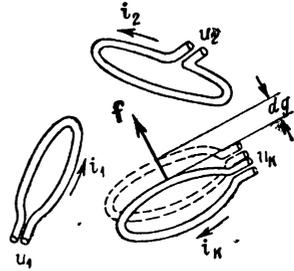


Рис. 216.

$$\sum_{k=1}^{k=n} u_k i_k dt = \sum_{k=1}^{k=n} i_k^2 r_k dt + d_g W_m + f dg.$$

Для напряжения  $u_k$ , создаваемого внешним источником энергии на зажимах  $k$ -того контура, имеем:

$$u_k = i_k r_k + \frac{d\Psi_k}{dt},$$

где  $\Psi_k$  — потокосцепление с этим контуром. Следовательно, сумма работ всех источников энергии может быть представлена также в виде:

$$\sum_{k=1}^{k=n} u_k i_k dt = \sum_{k=1}^{k=n} i_k^2 r_k dt + \sum_{k=1}^{k=n} i_k d\Psi_k.$$

Сравнивая между собой оба выражения для суммы работ источников энергии, имеем:

$$\sum_{k=1}^{k=n} i_k d\Psi_k = d_g W_m + f dg,$$

т. е. часть работы источников, связанная с изменением потоков в контурах, затрачивается на изменение энергии магнитного поля и на механическую работу.

Последнее уравнение справедливо независимо от того, каким образом изменяются во времени токи в контурах и потокосцепления контуров. Оно является выражением закона сохранения энергии применительно к рассматриваемому случаю.

Наиболее простые выражения для силы  $f$  получаются, если предположить, что либо потокосцепления со всеми контурами, либо токи во всех контурах остаются неизменными.

Пусть при движении контура потокосцепления поддерживаются неизменными, т. е.  $\Psi_k = \text{const}$ . Так как при изменении координаты изменяются зависящие от нее индуктивности, то, очевидно, для поддержания постоянства потокосцеплений необходимо соответствующим образом изменять токи в контурах. Этот частный режим интересен тем, что источники энергии совершают работу только

на выделение тепла в контурах, так как  $d\Psi_k = 0$  и  $\sum_{k=1}^{k=n} i_k d\Psi_k = 0$ .

В частности, если бы сопротивления  $r_k$  всех контуров были равны нулю, то источники энергии были бы совершенно не нужны, так как в сверхпроводящих контурах потоки сохраняются неизменными согласно принципу электромагнитной инерции. В случае  $\Psi_k = \text{const}$  имеем:

$$0 = (d_g W_m)_{\Psi_k = \text{const}} + f dg.$$

Так как мы рассматриваем перемещение  $dg$  под действием силы  $f$ , то  $f dg > 0$  и, следовательно,  $d_g W_m < 0$ , т. е. энергия магнитного поля убывает. Этого и следовало ожидать, так как положительная работа электромагнитной силы может совершаться в данном случае только за счет энергии магнитного поля. Из последнего уравнения получаем:

$$f = - \left( \frac{d_g W_m}{dg} \right)_{\Psi_k = \text{const}} = - \left( \frac{\partial W_m}{\partial g} \right)_{\Psi_k = \text{const}},$$

*т. е. электромагнитная сила, стремящаяся изменить данную координату системы, равна убыли энергии магнитного поля, отнесенной к единице производимого силой изменения координаты в предположении, что потокосцепления контуров сохраняются неизменными.*

Предположим теперь, что во всех контурах токи поддерживаются неизменными. При движении под действием электромагнитной силы одного из контуров будут изменяться потокосцепления

$\Psi_k$ , и часть работы источников, связанная с изменением потокосцеплений контуров, не будет равна нулю, т. е.

$$\sum_{k=1}^{k=n} i_k d\Psi_k \neq 0.$$

Между величиной этой работы и приращением энергии  $W_M$  магнитного поля в рассматриваемом случае существует простое соотношение. Мы имели выражение для энергии:

$$W_M = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} i_k \Psi_k.$$

При  $i_k = \text{const}$  получаем:

$$(d_g W_M)_{i_k = \text{const}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} i_k d\Psi_k.$$

Мы приходим к замечательному выводу: при постоянстве токов приращение энергии магнитного поля в точности равно половине рассматриваемой части работы, совершаемой источниками энергии. Остальная половина этой части работы источников в соответствии с уравнением:

$$\sum_{k=1}^{k=n} i_k d\Psi_k = d_g W_M + f dg$$

идет на совершение механической работы. Поэтому

$$f dg = + (d_g W_M)_{i_k = \text{const}}.$$

Таким образом, при постоянстве токов получение механической работы связано с неизбежным увеличением запаса энергии в системе, в точности равным совершенной механической работе.

Из последнего равенства получаем еще одно выражение для электромагнитной силы:

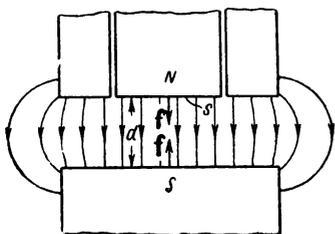
$$f = + \left( \frac{\partial W_M}{\partial g} \right)_{i_k = \text{const}},$$

т. е. электромагнитная сила, стремящаяся изменить данную координату системы, равна увеличению энергии магнитного поля, отнесенному к единице производимого силой изменения координаты, в предположении, что токи в контурах поддерживаются неизменными.

Необходимо подчеркнуть, что оба полученные нами выражения определяют собой одну и ту же силу, т. е. можно написать:

$$f = - \left( \frac{\partial W_{\mathcal{M}}}{\partial g} \right)_{\Psi_k = \text{const}} = + \left( \frac{\partial W_{\mathcal{M}}}{\partial g} \right)_{i_k = \text{const}}.$$

Рассмотрим силу  $f$ , действующую на среднюю часть полюса электромагнита, изображенного на рис. 217, и стремящуюся изменить расстояние  $d$  между полюсами. Из всего полюса мы вырезаем только его среднюю часть, около которой поле можно считать однородным. Для вычисления силы воспользуемся выражением:



$$f = - \left( \frac{\partial W_{\mathcal{M}}}{\partial g} \right)_{\Psi = \text{const}}.$$

Рис. 217.

При бесконечно малом перемещении средней части полюса поле остается однородным. Так как  $\Psi = \text{const}$ , то неизменной остается и магнитная индукция  $B$ , а также объемная плотность энергии поля  $W'_{\mathcal{M}} = \frac{B^2}{2\mu}$ . Поэтому изменение энергии поля происходит только вследствие изменения объема пространства между вырезанной частью северного полюса и южным полюсом. Энергия, заключенная в этом объеме, равна  $W_{\mathcal{M}} = W'_{\mathcal{M}} sd$ , где  $s$  — поверхность вырезанной части полюса. Таким образом, имеем:

$$f = - \frac{\partial W_{\mathcal{M}}}{\partial d} = - W'_{\mathcal{M}} s = - \frac{B^2}{2\mu_0} s = - \frac{HB}{2} s,$$

причем абсолютная магнитная проницаемость воздуха принята равной  $\mu_0$ . Знак минус указывает на то, что силы стремятся уменьшить расстояние между полюсами. Абсолютное значение силы, приходящейся на единицу поверхности полюса, равно:

$$f' = \frac{|f|}{s} = \frac{HB}{2},$$

т. е. численно равно энергии магнитного поля в единице объема пространства между полюсами электромагнита.

По представлению Фарадея эта сила есть результат тяжений, которые испытывают трубки магнитной индукции вдоль всей своей длины. Сила продольного тяжения, отнесенная к единице поверх-

ности любого нормального сечения трубок по этому представлению, равна:

$$f' = \frac{HB}{2} = \frac{\mu H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu}.$$

Для объяснения искривления трубок магнитной индукции у краев полюсов при таком представлении необходимо предположить существование, наряду с продольным тяжением трубок, также сил бокового распора между ними. Рассматривая равновесие отрезка трубки потока в неоднородном поле, получаем, что силы бокового распора и продольного тяжения, отнесенные к единице поверхности, равны между собой.

Представление о силах продольного тяжения и бокового распора трубок магнитной индукции следует рассматривать только как метод, дающий возможность ясно представить общий характер и направление сил, действующих в системе контуров тока, когда построена картина магнитного поля. Сами же физические процессы, совершающиеся в электромагнитном поле, не могут быть сведены к механическим напряжениям в некоторой гипотетической среде, о чем было сказано в первом параграфе и при рассмотрении механических взаимодействий заряженных тел.

Выражение для силы, приходящейся на единицу поверхности полюса, используется при вычислении подъемной силы электромагнита. Подъемной силой электромагнита называют силу, необходимую для отрывания якоря от полюсов электромагнита. Если  $2s$  — поверхность обоих полюсов, к которой прилегает якорь (рис. 218), то подъемная сила равна:

$$f = f' \cdot 2s = \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot 2s = \frac{\Phi^2}{\mu_0 s}.$$

Магнитный поток сквозь поверхность  $s$  может быть определен при помощи закона магнитной цепи:

$$\Phi = \frac{i\omega}{R_{\mathcal{M}}},$$

где  $i\omega$  — произведение тока в катушках электромагнита на число витков катушек и  $R_{\mathcal{M}}$  — магнитное сопротивление магнитной цепи

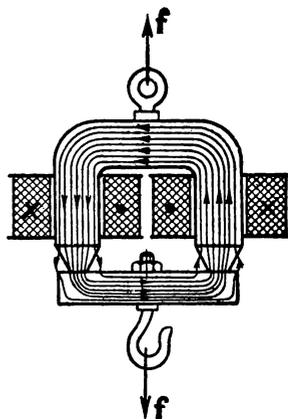


Рис. 218.

электромагнита. При заданной м. д. с. имеет смысл до известных пределов уменьшать поверхности полюсов  $s$ . Подъемная сила при этом возрастает вследствие сгущения линий магнитной индукции у торцов полюсных наконечников и увеличения магнитной индукции. Однако такое уменьшение поверхностей  $s$  может быть полезным только до тех пор, пока оно мало сказывается на величине магнитного сопротивления  $R_m$  всей магнитной цепи. Кроме того, при очень больших индукциях полюсные наконечники насыщаются, и их магнитная проницаемость падает, что также способствует увеличению магнитного сопротивления  $R_m$ .

#### § 74. Электромагнитные силы в случаях одного и двух контуров с токами

В простейшем случае одного контура с током для энергии магнитного поля имеем выражение:

$$W_m = \frac{Li^2}{2}.$$

Воспользуемся для вычисления электромагнитной силы выражением, полученным в предположении, что  $i_k = \text{const}$ . Получаем:

$$f = \left( \frac{\partial W_m}{\partial g} \right)_{i=\text{const}} = \frac{i^2}{2} \frac{\partial L}{\partial g}.$$

Если перемещение  $dg$  происходит под действием силы  $f$ , то  $f dg > 0$  и, стало быть,  $dL > 0$ . Следовательно, в контуре возникают такие силы, которые стремятся так деформировать контур, чтобы его индуктивность увеличилась.

Заметим здесь, что последнее выражение уже не требует никаких оговорок о постоянстве тока. Эта оговорка полностью использована при вынесении  $i^2$  за знак производной. Выражение это пригодно и для вычисления мгновенного значения электромагнитной силы при данном мгновенном значении переменного тока.

Выше указывалось, что обе формулы, полученные в предположении, что  $\Psi_k = \text{const}$ , и в предположении, что  $i_k = \text{const}$ , тождественны, т. е. можно написать:

$$f = - \left( \frac{\partial W_m}{\partial g} \right)_{\Psi_k = \text{const}} = + \left( \frac{\partial W_m}{\partial g} \right)_{i_k = \text{const}}.$$

Продemonстрируем это на примере одного контура. Чтобы воспользоваться первой формулой для силы, следует выразить энергию через потокосцепление самоиндукции. Имеем:

$$W_m = \frac{Li^2}{2} = \frac{(Li)^2}{2L} = \frac{\Psi_L^2}{2L}.$$

Получаем:

$$f = - \left( \frac{\partial W_m}{\partial g} \right)_{\Psi_L = \text{const}} = - \frac{\Psi_L^2}{2} \frac{\partial}{\partial g} \left( \frac{1}{L} \right) = \frac{\Psi_L^2}{2L^2} \frac{\partial L}{\partial g} = \frac{i^2}{2} \frac{\partial L}{\partial g},$$

что полностью совпадает с результатом, полученным из выражения:

$$f = \left( \frac{\partial W_m}{\partial g} \right)_{i = \text{const}}.$$

В виде примера найдем выражение для сил, действующих на провода линии передачи. Формула для индуктивности двухпроводной линии имеет вид (ч. III):

$$L = \frac{l}{\pi} \left( \mu_0 \ln \frac{D}{R} + \frac{\mu}{4} \right),$$

где  $l$  — длина линии,  $D$  — расстояние между осями проводов,  $R$  — радиус сечений проводов,  $\mu_0$  — абсолютная магнитная проницаемость воздуха и  $\mu$  — абсолютная магнитная проницаемость материала проводов. Сила, стремящаяся изменить координату  $D$ , т. е. изменить расстояние между проводами, получается равной:

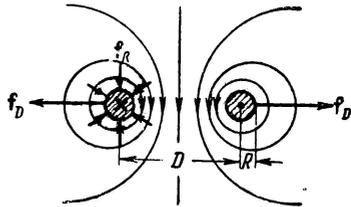


Рис. 219.

$$f_D = \frac{i^2}{2} \frac{\partial L}{\partial D} = \frac{i^2}{2} \frac{l}{\pi} \mu_0 \frac{1}{D}.$$

Она оказывается положительной, т. е. стремится увеличить расстояние между проводами. Такое направление силы, по представлениям Фарадея, объясняется боковым распором линий магнитной индукции (рис. 219).

Найдем силу, стремящуюся изменить радиус  $R$  сечения провода. Имеем:

$$f_R = \frac{i^2}{2} \frac{\partial L}{\partial R} = - \frac{i^2}{2} \frac{l}{\pi} \mu_0 \frac{1}{R}.$$

Сила получается отрицательной, т. е. она стремится уменьшить  $R$ . Возникновение этой силы согласно представлениям Фарадея можно объяснить стремлением линий магнитной индукции, охватывающих провод, сократиться или также — боковым распором этих линий. Сила  $f_R$  распределена по поверхности провода.

Рассмотрим случай двух контуров с токами. Для энергии магнитного поля системы, состоящей из двух контуров с токами, имеем выражение:

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

Найдем электромагнитную силу, стремящуюся изменить координату  $g$ , определяющую взаимное расположение контуров. От этой координаты зависит только взаимная индуктивность. Поэтому искомая электромагнитная сила равна:

$$f = \left( \frac{\partial W_{\text{м}}}{\partial g} \right)_{i_k = \text{const}} = i_1 i_2 \frac{\partial M}{\partial g}.$$

Найдем направление силы, стремящейся изменить расстояние  $x$  между двумя витками, изображенными на рис. 220. Условимся

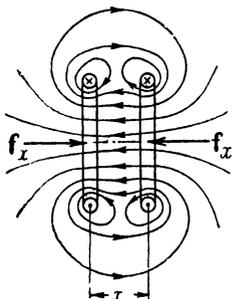


Рис. 220.

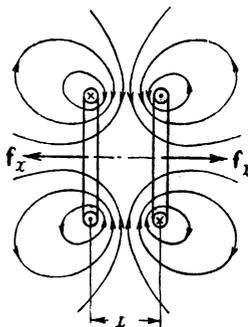


Рис. 221.

положительные направления токов в обоих витках принять в одну сторону. В таком случае при положительных токах потоки в контурах направлены согласно и, следовательно,  $M > 0$ . С увеличением  $x$  взаимная индуктивность убывает, т. е.  $\frac{dM}{dx} < 0$ . При одинаковых направлениях токов (рис. 220) имеем  $i_1 i_2 > 0$  и  $f_x < 0$ . Если токи направлены в противоположные стороны (рис. 221), то  $i_1 i_2 < 0$  и  $f_x > 0$ . В первом случае сила стремится уменьшить координату  $x$ . Как нетрудно усмотреть из рис. 220, эта сила согласно представлениям Фарадея может рассматриваться как результат тяжения линий магнитной индукции, охватывающих оба контура. Во втором случае сила стремится увеличить расстояние  $x$  между контурами, что можно объяснить боковым распором между линиями магнитной индукции, которые теперь все вынуждены пройти через пространство между контурами (рис. 221).

В выражении  $f = i_1 i_2 \frac{\partial M}{\partial g}$  вынесены за знак производной оба тока. Вынося за знак производной только ток в одном из контуров, мы получим:

$$f = i_1 \left[ \frac{\partial (M i_2)}{\partial g} \right]_{i_2 = \text{const}} = i_1 \left( \frac{\partial \Psi_{1M}}{\partial g} \right)_{i_2 = \text{const}}$$

или

$$f = i_2 \left[ \frac{\partial (Mi_1)}{\partial g} \right]_{i_1 = \text{const}} = i_2 \left( \frac{\partial \Psi_{2M}}{\partial g} \right)_{i_1 = \text{const}} .$$

Если контуры перемещаются под действием силы  $f$ , то  $f dg > 0$ . В таком случае из первого равенства имеем:  $i_1 d\Psi_{1M} > 0$ . Таким образом, при  $i_1 > 0$  и  $d\Psi_{1M} > 0$ , т. е. потокосцепление взаимной индукции  $\Psi_{1M}$  увеличивается. Иными словами, если потокосцепление самоиндукции  $L_1 i_1$  положительно, то потокосцепление взаимной индукции  $M i_2$  стремится принять наибольшее возможное положительное значение. При  $i_1 < 0$  имеем:  $d\Psi_{1M} < 0$ , т. е.  $\Psi_{1M}$  уменьшается. Следовательно, если потокосцепление самоиндукции  $L_1 i_1$  отрицательно, то и потокосцепление взаимной индукции  $\Psi_{1M}$  стремится стать отрицательным и притом наибольшим по абсолютному значению. Анализируя второе равенство, мы придем к аналогичным выводам по отношению к потокосцеплению взаимной индукции  $M i_1$  второго контура.

Итак, *электромагнитные силы стремятся расположить жесткие контуры системы таким образом, чтобы каждый контур охватывал возможно большую часть внешнего потока с положительной своей стороны, при условии, что токи в контурах постоянны.*

Слова «положительной своей стороны» здесь следует понимать в том смысле, что контуры стремятся расположиться так, чтобы линии магнитной индукции внешнего потока внутри контуров проходили в том же направлении, что и линии магнитной индукции потоков самоиндукции. Так, контуры, изображенные на рис. 220, взаимно притягиваются, так как при их сближении увеличиваются потоки взаимной индукции, линии магнитной индукции которых в данном случае направлены внутри контура одинаково с линиями магнитной индукции потока самоиндукции. Контуры, изображенные на рис. 221, взаимно отталкиваются, так как при увеличении расстояния между ними потоки взаимной индукции, проходящие в этом случае с отрицательной стороны контуров, по абсолютному значению уменьшаются, что эквивалентно увеличению потоков, проходящих с положительной стороны контуров. Тенденция к наибольшему охвату контуром внешнего потока еще более наглядно выявляется в случае витка, расположенного во внешнем однородном поле (рис. 222). Положение  $a$  есть положение неустойчивого равновесия. Линии магнитной индукции внешнего потока и потока самоиндукции внутри витка в этом положении направлены в противоположные стороны. Отклонение витка от этого положения в ту или иную сторону (на рисунке против часовой стрелки) приводит к появлению пары сил, которая поворачивает виток в положение  $z$  устойчивого равновесия. В положении  $z$  часть внешнего потока, охватываемая контуром с положительной стороны, имеет наибольшее возможное значение.

Рассмотрим энергетические процессы в этой системе в предположении, что токи поддерживаются постоянными. Такую систему можно рассматривать как принципиальную схему двигателя постоянного тока, в котором обычно обмотка возбуждения расположена на неподвижной части машины и обмотка якоря — на вращающейся части.

Будем считать токи  $i_1$  и  $i_2$  положительными. Тогда в положении  $a$  мы должны считать  $M < 0$ . Пусть при этом  $M = -M_0$ . Энергия

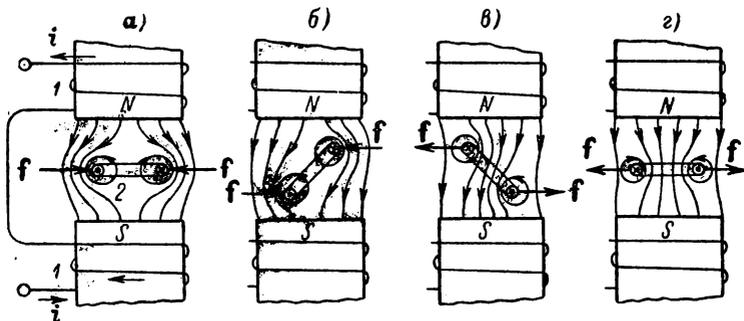


Рис. 222.

магнитного поля в этом положении системы равна:

$$W_{m0} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 - M_0 i_1 i_2.$$

После поворота вторичного контура (витка обмотки якоря) в положение  $г$  энергия поля получит значение

$$W_{mk} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M_0 i_1 i_2$$

и, следовательно, за время поворота она получит приращение

$$\Delta W_m = W_{mk} - W_{m0} = 2M_0 i_1 i_2.$$

При постоянстве токов это приращение энергии поля, как было показано в § 73, в точности равно работе  $A$ , совершенной электромагнитной силой за тот же промежуток времени. Следовательно, внешние источники э. д. с. за этот промежуток времени должны доставить системе количество энергии  $A'$ , равное двойной величине работы, произведенной электромагнитной силой:

$$A' = \Delta W_m + A = 2A.$$

При этом не приняты во внимание потери на нагревание током проводов обмоток.

Отсюда ясно, что в электромагнитном механизме, во всех контурах которого протекают постоянные токи, в механическую работу может быть превращено не более половины энергии, поступающей от внешних источников э. д. с., так как при этом неизбежно должно происходить увеличение энергии магнитного поля, равное произведенной механической работе. Такой механизм не может совершать механическую работу в течение сколь угодно длительного промежутка времени с конечной мощностью, так как энергия магнитного поля не может стать бесконечно большой.

Однако в двигателях постоянного тока в механическую работу преобразуется значительно больше половины энергии, поступающей из электрической цепи, от которой питается двигатель, и это преобразование может происходить с конечной мощностью в течение сколь угодно длительного времени. Возможность такого преобразования связана с тем, что ток в витках обмотки якоря не остается все время постоянным, а периодически изменяет свое направление. Когда виток, изображенный на рис. 222, или ему соответствующая катушка (секция) обмотки якоря приходит в положение  $z$ , в витке производится коммутация тока, т. е. изменение направления тока.

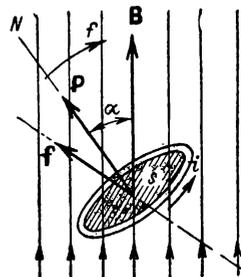


Рис. 223.

В результате коммутации направление тока получается таким же, как и в исходном положении  $a$ , и весь процесс вновь повторяется за время следующего поворота витка на угол  $\pi$ . Коммутация ни в коем случае не должна происходить с разрывом контура витка, так как при разрыве цепи не будет использована энергия, запасенная в магнитном поле, и коэффициент полезного действия машины будет ниже 50%. В двигателе в период коммутации секция обмотки якоря замыкается коротко через щетку; при изменении тока в секции дополнительная энергия, запасенная в системе, передается трансформаторным путем в другие секции обмотки якоря, а также в цепь возбуждения и, таким образом, оказывается использованной.

Из сказанного ясно, что принципиально невозможно осуществить двигатель постоянного тока без коллектора, так же как невозможно осуществить без коллектора — генератор постоянного тока, что было показано в § 50.

Определим еще вращающий момент  $f$ , который испытывает плоский контур с током  $i$  во внешнем однородном магнитном поле. Пусть  $B$  — магнитная индукция внешнего поля,  $s$  — поверхность, ограниченная контуром тока, и  $\alpha$  — угол, составляемый положительной нормалью  $N$  к этой поверхности с вектором  $B$  и отсчитываемый от направления вектора  $B$  (рис. 223). Положительное на-

правление нормали свяжем с положительным направлением тока  $i$  правилом правого винта.

Согласно вышеприведенным выражениям:

$$f = i_1 \left( \frac{\partial \Psi_{1M}}{\partial g} \right)_{l_2 = \text{const}} \quad \text{и} \quad f = i_2 \left( \frac{\partial \Psi_{2M}}{\partial g} \right)_{l_1 = \text{const}}$$

искомый вращающий момент можно представить как произведение тока  $i$  в контуре на производную  $\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}$  от внешнего потокосцепления по углу  $\alpha$ . Имеем:

$$\Psi = Bs \cos \alpha \quad \text{и} \quad f = i \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} = -isB \sin \alpha = -pB \sin \alpha,$$

где  $p = is$  есть магнитный момент замкнутого тока. В векторной форме последнее выражение имеет вид (рис. 223):

$$\mathbf{f} = [\mathbf{p} \cdot \mathbf{B}].$$

Мы приходим к замечательному выводу, что вращающий момент не зависит отдельно от  $i$  и  $s$ , а полностью определяется магнитным моментом  $p$ .

Сказанное полностью относится к любым элементарным токам, так как по определению элементарным мы называем замкнутый ток, протекающий по столь малому контуру, что в пределах этого контура внешнее поле можно считать однородным.

### § 75. Сила, действующая на проводник с током во внешнем магнитном поле. Правило Миткевича

Электромагнитную силу, действующую на какой-нибудь контур тока, можно представить как сумму сил, действующих на отдельные элементы контура.

Рассмотрим сначала простой случай, когда прямолинейный отрезок проводника с током  $i$ , имеющий длину  $l$ , расположен во внешнем однородном поле нормально к вектору магнитной индукции  $\mathbf{B}$  (рис. 224). Отрезок  $l$  составляет часть замкнутого контура тока. Со стороны внешнего поля он испытывает силу, которая стремится переместить его в таком направлении, чтобы при этом перемещении происходило наибольшее возможное увеличение потока, сцепляющегося с контуром тока. Это условие удовлетворяется, если сила действует перпендикулярно к вектору  $\mathbf{B}$  и перпендикулярно к оси отрезка проводника. Направление силы можно определить, пользуясь правилом левой руки. Если большой, указательный и средний пальцы левой руки расположить взаимно перпендикулярно и так, чтобы указательный палец был направлен в сторону поля, а средний — в сторону тока, то большой палец будет указывать направление силы. Это правило легко запоминается, если заметить,

что порядок пальцев на руке: большой, указательный, средний, соответствует алфавитному порядку начальных букв слов: движение, поле, ток. Однако гораздо проще для определения направления силы пользоваться *правилом Миткевича*, основанным на представлении о боковом распоре и тяжении линий магнитной индукции. Для этого достаточно представить себе, помимо внешнего поля, также поле тока самоиндукции около проводника (рис. 225, а) и сообразить, с какой стороны проводника результирующее поле получается более сильным и с какой более слабым. Ясно, что проводник под действием бокового распора между трубками магнитной индукции стремится переместиться в ту сторону, где поле более слабое. Это становится совершенно ясным, если нарисовать картину результирующего поля (рис. 225, б).

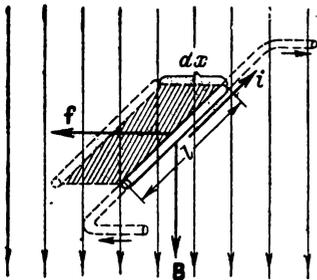


Рис. 224.

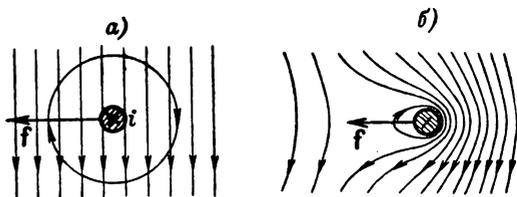


Рис. 225.

Предположим, что отрезок проводника переместится под действием электромагнитной силы на расстояние  $dx$  (рис. 224). Внешнее потокосцепление с контуром тока при этом получает приращение:

$$d\Psi = d\Phi = Bl dx.$$

Согласно выражениям

$$f = i_1 \left( \frac{\partial \Psi_{1M}}{\partial g} \right)_{i_2 = \text{const}} \quad \text{и} \quad f = i_2 \left( \frac{\partial \Psi_{2M}}{\partial g} \right)_{i_1 = \text{const}}$$

искомая сила может быть представлена как произведение тока  $i$  в отрезке проводника на производную  $\frac{d\Psi}{dx}$  от внешнего потокосцепления по координате. Получаем:

$$f = i \frac{d\Psi}{dx} = i \frac{Bl dx}{dx} = Bli.$$

Представляет интерес сравнить полученное выражение с выражением для э. д. с., индуцируемой в движущемся проводнике:

$$e = Blv.$$

Механическая сила  $f$ , стремящаяся изменить геометрическую координату  $x$  проводника, определяется электрической скоростью, т. е. током в проводнике  $i = \frac{dq}{dt}$ . Э. д. с., стремящаяся вызвать ток в проводнике, определяется геометрической скоростью проводника  $v = \frac{dx}{dt}$ .

В общем случае, когда проводник с током, имеющий произвольную форму, расположен во внешнем неоднородном поле, следует разделить весь проводник на отрезки  $dl$  и найти выражение для силы  $df$ , действующей на каждый отдельный отрезок. Пусть

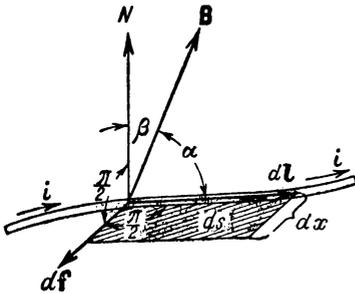


Рис. 226.

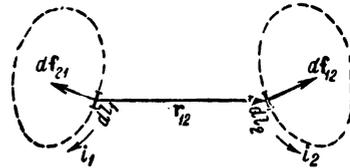


Рис. 227.

$dl$  — вектор, направленный по оси проводника в сторону положительного тока в проводнике и равный по величине длине  $dl$  отрезка (рис. 226). Пусть вектор  $B$  составляет с вектором  $dl$  угол  $\alpha$ . Сила  $df$  должна быть направлена перпендикулярно и к  $dl$  и к  $B$ , так как только в таком случае перемещению  $dx$  под действием силы будет соответствовать наибольшее число пересечений отрезком  $dl$  единичных линий магнитной индукции внешнего поля, т. е. увеличение внешнего потока, сцепляющегося с контуром тока, будет наибольшим. При перемещении отрезка  $dl$  на расстояние  $dx$  приращение внешнего потока получается равным:

$$d\Phi = B \cos \beta ds = B \cos \beta dl dx,$$

где угол  $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$  —  $\alpha$  есть угол между направлением вектора  $B$  и нормалью  $N$  к поверхности  $ds = dl dx$ . Сила  $df$  получается равной:

$$df = i \frac{d\Phi}{dx} = iB \cos \beta dl = iB \sin \alpha dl.$$

В векторной форме электромагнитная сила, действующая на элемент  $dl$ , может быть представлена в виде:

$$df = i [dl \cdot B].$$

Полная сила, действующая на весь контур, может быть найдена геометрическим суммированием элементарных сил, действующих на элементы контура.

Последнее выражение позволяет найти силу  $df_{12}$ , с которой элемент тока  $i_1 dl_1$  действует на другой элемент тока  $i_2 dl_2$  (рис. 227). Напряженность поля, определяемая элементом тока  $i_1 dl_1$  в месте расположения второго элемента, при условии  $\mu = \text{const}$  согласно выражениям, приведенным в § 56, равна:

$$d\mathbf{H}_2 = \frac{i_1}{4\pi r^2} \left[ dl_1 \cdot \frac{\mathbf{r}_{12}}{r} \right],$$

где  $\mathbf{r}_{12}$  — вектор, равный расстоянию  $r$  между элементами и направленный от первого элемента ко второму. Стало быть,

$$df_{12} = i_2 [dl_2 \cdot d\mathbf{B}_2] = \frac{\mu}{4\pi} \frac{i_1 i_2}{r^2} \left[ dl_2 \cdot \left[ dl_1 \cdot \frac{\mathbf{r}_{12}}{r} \right] \right],$$

так как  $d\mathbf{B}_2 = \mu d\mathbf{H}_2$ .

Вектор  $d\mathbf{H}_2$  перпендикулярен к плоскости, проходящей через  $dl_1$  и  $\mathbf{r}_{12}$ . Следовательно, сила  $df_{12}$ , перпендикулярная к  $d\mathbf{H}_2$ , лежит в этой плоскости. Кроме того, сила  $df_{12}$  перпендикулярна к элементу  $dl_2$ .

Аналогично для силы  $df_{21}$ , с которой элемент тока  $i_2 dl_2$  действует на элемент тока  $i_1 dl_1$ , имеем выражение:

$$df_{21} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{i_1 i_2}{r^2} \left[ dl_1 \cdot \left[ dl_2 \cdot \frac{\mathbf{r}_{21}}{r} \right] \right],$$

где  $\mathbf{r}_{21}$  — вектор, равный расстоянию  $r$  между элементами тока и направленный от второго элемента к первому.

Пусть  $dl_1$  представляет собой элементарный отрезок одного контура, а  $dl_2$  — элементарный отрезок второго контура (рис. 227). Проинтегрировав последнее выражение по всему второму контуру, получим силу, действующую на элемент  $dl_1$  первого контура со стороны всего второго контура. Проинтегрировав еще раз это выражение по всему первому контуру, получим полную силу, с которой второй контур действует на первый.

Обратим внимание на то, что силы  $df_{12}$  и  $df_{21}$  в общем случае не равны и не противоположны друг другу. Это легко усмотреть из рис. 227. Особенно резко неравенство  $\mathbf{f}_{12} \neq \mathbf{f}_{21}$  обнаруживается, если один элемент тока, например  $i_1 dl_1$ , направлен вдоль радиуса-вектора  $\mathbf{r}_{12}$ , а другой элемент тока составляет с радиусом-вектором  $\mathbf{r}_{21}$  некоторый угол, отличный от нуля. При этом  $[dl_1 \cdot \mathbf{r}_{12}] = 0$ , но  $[dl_2 \cdot \mathbf{r}_{21}] \neq 0$  и, следовательно,  $df_{12} = 0$ , в то время как  $df_{21} \neq 0$ .

Таким образом, силы  $df_{12}$  и  $df_{21}$  не удовлетворяют принципу равенства действия и противодействия. Однако необходимо иметь в виду, что элемент  $i dl$  постоянного тока не может существовать.

обособленно, так как линии тока всегда должны быть замкнутыми. Отрезок  $dl$  всегда является элементом замкнутого контура. Поэтому физический смысл имеют только результирующие силы, действующие на тот или иной замкнутый контур тока со стороны другого замкнутого контура тока. Для этих результирующих сил удовлетворяется принцип равенства действия и противодействия.

В связи со сказанным, интересно отметить, что к полученному нами выражению для силы  $df_{12}$  можно прибавить такое слагаемое, чтобы, с одной стороны, для двух элементов тока удовлетворился принцип равенства действия и противодействия и, с другой стороны, результирующие силы, действующие на замкнутые контуры тока, при этом не изменились. Это слагаемое должно удовлетворять требованию, чтобы при интегрировании по замкнутым контурам тока оно давало нуль. В частности, Ампер предложил формулу, выражающую силу взаимодействия двух элементов тока, согласно которой силы, действующие на эти элементы, оказываются равными и противоположно направленными. Однако формула Ампера значительно сложнее приведенной выше, а при интегрировании по замкнутым контурам дает тот же результат.

#### § 76. Сопоставление сил, возникающих в электрическом и магнитном полях

Представляет интерес сопоставить выражения для электромагнитной силы в системе контуров с токами:

$$f = - \left( \frac{\partial W_m}{\partial g} \right)_{\Psi_k = \text{const}} = + \left( \frac{\partial W_m}{\partial g} \right)_{i_k = \text{const}}$$

с соответствующими выражениями для сил, возникающих в системе заряженных тел:

$$f = + \left( \frac{\partial W_e}{\partial g} \right)_{U_k = \text{const}} = - \left( \frac{\partial W_e}{\partial g} \right)_{q_k = \text{const}}.$$

Почти все современные электрические машины, аппараты и приборы основаны на принципе взаимодействия через магнитное поле и только в некоторых из них, например в электростатическом вольтметре, используется взаимодействие через посредство электрического поля. Это связано с тем, что силы взаимодействия контуров с токами нам удается получить значительно превышающими силы взаимодействия заряженных тел. Так, при конструировании электрических машин всегда ставится задача при заданных основных характеристиках и, в частности, при заданной мощности машины получить машину возможно меньших размеров, а это может быть достигнуто только при значительных силах взаимодействия между подвижной и неподвижной частями машины.

Общие выражения для механических сил  $f$  дают нам ответ на вопрос, почему в современных конструкциях отдается такое предпочтение принципу взаимодействия через посредство магнитного поля. Силы в магнитном и в электрическом полях будут равны, если окажутся равными производные по соответствующей координате от энергий магнитного и электрического полей, т. е. при условии:

$$\left| \frac{\partial W_m}{\partial g} \right| = \left| \frac{\partial W_e}{\partial g} \right|.$$

Если мы желаем достичь этого равенства для устройств, основанных на принципе магнитного взаимодействия, и для устройств, основанных на принципе электрического взаимодействия, то при одинаковых перемещениях  $dg$  мы должны иметь в тех и других устройствах и одинаковые изменения энергий  $|dW_m|$  и  $|dW_e|$ . При одинаковых поверхностях перемещающихся частей это требует того, чтобы объемные плотности  $W'_m$  и  $W'_e$  энергии магнитного поля и энергии электрического поля в пространстве между взаимодействующими частями в обоих типах устройств были одного порядка, т. е. чтобы соблюдалось равенство:

$$\frac{BH}{2} = \frac{DE}{2}.$$

Обычно это пространство заполнено воздухом и, следовательно, должно быть:

$$\frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$$

или (ч. III):

$$\frac{E}{B} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/сек.}$$

В современных больших электрических машинах, основанных на принципе взаимодействия через магнитное поле, магнитная индукция в воздушном зазоре достигает значения  $1 \text{ вб/м}^2$  и даже больших. Следовательно, в машине, построенной на принципе электрического взаимодействия, необходимо достичь значений напряженности электрического поля порядка

$$E = cB \approx 3 \cdot 10^8 \text{ в/м} = 3 \cdot 10^6 \text{ в/см.}$$

Такие колоссальные напряженности электрического поля не могут быть достигнуты даже в том случае, если осуществить идеальный вакуум между подвижными и неподвижными частями машины, так как заметное вырывание электронов электрическим полем из металла, т. е. автоэлектронная эмиссия, наступает практически уже при напряженности поля порядка  $10^6 \text{ в/см.}$

Следует отметить, что сравнение двух типов машин выполнено при одинаковых размерах их рабочих поверхностей. Однако сравнивать эти типы машин следует при одинаковых их габаритах. В этом отношении машины, основанные на электрическом взаимодействии, имеют большое преимущество перед существующими машинами, основанными на взаимодействии через магнитное поле. Линии магнитной индукции являются принципиально замкнутыми линиями и, следовательно, для проведения магнитного потока приходится осуществлять громоздкие магнитные цепи. Линии электрического поля начинаются и кончаются на заряженных металлических поверхностях, и совершенно не требуется создавать громоздких цепей для проведения потока электрического смещения вне зазоров между взаимодействующими частями машины. Поэтому в последнем типе машин представляется возможным при тех же общих габаритах машины значительно развить ее рабочие поверхности, что позволяет уменьшить напряженность электрического поля против вычисленной выше. Все же требуемые напряженности поля получаются весьма высокими. Дальнейшее развитие техники возможно откроет перспективы для построения подобного рода машин, особенно в тех случаях, когда требуется создать машины на весьма высокое напряжение.

Интересно отметить, что все современные типы электрических машин: синхронные, асинхронные, постоянного тока, коллекторные и т. д., основанные на принципе взаимодействия через магнитное поле, могут быть осуществлены и на принципе взаимодействия через электрическое поле. Этот вопрос подробно рассмотрен в работах А. Е. Каплянского.

### § 77. Сила, действующая на частицу с электрическим зарядом, движущуюся в электрическом и магнитном полях

Элементарная частица с электрическим зарядом, движущаяся в магнитном поле, испытывает со стороны поля механическую силу. Эту силу можно определить из выражения:  $d\mathbf{f} = i[d\mathbf{l} \cdot \mathbf{B}]$ .

Рассмотрим отрезок проводника, имеющий длину  $dl$  и сечение  $ds$ . Рассматривая ток в проводнике как упорядоченное движение электронов, можно плотность тока представить в виде:  $\delta = N_1 ev$ , где  $N_1$  — число электронов проводимости в единице объема проводника,  $e$  — абсолютное значение заряда электрона и  $v$  — средняя скорость электронов в направлении линии тока. Ток в проводнике имеет значение:  $di = \delta ds = N_1 ev ds$ . Вектор скорости  $\mathbf{v}$  направлен против вектора  $d\mathbf{l}$ , входящего в выражение для  $d\mathbf{f}$ , так как заряд электронов отрицателен. Учитывая это, мы можем выразить силу, действующую на отрезок проводника, имеющего объем  $dV = dl ds$ , в виде:

$$d\mathbf{f} = N_1 ev ds [d\mathbf{l} \cdot \mathbf{B}] = -N_1 e dl ds [\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}].$$

Число электронов проводимости в объеме  $dV$  равно  $N_1 dV = N_1 dl ds$ . Следовательно, сила, действующая на один электрон, имеет значение:

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{f}}{N_1 dl ds} = -e [\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}].$$

Знак минус вошел в это выражение потому, что электрон имеет отрицательный заряд, а через  $e$  мы обозначили абсолютное значение заряда электрона. Если обозначить через  $q$  заряд любой движущейся частицы, так что величина  $q$  может быть и положительной и отрицательной, то получим:

$$\mathbf{f} = q [\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}].$$

Если в пространстве, в котором движется частица с зарядом  $q$ , существует также и электрическое поле, имеющее напряженность  $\mathbf{E}$ , то полная сила, действующая на частицу, равна:

$$\mathbf{f} = q \cdot \mathbf{E} + q [\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}].$$

Как следует из выражения  $\mathbf{f} = q [\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}]$ , сила, действующая на частицу с зарядом  $q$ , движущуюся в магнитном поле, перпендикулярна к вектору  $\mathbf{B}$  и перпендикулярна к вектору скорости  $\mathbf{v}$ . Последнее обстоятельство указывает, что эта сила изменяет только направление скорости и не изменяет ее величину  $v$ .

### § 78. Движение заряженных элементарных частиц в электрическом и магнитном полях. Электронные осциллографы и микроскопы

Управление движущимися заряженными элементарными частицами при помощи электрического и магнитного полей получило исключительно широкое применение в современной технике и в экспериментальной физике. Так, например, в электронных лампах и в электронных осциллографах используется управление движущимися электронами при помощи электрического поля.

На рис. 228 схематически изображен электронный осциллограф. Вблизи от катода  $K$  расположен анод  $A$ , имеющий вид трубочки с центральным каналом. Часть электронов, излученных катодом и ускоренных электрическим полем в пространстве между катодом и анодом, проходит через отверстие в аноде и продолжает свой путь по инерции. Этот тонкий пучок электронов попадает на флуоресцирующий экран и оставляет на нем след в виде светящейся точки. Прикладывая к пластинам  $B-C$  исследуемое напряжение, мы создаем между пластинами электрическое поле, напряженность которого изменяется пропорционально этому напряжению. Электроны, пролетая в поле между пластинами, отклоняются от прямолинейного пути.

Найдем траекторию электрона в случае, когда движение происходит в однородном поле и когда начальная скорость  $v_0$  нормаль-

на к линиям напряженности поля (рис. 229). Выберем направление осей так, чтобы направление оси  $Ox$  совпало с направлением вектора  $v_0$  и направление оси  $Oy$  совпало с направлением вектора  $E$ . Уравнения движения при этом будут:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 0; \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = qE; \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

где  $m$  — масса и  $q$  — заряд электрона.

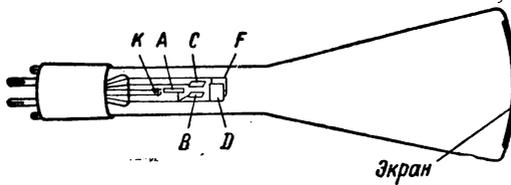


Рис. 228.

Следовательно:

$$\frac{dx}{dt} = v_x = \text{const} = v_0; \quad \frac{dy}{dt} = v_y = \frac{q}{m} Et + v_{0y} = \frac{q}{m} Et;$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z = \text{const} = v_{0z} = 0.$$

Движение происходит в плоскости, параллельной плоскости  $HOY$ . Интегрируя еще раз, получаем:

$$x = v_0 t + x_0;$$

$$y = \frac{1}{2} \frac{q}{m} Et^2 + y_0.$$

Стало быть:

$$y - y_0 = \frac{1}{2} \frac{q}{m} \frac{E}{v_0^2} (x - x_0)^2, (*)$$

т. е. траекторией движения является парабола. На рис. 229 изображен путь электрона, для которого  $q = -e < 0$ . Отклонение  $\Delta y$  электронного

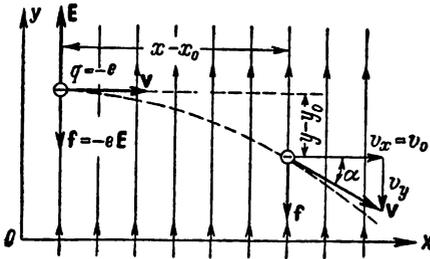


Рис. 229.

пучка к моменту выхода из поля пластин определяется из последнего уравнения, если в нем положить:  $q = -e$ ,  $y - y_0 = \Delta y$  и  $x - x_0 = l$ , где  $l$  — длина пластин. Получаем:

$$\Delta y = - \frac{1}{2} \frac{e}{m} \frac{E}{v_0^2} l^2.$$

Начальная скорость  $v_0$  электронов перед входом в электрическое поле пластин определяется напряжением  $u_{AK}$  между анодом и

катодом, так как кинетическая энергия, приобретаемая электроном по пути от катода к аноду, определяется этим напряжением. Именно:

$$\frac{mv_0^2}{2} = eu_{AK}. \quad \text{Следовательно, } v_0 = \sqrt{2 \frac{e}{m} u_{AK}}.$$

Так как  $E = u_x/d$ , где  $u_x$  — исследуемое напряжение между пластинами  $B$  и  $C$ , а  $d$  — расстояние между пластинами, то отклонение  $\Delta y$  может быть представлено в виде:

$$\Delta y = -\frac{1}{4} \frac{u_x}{u_{AK}} \frac{l^2}{d}.$$

Тангенс угла  $\alpha$  (рис. 229) между направлением пучка после выхода из поля пластин и его первоначальным направлением найдется дифференцированием уравнения (\*). Имеем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = -\frac{e}{m} \frac{E}{v_0^2} (x - x_0) = -\frac{1}{2} \frac{u_x}{u_{AK}} \frac{l}{d}.$$

Полное отклонение светящейся точки на экране при расстоянии от края отклоняющих пластин  $B-C$  до экрана, равном  $l_1$ , имеет значение:

$$h = \Delta y + l_1 \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2} \frac{u_x}{u_{AK}} \frac{l}{d} \left( \frac{l}{2} + l_1 \right).$$

Это отклонение пропорционально исследуемому напряжению  $u_x$ . Располагая на пути электронов вторую пару пластин  $D-F$  (рис. 228), повернутую по отношению к первой на угол  $\frac{\pi}{2}$ , и прикладывая к ней напряжение, монотонно возрастающее во времени, мы заставим электронный пучок двигаться по экрану в направлении, нормальном к отклонению  $h$ . В результате одновременного действия обеих пар пластин мы увидим на экране кривую, изображающую в декартовых координатах зависимость исследуемого напряжения от времени. Электронный пучок практически не обладает инерцией. Поэтому электронный осциллограф является незаменимым прибором для записи весьма быстро протекающих процессов.

Рассмотрим в виде примеров некоторые важные случаи, в которых применяется управление движущимися элементарными заряженными частицами при помощи магнитного поля. В электронных осциллографах и в ряде физических приборов используется отклонение пучка быстро летящих электронов или иных заряженных частиц в магнитном поле. Как было показано в предыдущем параграфе, сила, действующая на частицу с зарядом  $q$ , движущуюся в магнитном поле, перпендикулярна к вектору  $\mathbf{B}$  и перпендикулярна

к вектору скорости  $\mathbf{v}$ . Поэтому для отклонения пучка заряженных частиц в каком-либо направлении необходимо создать на пути частиц магнитное поле, линии которого перпендикулярны к этому направлению и перпендикулярны к направлению движения частиц. При изменении величины магнитной индукции  $B$  изменяется и степень отклонения пучка от его первоначального направления.

Весьма интересным является использование магнитного поля для фокусирования расходящегося пучка движущихся элементарных заряженных частиц, например электронов. Предположим, что на пути электронов расположена катушка с током так, что ось

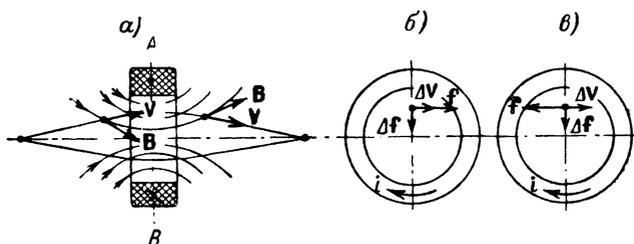


Рис. 230.

катушки совпадает с осью пучка летящих электронов, причем пучок свободно проходит сквозь отверстие катушки. На рис. 230, *a* показан разрез катушки и изображены траектории электронов в меридианных плоскостях, проходящих через ось катушки, а также линии магнитной индукции поля катушки. Из рисунка легко усмотреть, что электроны, входящие в магнитное поле катушки, будут испытывать силы  $\mathbf{f}$ , направленные перпендикулярно меридианным плоскостям (рис. 230, *б*).

Вследствие этого электроны уклоняются от первоначального направления своего движения и начинают двигаться по винтовым линиям вокруг оси катушки. Составляющие  $\Delta v$  скорости в перпендикулярных к оси плоскостях, обуславливающие это винтовое движение и вызванные действием электромагнитной силы  $\mathbf{f}$ , показаны на рис. 230, *б* для случая отрицательного заряда частиц. Рис. 230, *б* относится к плоскостям, расположенным на рис. 230, *a* влево от плоскости  $A-B$ , которая характерна тем, что при переходе электрона через нее изменяется знак угла между направлением вектора  $\mathbf{B}$  и направлением составляющей  $\mathbf{v}$  вектора скорости, лежащей в меридианной плоскости. Нетрудно усмотреть, что после прохождения электрона через плоскость  $A-B$  сила  $\mathbf{f}$ , обусловленная составляющей  $\mathbf{v}$  вектора скорости, лежащей в меридианной плоскости, изменяет свое направление. Это новое направление силы  $\mathbf{f}$  показано на рис. 230, *в*. Следовательно, после прохождения электронов через плоскость  $A-B$  сила  $\mathbf{f}$  будет уменьшать составляющие  $\Delta v$  скорости.

Можно показать, что при соблюдении надлежащих условий величина  $\Delta v$  при выходе из поля катушки становится равной нулю и, следовательно, траектория электрона снова становится прямой линией, лежащей в меридианной плоскости. Однако направление этой прямой теперь уже отлично от направления движения электрона до входа в магнитное поле. Действительно, составляющая  $\Delta v$  скорости, существующая при движении частицы в пределах поля катушки, вызывает дополнительную силу  $\Delta f$ . Эта сила  $\Delta f$  перпендикулярна к  $\mathbf{V}$  и  $\Delta v$  и имеет составляющую, направленную все время к оси (рис. 230, б, в), что нетрудно усмотреть из взаимного направления векторов  $\mathbf{V}$  и  $\Delta v$ . Под влиянием этой дополнительной силы  $\Delta f$  и происходит искривление траектории в меридианных плоскостях (рис. 230, а). При достаточно сильном поле катушки расходящийся пучок электронов после прохождения через поле становится сходящимся. На этом и основано фокусирующее действие магнитного поля. Изменяя ток в катушке, можно изменить фокусное расстояние. Фокусирование электронного пучка магнитным полем находит применение в электронных осциллографах.

Фокусирование расходящегося пучка электронов может осуществляться и при помощи электрического поля. Для этого надо на пути пучка поставить надлежащей формы электроды, создающие симметричное относительно оси пучка электрическое поле, под действием которого электроны отклоняются к этой оси.

Вышеописанные фокусирующие устройства можно рассматривать как магнитные и, соответственно, электрические линзы, действие которых на расходящийся электронный пучок подобно действию стеклянных линз на расходящиеся световые лучи. Магнитные и электрические линзы используются в электронных микроскопах, в которых электронный пучок играет роль световых лучей в обычных микроскопах. Электронные микроскопы дают весьма большие увеличения и позволяют рассматривать предметы, размеры которых столь малы, что они уже не могут быть обнаружены при помощи обычных микроскопов.

## § 79. Движение заряженных элементарных частиц в электрическом и магнитном полях. Ускорители элементарных частиц

Рассмотрим, как осуществляется ускорение и управление движением элементарных заряженных частиц в современных мощных устройствах, предназначенных для получения весьма быстрых частиц.

Такие ускорители получили широкое использование для экспериментального исследования вопросов физики атомного ядра. Рис. 231 схематически иллюстрирует идею одного из таких устройств, именуемого *циклотроном*.

Между полюсами мощного электромагнита в постоянном во времени и однородном магнитном поле в сильно разреженном про-

странстве расположены две изолированные металлические камеры  $a$  и  $b$ . Эти камеры имеют форму двух половин плоской цилиндрической коробки, разрезанной плоскостью, проходящей через диаметры основания. Камеры изготовлены из неферромагнитного материала и не препятствуют проникновению магнитного потока электромагнита в их полости.

Между камерами создается напряжение высокой частоты. Пусть в момент времени, когда камера  $b$  отрицательна по отношению к камере  $a$ , в точке  $A$  (рис. 231) тем или иным способом зарождаются частицы, имеющие положительный заряд. Под действием электрического поля, существующего между камерами, частицы получают ускорение в направлении к камере  $b$  и входят в ее полость. Внутри полости камеры электрическое поле отсутствует, и частицы движутся по инерции. Однако это движение не будет прямолинейным, так как частицы движутся в магнитном поле и на каждую из них действует электромагнитная сила, перпендикулярная вектору скорости и вектору магнитной индукции. Эта сила не изменяет величины скорости  $v$ .

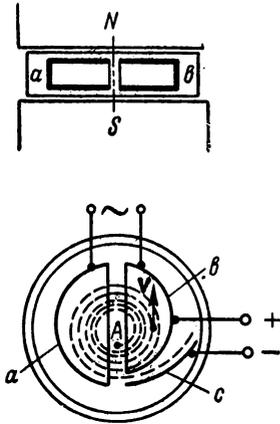


Рис. 231.

Нетрудно убедиться, что в однородном магнитном поле, линии магнитной индукции которого нормальны к вектору скорости, движение будет совершаться по окружности. Радиус  $r$  окружности нетрудно определить, если заметить, что электромагнитная сила вызывает ускорение  $\frac{v^2}{r}$ , нормальное к направлению движения.

Если  $m$  — масса частицы, то имеем:  $qvB = mv^2/r$  или  $r = \frac{m}{q} \frac{v}{B}$ . Следовательно, при  $B = \text{const}$  получаем  $r = \text{const}$ .

Время  $\tau$  пробега полуокружности равно  $\tau = \frac{\pi r}{v} = \pi \frac{m}{q} \frac{1}{B}$ . Спустя интервал времени  $\tau$ , частица вновь окажется около промежутка между камерами. Если к этому моменту времени изменить знак напряжения между камерами, то частица под действием электрического поля вновь получит ускорение и войдет в полость камеры  $a$  с большей скоростью. Внутри камеры  $a$  она опишет полуокружность, но уже большего радиуса.

Весьма замечательным является то обстоятельство, что время  $\tau$  пробега полуокружности в постоянном магнитном поле не зависит от скорости  $v$  частицы, пока массу частицы можно считать не зависящей от ее скорости. Поэтому частица вновь появится в промежутке между камерами через тот же интервал времени  $\tau$ . Следовательно, если приложить к камерам переменное напряжение вы-

сокой частоты с периодом, равным  $2\tau$ , так, чтобы напряжение достигало максимальных значений  $U_m$  в моменты прохождения частицы через промежутки между камерами, то частица будет получать каждый раз ускорение одного и того же знака. Если частица, совершая движение по спирали, пройдет  $n$  раз промежутков между камерами, то она приобретет такую же скорость, какую она приобрела бы, двигаясь в электрическом поле между точками, имеющими разность потенциалов  $nU_m$ .

Для вывода из циклотрона быстро летящих частиц достаточно на соответствующем расстоянии от центра камер создать дополнительно постоянное электрическое поле между стенкой камеры  $b$  и специальной пластиной  $c$  (рис. 231).

Вышеприведенные рассуждения справедливы, пока скорость частицы остается значительно меньшей, чем скорость света, т. е.  $v \ll c$ , так как при приближении  $v$  к  $c$  необходимо учесть возрастание массы частицы с увеличением ее скорости, о чем было сказано в § 55. Вследствие увеличения массы невозможно получить скорость  $v$ , равную скорости света.

Циклотроны дают возможность получить дейтроны с энергией до 10—25 Мэв. При очень больших скоростях частиц, вследствие увеличения их массы, увеличивается время  $2\tau$  обращения частицы по круговой орбите, что приводит к несоответствию этого промежутка времени периоду  $T$  ускоряющего напряжения. Можно устранить это несоответствие, изменяя надлежащим образом частоту ускоряющего напряжения по мере ускорения частиц. Такое устройство носит наименование *фазотрона*. Крупнейший в мире фазотрон, дающий возможность получать протоны с энергией 680 Мэв, сооружен в СССР в Объединенном институте ядерных исследований.

Еще больший эффект достигается в так называемых *синхрофазотронах*, в которых обеспечивается движение частиц по орбите неизменного радиуса. Это дает возможность отказаться от электромагнита со сплошными полюсами и создать кольцевой электромагнит с полюсами, расположенными только вдоль кольцевой вакуумной камеры. Вследствие этого возможно при сравнительно ограниченных затратах материалов осуществить электромагнит и соответственно камеру весьма большого радиуса, что дает возможность получить частицы с весьма большой энергией. ♦

Необходимость увеличивать радиус орбиты при увеличении энергии частицы вытекает из следующих простых соображений. Полная энергия  $W$  частицы, слагающаяся из ее собственной энергии при медленном движении и кинетической энергии, равна  $mc^2$ . При движении по круговой орбите имеем:

$$\frac{mv^2}{e} = qvB.$$

Следовательно,

$$W = mc^2 = \frac{qc}{\beta} rB,$$

где  $\beta = \frac{v}{c}$ . При больших скоростях  $\beta \approx 1$ , и величина  $W$  пропорциональна произведению  $rB$ . Так как индукцию можно увеличивать только до известного предела, то для получения больших энергий необходимо увеличивать радиус  $r$  орбиты.

Синхрофазотрон Объединенного института ядерных исследований позволяет получать протоны с энергией десять миллиардов электронвольт. Радиус равновесной орбиты в нем равен 28 м. Частицы вводятся в камеру уже с достаточно большой скоростью с помощью предварительного ускорителя. Затем они ускоряются в синхрофазотроне с помощью переменного электрического поля высокой частоты таким же образом, как в циклотроне и фазотроне, причем частота изменяется по мере ускорения частиц. Одновременно надлежащим образом изменяется и магнитное поле для удержания частиц на неизменной круговой орбите. Для получения пучков частиц большой интенсивности имеет весьма важное значение свойство автофазировки, т. е. способность проходить весь цикл ускорения не только тех частиц, скорость которых при входе в камеру строго соответствует частоте ускоряющего поля, т. е. так называемых резонансных частиц, но также и частиц, имеющих входную скорость, отличную от скорости резонансных частиц, но близкую к этой скорости.

Во всех приведенных выше примерах для управления движущимися частицами используется либо электрическое, либо магнитное поле. В циклотроне и фазотроне для ускорения частиц используется электрическое поле, для получения круговых путей — магнитное. Однако и в этих устройствах электрическое и магнитное поля не имеют между собой непосредственной связи, и, по сути дела, мы имеем здесь лишь простое наложение двух различных полей.

В современной экспериментальной физике применяется также другое устройство, предназначенное для получения весьма быстрых электронов и получившее наименование *бетатрон*. В бетатроне и ускорение электронов и искривление их пути совершаются под действием единого переменного электромагнитного поля, в котором электрическое и магнитное поля связаны друг с другом и являются лишь двумя сторонами единого электромагнитного процесса. В этом отношении представляет особый интерес рассмотреть принцип действия бетатрона.

Между полюсами электромагнита (рис. 232), обмотка которого питается переменным током, расположена цилиндрическая камера, внутри которой в высоком вакууме совершается ускорение электронов. Для ускорения электронов используется интервал времени, в течение которого магнитный поток монотонно возрастает от нулевого до некоторого конечного значения. Представим себе

мысленно круговой контур, расположенный внутри камеры в нормальной к линиям магнитной индукции плоскости и охватывающий часть магнитного потока электромагнита. Этот контур показан на рисунке пунктиром. Так как магнитный поток  $\Phi$  сквозь поверхность, ограниченную этим контуром, изменяется во времени, то в контуре индуцируется э. д. с., равная  $-\frac{d\Phi}{dt}$ . Появление э. д. с.

означает появление электрического поля, так как электродвижущая сила, в соответствии с ее общим определением, равна линейному интегралу напряженности электрического поля. Составляя интеграл вектора напряженности электрического поля вдоль рассматриваемого контура, получаем:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Электрическое поле, возникающее вследствие изменения во времени магнитного поля, не связано с электрическими зарядами и, соответственно, линии такого электрического поля замкнуты.

На рис. 232 магнитный поток направлен от наблюдателя и нарастает. При этом в контуре возникает э. д. с., направление которой показано направлением вектора  $\mathbf{E}$ . Действительно, если бы с пунктирным контуром был совмещен замкнутый проводниковый контур, то согласно принципу электромагнитной инерции в последнем возник бы ток, поток самоиндукции которого был бы направлен против нарастающего внешнего потока, т. е. ток возник бы в направлении, указанном направлением вектора  $\mathbf{E}$ . При отсутствии замкнутого проводникового контура ток проводимости не возникает, но независимо от этого в пространстве возникает индуцированное электрическое поле.

Пусть в момент времени, когда поток начинает нарастать от своего нулевого значения, в точке  $A$  контура появляются свободные электроны. В возникающем электрическом поле электроны будут испытывать силу  $\mathbf{f}_e = -e\mathbf{E}$ , направленную против вектора  $\mathbf{E}$ , так как заряд электрона отрицателен. Через  $e$  обозначаем, как обычно, абсолютное значение заряда электрона. Под действием этой силы электроны придут в движение. Движущиеся электроны будут испытывать еще силу  $\mathbf{f}_m = -e[\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}]$  со стороны магнитного поля. На рис. 232 показано направление силы  $\mathbf{f}_m$ .

Можно добиться, чтобы электрон под действием сил  $\mathbf{f}_e$  и  $\mathbf{f}_m$  совершал движение по круговой орбите. Найдем требуемые для этого условия. Обозначим радиус круговой орбиты через  $r$ .

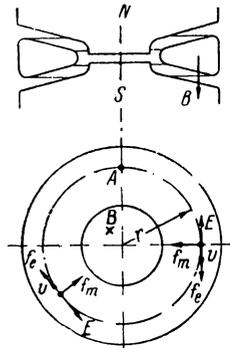


Рис. 232.

При полной симметрии поля относительно центра орбиты электродвижущая сила будет равномерно распределена вдоль орбиты, и можно написать:  $\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = E_t \cdot 2\pi r = -\frac{d\Phi}{dt}$ . Индекс  $t$  поставлен для отличия от принятого обозначения через  $E$  модуля вектора  $\mathbf{E}$ , так как  $E_t$  может быть положительным или отрицательным.

Ускорение вдоль орбиты сообщается силой  $f_{et} = eE_t$ . Следовательно,

$$f_{et} = -eE_t = \frac{d(mv)}{dt}.$$

Таким образом,

$$\frac{d(mv)}{dt} = \frac{e}{2\pi r} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Так как  $r = \text{const}$  и  $v = 0$  при  $\Phi = 0$ , то

$$v = \frac{e}{2\pi r m} \Phi.$$

Электрон удерживается на круговой орбите действием силы  $f_m$ , которая должна уравниваться центробежной силой. Следовательно, должно удовлетворяться уравнение:

$$Bev = \frac{mv^2}{r} \quad \text{или} \quad B = \frac{m}{e} \frac{v}{r},$$

где  $B$  — значение магнитной индукции на орбите. Подставляя в выражение для магнитной индукции вместо скорости  $v$  ее выражение через поток  $\Phi$ , получаем:

$$B = \frac{1}{2} \frac{\Phi}{\pi r^2}.$$

Полученное соотношение показывает, что магнитная индукция на орбите должна быть в два раза меньше средней индукции на площади круга, охватываемой орбитой. Для осуществления этого необходимо соответственно усилить магнитное поле в средней части поверхности, охватываемой орбитой, что может быть осуществлено уменьшением расстояния между полюсами, как показано на рис. 232.

Рассмотрим вопрос об устойчивости круговой орбиты электрона. Если равенство  $2\pi r^2 B = \Phi$  удовлетворяется в некотором интервале изменения радиуса  $r$ , то во всем этом интервале любая круговая орбита будет возможной. Следовательно, в этом интервале любое случайное изменение радиуса под влиянием случайных возмущений будет переводить электрон на новую круговую орбиту. Закон, которому при этом подчиняется зависимость магнитной индукции

от радиуса, найдем, дифференцируя равенство  $2\pi r^2 B = \Phi$ . Замечая, что  $d\Phi = B \cdot 2\pi r dr$ , получаем:

$$2\pi \left( B \cdot 2r dr + r^2 \frac{\partial B}{\partial r} dr \right) = B \cdot 2\pi r dr \text{ или } \frac{B}{r} + \frac{\partial B}{\partial r} = 0,$$

т. е.  $-\frac{\partial B}{\partial r} = \frac{B}{r}$ , и, следовательно,  $B = \frac{\text{const}}{r}$ .

Однако в бетатроне необходимо создать условия, чтобы устойчивым было движение электрона по некоторой одной определенной орбите с радиусом  $r_0$ . Это значит, что равенство  $2\pi r^2 B = \Phi$  должно удовлетворяться только при  $r = r_0$ . Зависимость  $B$  от  $r$  вблизи  $r = r_0$  должна быть такова, чтобы при случайном увеличении радиуса орбиты электрона на величину  $\delta r$  электромагнитная сила  $f_m$  была больше центробежной силы и чтобы при случайном уменьшении радиуса она была меньше центробежной силы. Так как величина  $f_m$  пропорциональна магнитной индукции, то, очевидно, орбита с радиусом  $r_0$  будет устойчивой, если удовлетворяются условия:

$$B > \frac{1}{2} \frac{\Phi}{\pi r^2} \text{ при } \delta r > 0$$

и

$$B < \frac{1}{2} \frac{\Phi}{\pi r^2} \text{ при } \delta r < 0,$$

Эти условия удовлетворяются, если в области около устойчивой орбиты индукция будет спадать с увеличением  $r$  медленнее, чем в том случае, когда все соседние орбиты возможны, т. е. они удовлетворяются, если при  $r = r_0$  имеет место неравенство:

$$-\frac{\partial B}{\partial r} < \frac{B}{r}.$$

Это неравенство, в частности, удовлетворяется, если между  $B$  и  $r$  существует зависимость  $B = \frac{\text{const}}{r^n}$ , причем  $0 < n < 1$ .

Устойчивость орбиты в вертикальном направлении обеспечивается искривлением линий магнитной индукции (рис. 233) и появлением горизонтальных (радиальных) составляющих  $B_r$  магнитной индукции при отклонении от средней между полюсами плоскости. Соответственно, как нетрудно сообразить, на электрон, движущийся по круговой орбите (на рис. 233, в точках  $A'$  и  $A''$  по направлению от плоскости чертежа к наблюдателю), будут действовать в точках  $A'$  и  $A''$  силы  $f'_z$  и  $f''_z$ , стремящиеся сместить электрон на среднюю плоскость.

Бетатроны осуществляются для получения электронов с энергией порядка сотен миллионов электронвольт. Для получения больших энергий электронов используются *синхротроны*. В них так же, как и в бетатроне, обмотка электромагнита питается переменным током и используется интервал времени нарастания магнитного поля. Однако полюса электромагнита — кольцевые, как и в синхрофазотроне. Поэтому внутри орбиты отсутствует достаточно большой нарастающий магнитный поток, который мог бы обеспечить возникновение достаточно сильного индуктированного

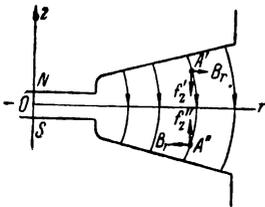


Рис. 233.

электрического поля для ускорения электронов, как это имеет место в бетатроне. Ускорение электронов в синхротроне осуществляется с помощью электрического поля высокой частоты между электродами на пути движения электронов, подобно тому, как это имеет место в циклотронах и фазотронах. При этом, если ввод электронов производится при большой их скорости, близкой к скорости света, то при дальнейшем ускорении скорость изменяется весьма незначительно, а энергия растет за счет увеличения массы электронов. Поэтому оказывается достаточно питать ускоряющую систему от источника напряжения постоянной частоты.

### § 80. Единство электрических и магнитных явлений

В заключение первой части сконцентрируем внимание на неоднократно уже упомянутой тесной связи между электрическими и магнитными явлениями.

Элементарные частицы, обладающие электрическим зарядом, окружены электрическим полем. Согласно максвеллову постулату поток вектора электрического смещения сквозь любую замкнутую поверхность, охватывающую частицу с зарядом  $q$ , равен этому заряду, т. е.

$$\oint \mathbf{D} \, ds = q,$$

причем между вектором  $\mathbf{D}$  и вектором напряженности электрического поля существует связь:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}.$$

Элементарные частицы (электроны, протоны и т. д.) находятся в непрерывном движении и, следовательно, окружены также магнитным полем. В § 56 было найдено выражение для напряженности магнитного поля  $H$  движущейся со скоростью  $v \ll c$  частицы с электрическим зарядом  $q$ , а также был рассмотрен качественно характер изменения электрического и магнитного полей частицы при увеличении ее скорости,

Напряженность магнитного поля определялась на основе закона полного тока:

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = i,$$

причем под  $i$  понимался электрический ток смещения, возникающий вокруг движущейся частицы с электрическим зарядом. Плотность тока смещения имеет выражение:

$$\mathfrak{z} = \frac{d\mathbf{D}}{dt}.$$

Соответственно закон полного тока можно записать в данном случае в виде:

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_s \frac{d\mathbf{D}}{dt} ds = \frac{d}{dt} \int_s \mathbf{D} ds = \frac{d\Psi_D}{dt},$$

где  $\Psi_D = \int_s \mathbf{D} ds$  — поток вектора электрического смещения сквозь поверхность  $s$ , ограниченную контуром, вдоль которого берется интеграл напряженности магнитного поля.

Рассматривая в пространстве, окружающем частицу, мысленно проведенные замкнутые контуры в плоскостях, проходящих через линию движения частицы, мы констатировали, что магнитный поток  $\Phi$  сквозь поверхности  $s$ , ограниченные этими контурами, изменяется во времени, так как частица движется относительно этих контуров. Согласно закону электромагнитной индукции:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

в этих контурах индуцируются э. д. с., т. е. в пространстве, в котором расположены эти контуры, появляется электрическое поле, индуцированное изменяющимся магнитным потоком.

Так как  $\Phi = \int_s \mathbf{B} ds$ , то закон электромагнитной индукции можно записать в виде:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_s \mathbf{B} ds = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

Появление индуцированного электрического поля приводит к изменению поля движущейся частицы по сравнению с ее полем при весьма медленном движении.

Линии вектора магнитной индукции во всех случаях непрерывны, что выражается математически в следующем виде:

$$\oint_s \mathbf{B} ds = 0.$$

Таким образом, вокруг движущейся частицы с электрическим зарядом существует единое электромагнитное поле, две стороны которого — поле электрическое и поле магнитное — тесно связаны друг с другом. Эта их взаимосвязь выражается вышеприведенными уравнениями.

Элементарная частица, обладающая электрическим зарядом, и ее электромагнитное поле представляют собой особый вид материи. Частица с электрическим зарядом не может мыслиться без его электромагнитного поля. Однако электромагнитное поле как особый вид материи может существовать и отделенное от частицы в форме фотона или излученного антенной электромагнитного поля. Уравнения, характеризующие такое поле, те же, что для электромагнитного поля движущейся частицы, только вместо уравнения  $\oint \mathbf{D} ds = q$  теперь имеем всюду  $\oint \mathbf{D} ds = 0$ .

Таким образом, совокупность основных уравнений поля в этом случае имеет вид:

$$\oint \mathbf{H} dl = i = \frac{d}{dt} \int_s \mathbf{D} ds = \frac{d\Psi_D}{dt};$$

$$\oint \mathbf{E} dl = -\frac{d}{dt} \int_s \mathbf{B} ds = -\frac{d\Phi}{dt};$$

$$\oint_s \mathbf{B} ds = 0; \quad \oint_s \mathbf{D} ds = 0.$$

Первые два уравнения свидетельствуют, что изменяющееся электрическое поле вызывает поле магнитное и, в свою очередь, изменяющееся магнитное поле вызывает поле электрическое. Вместе эти поля образуют единое электромагнитное поле. Вторые два уравнения свидетельствуют о том, что в этом случае не только линии магнитного поля, но и линии электрического поля всюду непрерывны.

Такое отделенное от заряженных частиц электромагнитное поле, как мы покажем в третьей части курса, обязательно движется со свойственной ему скоростью — скоростью света  $c$ . Электромагнитное же поле, принадлежащее заряженной частице, как и сама частица, может двигаться вместе с ней как целое только со скоростью меньшей, чем скорость света  $c$ .

Электромагнитное поле является носителем определенного количества энергии. Объемная плотность энергии электромагнитного поля складывается из объемных плотностей энергии его электрического и магнитного полей:

$$W' = W'_e + W'_m = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2}.$$

Таким образом, движение электромагнитного поля всегда связано с передачей энергии. Это чрезвычайно важное положение будет специально изучено в третьей части курса. Конечно, электромагнитное поле как вид материи обладает и рядом других свойств: инертной массой, количеством движения и т. д., но в практическом отношении наиболее важным для нас является его энергетическая характеристика.

Основные физические представления и соотношения, изложенные в первой части, будут дальше развиты в последней части, посвященной изучению электромагнитного поля, но они совершенно необходимы также и для глубокого изучения электромагнитных процессов в электрических и магнитных цепях и особенно в цепях переменного тока, что является предметом второй части курса.

Весьма важно при построении любого раздела физики положить в его основу минимальное необходимое количество соотношений, принимаемых как опытные факты, рассматриваемых с соответствующими их обобщениями в качестве аксиом. Остальные соотношения должны выводиться из них как следствия, т. е. являться теоремами.

Выше в основу положены как вытекающие из опыта и соответствующих обобщений опыта максвеллов постулат, принцип непрерывности магнитного потока, закон электромагнитной индукции и закон полного тока.

На основании опытного закона Кулона и вытекающей из него для случая однородной и изотропной среды и электростатического поля теоремы Гаусса, обобщенной затем для любой среды и для любого изменяющегося во времени электрического поля, мы получили постулат Максвелла:

$$\oint_s \mathbf{D} ds = q,$$

связывающий электрическое поле с электрическими зарядами частиц или тел.

Опытный факт непрерывности линии магнитной индукции, непосредственно проверяемый всюду, где это достижимо в магнитном поле, окружающем электрические токи, обобщенный на основе современных физических представлений об элементарных токах в веществе и о магнитных моментах элементарных частиц вещества на случай магнитного поля внутри любого твердого тела, где непосредственный эксперимент невозможен, сформулирован нами в качестве фундаментального принципа непрерывности магнитного потока:

$$\oint_s \mathbf{B} ds = 0.$$

Этот принцип гласит, что магнитных масс, как источников линий магнитного поля, аналогичных электрическим зарядам частиц

или тел, являющихся источниками линий электрического поля, в природе не существует.

Установленный опытным путем для проводниковой замкнутой электрической цепи закон электромагнитной индукции, обобщенный для любого мысленно взятого контура в изменяющемся магнитном поле в любой среде,

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi}{dt},$$

дает одно из важнейших уравнений электромагнитного поля, связывающее изменяющееся магнитное поле с возникающим при этом полем электрическим. Линии такого электрического поля являются непрерывными, т. е. замкнутыми.

Также установленный опытным путем для токов проводимости и переноса закон полного тока, обобщенный на все виды электрического тока, включая и токи электрического смещения,

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = i,$$

дает другое важнейшее уравнение электромагнитного поля, связывающее движение электрически заряженных частиц и тел и изменяющееся электрическое поле с возникающим при этом магнитным полем.

Приняв эти соотношения за основные, мы получаем остальные соотношения как их следствие. Например, закон Био-Савара-Лапласа, определяющий напряженность магнитного поля элемента тока (§ 56), выводится как следствие указанных основных соотношений. Точно так же все выражения для электромагнитной силы (§§ 73—75) получаются как следствия этих соотношений с использованием закона сохранения энергии.

Интересно здесь отметить, что если ввести понятие магнитной индукции, используя механическую силу, действующую в магнитном поле на проводник с током, то закон электромагнитной индукции удастся вывести только для движущихся проводниковых контуров, так как только при этом электромагнитная сила совершает работу. Справедливость же закона электромагнитной индукции для неподвижных контуров, находящихся в изменяющемся магнитном поле, приходится вновь обосновывать опытом.

В первых же параграфах последней части, посвященной теории электромагнитного поля, мы увидим, что для полного определения поля любого вектора необходимо знать значения интегралов этого вектора по всем возможным замкнутым контурам, а также знать истоки линий вектора, т. е. значения интегралов этого вектора по всем возможным замкнутым поверхностям. Это и осуществляется в избранных выше основных соотношениях. Таким образом, их выбор не является случайным. Он тесно связан с сущностью исследуемых явлений.

---

ПРИЛОЖЕНИЕ

**СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЕДИНИЦАМИ СИСТЕМ МКСА И СГС**

Согласно ГОСТ 8033-56, утвержденному Комитетом стандартов, мер и измерительных приборов 10/VII 1956 г., со сроком введения с 1/I 1957 г., установлена для электрических и магнитных измерений в качестве основной абсолютная практическая система единиц МКСА, основными единицами которой являются: метр, килограмм, секунда, ампер. В этой системе при рационализованной форме уравнений электромагнитного поля электрическая постоянная

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi v_0^2} \cdot 10^7 \text{ фарады на метр}$$

(где  $v_0$  — числовое значение скорости света в пустоте, выраженной в метрах в секунду) и магнитная постоянная

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ генри на метр.}$$

Этим ГОСТ допускается также применение для электрических и магнитных измерений абсолютной системы СГС, основными единицами которой являются: сантиметр, грамм, секунда — и в которой электрическая постоянная  $\epsilon_0$  и магнитная постоянная  $\mu_0$  при нерационализованной форме уравнений электромагнитного поля равны единице.

Кроме того, допускается применение внесистемных единиц для энергии: электронвольт ( $1 \text{ эв} = 1,60207 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ ), килоэлектронвольт ( $1 \text{ кэв} = 10^3 \text{ эв}$ ) и мегаэлектронвольт ( $1 \text{ Мэв} = 10^6 \text{ эв}$ ).

Соотношения между единицами МКСА и СГС приведены в таблице.

---

№ п/д	Наименование величин	Наименование и обозначение единиц						1 единица СГС равна:									
		в системе МКСА			в системе СГС												
		н	дж	вт	к	в	в/м	ф	а	ом	вб	вб/м <sup>2</sup>	гн	а	ав	а/м	
1	Механическая сила . . . . .	ньютон															
2	Работа и энергия . . . . .	джоуль	н	дж													
3	Мощность . . . . .	ватт	дж	вт													
4	Электрический заряд . . . . .	кулон	к														
5	Электрическое напряжение, э. д. с., разность электрических потенциалов . . . . .	вольт	в														
6	Напряженность электрического поля . . . . .	—	в/м														
7	Электрическая емкость . . . . .	фарада	ф														
8	Электрический ток . . . . .	ампер	а														
9	Электрическое сопротивление . . . . .	ом	ом														
10	Магнитный поток . . . . .	вебер	вб														
11	Магнитная индукция . . . . .	—	вб/м <sup>2</sup>														
12	Индуктивность и взаимная индуктивность . . . . .	генри	гн														
13	Магнитодвижущая сила . . . . .	ампер или ампервиток	а	ав													
14	Напряженность магнитного поля . . . . .	—	а/м														

Пр и м е ч а н и е. Через  $c_0 \approx 2,998 \cdot 10^{10} \approx 3 \cdot 10^{10}$  обозначено числовое значение скорости света в вакууме, выраженной в сантиметрах в секунду.

## АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абсолютная практическая электромагнитная система единиц МКСА 29, 293  
Ампер, электромагнитные силы 274  
Андрианов К. А., кремнийорганические изолирующие вещества 75  
Андронов А. А., теория нелинейных процессов 18  
Аркадьев В. К., работы в области ферромагнетизма 218
- Бареттер 137  
Бесколлекторные машины 183  
Богородицкий Н. П., новые изолирующие материалы 74  
Боргман И. И., исследование потерь в диэлектрике 74
- Ветви электрической цепи 100  
Вихревые токи 248
- Герц Г., опыты по получению и распространению электромагнитных волн 16  
Гильберт, о магнитных и электрических явлениях 14  
Гистерезис 64, 215  
Гистерезисная петля 66, 215
- Движение электрона в электрическом и магнитном полях 277, 278  
Диамагнитные вещества 211  
Диэлектрики 23, 26  
Диэлектрическая восприимчивость 49  
— проницаемость абсолютная 29  
— — относительная 29, 64
- Емкость динамическая 67  
— статическая 67  
— электрическая 59  
— — уединенного тела 59
- Закон Био — Савара — Лапласа 207  
Закон Кирхгофа второй 105  
— Кирхгофа первый 103  
— Кулона 15, 30  
— Ленца — Джоуля 116  
— магнитной цепи 225  
— Ома 101  
— полного тока 203  
— электромагнитной индукции 175, 176, 177  
Заряды свободные 50  
— связанные 50
- Изолирующие вещества 23, 26  
Индуктивность взаимная 183, 243  
— — динамическая 243  
— — статическая 243  
— собственная 237  
— — динамическая 238  
— — статическая 237
- Контактные э. д. с. 45  
Коэрцитивная сила 214  
Коэффициент связи 247  
Кривая намагничивания основная 215  
— — начальная 214  
— размагничивания 232
- Лачинов Д. А., передача электрической энергии 112  
Лебедев П. Н., исследование электромагнитной природы света 16  
— — — открытие давления света 16  
Ленин В. И., о физических явлениях 22  
— — — об электрификации страны 13  
Ленц Э., принцип электромагнитной инерции 16, 185  
Линейные цепи 117  
Линии магнитной индукции 172  
— равного потенциала 40  
— тока 87  
— электрического смещения 57  
Ломоносов М. В., работы в области электрических явлений 13
- Магнитная восприимчивость 211  
— индукция 170  
— постоянная 193  
— проницаемость 211  
— цепь 224  
Магнитное насыщение 215  
Магнитный момент элементарного тока 200  
Магнитный пояс 195  
Магнитодвижущая сила 203, 224  
Магнитодиэлектрики 222  
Магнитострикция 216  
Магниты постоянные 231  
Максвелл, метод контурных токов 116  
— обобщение закона электромагнитной индукции 179  
— постулат об электрическом смещении 56  
— теория электромагнитного поля 16  
— электрическое смещение 56  
Мандельштам Л. И., теория нелинейных процессов 18  
Метод контурных токов 116  
— узловых напряжений 130  
Механические проявления магнитного поля 258  
— электрического поля 77, 80  
Миткевич В. Ф., исследование электрической дуги 138  
Миткевич В. Ф., физические представления об электромагнитных явлениях 16
- Намагниченность вещества 197, 199  
Намагничивающая сила 203  
Напряжение 37, 188  
Напряженность магнитного поля 200  
— электрического поля 28  
Нелинейная характеристика 64, 250  
Несимметричные элементы 133

- Объемная плотность энергии магнитного поля 254  
 — — — электрического поля 71  
 Остаточная индукция 214
- Падение напряжения 37  
 Папалекси Н. Д., теория нелинейных процессов 18  
 Параллельное соединение 109  
 — — в цепи с нелинейными элементами 147, 149  
 — — конденсаторов 63  
 Парамагнитные вещества 211  
 Параметры электрической цепи 117  
 Пассивные элементы 134  
 Петров В. В., открытие электрической дуги 138
- Плотность тока переноса 91  
 — — проводимости 88  
 — — смещения 94  
 — — тока 86
- Поверхности равного потенциала 40  
 Поле магнитное 167  
 — постоянных токов 90  
 — стационарное 90  
 — электрическое 23
- Поле электростатическое 23  
 Полный ток 203  
 Полупроводники 142  
 Полупроводниковые диоды 142  
 Полупроводящие вещества 24, 26  
 Поляризация диэлектриков 47  
 Поляризованность диэлектрика 48, 52  
 Попов А. С., изобретение радио 16  
 Последовательное соединение 108  
 — — в цепи с нелинейными элементами 147, 148  
 — — конденсаторов 63  
 Постоянный электрический ток 90  
 Потенциал электрический 39  
 Потери в диэлектрике 74  
 Поток вектора напряженности электрического поля 31  
 — — электрического смещения 55  
 — — взаимной индукции 183  
 — — магнитный 170  
 — — самоиндукции 182  
 Потокосцепление 181  
 Правило Миткевича 271  
 Преобразование соединения звездой в соединении многоугольником 127  
 Принцип взаимности 120, 157  
 — наложения 119  
 — непрерывности магнитного потока 173  
 — — электрического тока 97
- Проводимость динамическая 133  
 — статическая 133  
 Проводящие вещества 23, 26  
 Пустота 21
- Разность потенциалов 39, 90  
 Расчет нелинейных электрических цепей постоянного тока 151, 154, 157, 160
- Самопроизвольное намагничивание 215  
 Сегнетоэлектрики 64, 75  
 Силы в электрическом поле 77  
 — электромагнитные 258  
 Симметричные элементы 133  
 Сложные электрические цепи 113  
 Смешанное соединение приемников 109  
 — — цепи с нелинейными элементами 147, 149
- Соединение звездой 127  
 — многоугольником 127  
 — смешанное 109  
 — треугольником 127
- Сопротивление взаимное контуров 116  
 — динамическое 133  
 — магнитное 225  
 — собственное контура 116  
 — статическое 133
- Стабилизация тока 137  
 Стационарное электрическое поле 90  
 Столетов А. Г., исследование магнитных свойств железа 213
- Температурный коэффициент сопротивления 89  
 Теорема Гаусса 31  
 — об эквивалентном генераторе 123  
 Термоэлектродвижущая сила 45  
 Термоэлемент (термопара) 45  
 Тиритовые элементы 136  
 Ток насыщения 141  
 — переноса 90  
 — смещения 92  
 Ток электрический 86  
 Точка Кюри 215  
 Трубка магнитной индукции 172  
 Трубка тока 87  
 — электрического смещения 57
- Удельная электрическая проводимость 88  
 Удельное электрическое сопротивление 88  
 Узлы электрических цепей 100
- Фарадей, открытие явления электромагнитной индукции 16, 175  
 — представления о природе механических сил 83, 262  
 Ферриты 222  
 Ферромагнитные вещества 198, 213, 220
- Характеристика динамическая 66, 251  
 — катушки с сердечником из ферромагнитного вещества 250  
 — нелинейного элемента 133  
 — статическая 66, 251
- Цепи линейные 117  
 — цепи нелинейные 147
- Четырехполюсники 155
- Штейнмец, потери на гистерезис 219
- Эквивалентная индуктивность 248  
 — проводимость цепи 110  
 Эквивалентное сопротивление цепи 110  
 Электрическая дуга 138  
 Электрическая постоянная 29  
 — цепь 41  
 Электрический диполь 41  
 — момент диполя 41  
 — потенциал 39  
 Электрическое смещение 53  
 Электродвижущая сила 41  
 — — взаимной индукции 183  
 — — самоиндукции 182  
 Электропроводность электронная 24  
 — дырочная 24  
 Электростатика 23  
 Энергия магнитного поля 254  
 — — — системы контуров с токами 252  
 — электрического поля 71  
 Эпинус Ф., о родстве электрических и магнитных явлений 14  
 Эрстед, механическое воздействие электрического тока на магнитную стрелку 15  
 Эффект насыщения 212  
 Явление магнитострикции 216  
 — остаточной индукции 214  
 — сверхпроводимости 186

7-р. 30 к.