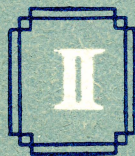


А.Р. НЕЙМАН и П.А. КАЛАНТАРОВ

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ



ГОСЭНЕРГОИЗДАТ

4

22



Л. Р. НЕЙМАН и П. Л. КАЛАНТАРОВ

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

В ТРЕХ ЧАСТЯХ

*Издание пятое, переработанное*

\*  
*Часть вторая*  
\*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МОСКВА 1959 ЛЕНИНГРАД

П. Л. КАЛАНТАРОВ и Л. Р. НЕЙМАН

# ТЕОРИЯ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

*Допущено Министерством высшего образования СССР  
в качестве учебника для электротехнических и энергетических  
вузов и факультетов*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МОСКВА 1959 ЛЕНИНГРАД



*Курс „Теоретические основы электротехники“ Л. Р. Неймана и П. Л. Калантарова предназначен для студентов всех энергетических и электротехнических высших учебных заведений и факультетов. Содержание курса соответствует программе Министерства высшего образования СССР по одноименной дисциплине. Курс состоит из трех частей: части первой—„Физические основы электротехники и теория цепей постоянного тока“, написанной Л. Р. Нейманом, за исключением главы о расчете линейных цепей постоянного тока, написанной П. Л. Калантаровым и дополненной Л. Р. Нейманом, части второй—„Теория цепей переменного тока“, написанной П. Л. Калантаровым и переработанной и дополненной Л. Р. Нейманом, и части третьей—„Теория электромагнитного поля“, написанной Л. Р. Нейманом.*

*Во второй части рассмотрены явления, происходящие в цепях переменного тока, и методы расчета этих цепей.*

*Нейман Леонид Робертович и Калантаров Павел Лазаревич*

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

## Часть вторая

Редакторы *И. А. Зайцев, М. С. Кияницyna*  
Технический редактор *Е. М. Соболeва*

---

Сдано в производство 3/XII 1958 г.	Подписано к печати 24/IV 1959 г. М-04276.	Печ. л. 27,75.
Бум. л. 13,88	Уч.-изд. л. 27,0.	Формат 60×92 <sup>1</sup> / <sub>16</sub> .
Заказ 530.		Тираж 75 000 экз. (26—75 тыс.)
		Цена 10 р. 45 к.

---

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза.  
Ленинград, Измайловский пр., 29.

Отпечатано с матриц типографии № 4 УПП Ленсовнархоза, Социалистическая, 14.

---

## ОГЛАВЛЕНИЕ

### Глава первая

#### Основные характеристики цепей переменного тока и происходящих в них явлений

	Стр.
§ 1. Периодические и синусоидальные электродвижущие силы, напряжения и токи . . . . .	11
§ 2. Физические явления в электрических цепях переменного тока . .	14
§ 3. Научные абстракции, принимаемые в теории цепей переменного тока, их практическое значение и границы применимости . . . . .	17
§ 4. Параметры электрических цепей переменного тока . . . . .	20
§ 5. Действующие и средние значения периодических электродвижущих сил, напряжений и токов . . . . .	22
§ 6. Получение синусоидальных э. д. с. в генераторах переменного тока . . . . .	25
§ 7. Кривые магнитного потока и индуктированной э. д. с. Характеристики формы кривых . . . . .	29
§ 8. Векторные диаграммы . . . . .	30
§ 9. Установившийся ток в простейшей цепи с последовательным соединением участков $r$ , $L$ и $C$ при синусоидальном напряжении на ее зажимах . . . . .	33
§ 10. Полное, активное и реактивное сопротивление цепи . . . . .	37
§ 11. Разность фаз напряжения и тока . . . . .	38
§ 12. Установившийся ток в простейшей цепи с параллельным соединением участков $g$ , $L$ и $C$ при синусоидальном напряжении . . . .	40
§ 13. Треугольники напряжений и сопротивлений . . . . .	42
§ 14. Треугольники токов и проводимостей . . . . .	44
§ 15. Зависимости, связывающие эквивалентные сопротивления и проводимости . . . . .	47
§ 16. Диаграммы в отрезках на осях . . . . .	—
§ 17. Простейшие линейные и круговые диаграммы . . . . .	49
§ 18. Активная мощность в цепи переменного тока . . . . .	50
§ 19. Реактивная мощность и полная мощность в цепи переменного тока .	53
§ 20. Колебания энергии в цепи переменного тока . . . . .	54
§ 21. Треугольник мощностей . . . . .	60
§ 22. Эквивалентные параметры и их экспериментальное определение .	61
§ 23. Влияние поверхностного эффекта и вихревых токов на параметры цепи . . . . .	64
§ 24. Параметры несовершенного конденсатора . . . . .	68
§ 25. Параметры различных устройств в цепи переменного тока . . . .	—

### Глава вторая

#### Символический метод расчета цепей переменного тока

§ 26. Основы символического метода . . . . .	71
§ 27. Символическое изображение синусоидальных функций, их сумм, интегралов и производных . . . . .	74

	Стр.
§ 28. Применение символического метода к расчету цепей переменного тока . . . . .	76
§ 29. Комплексное сопротивление и комплексная проводимость . . . . .	78
§ 30. Законы Ома и Кирхгофа в символической форме . . . . .	79
§ 31. Определение мощности по комплексным напряжению и току . . . . .	81

### Глава третья

#### Расчет электрических цепей при синусоидальных процессах

§ 32. Расчет цепи при последовательном соединении приемников . . . . .	83
§ 33. Расчет цепи при параллельном соединении приемников . . . . .	85
§ 34. Расчет цепей при смешанном соединении приемников . . . . .	87
§ 35. Передача энергии по индуктивной линии . . . . .	88
§ 36. О расчете сложных цепей переменного тока . . . . .	90
§ 37. Теорема Ланжевена . . . . .	92
§ 38. Расчет цепей при наличии взаимной индукции . . . . .	93
§ 39. Трансформатор без сердечника . . . . .	99

### Глава четвертая

#### Резонанс в электрических цепях

§ 40. Понятие о резонансе . . . . .	102
§ 41. Резонанс в цепи с последовательным соединением участков $r, L, C$ . . . . .	—
§ 42. Частотные характеристики цепи с последовательным соединением участков $r, L, C$ . . . . .	105
§ 43. Резонанс в цепи с параллельным соединением участков $g, L, C$ . . . . .	108
§ 44. Частотные характеристики цепи с параллельным соединением участков $g, L, C$ . . . . .	110
§ 45. Резонанс в сложной цепи . . . . .	111
§ 46. Резонанс в двух связанных сверхпроводящих контурах . . . . .	114
§ 47. Практическое значение явления резонанса в электрических цепях . . . . .	117

### Глава пятая

#### Четырехполюсники и цепные схемы

§ 48. Уравнения четырехполюсника . . . . .	120
§ 49. Схемы, эквивалентные пассивному четырехполюснику . . . . .	123
§ 50. Холостой ход и короткое замыкание четырехполюсника . . . . .	124
§ 51. Повторное сопротивление и коэффициент распространения симметричного четырехполюсника . . . . .	126
§ 52. Симметричные однородные цепные схемы . . . . .	129
§ 53. Частотные электрические фильтры . . . . .	131
§ 54. Зона прозрачности простейших фильтров . . . . .	133
§ 55. Резонансная кривая реактивного Т-образного звена . . . . .	136
§ 56. Резонансная кривая реактивной цепной схемы . . . . .	138
§ 57. Различные формы записи уравнений четырехполюсника . . . . .	139
§ 58. Активный четырехполюсник . . . . .	142

### Глава шестая

#### Линейные и круговые диаграммы

§ 59. Применение геометрических мест для исследования работы цепей переменного тока . . . . .	144
§ 60. Умножение и деление кривых . . . . .	—

	Стр.
§ 61. Обращение кривых . . . . .	147
§ 62. Обращение в комплексной плоскости . . . . .	149
§ 63. Диаграммы для случая передачи энергии к приемнику с постоянным коэффициентом мощности . . . . .	151
§ 64. Диаграммы для случая передачи энергии к приемнику с постоянной реактивной проводимостью . . . . .	154
§ 65. Уравнения прямой и окружности в символической форме . . . . .	156
§ 66. Диаграмма для четырехполюсника . . . . .	157
§ 67. Графическое определение мощностей . . . . .	160
§ 68. Шкала коэффициента полезного действия . . . . .	163
§ 69. Построение прямых мощности для двух частных случаев передачи энергии по индуктивной линии . . . . .	165

### Глава седьмая

#### Многофазные цепи

§ 70. Понятие о многофазных системах и цепях . . . . .	167
§ 71. Симметричные многофазные системы . . . . .	168
§ 72. Уравновешенные и неуравновешенные многофазные системы . . . . .	171
§ 73. О связывании многофазных систем . . . . .	172
§ 74. Многофазные цепи при симметрии системы напряжений и системы токов . . . . .	175
§ 75. Соединение звездой и треугольником в трехфазной системе . . . . .	177
§ 76. Топографические диаграммы . . . . .	178
§ 77. Расчет несимметричных трехфазных цепей при отсутствии взаимной индукции . . . . .	179
§ 78. Пульсирующее магнитное поле . . . . .	182
§ 79. Вращающееся магнитное поле . . . . .	185
§ 80. Асинхронная машина с заторможенным ротором . . . . .	187
§ 81. Асинхронная машина с вращающимся ротором . . . . .	188
§ 82. Обобщение понятия о симметричных системах . . . . .	189
§ 83. Симметричные составляющие трехфазной системы . . . . .	191
§ 84. Фильтры симметричных составляющих . . . . .	195
§ 85. Независимость симметричных составляющих в симметричной трехфазной цепи . . . . .	199
§ 86. Применение метода симметричных составляющих к расчету токов короткого замыкания . . . . .	200
§ 87. Мощность трехфазной цепи в общем случае несимметрии . . . . .	203

### Глава восьмая

#### Несинусоидальные периодические электродвижущие силы, напряжения и токи

§ 88. Разложение периодических функций в ряд Фурье . . . . .	205
§ 89. Действующие значения несинусоидальных электродвижущих сил, напряжений и токов . . . . .	211
§ 90. Активная мощность при наличии высших гармоник . . . . .	212
§ 91. О расчете цепей с постоянными параметрами при несинусоидальных напряжениях . . . . .	214
§ 92. Влияние характера цепи с постоянными параметрами на форму кривой тока . . . . .	216
§ 93. Высшие гармоники в трехфазных цепях . . . . .	220
§ 94. Биения колебаний . . . . .	222
§ 95. Модуляция колебаний . . . . .	224



## Глава девятая

Реактивные катушки и трансформаторы с сердечниками  
из ферромагнитного материала

	Стр.
§ 96. Реактивные катушки с сердечниками из ферромагнитного материала . . . . .	227
§ 97. Потери в сердечниках из ферромагнитного материала . . . . .	—
§ 98. Формы кривых тока в катушке с ферромагнитным сердечником и напряжения на ее зажимах . . . . .	231
§ 99. Эквивалентные синусоиды и зависимость между потокоцеплением и током . . . . .	233
§ 100. Векторная диаграмма и эквивалентная схема для реактивной катушки с ферромагнитным сердечником . . . . .	234
§ 101. Трансформаторы со стальными сердечниками . . . . .	236
§ 102. Уравнения трансформатора со стальным сердечником . . . . .	238
§ 103. Приведение обмоток трансформатора к одному числу витков . . . . .	240
§ 104. Схема, эквивалентная трансформатору . . . . .	242
§ 105. Векторная диаграмма трансформатора со стальным сердечником . . . . .	244
§ 106. Экспериментальное определение коэффициента трансформации и коэффициента полезного действия трансформатора со стальным сердечником . . . . .	247
§ 107. Автотрансформаторы . . . . .	248
§ 108. Преобразование числа фаз многофазных систем при помощи трансформаторов . . . . .	249

## Глава десятая

## Переходные процессы в цепях с сосредоточенными параметрами

§ 109. Общие принципы анализа переходных процессов . . . . .	252
§ 110. Переходные процессы в индуктивных цепях при установлении постоянных токов . . . . .	254
§ 111. Включение индуктивной цепи под синусоидальное напряжение . . . . .	260
§ 112. Переходные процессы в емкостных цепях при установлении постоянных напряжений . . . . .	262
§ 113. Включение емкостной цепи под синусоидальное напряжение . . . . .	266
§ 114. Разряд конденсатора . . . . .	268
§ 115. Включение цепи, обладающей индуктивностью и емкостью, под постоянное напряжение . . . . .	278
§ 116. Включение цепи, обладающей индуктивностью и емкостью, под синусоидальное напряжение . . . . .	280
§ 117. Включение цепей под действия напряжения произвольного вида . . . . .	287
§ 118. Понятие об операторном методе . . . . .	290
§ 119. Изображения простейших функций . . . . .	293
§ 120. Обобщение законов Ома и Кирхгофа . . . . .	295
§ 121. Теорема разложения . . . . .	300
§ 122. Интеграл Фурье . . . . .	303
§ 123. Получение спектральных характеристик заданной функции времени . . . . .	308
§ 124. Применение интеграла Фурье к расчету переходных процессов . . . . .	311
§ 125. Передаточные функции . . . . .	314
§ 126. Дифференцирующие и интегрирующие цепи . . . . .	—
§ 127. Обратные связи . . . . .	317
§ 128. Понятие о синтезе электрических цепей . . . . .	320

## Глава одиннадцатая

## Однородные линии при установившемся режиме

	Стр.
§ 129. Уравнения однородной линии . . . . .	322
§ 130. Решение уравнений однородной линии при установившемся синусоидальном режиме . . . . .	324
§ 131. О моделировании однородной линии цепной схемой . . . . .	327
§ 132. Однородная линия, замкнутая на характеристическое сопротивление . . . . .	328
§ 133. Бегущие волны . . . . .	329
§ 134. Характеристики однородной линии . . . . .	332
§ 135. Невскажающая линия . . . . .	334
§ 136. Однородная линия при различных режимах работы . . . . .	335
§ 137. Линия без потерь . . . . .	338

## Глава двенадцатая

## Переходные процессы в однородных линиях

§ 138. Общее решение уравнений однородной невискажающей линии . . . . .	342
§ 139. Волны в невискажающей линии . . . . .	345
§ 140. О происхождении и характере волн в линиях . . . . .	346
§ 141. Преломление и отражение волн в месте сопряжения двух однородных линий . . . . .	348
§ 142. Отражение волн от конца линии . . . . .	350
§ 143. Процесс включения однородной линии . . . . .	354
§ 144. Прохождение волн при наличии реактивного сопротивления в месте сопряжения однородных линий . . . . .	356
§ 145. Прохождение волн при наличии активного сопротивления в месте сопряжения однородных линий . . . . .	360

## Глава тринадцатая

## Нелинейные электрические цепи переменного тока при установившемся режиме

§ 146. Нелинейные электрические цепи переменного тока, их параметры, свойства и методы их исследования . . . . .	363
§ 147. Нелинейные сопротивления в цепи переменного тока . . . . .	365
§ 148. Устойчивость режима в нелинейной электрической цепи, питаемой от источника постоянного напряжения . . . . .	367
§ 149. Общие соображения об устойчивости режима в сложных нелинейных электрических цепях, питаемых от источников постоянного напряжения . . . . .	372
§ 150. Выпрямление переменных токов . . . . .	374
§ 151. Управляемые нелинейные элементы. Ионный прибор с управляющим электродом . . . . .	376
§ 152. Управляемые нелинейные элементы. Трехэлектродная электронная лампа . . . . .	377
§ 153. Управляемые нелинейные элементы. Полупроводниковые триоды . . . . .	379
§ 154. Полупроводниковый триод, как элемент электрической цепи . . . . .	382
§ 155. Регулирование выпрямителей и преобразование постоянного тока в переменный с помощью управляемых ионных приборов . . . . .	386
§ 156. Ламповый генератор . . . . .	389
§ 157. Модуляция и детектирование колебаний с помощью нелинейных элементов . . . . .	392

	Стр.
§ 158. Релаксационные колебания . . . . .	395
§ 159. Индуктивные и емкостные нелинейные элементы в цепи переменного тока . . . . .	397
§ 160. Нелинейные электрические цепи, содержащие реактивные катушки с ферромагнитными сердечниками и конденсаторы . . . . .	399
§ 161. Ферромагнитные стабилизаторы напряжения . . . . .	404
§ 162. Ферромагнитный резонансный умножитель частоты . . . . .	406
§ 163. Ферромагнитный утронитель частоты . . . . .	—
§ 164. Ферромагнитный удвоитель частоты . . . . .	407
§ 165. Ферромагнитный усилитель мощности . . . . .	410
§ 166. Конденсаторы с нелинейной характеристикой в цепи переменного тока . . . . .	412

### Глава четырнадцатая

#### Переходные процессы в нелинейных цепях

§ 167. Методы расчета переходных процессов в нелинейных электрических цепях . . . . .	415
§ 168. Замыкание накоротко катушки с ферромагнитным сердечником . . . . .	416
§ 169. Включение катушки с ферромагнитным сердечником под действие постоянного напряжения . . . . .	421
§ 170. Включение катушки с ферромагнитным сердечником под синусоидальное напряжение . . . . .	426
§ 171. Изображение переходных процессов на фазовой плоскости . . . . .	429
§ 172. Метод изоклин для построения фазовых траекторий и расчета переходных процессов . . . . .	434
§ 173. Практическое использование нелинейных свойств электрических цепей в различных областях электротехники . . . . .	438
Алфавитный указатель . . . . .	441

---

## ГЛАВА ПЕРВАЯ

### ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА И ПРОИСХОДЯЩИХ В НИХ ЯВЛЕНИЙ

#### § 1. Периодические и синусоидальные электродвижущие силы, напряжения и токи

*Переменными* э. д. с., напряжениями и токами в широком смысле называют э. д. с., напряжения и токи, изменяющиеся во времени.

Условимся называть *мгновенными значениями* э. д. с., напряжений и токов их значения в данный момент времени  $t$ . Тогда, обозначив мгновенные значения э. д. с., напряжения и тока через  $e$ ,  $u$  и  $i$ , можно написать:

$$e = F(t); \quad u = F(t); \quad i = F(t).$$

В технике наиболее часто применяют *периодические* э. д. с., напряжения и токи, т. е. такие, мгновенные значения которых повторяются через равные промежутки времени и для которых, следовательно, справедливо соотношение:

$$F(t) = F(t + kT),$$

где  $k$  — любое целое число, а  $T$  — постоянная величина, называемая *периодом* э. д. с., напряжения или тока и представляющая собой наименьший промежуток времени, по истечении которого мгновенные значения периодической э. д. с., напряжения или тока повторяются. Величину, обратную периоду, называют *частотой* э. д. с., напряжения или тока. Обозначив частоту через  $f$ , имеем:

$$f = \frac{1}{T}; \quad T = \frac{1}{f}.$$

Таким образом, численно частота равна числу периодов в единицу времени. Постоянные э. д. с., напряжения и токи можно рассматривать как частный случай периодических, период изменения которых бесконечно велик, а частота равна нулю, т. е.  $T = \infty$  и  $f = 0$ .

Единицу измерения частоты, равную одному периоду в секунду, называют *герц* (1 гц).



Диапазон частот, встречающихся в технических применениях, весьма широк — от десятков до миллиардов герц. В энергетических устройствах применяют низкие частоты, а именно в СССР и в Европе для передачи и распределения энергии стандартной является частота 50 *гц*, а в Америке — 60 *гц*. В телефонии применяют повышенные частоты порядка сотен и тысяч герц, а в радиотехнических устройствах частоты доходят до миллиардов герц.

Вид периодической функции, определяющей закон изменения э. д. с., напряжения или тока, может быть очень сложен. Однако, как известно, периодическую функцию можно разложить в ряд Фурье и представить ее в виде суммы членов этого ряда. В общем случае ряд Фурье состоит из:

1) *постоянной составляющей*;  
2) синусоидальной функции, имеющей частоту, равную частоте данной периодической функции, и называемой *основной волной* или *первой гармоникой*;

3) ряда синусоидальных функций, частоты которых кратны частоте данной функции и которые называют *высшими гармониками*.

Заметим, что часто термин *переменные э. д. с.*, напряжения и токи понимают в более узком, чем выше было указано, смысле, а именно относят его к периодическим э. д. с., напряжениям и токам, постоянная составляющая которых равна нулю.

В первую очередь мы займемся изучением простейших переменных э. д. с., напряжений и токов, являющихся синусоидальными функциями времени. Особое внимание, которое будет уделено изучению синусоидальных э. д. с. и токов, объясняется также тем, что в технике обычно стремятся получить в электрических цепях синусоидальные напряжения и токи, так как появление высших гармоник во многих случаях, как мы увидим дальше, приводит к нежелательным явлениям — вызывает дополнительные потери энергии, создает условия для появления перенапряжений на отдельных участках цепи, ведет к увеличению влияния мощных линий передачи на соседние с ними линии связи. Поэтому современные генераторы промышленной частоты осуществляют так, что форма кривой э. д. с. в них весьма близка к синусоиду, а при этом, как мы увидим далее, в цепи с постоянными параметрами и форма кривой тока также будет синусоидальна. Точно так же в технике высокой частоты широко используются синусоидальные напряжения и токи.

*Синусоидальными э. д. с.*, напряжениями и токами называют периодические э. д. с., напряжения и токи, закон изменения которых выражается функциями вида:

$$e = E_m \sin \left( \frac{2\pi t}{T} + \psi_e \right); \quad u = U_m \sin \left( \frac{2\pi t}{T} + \psi_u \right); \quad i = I_m \sin \left( \frac{2\pi t}{T} + \psi_i \right)$$

единственной переменной величиной в правых частях которых является время  $t$ . Из выражений для синусоидальных э. д. с., напряжения и тока видно, что их период равен  $T$  и что наибольшие

значения  $e$ ,  $u$  и  $i$  равны соответственно  $E_m$ ,  $U_m$  и  $I_m$ . Эти последние значения называют *максимальными значениями* или *амплитудами* э. д. с., напряжения и тока. Аргумент синуса, отсчитываемый от ближайшей предыдущей точки перехода синусоидальной величины через нуль от отрицательных к положительным ее значениям, называют *фазой* э. д. с., напряжения или тока, а величины  $\psi_e$ ,  $\psi_u$

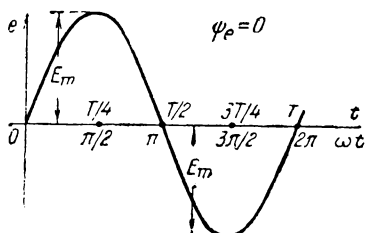


Рис. 1

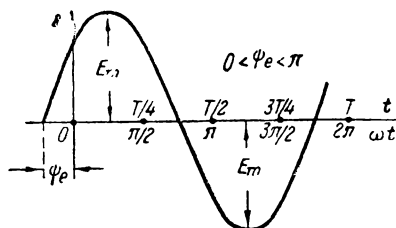


Рис. 2

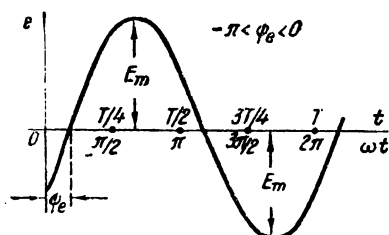


Рис. 3

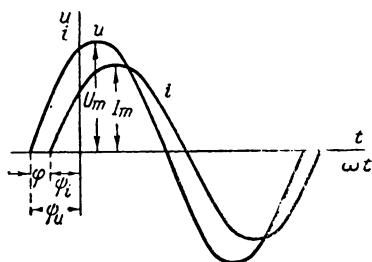


Рис. 4

и  $\psi_i$ , определяющие значения э. д. с., напряжения и тока в момент  $t = 0$ , носят название *начальных фаз* э. д. с., напряжения и тока.

Так как  $\frac{1}{T} = f$ , то можно написать:

$$e = E_m \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \psi_e\right) = E_m \sin(2\pi f t + \psi_e) = E_m \sin(\omega t + \psi_e);$$

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u); \quad i = I_m \sin(\omega t + \psi_i),$$

если обозначить  $2\pi f$  через  $\omega$ . Величина  $\omega$ , равная частоте  $f$ , умноженной на  $2\pi$ , называется *угловой частотой* переменной э. д. с., напряжения или тока и связана с частотой и периодом соотношениями:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}.$$

На рис. 1, 2 и 3 дано изображение в декартовых координатах синусоидальной э. д. с. при различных значениях начальной фазы.

По оси абсцисс при этом можно откладывать или время  $t$ , или пропорциональную ему величину  $\omega t$ . Из рис. 2 видно, что при положительном значении начальной фазы начало синусоиды сдвинуто по оси абсцисс влево от начала координат.

При совместном рассмотрении двух синусоидальных функций одной частоты *разность их фаз*, равную разности их начальных фаз, часто называют *углом сдвига* и обычно обозначают  $\varphi$ . Так, разность фаз напряжения  $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$  и тока  $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$  или, что то же, угол сдвига кривой тока относительно кривой напряжения будет  $\varphi = \psi_u - \psi_i$  (рис. 4). Если синусоидальные функции одной частоты имеют одинаковые начальные фазы, то говорят, что они *совпадают по фазе*, а если разность их фаз равна  $\pm \pi$ , то говорят, что они *противоположны по фазе*, и, наконец, если разность их фаз равна  $\pm \frac{\pi}{2}$ , то говорят, что они *находятся в квадратуре*.

## § 2. Физические явления в электрических цепях переменного тока

Согласно данному (часть I) определению электрической цепью мы называем совокупность устройств, образующих путь для электрического тока, электромагнитные процессы в которой могут быть описаны при помощи понятий об э. д. с., токе и напряжении.

Длительный постоянный ток в электрической цепи может быть только или током проводимости, или током переноса. Ток смещения в диэлектрике не может быть постоянным сколь угодно долгое время, так как электрическое смещение и поляризованность диэлектрика не могут возрастать беспредельно без нарушения электрической прочности диэлектрика. Поэтому в цепь постоянного тока могут входить только такие устройства, в которых ток существует в виде тока проводимости, например провода линии передачи, обмотки машин, электролитические ванны, гальванические элементы, аккумуляторы и т. д., или такие, в которых ток существует в форме тока переноса, например электронные лампы.

Переменный ток, т. е. изменяющийся во времени ток, может существовать и в диэлектрике в виде тока смещения. Поэтому в электрическую цепь переменного тока могут входить также конденсаторы, обкладки которых разделены диэлектриком. При переменном напряжении на конденсаторе возникает переменное электрическое поле между его металлическими обкладками и, следовательно, в разделяющем обкладки диэлектрике возникает ток смещения. Ток смещения при переменном напряжении возникает не только в конденсаторах, т. е. в устройствах, построенных специально для использования их емкости, но он возникает также и в диэлектрике, окружающем любые элементы цепи переменного тока, поскольку между этими элементами существует переменное напряжение, т. е. суще-

ствует переменное электрическое поле. Так, например, ток смещения возникает в диэлектрике между проводами линии передачи, если напряжение между проводами изменяется во времени. Вследствие этого переменный ток в проводах линии не одинаков в разных местах линии, так как вдоль всей линии ток ответвляется от проводов через диэлектрик в виде тока смещения. Говорят, что провода линии друг по отношению к другу так же, как и конденсатор, обладают емкостью. Сказанное справедливо в отношении любого устройства при переменном токе. Так, например, в реостате при переменном токе появляется переменное падение напряжения, т. е. в проволоке реостата и в окружающем его диэлектрике возникает переменное электрическое поле. Поэтому между отдельными участками проволоки реостата через диэлектрик проходят токи смещения, вследствие чего, принципиально говоря, ток в разных местах проволоки реостата имеет различные значения. Говорят, что отдельные участки реостата обладают друг по отношению к другу электрической емкостью.

Если по индуктивной катушке проходит переменный ток, то в катушке в отдельных ее витках индуцируется переменная э. д. с. На зажимах катушки и между ее витками появляется переменное напряжение, т. е. появляется переменное электрическое поле, что приводит к появлению в диэлектрике между витками катушки токов смещения. И в этом случае, строго говоря, ток в различных местах проволоки катушки имеет разные значения. Говорят, что существует электрическая емкость между витками катушки.

Итак, при переменном напряжении токи смещения и емкость распределены вдоль всей цепи.

То же следует сказать и об индуктивности цепи. Нет такого участка цепи, который при прохождении по нему тока не охватывался бы магнитным потоком. Поэтому при переменном токе на каждом участке цепи индуцируются э. д. с. самоиндукции и взаимной индукции. Говорят, что каждый участок, каждый элемент цепи обладает индуктивностью. Индуктивностью обладают не только катушки, но и провода линии, реостаты и любые другие элементы цепи переменного тока. Даже конденсаторы, принципиально говоря, обладают индуктивностью, хотя и очень малой.

Поглощение электромагнитной энергии и преобразование ее в тепловую энергию при переменном токе происходит точно так же во всех элементах цепи. Не только реостаты, но и индуктивные катушки и провода линии, а также другие элементы цепи обладают отличным от нуля электрическим сопротивлением, и при прохождении тока в них поглощается электромагнитная энергия и происходит выделение тепла. Если катушка имеет сердечник из ферромагнитного материала, то кроме потерь энергии, в обмотке катушки имеют место потери энергии в сердечнике на гистерезис и на вихревые токи. В конденсаторах при переменном напряжении имеют место потери в диэлектрике. В электронных лампах тепло выделяется на



аноде, так как ускоренные в электрическом поле электроны теряют здесь свою скорость. В ионных приборах электромагнитная энергия переходит в тепловую не только на электродах, но и в газовом промежутке между электродами.

Характеризуя способность какого-либо элемента цепи поглощать электромагнитную энергию при прохождении по нему тока электрическим сопротивлением этого участка, мы, в соответствии со сказанным, должны утверждать, что электрическое сопротивление распределено по всей электрической цепи.

В отдельных участках цепи может происходить преобразование электромагнитной энергии и в другие виды энергии, а не только в тепловую энергию, например в аккумуляторах при их зарядке — в химическую энергию, в двигателях — в механическую работу и т. д. Однако эти преобразования совершаются не обязательно во всех элементах электрической цепи.

Энергетические процессы, происходящие в электрических цепях, естественно, представляют для нас особый интерес, так как электрические цепи в основном и создаются для передачи и преобразования энергии. Даже если электрическая цепь осуществляется не с прямой целью передачи через нее электромагнитной энергии, а с целью, например, управления или регулирования процессами в каких-либо других устройствах, то и в этих случаях действие данной цепи всегда сопровождается передачей в ней и преобразованиями электромагнитной энергии. При изучении энергетических процессов в электрических цепях переменного тока нам придется обратить особое внимание на то, что электрическое и магнитное поля являются носителями определенного количества энергии. При переменных токах и напряжениях эти поля изменяются во времени. При усилении полей запас энергии в них возрастает, при ослаблении полей этот запас энергии убывает, переходя в другие виды энергии или возвращаясь источникам энергии, действующим в цепи.

При изменениях тока и напряжения в электрической цепи, как мы увидим в конце третьей части курса при рассмотрении переменного электромагнитного поля, вообще говоря, происходит излучение электромагнитного поля с присущей ему энергией. Однако в обычных цепях при сравнительно низких частотах тока и напряжения излучением можно пренебречь.

Наконец обратим внимание еще на одно существенное обстоятельство, отмеченное уже в первой части курса, а именно, что напряжение между двумя любыми точками  $A$  и  $B$  цепи переменного тока зависит от выбора пути между этими точками, вдоль которого определяется напряжение. Действительно, имеем:

$$u_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} d\mathbf{l}.$$

Но два разных пути, например путь  $AmB$  и путь  $AnB$ , образуют замкнутый контур  $AmBnA$ , с которым сцепляется переменный маг-

нитный поток  $\Phi$ , существующий около рассматриваемой электрической цепи. Изменяющийся поток  $\Phi$  индуцирует в контуре  $AmBnA$  э. д. с. Следовательно,

$$u_{AmB} - u_{AnB} = \int_{AmB} \mathbf{E} d\mathbf{l} - \int_{AnB} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_{AmB} \mathbf{E} d\mathbf{l} + \int_{BnA} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \oint_{AmBnA} \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi}{dt} \neq 0,$$

т. е.

$$u_{AmB} \neq u_{AnB}.$$

Таким образом, если быть совершенно строгим, то нельзя при переменном токе говорить о напряжении между какими-либо двумя точками цепи, в частности, о напряжении на зажимах цепи, как о некоторой вполне определенной величине. Следует говорить о напряжении между двумя точками цепи вдоль определенного заданного пути между этими точками.

Все изложенное свидетельствует о большой сложности физических процессов, происходящих в цепях переменного тока.

### § 3. Научные абстракции, принимаемые в теории цепей переменного тока, их практическое значение и границы применимости

Далеко не во всех случаях необходимо учитывать всю сложность физических процессов, происходящих в цепях переменного тока. Наоборот, в большинстве случаев можно сделать ряд допущений, существенно упрощающих задачу и вместе с тем не приводящих к заметным отклонениям от действительности.

Равномерное распределение электрического и магнитного полей вдоль цепи наблюдается в сравнительно редких случаях, например в длинных линиях, служащих для передачи энергии. Значительно чаще магнитное и электрическое поля распределяются вдоль цепи неравномерно. На одних участках цепи, например в конденсаторах, преобладает электрическое поле и выступают на первый план явления, связанные с его изменениями; на других участках, например в индуктивных катушках, преобладает магнитное поле и основными оказываются явления, возникающие вследствие изменения магнитного поля.

Точно так же и преобразование электромагнитной энергии в тепло часто бывает сосредоточено в основном в одном или нескольких участках цепи.

Рассмотрим в виде примера реостат. Он обладает наряду с сопротивлением  $r$  также некоторой емкостью между отдельными его витками и некоторой индуктивностью. Однако, если частота переменного тока не велика или вообще ток изменяется по любому закону достаточно медленно, то токи смещения, отвечающие от участков проволоки в диэлектрике, ничтожны по сравнению с током проводимости в проволоке реостата. Этими токами смещения в таком случае можно пренебречь, что эквивалентно тому, что ем-

кость  $C$  между участками проволоки реостата принимается равной нулю. Точно так же при низкой частоте тока или вообще при медленном его изменении можно пренебречь электродвижущей силой самоиндукции в реостате по сравнению с падением напряжения в его сопротивлении, что эквивалентно принятию равной нулю индуктивности  $L$  реостата. Иными словами, абстрагируясь от действительной сложной картины явления, мы допускаем, что реостат обладает только сопротивлением  $r \neq 0$  и имеет  $L = 0$  и  $C = 0$ . Заметим, что такой участок цепи можно характеризовать также его проводимостью  $g = \frac{1}{r}$ .

В качестве другого важного примера рассмотрим конденсатор. Вплоть до весьма высоких частот можно пренебречь индуктивностью  $L$  конденсатора и считаться только с его емкостью  $C$ .

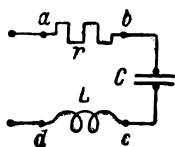


Рис. 5

Если в цепи имеется реостат и конденсатор, и энергия, поглощаемая в реостате, значительно превышает энергию, теряемую в диэлектрике конденсатора, то в первом приближении последней можно пренебречь или даже можно учесть ее при расчете соответствующим изменением сопротивления реостата. При такой абстракции мы допускаем, что конденсатор обладает емкостью  $C \neq 0$ , но для него  $L = 0$  и  $r = 0$ .

Наконец важным примером является индуктивная катушка. Если частота тока в катушке не слишком велика, то можно пренебречь токами смещения между витками проволоки катушки по сравнению с током проводимости в самой катушке, т. е. пренебречь емкостью  $C$  между витками катушки. При не очень малой частоте можно пренебречь падением напряжения в сопротивлении проволоки катушки по сравнению с индуцируемой в ней э. д. с., т. е. положить равным нулю сопротивление катушки. При желании можно учесть сопротивление катушки, предположив условно, что последовательно с катушкой, имеющей  $r = 0$ , включен реостат, обладающий сопротивлением, равным сопротивлению проволоки действительной катушки. При такой абстракции мы полагаем, что катушка обладает индуктивностью  $L \neq 0$  и имеет  $r = 0$  и  $C = 0$ .

Пусть цепь (рис. 5) образована из последовательно соединенных реостата (участок  $ab$ ), конденсатора (участок  $bc$ ) и индуктивной катушки (участок  $cd$ ). Будем предполагать, что преобразование электромагнитной энергии в тепло происходит только в реостате на участке  $ab$ , т. е. что на этом участке *сосредоточено* все сопротивление  $r$  цепи. Будем предполагать, что токи электрического смещения существуют только на участке  $bc$  между обкладками конденсатора, т. е. что в этом участке *сосредоточена* емкость  $C$  цепи. Наконец предположим, что переменный магнитный поток индуцирует э. д. с. только в катушке на участке  $cd$ , т. е. что в этом участке *сосредоточена* вся индуктивность  $L$  цепи.

Подобного рода электрические цепи, имеющие в общем случае значительно более сложную конфигурацию и содержащие различные элементы, называют электрическими цепями с сосредоточенными параметрами.

Практическое значение указанных научных абстракций исключительно велико. Приняв сделанные в них допущения, мы получаем возможность построить теорию электрических цепей переменного тока с сосредоточенными параметрами, охватывающую огромный класс реальных электрических цепей, содержащих самые различные технические устройства. Сюда относятся все обычные электрические цепи при промышленной, а также при звуковой частоте, за исключением длинных линий передачи энергии и протяженных линий связи. Весьма многие электрические цепи, используемые в радиотехнике при весьма высоких частотах, также с большой точностью могут рассматриваться как цепи с сосредоточенными параметрами.

Чрезвычайно важно отдавать себе отчет о границах применимости подобных абстракций. Действительно, одна и та же реальная цепь может вести себя различно при разных частотах. Например, если при низкой частоте можно пренебречь емкостью между витками индуктивной катушки, то при очень высокой частоте такое допущение для той же катушки может привести к грубой ошибке и будет совершенно искажать действительную картину явления, так как при высоких частотах в действительных условиях токи смещения в диэлектрике около витков катушки могут быть сравнимы с током в проволоке катушки.

В качественном отношении зависимость от частоты тока и напряжения величин ошибок, которые могут быть получены при рассмотрении реальных цепей, как цепей с сосредоточенными параметрами, ясна из изложенного в предыдущем и в настоящем параграфах. Количественный критерий допустимости подобного рассмотрения можно будет установить только после изучения переменного электромагнитного поля в конце последней части курса. Тогда мы вернемся к этому важному вопросу. Сейчас же только сформулируем этот критерий. Мы увидим, что переменное электромагнитное поле распространяется в пространстве со скоростью света. В воздухе эта скорость равна  $v \approx 3 \cdot 10^8$  м/сек. Электрическую цепь можно рассматривать как цепь с сосредоточенными параметрами, если скорости изменения напряжений и токов в цепи столь малы, что за время распространения электромагнитных волн вдоль всей цепи в любом направлении изменения напряжений и токов остаются малыми по сравнению с полными интервалами их изменений в исследуемом режиме. При периодических токах и напряжениях это означает, что электромагнитная волна успевает пробежать вдоль всей цепи за ничтожную долю периода.

В таких случаях можно не считаться с волновыми процессами, характеризующими переменное электромагнитное поле, и интере-



соваться в конденсаторах только изменением электрического поля, а в катушках только изменением магнитного поля.

#### § 4. Параметры электрических цепей переменного тока

Из изложенного в предыдущих параграфах ясно, что параметрами уединенной цепи переменного тока являются сопротивление  $r$ , емкость  $C$  и индуктивность  $L$ . Под уединенной цепью понимают цепь, неподвергающуюся электромагнитному воздействию со стороны других цепей. Если такое воздействие имеет место со стороны другой цепи на данную, или даже если оно имеет место в уединенной цепи со стороны одного участка данной цепи на другой ее участок, то в число параметров цепи войдет еще взаимная индуктивность  $M$ .

Строго говоря, параметры цепи почти всегда в какой-то мере зависят от тока и от напряжения. Сопротивление  $r$  меняется с изменением тока хотя бы потому, что с изменением тока в проводниках изменяется их температура. Емкость конденсатора может зависеть от напряжения, если диэлектрическая проницаемость вещества диэлектрика в конденсаторе зависит от напряженности электрического поля. Индуктивность катушки зависит от тока, если магнитная проницаемость вещества сердечника катушки зависит от напряженности магнитного поля.

Однако во многих случаях эта зависимость выражена весьма слабо, ею можно пренебречь и полагать параметры цепи не зависящими ни от тока, ни от напряжения. Процессы в таких цепях при переменных токах описываются *линейными* дифференциальными уравнениями. Соответственно такие цепи называют *линейными электрическими цепями*. Вначале мы будем рассматривать процессы только в линейных электрических цепях.

Изучение *нелинейных* электрических цепей переменного тока, в которых параметры зависят от тока и напряжения, имеет также большое практическое значение, в связи с широким использованием особых свойств таких цепей в современных электротехнических устройствах, особенно в устройствах автоматического управления и регулирования, в электроизмерительной технике, в радиотехнике и т. д.

Явления в нелинейных цепях переменного тока более сложны по сравнению с явлениями в линейных цепях, а также более сложны и методы анализа явлений в нелинейных цепях. Поэтому рассмотрение процессов в нелинейных цепях переменного тока будет произведено в последних главах этой части курса.

Обратимся вновь к простой цепи, изображенной на рис. 5.

Первый участок цепи  $ab$  мы охарактеризовали сопротивлением  $r$ . Зная  $r$ , при заданном токе  $i$  можно, пользуясь законом Ома, найти напряжение  $u_r$ , необходимое для преодоления сопротивления этого участка цепи, а именно:

$$u_r = ri.$$

Второй участок цепи  $bc$  представляет собою конденсатор. Этот участок мы охарактеризовали емкостью  $C$  конденсатора, под которой, как известно, понимают отношение заряда  $q$  конденсатора к напряжению  $u_C$ , приложенному к его обкладкам. Зная емкость конденсатора  $C$ , можно при заданной величине его заряда  $q$  найти напряжение  $u_C$  из соотношения.

$$u_C = \frac{q}{C}.$$

Третий участок цепи  $cd$  мы охарактеризовали индуктивностью  $L$ , под которой, как известно, понимают отношение потока самоиндукции  $\Psi_L$ , связанного с цепью, к току  $i$  в этой цепи.

Зная индуктивность цепи  $L$ , можно при заданном токе  $i$  определить величину потокосцепления самоиндукции  $\Psi_L = Li$ , и при заданной скорости изменения тока  $\frac{di}{dt}$  найти величину э. д. с. самоиндукции  $e_L = -L \frac{di}{dt}$ , возникающей в цепи, а также величину напряжения  $u_L = -e_L = +L \frac{di}{dt}$ , необходимого для того, чтобы уравновесить э. д. с. самоиндукции.

Таким образом, рассматриваемая уединенная цепь будет вполне определена, если известны сопротивления  $r$  первого участка, емкость  $C$  конденсатора, составляющего второй участок цепи, и индуктивность  $L$  третьего участка. В дальнейшем мы будем предполагать, что параметры цепи постоянны, т. е. не зависят не только от тока в цепи и от напряжений на отдельных ее участках, но также и от времени.

Напряжение на любом участке цепи равно линейному интегралу напряженности электрического поля вдоль этого участка. Так как мы полностью пренебрегли электродвижущими силами, индуцируемыми переменными магнитными потоками в первом и во втором участках, то электрическое поле около этих участков является потенциальным. Следовательно, в выражениях

$$u_r = \int_a^b E dl \quad \text{и} \quad u_C = \int_b^c E dl,$$

пути интегрирования между точками  $a$  и  $b$  и между точками  $b$  и  $c$  могут быть взяты произвольно. Эти пути только не должны проходить через область магнитного поля катушки. В частности, они могут быть взяты вдоль проволоки реостата и внутри диэлектрика конденсатора. Но они могут пролегать и около реостата или около конденсатора, где также существует электрическое поле.

В выражении

$$u_L = \int_c^d E dl$$

интеграл должен быть взят также вдоль пути, не проходящем в магнитном поле катушки, но отнюдь не вдоль проволоки катушки. Поясним это положение. Для простоты рисунка предположим, что катушка имеет один виток, совмещенный с плоскостью рисунка (рис. 6). Магнитный поток  $\Phi$ , сцепляющийся с витком, проходит сквозь площадь, охватываемую витком и заштрихованную на рисунке. Линейный интеграл напряженности электрического поля, взятый по пути  $cnd$ , внутри проволоки витка равен нулю, так как мы полностью пренебрегли сопротивлением витка, а следовательно, напряженность электрического поля внутри материала проволоки равна нулю.

Но согласно закону электромагнитной индукции имеем:

$$\oint_{cndmc} \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

Рис. 6

Так как  $\int_{cnd} \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$ , то  $\int_{dmc} \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi}{dt}$  и

$$\int_{cmd} \mathbf{E} d\mathbf{l} = + \frac{d\Phi}{dt} = + \frac{dLi}{dt} = + L \frac{di}{dt} = u_L.$$

В заключение заметим, что при анализе процессов в электрической цепи переменного тока, так же как и при расчете цепей постоянного тока, следует задаться положительными направлениями токов, напряжений и э. д. с. источников, обозначив их на схеме цепи стрелками. Мгновенные значения тока  $i$ , напряжения  $u$  и э. д. с.  $e$  будут положительны, если действительные направления тока, напряжения и э. д. с. в данный момент времени совпадают с условно заданными их положительными направлениями. Иногда удобно выражать условное положительное направление токов, напряжений или э. д. с. не стрелками, а двойными индексами у их буквенного обозначения ( $i_{12}$ ,  $u_{12}$ ,  $e_{12}$ ,  $i_{ab}$ ,  $u_{ab}$ ,  $e_{ab}$ ). Эти индексы должны соответствовать обозначениям точек на схеме цепи, причем положительным считается направление от точки цепи, отвечающей первому индексу, к точке цепи, отвечающей второму индексу.

## § 5. Действующие и средние значения периодических электродвижущих сил, напряжений и токов

Так как тепловое действие тока, а также электродинамическое воздействие двух катушек, в которых протекает один и тот же ток, пропорционально квадрату этого тока, то о величине периодических токов, напряжений и э. д. с. в технике обычно судят их по средним квадратичным значениям за полный период. Обозначая

средние квадратичные значения тока, напряжения и э. д. с. соответственно через  $I$ ,  $U$ ,  $E$ , будем иметь:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}; \quad U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}; \quad E = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt}.$$

Эти величины называют *действующими* значениями периодических тока, напряжения и э. д. с.

Рассмотрим тепловое действие периодического тока  $i$ , протекающего по цепи, имеющей сопротивление  $r$ . По закону Ленца — Джоуля количество тепла, выделяемое в этой цепи током за элементарный промежуток времени  $dt$ , будет  $i^2 r dt$ , а за каждый полный период оно будет равно:  $\int_0^T i^2 r dt$ . Следовательно, среднее за период значение мощности, характеризующей выделение тепла в цепи, получает выражение:

$$\frac{1}{T} \int_0^T i^2 r dt = r \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = r I^2.$$

Следовательно, вводя понятие о действующем значении периодического тока как среднего квадратичного значения его за полный период, мы получаем выражение через него средней мощности такое же по виду, как и при постоянном токе.

Мгновенное значение электромагнитной силы  $F$  взаимодействия двух катушек или вообще двух любых контуров, по которым последовательно протекает один и тот же ток  $i$ , выражается в виде:

$$F = i_1 i_2 \frac{\partial M}{\partial g} = i^2 \frac{\partial M}{\partial g},$$

где  $\frac{\partial M}{\partial g}$  — производная от взаимной индуктивности  $M$  контуров по той координате  $g$ , которую стремится изменить сила  $F$ .

При периодическом изменении тока  $i$  среднее значение  $F_{cp}$  силы за период имеет выражение:

$$F_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T F dt = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 \frac{\partial M}{\partial g} dt.$$

Если катушки обладают достаточно большой инерцией или вообще они закреплены и, следовательно, не меняют своего положения в течение периода изменения тока в них, то величина  $\frac{\partial M}{\partial g}$  остается постоянной и может быть вынесена за знак интеграла. Получаем:

$$F_{cp} = \frac{\partial M}{\partial g} \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = I^2 \frac{\partial M}{\partial g},$$

т. е. выражение для  $F_{cp}$  через действующее значение периодического тока получается таким же, как и при постоянном токе.

Мгновенное значение силы  $F$  притяжения пластин конденсатора выражается в виде:

$$F = \frac{1}{2} u^2 \frac{\partial C}{\partial g},$$

где  $u$  — мгновенное значение напряжения между пластинами,  $C$  — емкость между пластинами,  $g$  — координата, характеризующая взаимное расположение пластин, которую стремится изменить сила  $F$ . Среднее за период значение силы  $F_{cp}$  при условии, что инерция пластин столь велика, что положение их не изменяется в течение периода напряжения  $u$ , приобретает вид:

$$F_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T F dt = \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial g} \frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt = \frac{1}{2} U^2 \frac{\partial C}{\partial g}.$$

Таким образом, выражение для  $F_{cp}$  через действующее значение  $U$  оказывается совпадающим с выражением при постоянном напряжении.

Все эти соображения приводят к целесообразности определять величины периодических токов, напряжений и э. д. с. по их средним квадратичным значениям, т. е. по их действующим значениям.

В частности, для синусоидального тока  $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$  имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^T i^2 dt &= I_m^2 \int_0^T \sin^2(\omega t + \psi_i) dt = \frac{I_m^2}{2} \int_0^T [1 - \cos(2\omega t + 2\psi_i)] dt = \\ &= \frac{I_m^2}{2} \int_0^T dt - \frac{I_m^2}{2} \int_0^T \cos(2\omega t + 2\psi_i) dt = \frac{I_m^2}{2} T, \end{aligned}$$

так как последний интеграл равен нулю. Окончательно для действующего значения синусоидального тока получим:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Аналогично для действующих значений синусоидальной э. д. с. и напряжения найдем:

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}; \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

Приборы, применяемые для измерения периодических напряжений и токов, за немногими исключениями, дают их действующие значения.

Кроме средних квадратичных значений периодических э. д. с., напряжений и токов, иногда рассматривают их средние арифметические значения. Под *средними арифметическими* или просто *сред-*

ними значениями э. д. с., напряжения и тока за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$  понимают, соответственно, величины:

$$E_{cp} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} e \, dt; \quad U_{cp} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u \, dt; \quad I_{cp} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} i \, dt.$$

Для синусоидальных э. д. с., напряжений и токов среднее значение за полный период равно нулю, так как площади положительной и отрицательной полуволн синусоиды равны по величине и противоположны по знаку. Это имеет место и для периодических несинусоидальных э. д. с., напряжений и токов, если положительная и отрицательная полуволны их одинаковы. Обычно для таких величин под средним значением понимают среднее значение, соответствующее положительной полуволне. При последнем определении для синусоидальных э. д. с., напряжений и токов найдем:

$$E_{cp} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} E_m \sin \omega t \, dt = \frac{2E_m}{\omega T} \left| -\cos \omega t \right|_0^{\frac{T}{2}} = \frac{4E_m}{\omega T} = \frac{2}{\pi} E_m$$

и, соответственно,

$$U_{cp} = \frac{2}{\pi} U_m \quad \text{и} \quad I_{cp} = \frac{2}{\pi} I_m.$$

## § 6. Получение синусоидальных э. д. с. в генераторах переменного тока

Простейшим способом можно получить синусоидальную э. д. с., равномерно вращая виток в однородном магнитном поле вокруг оси, перпендикулярной к направлению линий магнитной индукции (рис. 7). При  $\alpha = 0$ , т. е. когда нормаль к плоскости витка совпадает с направлением линий магнитной индукции, магнитный поток  $\Phi$  сквозь виток имеет наибольшее значение  $\Phi_m$ . По мере поворота витка поток, пронизывающий виток, изменяется по закону:

$$\Phi = \Phi_m \cos \alpha.$$

Если виток вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  и если в начальный момент времени  $t = 0$  нормаль к плоскости витка составляла с направлением линий магнитной индукции угол  $\psi$ , то

$$\alpha = \psi + \omega t \quad \text{и} \quad \Phi = \Phi_m \cos (\omega t + \psi).$$

Э. д. с., индуцируемая в этом витке, будет:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega \Phi_m \sin (\omega t + \psi) = E_m \sin (\omega t + \psi),$$

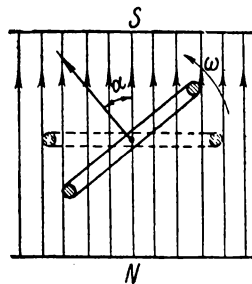


Рис. 7

если положить  $\omega\Phi_m = E_m$ , откуда следует, что в рассматриваемом случае угловая частота индуцированной э. д. с. равна угловой скорости вращения витка. На рис. 8 представлены кривые изменения потока  $\Phi$  и э. д. с.  $e$  для случая  $\psi = 0$ . Наибольшая э. д. с. индуцируется в витке в те моменты, когда  $\Phi = 0$ , так как скорость изменения магнитного потока в эти моменты достигает наибольшего значения.

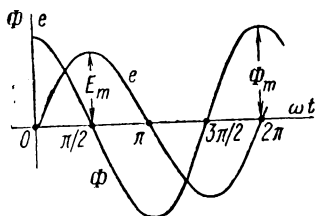


Рис. 8

Однако технические генераторы переменного тока никогда не осуществляются в таком простом виде, так как для создания достаточно сильного магнитного поля в большом воздушном зазоре между полюсами электромагнита (рис. 7) потребовалась бы весьма большая м. д. с. и, кроме того, такая система нецелесообразна в конструктивном отношении.

По принципу действия генераторы переменного тока, применяемые в технике, не отличаются от рассмотренного нами элементарного устройства, но конструктивное выполнение их имеет существенные особенности. Эти особенности можно усмотреть из схематического рис. 9. Обмотка, в которой индуцируется переменная э. д. с., располагается в пазах неподвижной части — *статора* — машины. Магнитную цепь статора выполняют из листовой электротехнической стали. Вращающуюся часть машины, с которой связано основное постоянное магнитное поле машины, называют *ротором*. Магнитная цепь ротора выполняется также из электротехнической стали, полюсные наконечники — из листовой стали, остальная часть магнитной цепи — из сплошных стальных частей. Обмотка ротора соединена с кольцами, на которые наложены щетки, подключаемые к источнику постоянной э. д. с. Эта обмотка носит название *обмотки возбуждения*, а обмотка статора, в которой индуцируется переменная э. д. с., называется *обмоткой якоря*. Магнитный поток, связанный с обмоткой возбуждения, замыкается главным образом по стали, и лишь небольшая часть его пути расположена в воздушном зазоре между статором и ротором, что позволяет получить необходимую индукцию в воздушном зазоре при сравнительно небольших значениях м. д. с., создаваемой обмоткой возбуждения.

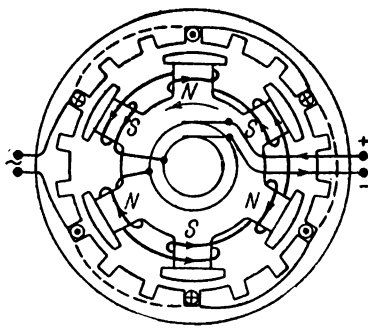


Рис. 9

Генератор, схематически представленный на рис. 9, имеет число пар полюсов  $p$ , равное трем. Расстояние между осями двух соседних

полюсов по окружности статора называют полюсным делением. В многополюсном генераторе э. д. с., индуцируемая в обмотке статора, претерпевает один полный цикл своих изменений при повороте ротора на угол, соответствующий двойному полюсному делению. Поэтому за один оборот ротора мы имеем  $p$  полных периодов изменения э. д. с., и, следовательно, угловая частота  $\omega$  индуцируемой э. д. с. в  $p$  раз больше угловой скорости ротора  $\omega_r$ , т. е.  $\omega = p\omega_r$ . Так как частоту  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  измеряют в герцах, а скорость вращения ротора в технике принято измерять числом оборотов в минуту, обозначаемым через  $n$ , то связь  $\omega = p\omega_r$  приобретает вид:

$$f = \frac{pn}{60},$$

и, следовательно, частота э. д. с. рассматриваемого генератора прямо пропорциональна скорости вращения ротора. Такого рода генераторы переменных э. д. с., называемые *синхронными генераторами*, и применяют на практике.

Следует иметь в виду, что для увеличения э. д. с. генератора обмотку статора выполняют не из одного витка, а из ряда последовательно соединенных витков.

Рассмотренный тип генератора имеет ротор, как говорят, с *явно выраженными полюсами*. В таком виде выполняют роторы тихоходных генераторов, а именно гидрогенераторов, вал которых связан с валом гидравлических турбин, имеющих незначительную скорость вращения. Например, скорость вращения генераторов на Днепровской гидроэлектростанции равна  $n = 83\frac{1}{3}$  об/мин. Соответственно, для получения частоты  $f = 50$  гц эти генераторы имеют  $p = 36$  пар полюсов.

В генераторах с явно выраженными полюсами для получения синусоидальной э. д. с. в обмотке якоря достаточно соответствующим образом подобрать форму полюсных наконечников, чтобы магнитная индукция  $B$  вдоль окружности машины в воздушном зазоре изменялась по синусоидальному закону. Это следует из выражения для э. д. с., индуцируемой в стержнях обмотки статора:  $|e| = Blv$ , где  $l$  — активная длина стержней и  $v$  — их линейная скорость.

Свободные на рис. 9 пазы статора заполняют проводниками еще двух других обмоток. Совместно эти три обмотки статора образуют так называемую трехфазную систему, о которой будет речь в специальной главе. На схематическом рис. 9 для каждой обмотки под каждым полюсом имеется только по одному пазу в статоре. Обычно их бывает несколько, причем катушки, лежащие в соседних пазах и принадлежащие одной и той же обмотке, соединяют последовательно.

Генераторы, связываемые с паровыми турбинами, так называемые турбогенераторы, имеют большую скорость вращения, так как



коэффициент полезного действия паровых турбин получается высоким только при высоких скоростях вращения. Поэтому турбогенераторы имеют малое число пар полюсов, обычно  $p = 1$  или  $p = 2$ .

Соответственно при  $f = 50$  гц скорость вращения получается равной  $n = 3000$  об/мин или  $n = 1500$  об/мин. Во избежание больших потерь на трение о воздух роторы таких генераторов выполняют гладкими. Их называют роторами

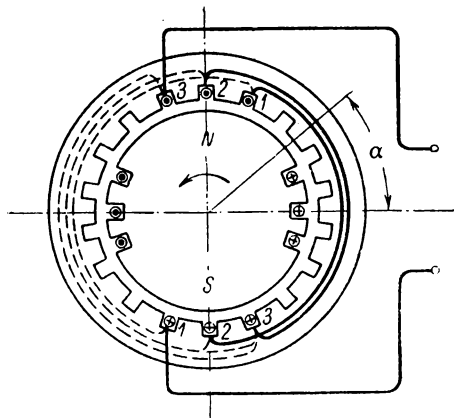


Рис. 10

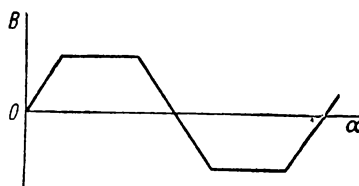


Рис. 11

с неявно выраженными полюсами (рис. 10). Обмотку ротора укладывают в имеющиеся в роторе пазы.

Для получения синусоидальной э. д. с. в таких генераторах нет возможности видоизменять форму полюсных наконечников. Маг-

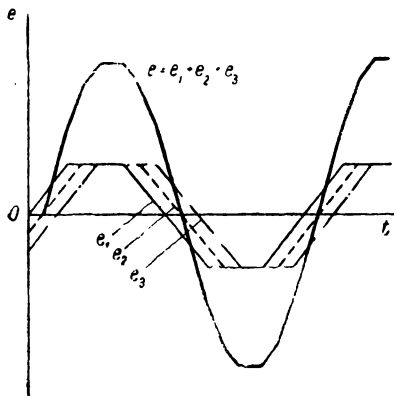


Рис. 12

нитная индукция  $B$  в воздушном зазоре изменяется в зависимости от угла  $\alpha$  приблизительно по трапецеидальному закону (рис. 11). Соответственно и э. д. с. в катушках на статоре изменяется во времени по трапецеидальному закону. Если наложить в соседние пазы одинаковые катушки (на рис. 10 помечены номерами 1, 2, 3), то кривые э. д. с.  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$  в этих катушках будут одинаковы по форме, но сдвинуты друг относительно друга по оси времени (рис. 12). Соединив эти катушки последовательно, можно получить, как видно из ри-

сунка, суммарную э. д. с.  $e = e_1 + e_2 + e_3$ , во всей обмотке весьма близкую к синусоидальной.

Свободные на рис. 10 пазы статора заполняют еще двумя обмотками для образования трехфазной системы.

### § 7. Кривые магнитного потока и индуцированной э. д. с. Характеристики формы кривых

При заданной кривой  $\Psi = F(t)$  изменения потокосцепления  $\Psi$ , соответствующую кривую индуцированной в катушке э. д. с.  $e = -\frac{d\Psi}{dt}$  мы получим, дифференцируя кривую потокосцепления.

На рис. 13 приведены треугольная, трапецеидальная и параболическая кривые потокосцепления и соответствующие кривые индуцированной э. д. с. Физически невозможно, чтобы кривая потокосцепления претерпевала разрывы, и соответственно, индуцированная э. д. с. не достигает бесконечно больших значений.

Вследствие симметрии конструкции генераторов переменного тока в технике большую часть приходится иметь дело с симметричными кривыми э. д. с., т. е. с такими кривыми, положительная и отрицательная полуволны которых отличаются друг от друга только знаком. Как мы увидим далее, при симметрии кривой э. д. с. и кривая тока в цепи с постоянными параметрами также будет симметрична. Для характеристики формы симметричных кривых часто пользуются двумя коэффициентами: коэффициентом формы  $k_\phi$  и коэффициентом амплитуды  $k_a$ .

Под *коэффициентом формы* кривой понимают отношение действующего значения к среднему значению, взятому за положительную полуволну, т. е.

$$k_\phi = \frac{E}{E_{cp}}.$$

В частности, для синусоиды

$$k_\phi = \frac{E}{E_{cp}} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} : \frac{2}{\pi} E_m = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,11.$$

Под *коэффициентом амплитуды* кривой понимают отношение максимального значения к действующему значению, т. е.

$$k_a = \frac{E_m}{E}.$$

В частности, для синусоиды

$$k_a = \frac{E_m}{E} = E_m : \frac{E_m}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \approx 1,41.$$

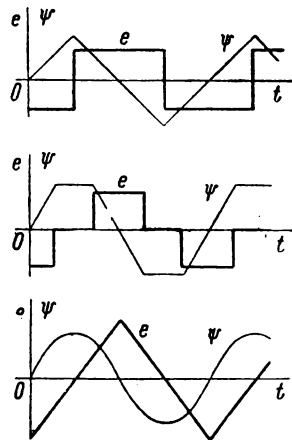


Рис. 13

Следует иметь в виду, что  $k_\phi$  и  $k_a$  тем больше, чем острее кривая.

После введения понятия о коэффициенте формы кривой можно получить весьма важное выражение для действующего значения э. д. с., индуктируемой в обмотке при периодическом изменении потокоцепления  $\Psi$  с витками обмотки. Обозначив максимальное и минимальное значения этого потокоцепления через  $\Psi_{\text{макс}}$  и  $\Psi_{\text{мин}}$ , для среднего значения  $E_{cp}$  индуктированной э. д. с.  $e$  имеем:

$$E_{cp} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} e dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \left( -\frac{d\Psi}{dt} \right) dt = -\frac{2}{T} \int_{\Psi_{\text{макс}}}^{\Psi_{\text{мин}}} d\Psi = 2f(\Psi_{\text{макс}} - \Psi_{\text{мин}}),$$

так как среднее значение вычисляется за положительную полуволну, т. е. от  $\Psi = \Psi_{\text{макс}}$ , когда  $e$ , возрастая, проходит через значение, равное нулю, до  $\Psi = \Psi_{\text{мин}}$ , когда  $e$ , убывая, опять проходит через значение, равное нулю. Если кривая потокоцепления симметрична и  $\Psi_{\text{мин}} = -\Psi_{\text{макс}}$  (рис. 13), то для действующего значения  $E$  э. д. с.  $e$  получим:

$$E = k_\phi E_{cp} = 4fk_\phi \Psi_m,$$

где  $f$  — частота потока  $\Psi$  и э. д. с.  $e$ . Для синусоидальной э. д. с.  $k_\phi = \pi : 2 \sqrt{2} \approx 1,11$ , и в этом случае мы имеем:

$$E = 4,44f\Psi_m \text{ или } E = 4,44f\omega\Phi_m,$$

если  $\Psi_m = \omega\Phi_m$ , где  $\omega$  — число витков обмотки, в которой индуктируется э. д. с., а  $\Phi_m$  — максимальное значение магнитного потока, пронизывающего каждый из витков.

## § 8. Векторные диаграммы

При рассмотрении цепей переменного тока приходится встречаться со сложением синусоидальных э. д. с., напряжений или токов одной и той же частоты, имеющих различные амплитуды и различные начальные фазы. Эта задача весьма просто и наглядно решается, если для изображения синусоидальных функций пользоваться вращающимися векторами. Покажем, как применить вращающийся вектор для изображения синусоидальной функции времени, например для изображения э. д. с.  $e = E_m \sin(\omega t + \psi)$ . Возьмем прямоугольную систему осей  $NOM$  и условимся откладывать положительные углы в направлении, противоположном направлению вращения стрелки часов.

Расположим под углом  $\psi$  к оси  $ON$  вектора  $\overline{OA}$ , длина которого в выбранном масштабе равна амплитуде э. д. с.  $E_m$  (рис. 14). Будем вращать вектор  $\overline{OA}$  около начала  $O$  в положительном направлении

с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , равной угловой частоте э. д. с. По истечении промежутка времени  $t$  вектор  $\overline{OA}$  повернется на угол  $\omega t$  и составит с осью  $ON$  угол  $(\omega t + \psi)$ . Тогда величина его проекции на ось  $OM$  будет:  $OA \sin(\omega t + \psi)$ , т. е. в принятом нами масштабе даст значение э. д. с.  $e = E_m \sin(\omega t + \psi)$

для момента времени  $t$ . Полный цикл изменений э. д. с.  $e$  мы получим за один полный оборот вектора  $\overline{OA}$ . Таким образом, синусоидальную функцию времени можно изобразить вектором, вращающимся с угловой скоростью, равной угловой частоте изображаемой функции, причем длина вектора определяется амплитудой данной функции, а начальное положение вектора в момент  $t = 0$  — ее начальной фазой  $\psi$ . Изображение синусоидальной функции при помощи вращающегося вектора легко привести в соответствие с изображением этой функции в декартовых координатах, что и сделано на рис. 15, причем начальное положение вектора показано жирной линией.

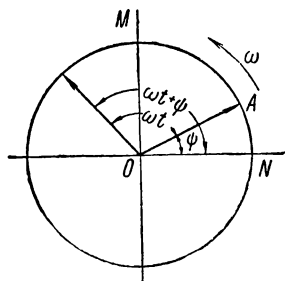


Рис. 14

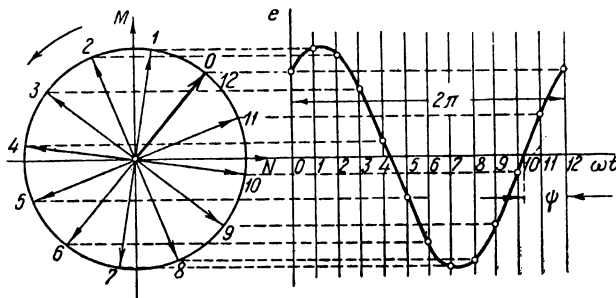


Рис. 15

Применим изображение синусоидальных функций вращающимися векторами для нахождения суммы двух синусоидальных э. д. с. одной и той же частоты:

$$e_1 = E_{1m} \sin(\omega t + \psi_1), \quad e_2 = E_{2m} \sin(\omega t + \psi_2).$$

На рис. 16 векторы  $\overline{OA_1}$  и  $\overline{OA_2}$  изображают э. д. с.  $e_1$  и  $e_2$ . При этом масштаб для обеих э. д. с. должен быть один и тот же, т. е. единица длины каждого вектора должна изображать одно и то же число единиц э. д. с. Мгновенное значение суммарной э. д. с.  $e$  в каждый момент времени равно сумме мгновенных значений э. д. с.  $e_1$  и  $e_2$ , т. е. сумме проекций на ось  $OM$  векторов  $\overline{OA_1}$  и  $\overline{OA_2}$ , изображаю-

ших эти э. д. с. Так как сумма проекций нескольких векторов на одну и ту же ось равна проекции геометрической суммы их на эту ось, то проекция вектора  $\overline{OA} = \overline{OA_1} + \overline{OA_2}$  на ось  $OM$  в каждый момент времени равна  $e_1 + e_2 = e$ , т. е. вектор  $\overline{OA}$  является вектором, изображающим э. д. с.  $e$ . Длина вектора  $\overline{OA}$  даст нам в ранее выбранном масштабе амплитуду суммарной э. д. с.  $e$ , а угол  $\psi$ , составляемый этим вектором с осью  $ON$  при  $t = 0$ , даст начальную фазу этой э. д. с. Так как э. д. с.  $e_1$  и  $e_2$  имеют одну и ту же частоту, то векторы

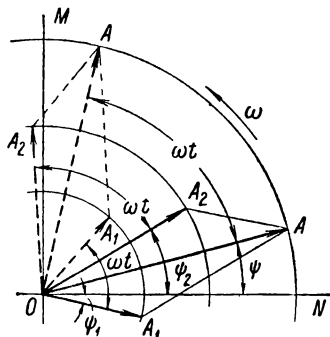


Рис. 16

их изображающие, вращаются с одной и той же угловой скоростью, и угол между векторами остается неизменным. Вектор, изображающий суммарную э. д. с.  $e$ , будет вращаться с той же угловой скоростью, и, следовательно, эта э. д. с.  $e$  будет синусоидальной функцией времени, той же частоты, что и суммируемые э. д. с.

Указанный способ можно применить для сложения нескольких угодно синусоидальных э. д. с. или токов одной частоты или для вычитания их. При этом в результате всегда будут получаться синусоидальные э. д. с.,

или токи той же частоты, амплитуды которых зависят от амплитуд слагаемых и от разностей их начальных фаз.

Из изложенного следует, что вектор, изображающий сумму нескольких синусоидальных э. д. с. или токов одной частоты, равен геометрической сумме векторов, изображающих суммируемые э. д. с. или токи.

Если нас интересуют лишь амплитуды э. д. с. или токов и углы сдвига их друг относительно друга, как это большею частью и бывает, то важно лишь взаимное расположение векторов друг относительно друга и несущественно расположение этих векторов относительно осей. В последнем случае один из векторов можно расположить как угодно, но все остальные векторы должны быть правильно ориентированы по отношению к этому произвольно выбранному вектору.

Так как действующие значения всех синусоидальных функций в  $\sqrt{2}$  меньше их амплитуд, то указанными операциями над векторами можно пользоваться и для определения действующих значений. При этом необходимость вращения векторов устраняется, но правильное взаимное расположение векторов следует, конечно, соблюдать. Отметим, что совокупность векторов, характеризующих процессы, происходящие в той или иной цепи переменного тока, и построенных с соблюдением правильной ориентации их друг относительно друга, называют *векторной диаграммой*.

В дальнейшем векторы, изображающие синусоидальные функции времени, мы будем обозначать теми же буквами, что и действующие или максимальные значения этих функций, но с чертой над буквой в отличие от обозначения полужирным шрифтом векторов, изображающих характеристики физических полей.

**§ 9. Установившийся ток в простейшей цепи с последовательным соединением участков  $r$ ,  $L$  и  $C$  при синусоидальном напряжении на ее зажимах**

Основной задачей расчета цепи переменного тока с сосредоточенными параметрами является определение тока в цепи по заданному напряжению на зажимах цепи и параметрам цепи. Пусть к зажимам цепи, состоящей из последовательно соединенных участков с сопротивлением  $r$ , конденсатора с емкостью  $C$  и катушки с индуктивностью  $L$  (рис. 17) приложено синусоидальное напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ . Будем предполагать, что первый участок обладает только сопротивлением, второй только емкостью, а третий только индуктивностью. При последовательном соединении напряжение на зажимах всей цепи равно сумме падений напряжений на всех участках. Соответственно, имеем:

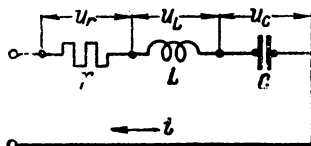


Рис. 17

$$u = u_r + u_L + u_C,$$

где  $u_r = ri$  — падение напряжения на участке с сопротивлением  $r$ ,  $u_L = L \frac{di}{dt}$  — напряжение на зажимах катушки, уравнивающее равную и противоположную ему э. д. с. самоиндукции  $e_L = -L \frac{di}{dt}$ , и  $u_C = \frac{q}{C}$  — напряжение на зажимах конденсатора.

Пользуясь определением тока  $i = \frac{dq}{dt}$ , для количества электричества  $q$  мы получим:

$$q = \int i dt,$$

и тогда основное уравнение для мгновенных значений напряжений рассматриваемой цепи можем написать в виде:

$$u = ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt.$$

Так как это уравнение линейное, то его общий интеграл есть сумма частного решения данного уравнения и решения соответствующего однородного уравнения, которое мы получим, положив

$u = 0$ . В нашем случае, когда приложенное напряжение  $u$  синусоидально, частное решение может быть найдено, как известно, в виде синусоидальной функции той же частоты, а именно в виде  $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ .

Что же касается составляющей тока, определяемой решением однородного уравнения, то она с течением времени стремится к нулю. Действительно, однородное уравнение определяет поведение цепи при равенстве нулю напряжения, приложенного к цепи извне, т. е. при замкнутых накоротко зажимах цепи, а в этом случае электромагнитный процесс может происходить лишь за счет внутреннего запаса энергии, имеющегося в полях цепи в начальный момент времени. В силу ограниченности начального запаса энергии в полях цепи и постепенного превращения ее в тепло, выделяемое в сопротивлении, имеющемся в цепи, электромагнитный процесс в такой отключенной от внешних источников энергии цепи постепенно затухает. Время, необходимое для того, чтобы этот процесс можно было считать практически прекратившимся, обычно измеряется долями секунды или секундами.

При включении цепи под действие напряжения  $u$ , как было отмечено, ток в цепи определяется суммой двух составляющих. Так как составляющая, определяемая решением однородного уравнения, быстро затухает, то через сравнительно короткий промежуток времени после включения цепи ток в цепи будет определяться лишь частным решением рассматриваемого уравнения. Изучением этого так называемого *установившегося режима* мы и займемся в первую очередь.

Наша задача заключается в определении амплитуды тока  $I_m$  и разности начальных фаз  $\varphi = \psi_u - \psi_i$  приложенного напряжения и тока. Так как при установившемся режиме начальная фаза  $\psi_u$  приложенного напряжения роли не играет, то для упрощения выкладок мы положим ее равной нулю:  $\psi_u = 0$ . Тогда имеем:

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u) = U_m \sin \omega t,$$

и частное решение будем искать в виде:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = I_m \sin(\omega t - \varphi).$$

Подставляя эти значения  $i$  и  $u$  в уравнение

$$ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = u,$$

найдем

$$r I_m \sin(\omega t - \varphi) + \omega L I_m \cos(\omega t - \varphi) - \frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t - \varphi) = U_m \sin \omega t.$$

Так как

$$U_m \sin \omega t = U_m \sin (\omega t - \varphi + \varphi) = U_m \cos \varphi \sin (\omega t - \varphi) + \\ + U_m \sin \varphi \cos (\omega t - \varphi),$$

то уравнение можно переписать в виде:

$$r I_m \sin (\omega t - \varphi) + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) I_m \cos (\omega t - \varphi) = U_m \cos \varphi \sin (\omega t - \varphi) + \\ + U_m \sin \varphi \cos (\omega t - \varphi).$$

Это уравнение должно быть справедливо для любого момента времени  $t$ . Полагая, в частности,  $\omega t - \varphi = 0$  и  $\omega t - \varphi = \frac{\pi}{2}$ , получаем:

$$r I_m = U_m \cos \varphi; \quad \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) I_m = U_m \sin \varphi.$$

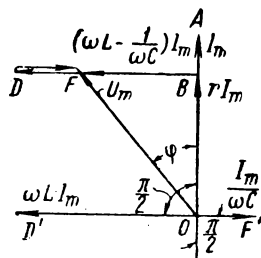


Рис. 18

Возведя каждое из этих равенств в квадрат и сложив, получим:

$$\left[ r^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right] I_m^2 = U_m^2,$$

или

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}},$$

причем корень следует всегда брать со знаком «плюс», так как амплитуды напряжения и тока мы считаем положительными величинами.

Поделив второе равенство на первое, находим:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r}.$$

С целью лучшего уяснения полученных соотношений построим векторную диаграмму.

Отложим вектор  $\vec{OA}$ , изображающий ток  $i = I_m \sin (\omega t - \varphi)$ , в произвольно выбранном направлении (рис. 18) и рассмотрим, как должны быть направлены векторы, изображающие три слагаемых левой части уравнения:

$$r i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = u.$$



Первое слагаемое

$$u_r = ri = rI_m \sin(\omega t - \varphi)$$

совпадает по фазе с током, и вектор  $\overline{OB}$ , его изображающий, должен быть поэтому направлен вдоль вектора тока. Второе слагаемое

$$u_L = L \frac{di}{dt} = \omega L I_m \cos(\omega t - \varphi) = \omega L I_m \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

упреждает ток на угол  $\frac{\pi}{2}$ , и вектор  $\overline{OD'} = \overline{BD}$ , его изображающий, должен быть повернут относительно вектора тока на прямой угол в положительном направлении. Третье слагаемое

$$u_C = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int i dt = -\frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t - \varphi) = \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

отстает от тока на угол  $\frac{\pi}{2}$ , и вектор  $\overline{OF'} = \overline{DF}$ , его изображающий, должен быть повернут относительно вектора тока на прямой угол в отрицательном направлении. Геометрическая сумма векторов, изображающих три составляющих  $u_r$ ,  $u_L$  и  $u_C$  приложенного напряжения, должна дать вектор, изображающий это напряжение  $u$ . Следовательно, напряжение  $u = U_m \sin \omega t$  изобразится вектором  $\overline{OF} = \overline{OB} + \overline{BD} + \overline{DF}$ . Векторы, изображающие напряжение  $u = U_m \sin \omega t$  и ток  $i = I_m \sin(\omega t - \varphi)$ , должны быть сдвинуты на угол, равный разности их фаз. Поэтому угол между векторами  $\overline{OF}$  и  $\overline{OB}$  равен  $\varphi$ . Так как длина вектора  $\overline{BF} = \overline{BD} + \overline{DF}$  равна  $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I_m$ , то из прямоугольного треугольника  $OBF$  найдем:

$$U_m^2 = r^2 I_m^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 I_m^2,$$

откуда

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Из того же треугольника получим:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) : r \quad \text{и} \quad \varphi = \arctg \left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) : r\right].$$

Таким образом, амплитуда тока и разность фаз определены, и для тока установившегося режима мы имеем:

$$i = I_m \sin(\omega t - \varphi) = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin\left(\omega t - \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r}\right).$$

## § 10. Полное, активное и реактивное сопротивления цепи

От соотношения между амплитудами напряжения и тока

$$I_m = U_m : \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

можно перейти к соотношению между их действующими значениями, разделив обе части равенства на  $\sqrt{2}$ , в результате чего найдем:

$$I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Из последних двух выражений видно, что для цепи переменного тока нельзя получить максимальное или действующее значение тока делением соответствующего значения приложенного напряжения на  $r$ , как для цепи постоянного тока. Отношение соответствующих значений напряжения и тока в цепи переменного тока обозначают  $z$  и называют *полным сопротивлением* цепи. Для рассмотренной цепи имеем:

$$\frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = z = \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

откуда следует, что  $z$  в этой цепи больше  $r$  и может быть ему равно только в частном случае. Причина этого лежит в том, что в рассматриваемой цепи приложенное напряжение имеет не только составляющую  $ir$ , но также составляющую  $L \frac{di}{dt}$ , преодолевающую э. д. с. самоиндукции и составляющую  $\frac{q}{C}$ , равную напряжению на конденсаторе.

Сопротивление  $r$  называют *активным сопротивлением* цепи, так как только им определяются необратимые активные процессы в цепи, в данном случае преобразование электромагнитной энергии в тепло. Величину  $\omega L - \frac{1}{\omega C}$ , учитывающую реакцию самоиндукции и емкости и имеющую размерность сопротивления, называют *реактивным сопротивлением* цепи и обозначают  $x$ . При этом член  $\omega L$ , учитывающий реакцию самоиндукции, называют *индуктивным сопротивлением* цепи и обозначают  $x_L$ , а член  $\frac{1}{\omega C}$ , учитывающий реакцию емкости, называют *емкостным сопротивлением* цепи и обозначают  $x_C$ .

Итак, имеем: .

$$x_L = \omega L; \quad x_C = \frac{1}{\omega C}; \quad x = \omega L - \frac{1}{\omega C} = x_L - x_C;$$

$$z = \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{r^2 + x^2}.$$

То обстоятельство, что индуктивное сопротивление  $x_L = \omega L$ , учитывающее напряжение на катушке  $u_L = \omega L I_m \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$  и емкостное сопротивление  $x_C = \frac{1}{\omega C}$ , учитывающее напряжение на конденсаторе  $u_C = \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$ , входят в выражение для реактивного сопротивления с разными знаками, объясняется тем, что  $u_L$  и  $u_C$  сдвинуты друг относительно друга на угол  $\pi$  и, следовательно, в любой момент времени противоположны друг другу. Так как составляющая  $u_r$  приложенного напряжения, преодолевающая активное сопротивление цепи, и составляющая  $(u_L + u_C)$ , преодолевающая реактивное сопротивление цепи, сдвинуты друг относительно друга на угол  $\frac{\pi}{2}$ , то полное сопротивление цепи  $z$  нельзя определять путем арифметического сложения  $r$  и  $x$ , а следует вычислять по формуле  $z = \sqrt{r^2 + x^2}$ .

Величины  $x_L$  и  $x_C$  зависят не только от свойств цепи, а именно не только от ее индуктивности  $L$  и емкости конденсатора  $C$ , но и от частоты приложенного напряжения. Величина индуктивного сопротивления  $x_L = \omega L$  прямо пропорциональна частоте и при возрастании ее стремится к бесконечности, а при убывании ее стремится к нулю, так как э. д. с. самоиндукции  $e_L = -L \frac{di}{dt}$  по абсолютному значению тем больше, чем больше скорость изменения тока. Напротив, величина емкостного сопротивления  $x_C = \frac{1}{\omega C}$  обратно пропорциональна частоте и при возрастании ее стремится к нулю, а при убывании ее стремится к бесконечности, так как ток, проходящий через конденсатор,  $i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}$  по абсолютному значению тем больше, чем больше скорость изменения напряжения  $u_C$ , приложенного к обкладкам конденсатора.

## § 11. Разность фаз напряжения и тока

Из выражения  $\varphi = \arctg \frac{x}{r}$  следует, что, вообще говоря, ток установившегося режима не совпадает по фазе с приложенным напряжением. Исключая из рассмотрения случай  $r = \infty$ , что соот-

ветствовало бы отсутствию тока в цепи, можно сказать, что ток *совпадает по фазе* с приложенным напряжением только при  $x = 0$ , т. е. или при отсутствии в цепи реактивных сопротивлений, или при их взаимной компенсации. Действительно, из векторной диаграммы рис. 18 видно, что при  $x = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$  сумма векторов,

изображающих составляющие  $u_L$  и  $u_C$  приложенного напряжения, будет равна нулю, и векторы, изображающие приложенное напряжение и ток, совпадут по направлению, а это значит, что приложенное напряжение и ток совпадут по фазе, т. е. угол  $\varphi$  будет равен нулю.

Заметим, что когда ток совпадает по фазе с напряжением в результате взаимной компенсации индуктивного и емкостного сопротивлений, то говорят, что в цепи существует *резонанс*. Явление резонанса, ввиду исключительно важного значения его, будет рассмотрено особо.

При  $x \neq 0$  разность фаз приложенного напряжения и тока отличается от нуля. При этом, если  $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ , т. е. если в цепи реакция самоиндукции преобладает над реакцией емкости, то  $x > 0$  и  $\frac{\pi}{2} \geq \varphi > 0$ . Если же  $\frac{1}{\omega C} > \omega L$ , т. е. если

в цепи реакция емкости преобладает над реакцией самоиндукции, то  $x < 0$  и  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi < 0$ . Таким образом, пределами, между которыми лежит  $\varphi$ , являются  $+\frac{\pi}{2}$  и  $-\frac{\pi}{2}$ .

Из выражений для приложенного напряжения и тока, а также и из кривых рис. 19 видно, что при  $x > 0$  и  $\frac{\pi}{2} \geq \varphi > 0$  ток, возрастая, проходит через нуль позже, чем напряжение, или, как говорят, ток *отстает по фазе* от напряжения, а при  $x < 0$  и  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi < 0$  ток, возрастая, проходит через нуль раньше, чем напряжение, или, как говорят, ток *упреждает по фазе* напряжение. На рис. 20 приведены векторные диаграммы, соответствующие кривым рис. 19, из которых следует, что при  $x > 0$  вектор тока идет за вектором напряжения, а при  $x < 0$  он идет впереди вектора напряжения. Заметим, что на этих диаграммах, как и на всех последующих, векторы изображают действующие значения напряжений и токов.

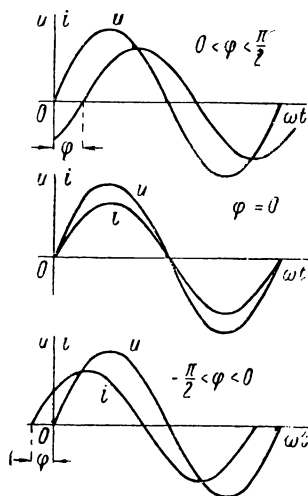


Рис. 19

В некоторых частных случаях выражение полного сопротивления рассматриваемой цепи упрощается. Прежде всего мы можем иметь цепь, в которой отсутствует конденсатор. Такую цепь можно рассматривать как цепь с конденсатором, обкладки которого сближены до соприкосновения. Известно, что емкость конденсаторов тем больше, чем меньше расстояние между обкладками и, в частности, для плоского конденсатора  $C = \frac{\epsilon S}{d}$ . Если  $d$  будет доведено

до нуля, то  $C = \infty$ ,  $x_C = \frac{1}{\omega C} = 0$ , и тогда  $z = \sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}$ . Далее,

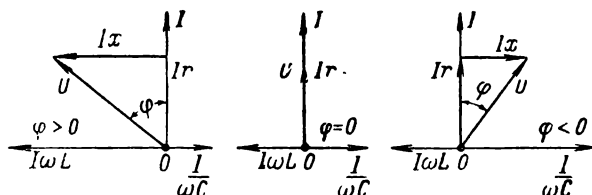


Рис. 20

хотя нет цепей с индуктивностью, равной нулю, так как с электрическим током всегда связан магнитный поток, все же иногда при  $\omega L \approx 0$  величиной  $\omega L$  можно пренебречь, и тогда  $z = \sqrt{r^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$ .

## § 12. Установившийся ток в простейшей цепи с параллельным соединением участков $g$ , $L$ и $C$ при синусоидальном напряжении

Рассмотрим цепь, изображенную на рис. 21, состоящую из трех параллельно соединенных участков, причем предположим, что первый участок обладает только проводимостью  $g$ , второй — только емкостью  $C$  и третий — только индуктивностью  $L$ .

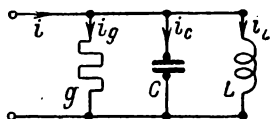


Рис. 21

Применяя первый закон Кирхгофа, имеем:

$$i_g + i_c + i_L = i.$$

Токи в ветвях можно выразить через приложенное напряжение. Ток в первой ветви:  $i_g = gu$ , где  $g$  — проводимость первого участка. Ток во второй ветви:  $i_c = \frac{dq}{dt} = \frac{dCu}{dt} = C \frac{du}{dt}$ . Ток в третьей ветви:  $i_L = \frac{\Psi_L}{L}$ . Но так как  $u = \frac{d\Psi_L}{dt}$ , то  $\Psi_L = \int u dt$  и, следовательно,  $i_L = \frac{1}{L} \int u dt$ .

Таким образом, дифференциальное уравнение рассматриваемой цепи имеет вид:

$$gu + C \frac{du}{dt} + \frac{1}{L} \int u dt = i.$$

Пусть к цепи приложено синусоидальное напряжение  $u = U_m \sin \omega t$ . При этом ток  $i$  также будет синусоидальным и может быть представлен в виде  $i = I_m \sin(\omega t - \varphi)$ . Подставив эти выражения в уравнение цепи, получим:

$$\begin{aligned} gU_m \sin \omega t + \omega C U_m \cos \omega t - \frac{1}{\omega L} U_m \cos \omega t &= \\ &= I_m \sin(\omega t - \varphi) = \\ &= I_m \cos \varphi \sin \omega t - I_m \sin \varphi \cos \omega t. \end{aligned}$$

Это уравнение справедливо для любого момента времени  $t$ . Полагая  $\omega t = 0$  и  $\omega t = \frac{\pi}{2}$ , находим:

$$gU_m = I_m \cos \varphi; \left( \frac{1}{\omega L} - \omega C \right) U_m = I_m \sin \varphi.$$

Возведя каждое из равенств в квадрат и сложив, получим:

$$I_m = U_m \sqrt{g^2 + \left( \frac{1}{\omega L} - \omega C \right)^2}.$$

Поделив второе равенство на первое, найдем:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{g}.$$

На рис. 22 изображена векторная диаграмма для этой цепи для случая  $\frac{1}{\omega L} > \omega C$ . Ток в первом участке совпадает по фазе с напряжением, ток в конденсаторе опережает по фазе на угол  $\frac{\pi}{2}$  напряжением, а ток в катушке отстает по фазе на угол  $\frac{\pi}{2}$  от напряжения.

Разделив обе части равенства, связывающего  $I_m$  и  $U_m$ , на  $\sqrt{2}$ , получим связь между действующими значениями тока и напряжения:

$$I = U \sqrt{g^2 + \left( \frac{1}{\omega L} - \omega C \right)^2} = Uy,$$

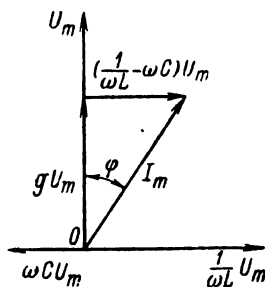


Рис. 22

где величину

$$y = \frac{1}{U} = \sqrt{g^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}$$

называют *полной проводимостью* цепи. Проводимость  $g$  называют *активной проводимостью*. Величину  $\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)$ , имеющую также размерность проводимости, называют *реактивной проводимостью* цепи и обозначают  $b$ . При этом член  $\frac{1}{\omega L}$  называют *индуктивной проводимостью* и обозначают  $b_L$ , а член  $\omega C$  называют *емкостной проводимостью* и обозначают  $b_C$ . Имеем:

$$b = \frac{1}{\omega L} - \omega C = b_L - b_C; \quad y = \sqrt{g^2 + b^2}.$$

То обстоятельство, что  $b$  образуется как разность  $b_L$  и  $b_C$ , объясняется тем, что токи в конденсаторе и в катушке сдвинуты друг относительно друга на угол  $\pi$ , т. е. в любой момент времени направлены по отношению к общим зажимам второй и третьей ветвей в противоположные стороны. Эти токи сдвинуты относительно тока в первой ветви на угол  $\frac{\pi}{2}$ , вследствие чего полная проводимость определяется не арифметическим сложением  $g$  и  $b$ , а формулой  $y = \sqrt{g^2 + b^2}$ .

При  $b_L = b_C$  имеет место *резонанс* в цепи и ток  $i$  равен току  $i_g$  в первой ветви. При  $\frac{1}{\omega L} > \omega C$  ток через катушку больше тока через конденсатор (рис. 22), и общий ток  $i$  отстает по фазе на угол  $\varphi$  от напряжения, причем  $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ . При  $\omega C > \frac{1}{\omega L}$  ток через конденсатор больше тока через катушку, и общий ток  $i$  опережает по фазе напряжение, причем  $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$ .

### § 13. Треугольники напряжений и сопротивлений

Какова бы ни была цепь с постоянными параметрами при синусоидальном напряжении  $u = U_m \sin \omega t$  на ее зажимах, токи в ветвях цепи и общий ток  $i = I_m \sin(\omega t - \varphi)$  будут синусоидальны. Всегда можно на векторной диаграмме изобразить напряжение и общий ток  $i$  векторами  $\bar{U}$  и  $\bar{I}$ , составляющими друг с другом угол  $\varphi$ .

Разложим вектор  $\bar{U}$  на две составляющие  $\bar{U}_a$  и  $\bar{U}_p$ , из которых первая направлена вдоль вектора  $\bar{I}$ , а вторая к нему перпендикулярна, и условимся составляющую, совпадающую по направлению с вектором  $\bar{I}$ , называть *активной составляющей напряжения* или

активным напряжением, составляющую, перпендикулярную к вектору  $\bar{I}$ , называть реактивной составляющей напряжения или реактивным напряжением (рис. 23).

Прямоугольный треугольник, гипотенузой которого является вектор напряжения  $\bar{U}$ , а катетами — его активная и реактивная составляющие  $\bar{U}_a$  и  $\bar{U}_p$ , носит название *треугольника напряжений*. Из этого треугольника (рис. 23) следует, что активное и реактивное напряжения можно выразить через напряжение  $U$  и функции угла  $\varphi$ , а именно:

$$U_a = U \cos \varphi; \quad U_p = U \sin \varphi; \quad U = Iz = \sqrt{U_a^2 + U_p^2}.$$

При этом необходимо иметь в виду, что если  $\varphi < 0$ , то и  $U_p < 0$ , в то время как  $U$  и  $U_a$  всегда имеют положительные значения.

В частном случае цепи, состоящей из последовательно соединенных участков  $r$ ,  $L$  и  $C$  (рис. 17), активная и реактивная составляющие напряжения имеют определенный физический смысл. Активная составляющая напряжения в этой цепи представляет собой напряжение на первом участке цепи, обладающем активным сопротивлением  $r$ . Реактивная составляющая представляет собой напряжение на втором и третьем участках цепи, обладающих реактивным сопротивлением  $x = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ . Соответственно, имеем:

$$U_a = U \cos \varphi = Ir; \quad U_p = U \sin \varphi = Ix.$$

Для другой более сложной цепи, или хотя бы для простой цепи с параллельно соединенными участками  $g$ ,  $C$  и  $L$  (рис. 21), разложение приложенного к зажимам цепи напряжения на активную и реактивную составляющие не имеет физического смысла. Однако для расчета сложных цепей такое разложение может быть полезным. Например, если данная сложная цепь соединена последовательно с другой, то через них проходит один и тот же ток  $I$ , и активные составляющие  $U_{a1}$  и  $U_{a2}$  напряжений  $U_1$  и  $U_2$  на них, находясь в фазе с этим током, будут в фазе друг с другом, т. е. будут складываться алгебраически. Точно так же алгебраически сложатся и реактивные составляющие  $U_{p1}$  и  $U_{p2}$ , причем должен учитываться их знак.

Разлагая в общем случае напряжение  $U$  на активную и реактивную составляющие, мы можем сохранить и выражения

$$U_a = Ir; \quad U_p = Ix,$$

но при этом величины  $r$  и  $x$  являются уже *эквивалентными активным и реактивным* сопротивлениями всей цепи. Это значит, что

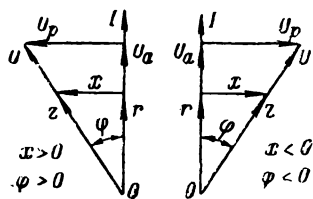


Рис. 23



любую сложную цепь с постоянными параметрами, если интересоваться только общим напряжением  $U$  и общим током  $I$ , можно изобразить при синусоидальном напряжении в виде простой эквивалентной цепи, содержащей только два последовательно включенных участка, обладающих один активным  $r$  и другой реактивным  $x$  сопротивлениями. При этом  $r > 0$ , если цепь не содержит источников энергии, а  $x > 0$  при  $\varphi > 0$  и  $x < 0$  при  $\varphi < 0$ . Очевидно, имеем:  $\frac{U}{I} = z = \sqrt{r^2 + x^2}$ , где  $z$  — полное сопротивление всей цепи.

Разделим величину каждой из сторон треугольника напряжений на  $I$ . В результате мы получим треугольник, подобный исходному (рис. 23). Этот новый треугольник, катетами которого являются активное и реактивное сопротивления, а гипотенузой — полное сопротивление цепи, носит название *треугольника сопротивлений* и приводит нас к изображению сопротивлений  $r$ ,  $x$  и  $z$  векторами, причем вектор активного сопротивления направлен вдоль вектора тока или параллелен ему, вектор реактивного сопротивления перпендикулярен к вектору тока, а вектор полного сопротивления, являющийся геометрической суммой двух предыдущих, направлен вдоль вектора приложенного напряжения. Изображение сопротивлений векторами имеет смысл лишь при неподвижной, не вращающейся векторной диаграмме, так как сопротивления в отличие от э. д. с., напряжений и токов не являются функциями времени. В дальнейшем вектор полного сопротивления мы будем обозначать прописной буквой  $Z$  с чертой над ней.

Треугольник сопротивлений позволяет по заданному направлению вектора тока определить направление вектора приложенного к цепи напряжения. Для этого достаточно отложить активное сопротивление вдоль вектора тока, реактивное сопротивление — перпендикулярно к вектору тока и найти их геометрическую сумму, т. е. вектор полного сопротивления, с которым и должен совпасть по направлению вектор напряжения. При этом вектор реактивного сопротивления должен быть повернут относительно вектора активного сопротивления или вектора тока на прямой угол в положительном направлении при  $x > 0$  и в отрицательном направлении при  $x < 0$ .

Из треугольника сопротивлений имеем:

$$\cos \varphi = \frac{r}{z}; \quad \sin \varphi = \frac{x}{z}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{r};$$

$$r = z \cos \varphi; \quad x = z \sin \varphi; \quad x = r \operatorname{tg} \varphi.$$

#### § 14. Треугольники токов и проводимостей

Имея на векторной диаграмме правильно ориентированные друг относительно друга вектор напряжения  $\bar{U}$  и вектор тока  $\bar{I}$ , можно разлагать на составляющие не только вектор  $\bar{U}$ , но также и вектор  $\bar{I}$ .

Разложим вектор  $\bar{I}$  на две составляющие  $\bar{I}_a$  и  $\bar{I}_p$ , из которых первая направлена вдоль вектора  $\bar{U}$ , а вторая к нему перпендикулярна, и условимся составляющую, совпадающую по направлению с вектором  $\bar{U}$  называть *активной составляющей тока* или *активным током*, а составляющую, перпендикулярную к вектору  $\bar{U}$ , называть *реактивной составляющей тока* или *реактивным током*. Прямоугольный треугольник, гипотенузой которого является вектор тока  $I$ , а катетами — его активная и реактивная составляющие  $I_a$  и  $I_p$ , носит название *треугольника токов*. Из этого треугольника (рис. 24) следует, что активный и реактивный токи можно выразить через ток  $I$  и функции угла  $\varphi$ , а именно:

$$I_a = I \cos \varphi; \quad I_p = I \sin \varphi; \quad I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2}.$$

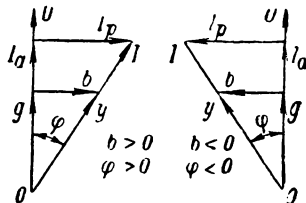


Рис. 24

При этом необходимо иметь в виду, что если  $\varphi < 0$ , то и  $I_p < 0$ , в то время как  $I_a$  и  $I$  всегда имеют положительные значения.

В общем случае любой цепи разложение вектора тока на активную и реактивную составляющие является формальной операцией. Однако при соединении ветви с активной проводимостью, реактивной катушки и конденсатора по схеме рис. 21 эти составляющие тока имеют определенный физический смысл. В самом деле, пусть к этой цепи приложено напряжение  $u = U_m \sin \omega t$ . Тогда ток в ветви  $g$  будет  $i_g = gU_m \sin \omega t$ , а ток в части цепи, состоящей из ветвей  $C$  и  $L$ , будет:

$$\begin{aligned} i_p = i_C + i_L &= \omega C U_m \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{\omega L} U_m \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= \left( \frac{1}{\omega L} - \omega C \right) U_m \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Так как ток  $i_a = i_g$  ветви  $g$  находится в фазе с напряжением  $u$ , а ток  $i_p = i_C + i_L$  находится в квадратуре с напряжением  $u$ , то  $i_a$  является активной составляющей всего тока  $i$ , а  $i_p$  — его реактивной составляющей, т. е. действительно в этом случае активная и реактивная составляющие тока существуют в отдельных ветвях цепи.

В цепи из последовательно соединенных участков  $r$ ,  $L$  и  $C$  (рис. 17) разложение тока на составляющие физического смысла не имеет, но может быть полезно для расчета, если эта цепь присоединена параллельно к другой цепи.

Для цепи, изображенной на рис. 21, можем написать:

$$I_a = I \cos \varphi = Ug; \quad I_p = I \sin \varphi = Ub.$$

Сохраняя эти выражения для любой цепи, мы будем величины  $g$  и  $b$  понимать как *эквивалентные активную и реактивную проводимости* всей цепи. Очевидно имеем:

$$\frac{I}{U} = y = \sqrt{g^2 + b^2},$$

где  $y$  — *полная проводимость* всей цепи.

Из сказанного следует, что любую сложную цепь с постоянными параметрами, если интересоваться только общим током  $I$  и общим напряжением  $U$ , можно изобразить при синусоидальном напряжении в виде простой *эквивалентной* цепи, содержащей только два параллельно включенных участка, обладающих один активной  $g$  и другой реактивной  $b$  проводимостями. При этом  $g > 0$ , если цепь не содержит источников энергии, а  $b > 0$  при  $\varphi > 0$  и  $b < 0$  при  $\varphi < 0$ .

Разделим величину каждой из сторон треугольника токов на  $U$ . В результате получится треугольник, подобный исходному (рис. 24). Этот новый треугольник, катетами которого являются активная и реактивная проводимости, а гипотенузой — полная проводимость цепи, носит название *треугольника проводимостей* и приводит нас к изображению проводимостей  $g$ ,  $b$  и  $y$  векторами, причем вектор активной проводимости направлен вдоль вектора напряжения или параллелен ему, вектор реактивной проводимости перпендикулярен к вектору напряжения, а вектор полной проводимости, являющийся геометрической суммой двух предыдущих, направлен вдоль вектора тока. Изображение проводимостей векторами имеет смысл лишь при неподвижной, не вращающейся векторной диаграмме, так как проводимости, подобно сопротивлениям, в отличие от э. д. с., напряжений и токов, не являются функциями времени. В дальнейшем вектор полной проводимости мы будем обозначать прописной буквой  $Y$  с чертой над ней.

Треугольник проводимостей позволяет по заданному направлению вектора напряжения определить направление вектора тока, для чего достаточно отложить активную проводимость вдоль вектора напряжения, реактивную проводимость — перпендикулярно к вектору напряжения и найти их геометрическую сумму, т. е. вектор полной проводимости, с которым и должен совпасть по направлению вектор тока. При этом вектор реактивной проводимости должен быть повернут относительно вектора активной проводимости или вектора напряжения на прямой угол в отрицательном направлении при  $b > 0$  и в положительном направлении при  $b < 0$ .

Из треугольника проводимостей имеем:

$$\cos \varphi = \frac{g}{y}; \quad \sin \varphi = \frac{b}{y}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{g};$$

$$g = y \cos \varphi; \quad b = y \sin \varphi; \quad b = g \operatorname{tg} \varphi.$$

### § 15. Зависимости, связывающие эквивалентные сопротивления и проводимости

Используя выражения для  $\cos \varphi$  и  $\sin \varphi$  из треугольников сопротивления и проводимостей, получаем:

$$\cos \varphi = \frac{r}{z} = \frac{g}{y} \quad \text{и} \quad \sin \varphi = \frac{x}{z} = \frac{b}{y}.$$

Так как  $z = \frac{U}{I}$ , а  $y = \frac{I}{U}$ , то  $z = \frac{1}{y}$ . Отсюда находим выражения проводимостей через сопротивления, а именно:

$$g = \frac{r}{z^2} = \frac{r}{r^2 + x^2}; \quad b = \frac{x}{z^2} = \frac{x}{r^2 + x^2};$$

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

и, соответственно, выражения сопротивлений через проводимости:

$$r = \frac{g}{y^2} = \frac{g}{g^2 + b^2}; \quad x = \frac{b}{y^2} = \frac{b}{g^2 + b^2};$$

$$z = \frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{g^2 + b^2}}.$$

Из выражений для  $r$ ,  $x$ ,  $z$ ,  $g$ ,  $b$ ,  $y$  следует, что только полное сопротивление  $z$  и полная проводимость  $y$  являются величинами, обратными друг другу, активное же сопротивление  $r$  и активная проводимость  $g$ , а также реактивное сопротивление  $x$  и реактивная проводимость  $b$  не обратны друг другу, и только при  $x = 0$  мы имеем  $g = \frac{1}{r}$  и только при  $r = 0$  имеем  $b = \frac{1}{x}$ .

Заметим, что в то время как сопротивления  $r$  и  $x = x_L - x_C$  являются характеристиками отдельных участков цепи, изображенной на рис. 17, проводимости  $g$  и  $b$  этой цепи зависят от параметров всех ее участков. Наоборот, сопротивления  $r$  и  $x$  цепи, изображенной на рис. 21, зависят от параметров всех ее ветвей, в то время как проводимости  $g$  и  $b = b_L - b_C$  являются характеристиками отдельных ветвей этой цепи.

### § 16. Диаграммы в отрезках на осях

Пусть даны вектор тока  $\bar{I}$  в цепи и вектор напряжения  $\bar{U}$  на ее зажимах, сдвинутые друг относительно друга на угол  $\varphi$ . Направим вектор  $\bar{U}$  по оси ординат и проведем через конец вектора  $\bar{I}$  перпендикуляр к последнему. Тогда отрезки, отсекаемые этим перпенди-

куляром на оси ординат и на оси абсцисс (рис. 25), будут соответственно:

$$\frac{I}{\cos \varphi} = \frac{Iz}{r} = \frac{U}{r}; \quad \frac{I}{\sin \varphi} = \frac{Iz}{x} = \frac{U}{x}.$$

Следовательно, отложив от начала по оси ординат отрезок  $\frac{U}{r}$ , а по оси абсцисс отрезок  $\frac{U}{x}$  и опустив из начала перпендикуляр на прямую, соединяющую концы этих отрезков, мы получим вектор тока  $\bar{I}$  по величине и направлению. Конец вектора тока  $\bar{I}$  можно

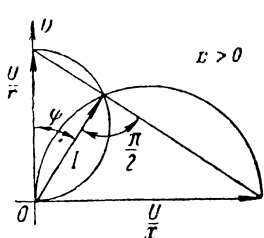


Рис. 25

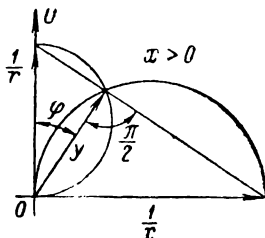


Рис. 26

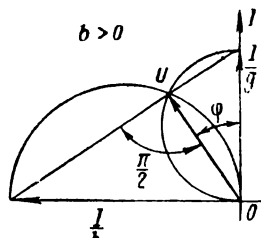


Рис. 27

также определить как точку пересечения окружностей, построенных на отрезках  $\frac{U}{r}$  и  $\frac{U}{x}$ , как на диаметрах. Заметим, что отрезки  $\frac{U}{r}$  и  $\frac{U}{x}$  не являются активной и реактивной составляющими вектора тока  $\bar{I}$ .

Разделив величины всех отрезков предыдущей диаграммы на  $U$ , мы получим аналогичную диаграмму (рис. 26), позволяющую по сопротивлениям  $r$  и  $x$  определить вектор полной проводимости цепи  $\bar{Y}$ . Так как величина  $\frac{1}{x}$  имеет размерность проводимости, то при  $x > 0$  следует откладывать ее, а соответственно и  $\frac{U}{x}$  на предыдущей диаграмме — вправо от вектора  $\bar{U}$  (§ 14).

Рассмотрим диаграммы, позволяющие по  $\bar{I}$ ,  $g$  и  $b$  определить векторы напряжения и полного сопротивления. Пусть даны векторы  $\bar{U}$  и  $\bar{I}$ . Направим вектор  $\bar{I}$  по оси ординат и проведем через конец вектора  $\bar{U}$  перпендикуляр к последнему (рис. 27); тогда отрезки, отсекаемые этим перпендикуляром на оси ординат и на оси абсцисс будут соответственно:

$$\frac{U}{\cos \varphi} = \frac{Uy}{g} = \frac{I}{g}; \quad \frac{U}{\sin \varphi} = \frac{Uy}{b} = \frac{I}{b}.$$

Следовательно, отложив от начала по направлению вектора  $\bar{I}$  отрезок  $\frac{I}{g}$ , а перпендикулярно к нему отрезок  $\frac{I}{b}$  и опустив из на-

чала перпендикуляр на прямую, соединяющую концы этих отрезков, мы получим вектор напряжения  $\bar{U}$  по величине и направлению. Конец вектора  $\bar{U}$  можно также определить как точку пересечения окружностей, построенных на отрезках  $\frac{I}{g}$  и  $\frac{I}{b}$ , как на диаметрах. Заметим, что отрезки  $\frac{I}{g}$  и  $\frac{I}{b}$  не являются активной и реактивной составляющими вектора  $\bar{U}$ .

Разделив величины всех отрезков предыдущей диаграммы на  $I$ , мы получим аналогичную диаграмму (рис. 28), позволяющую по проводимостям  $g$  и  $b$  определить вектор полного сопротивления цепи  $\bar{Z}$ . Так как величина  $\frac{1}{b}$  имеет размерность сопротивления, то при  $b < 0$  ее, а соответственно, и  $\frac{I}{b}$  на предыдущей диаграмме, следует откладывать влево от вектора  $\bar{I}$  (§ 13).

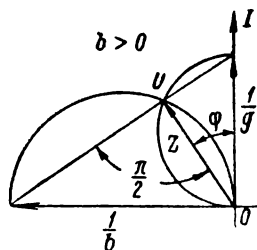


Рис. 28

## § 17. Простейшие линейные и круговые диаграммы

Треугольники напряжений, токов, сопротивлений, проводимостей, а также диаграммы в отрезках на осях можно применить для исследования поведения цепи переменного тока при изменении одного из ее параметров. Покажем это на двух примерах.

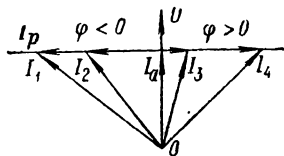


Рис. 29

Пусть нас интересует вопрос об изменении тока в цепи, к которой приложено неизменное по величине напряжение  $U$ , при постоянстве активной проводимости  $g$  этой цепи и изменении ее реактивной проводимости  $b$  в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Воспользуемся для решения этого вопроса треугольником токов. При заданных условиях активная составляющая тока  $I_a = Ug$  постоянна. Поэтому вектор тока  $\bar{I}$ , являющийся замыкающей векторов  $\bar{I}_a$  — неизменного по величине и направлению, и  $\bar{I}_p = \bar{U}b$  — неизменного лишь по направлению, будет при изменении  $b$  скользить своим концом по прямой, проходящей через конец вектора  $\bar{I}_a$  и перпендикулярной к нему (рис. 29). Эта прямая, являющаяся геометрическим местом концов вектора  $\bar{I}$ , и дает нам *линейную диаграмму* тока в цепи при изменении  $b$  и  $U = \text{const}$  и  $g = \text{const}$ .

Рассмотрим теперь вопрос об изменении тока в цепи, к которой приложено неизменное по величине напряжение  $U$ , при постоянстве активного сопротивления  $r$  этой цепи и изменении ее реактивного сопротивления  $x$  в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ . При решении этого вопроса воспользуемся диаграммой в отрезках на осях, позволяющей построить вектор тока. Для этой цели, как показано, достаточно, расположив вектор  $\bar{U}$  по оси ординат, отложить из начала по оси ординат и по оси абсцисс соответственно отрезки  $\frac{U}{r}$  и  $\frac{U}{x}$  и построить на этих отрезках, как на диаметрах, окружности. При заданных

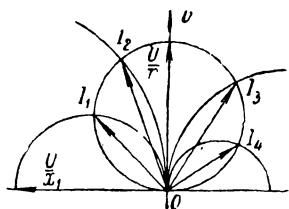


Рис. 30

условиях диаметр первой окружности  $\frac{U}{r}$  неизменен, а диаметр второй окружности  $\frac{U}{x}$  изменяется. Поэтому конец вектора тока  $\bar{I}$ , определяемый как точка пересечения этих окружностей, при изменении  $x$  будет перемещаться по окружности, построенной на неизменном диаметре  $\frac{U}{r}$  (рис. 30), и, следовательно, эта окружность, являющаяся геометрическим местом концов вектора тока  $I$ , даст нам *круговую диаграмму* тока в цепи при изменении  $x$  и  $U = \text{const}$  и  $r = \text{const}$ . Положение конца вектора тока при заданном  $x$  можно определить, отложив по оси абсцисс отрезок  $\frac{U}{x}$  и соединив прямой его конец с концом отрезка  $\frac{U}{r}$  или описав на отрезке  $\frac{U}{x}$ , как на диаметре, окружность. При  $x = +\infty$  отрезок  $\frac{U}{x}$  равен нулю и вектор тока также равен нулю. При уменьшении  $x$  от  $+\infty$  до 0 отрезок  $\frac{U}{x}$  возрастает, и вектор тока, увеличиваясь, по направлению приближается к оси ординат. При  $x = 0$  отрезок  $\frac{U}{x}$  равен бесконечности, и вектор тока совпадает по величине и направлению с отрезком  $\frac{U}{r}$ . При изменении  $x$  от 0 до  $-\infty$  вектор тока, располагающийся теперь налево от оси ординат, постепенно уменьшается, стремясь к нулю.

## § 18. Активная мощность в цепи переменного тока

Обозначим через  $u$  и  $i$  мгновенные значения напряжения на зажимах цепи и тока в этой цепи. Тогда работа  $dA$ , совершаемая в цепи за элемент времени  $dt$ , равна:

$$dA = ui \, dt,$$

и скорость совершения работы в данный момент времени, т. е. *мгновенное значение мощности*, развиваемой в цепи, будет:

$$p = \frac{dA}{dt} = ui.$$

При периодических процессах обычно интересуются работой, совершаемой в цепи за один полный период, и средним значением мощности за полный период, более часто называемым *активной мощностью* или просто *мощностью*.

Так как работа  $A$  за полный период равна:

$$A = \int_0^T ui \, dt,$$

то для активной мощности  $P$  имеем:

$$P = \frac{A}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T ui \, dt.$$

Из последнего выражения для случая, когда напряжение и ток являются синусоидальными функциями времени, а именно:

$$u = U_m \sin \omega t = U\sqrt{2} \sin \omega t$$

и

$$i = I_m \sin(\omega t - \varphi) = I\sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi),$$

получим:

$$P = \frac{UI}{T} \int_0^T 2 \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi) \, dt = \frac{UI}{T} \int_0^T [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)] \, dt.$$

Так как определенный интеграл второго члена подынтегральной функции обращается в нуль, то имеем:

$$P = UI \cos \varphi,$$

откуда следует, что в цепи переменного тока среднее за период значение мощности, т. е. активная мощность, зависит не только от действующих значений напряжения и тока, но и от разности  $\varphi$  их фаз. Множитель  $\cos \varphi$ , входящий в выражение для активной мощности, носит название *коэффициента мощности*, и так как косинус не может быть больше единицы, то активная мощность вообще меньше произведения действующих значений напряжения и тока, и только в предельном случае, когда  $\varphi = 0$  и  $\cos \varphi = 1$ , мы имеем  $P = UI$ . В другом предельном случае, когда  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$  и  $\cos \varphi = 0$ , активная мощность равна нулю. Из сказанного следует, что чем ближе к нулю разность фаз  $\varphi$ , тем ближе коэффициент мощности к единице



и тем больше при тех же действующих значениях напряжения и тока активная мощность, а следовательно, и работа, совершаемая в цепи. Наибольшие действующие значения напряжения и тока, допустимые для машин и трансформаторов; производящих и, соответственно, преобразующих электрическую энергию, зависят от их конструкции, а наибольшая мощность, которую они могут развивать, не подвергаясь опасности быть поврежденными, определяется произведением этих значений. Поэтому рациональное использование электрических машин и трансформаторов может быть достигнуто лишь в том случае, когда устройства, являющиеся приемниками электрической энергии, обладают высоким коэффициентом мощности. В возможном приближении коэффициента мощности приемных устройств к единице и заключается весьма важная технико-экономическая «проблема  $\cos \varphi$ ».

Обычно реактивный ток потребителей энергии в электроэнергетических системах имеет индуктивный характер, т. е.  $\varphi > 0$ , так как наиболее широко используемые асинхронные двигатели требуют от сети такого тока для создания магнитного потока в двигателе. Уменьшение реактивной составляющей тока достигается улучшением конструкции таких двигателей. Уменьшение воздушного зазора между статором и ротором ведет к уменьшению магнитного сопротивления пути, по которому замыкается магнитный поток, а следовательно, к уменьшению намагничивающего тока, необходимого для создания требуемого потока. Предел уменьшения воздушного зазора определяется совершенством конструкции и технологии изготовления двигателей. Следовательно, первый путь к повышению коэффициента мощности лежит в усовершенствовании электродвигателей и другого электрического оборудования, устанавливаемого на предприятиях.

Для улучшения коэффициента мощности всего предприятия необходимо стремиться к тому, чтобы двигатели были загружены полностью, т. е. чтобы станки, приводимые в движение двигателями, соответствовали по мощности двигателям и чтобы были сведены до минимума интервалы времени, когда двигатель работает с неполной нагрузкой. Действительно, реактивный намагничивающий ток мало зависит от нагрузки, так как двигатель приключен к сети с неизменным напряжением, а следовательно, остается практически неизменным и магнитный поток в двигателе, который индуцирует э. д. с., почти полностью уравнивающую приложенное напряжение. Активная же составляющая тока возрастает с увеличением нагрузки двигателя и соответственно возрастает и коэффициент мощности. Таким образом, другой путь к повышению коэффициента мощности заключается в рациональной организации работы самих предприятий, использующих электромагнитную энергию.

Наконец радикальной мерой может быть установка на этих предприятиях конденсаторов, включаемых параллельно другим устройствам. При правильном подборе емкости конденсаторов реак-

тивный ток в них может полностью скомпенсировать реактивный ток в остальном оборудовании предприятия. При этом коэффициент мощности станет равным единице. Такую же роль, как конденсаторы, как мы увидим дальше, могут играть синхронные двигатели.

Выведенное выше выражение для активной мощности можно преобразовать, пользуясь соотношениями  $U = Iz$  и  $\cos \varphi = \frac{r}{z}$ , а также  $I = Uy$  и  $\cos \varphi = \frac{g}{y}$ , в результате чего получим:

$$P = UI \cos \varphi = I^2 r = U^2 g.$$

Все эти три выражения являются одинаково важными. Кроме того, выражение для активной мощности можно написать в виде:

$$P = UI \cos \varphi = UI_a = U_a I,$$

так как

$$I_a = I \cos \varphi \text{ и } U_a = U \cos \varphi.$$

### § 19. Реактивная мощность и полная мощность в цепи переменного тока

Наряду с активной мощностью  $P$ , характеризующей среднюю за период скорость поступления энергии в цепь, вводят в рассмотрение так называемую реактивную мощность

$$Q = UI \sin \varphi$$

и полную мощность

$$S = UI.$$

Величины  $Q$  и  $S$  не имеют того же физического смысла, что активная мощность, однако использование их имеет определенное практическое значение.

Смысл введения понятия полной мощности ясен из сказанного в предыдущем параграфе. Если под  $U$  и  $I$  понимать номинальные значения, т. е. допускаемые при номинальном режиме действующие значения напряжения и тока электрической машины, трансформатора или других преобразователей энергии, то произведение  $S = UI$  дает наибольшую возможную активную их мощность при наиболее благоприятных условиях, т. е. при  $\cos \varphi = 1$ .

Практическое значение введения понятия реактивной мощности вытекает, например, из следующего рассмотрения. Обычный счетчик энергии дает величину энергии, отданной приемнику за некоторый промежуток времени  $\tau$ . Эту энергию можно записать в форме

$$\int_0^{\tau} P dt = \int_0^{\tau} UI \cos \varphi dt,$$

если заметное изменение  $P$  происходит только за большое количество периодов  $T$  тока и если, соответственно,  $\tau$  во много раз превосходит  $T$ . Однако показания такого счетчика не дают возможности судить о том, при каком коэффициенте мощности  $\cos \varphi$  работает потребитель энергии. Такая оценка возможна, если наряду с обычным счетчиком, показывающим действительную энергию, передаваемую приемнику, включить на зажимы приемника еще счетчик, показывающий величину интеграла реактивной мощности  $Q$  за тот же промежуток времени  $\tau$ :

$$\int_0^{\tau} Q dt = \int_0^{\tau} UI \sin \varphi dt.$$

Очевидно, чем больше показание этого счетчика по сравнению с показанием обычного счетчика, тем ниже среднее значение  $\cos \varphi$  приемника за рассматриваемый промежуток времени.

Величину  $P$  можно измерить с помощью обычного ваттметра, а величину  $Q$  с помощью специально предназначенного для этой цели электроизмерительного прибора. Зная  $P$  и  $Q$ , можно определить  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$  потребителя энергии в момент измерения. Однако представляет интерес именно знать характер работы потребителя за длительный промежуток времени. С этой целью и используются счетчики, дающие вышеуказанные интегральные величины.

Понятием реактивной мощности  $Q$  широко пользуются также при расчете электрических сетей переменного тока.

Имеем соотношения:

$$Q = UI \sin \varphi = I^2 x = U^2 b = UI_p = U_p I$$

и

$$S = UI = I^2 z = U^2 y.$$

Из выражений для  $P$ ,  $Q$  и  $S$  следует, что  $P$  и  $S$  всегда положительны, но реактивная мощность  $Q$  положительна лишь при  $\varphi > 0$ , т. е. для индуктивных цепей, а при  $\varphi < 0$ , т. е. для емкостных цепей, она отрицательна.

Заметим, что при  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ , например, в случае конденсаторов или катушек без потерь, абсолютное значение реактивной мощности совпадает с полной мощностью.

## § 20. Колебания энергии в цепи переменного тока

При более подробном анализе энергетических процессов в цепи переменного тока необходимо обратить внимание не только на процесс преобразования электромагнитной энергии в тепло или иные виды энергии, но также и на то, что запас энергии в магнитном и электрическом полях, связанных с рассматриваемой цепью, непрерывно изменяется. Поэтому нельзя ограничиться рассмотрением среднего

значения мощности за полный период, т. е. активной мощности, а необходимо проследить изменение мгновенного значения мощности. Переходя к этому, напомним, что энергия магнитного поля  $W_m$ , связанного с цепью, обладающей индуктивностью  $L$ , и энергия электрического поля  $W_e$  конденсатора, имеющего емкость  $C$ , равны, соответственно,

$$W_m = \frac{1}{2} L i_L^2 \text{ и } W_e = \frac{1}{2} C u_C^2,$$

где  $i_L$  и  $u_C$  — мгновенные значения тока в цепи с индуктивностью и напряжения на обкладках конденсатора.

Произведем детальный анализ энергетических процессов в неразветвленной цепи, составленной из последовательно соединенных участков  $r$ ,  $L$  и  $C$  (рис. 17). Ток  $i$  является общим для всех участков цепи, и, следовательно,  $i_L = i$ .

От основного уравнения напряжений для этой цепи

$$u = ri + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = u_r + u_L + u_C$$

можно, умножая обе части его на  $i dt = dq = C du_C$ , перейти к уравнению элементарных работ, а именно:

$$ui dt = i^2 r dt + L i di + C u_C du_C = i^2 r dt + d(W_m + W_e),$$

откуда следует, что работа  $ui dt$ , совершаемая источником приложенного напряжения за элемент времени  $dt$ , расходуется, с одной стороны, на выделение тепла, а с другой стороны, — на изменение энергии магнитного и электрического полей. При этом величина  $i^2 r dt$  всегда положительна, но величины  $ui dt$  и  $d(W_m + W_e)$  могут принимать как положительные, так и отрицательные значения, т. е. в цепи переменного тока в некоторые моменты времени источник приложенного напряжения может быть приемником энергии, а поля могут быть источниками энергии.

Рассмотрим изменения мгновенного значения мощности  $p$  при  $u = U\sqrt{2} \sin \omega t$  и  $i = I\sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi)$ . Тогда

$$p = ui = 2UI \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi) = UI [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)],$$

откуда следует, что мгновенное значение мощности изменяется с угловой частотой  $2\omega$ , в два раза превышающей угловую частоту напряжения и тока, и, следовательно, скорость поступления энергии в цепь в нашем случае все время изменяется в отличие от цепи постоянного тока, в которую энергия поступает равномерно.

Характер энергетических процессов особенно четко может быть выяснен при рассмотрении двух предельных случаев, а именно случая, когда  $\cos \varphi = 1$ , и случая, когда  $\cos \varphi = 0$ .

При  $\cos \varphi = 1$ , т. е. при  $\varphi = 0$ , имеем:

$$p = UI(1 - \cos 2\omega t);$$

$$p_{\max} = 2UI; \quad p_{\min} = 0; \quad P = UI.$$

На рис. 31 приведены кривые напряжения и тока, совпадающие по фазе, и соответствующая кривая мгновенных значений мощности. Как из последней кривой, так и из выражения для  $p$  следует, что в этом случае мощность колеблется с угловой частотой  $2\omega$  около своего среднего значения  $UI$ . При этом мощность не принимает отрица-

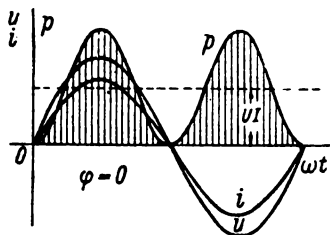


Рис. 31

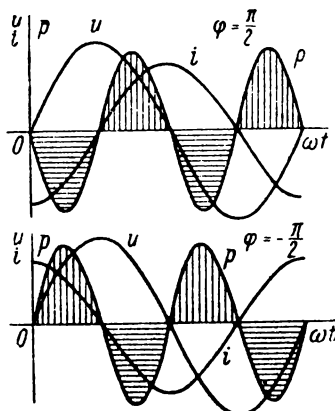


Рис. 32

тельных значений; следовательно, энергия все время поступает в цепь, и хотя это поступление энергии происходит в различные моменты времени с различной скоростью, но возврата энергии из цепи в источник приложенного напряжения при  $\varphi = 0$  не происходит. В этом случае вся энергия, поступающая в цепь, преобразуется в ней в тепло.

При  $\cos \varphi = 0$ , т. е. при  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ , имеем:

$$p = \mp UI \sin 2\omega t;$$

$$p_{\max} = UI; \quad p_{\min} = -UI; \quad P = 0.$$

На рис. 32 приведены кривые напряжения, тока и мощности для этого случая. Как из выражения для  $p$ , так и из кривых следует, что при  $\cos \varphi = 0$  мощность колеблется около оси абсцисс с угловой частотой  $2\omega$ . При этом, оставаясь в течение одной четверти периода положительной, в течение следующей четверти периода мощность отрицательна. В соответствии с этим, в отличие от предыдущего случая, энергия то поступает в цепь, когда  $p > 0$ , то возвращается из цепи обратно в источник приложенного напряжения, когда  $p < 0$ .

Так как при  $\cos \varphi = 0$  ограниченные кривою мощности и расположенные над осью абсцисс площади, которыми измеряется энергия, поступающая в цепь, равны расположенным под осью абсцисс площадям, которыми измеряется энергия, возвращающаяся из цепи, то в среднем работа, совершаемая в цепи, равна нулю. Энергетический процесс в рассматриваемом случае состоит лишь в колебании энергии между источником приложенного напряжения и цепью, а преобразование электромагнитной энергии в другие виды энергии отсутствует. При этом энергия, поступающая в цепь, временно запа-

сается в магнитном поле при  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  или в электрическом поле при  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$  и нацело возвращается этими

полями при их исчезновении. Действительно, из кривых мощности и энергии (рис. 33) видно, что при  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  запас энергии в магнитном

поле  $W_m = \frac{1}{2} Li^2$ , измеряемый площадью кривой мощности, возрастает при увеличении тока по абсолютной величине, достигает максимума при переходе тока через экстремальное значение, затем убывает и обра-

щается в нуль при токе, равном нулю. Аналогично при  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$  запас энергии в электрическом поле  $W_e = \frac{1}{2} Cu_c^2$  возрас-

тает при увеличении напряжения на обкладках конденсатора по абсолютной величине, достигает максимума при переходе напряжения через экстремальное значение, затем убывает и обращается в нуль, когда напряжение на обкладках конденсатора равно нулю. В соответствии с этим мощность—скорость поступления энергии в цепь—меняет свой знак, когда запас энергии в полях достигает максимума или обращается в нуль.

Интенсивность колебаний энергии между источником приложенного напряжения и полями цепи можно охарактеризовать наибольшим значением скорости поступления энергии в поля цепи. При  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$  это наибольшее значение равно амплитуде кривой мощности, т. е.  $UI$ .

При  $1 > \cos \varphi > 0$ , т. е. при  $0 < |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ , имеем:

$$p = UI [\cos \varphi - \cos (2\omega t - \varphi)];$$

$$p_{\max} = UI (\cos \varphi + 1); \quad p_{\min} = UI (\cos \varphi - 1); \quad P = UI \cos \varphi.$$

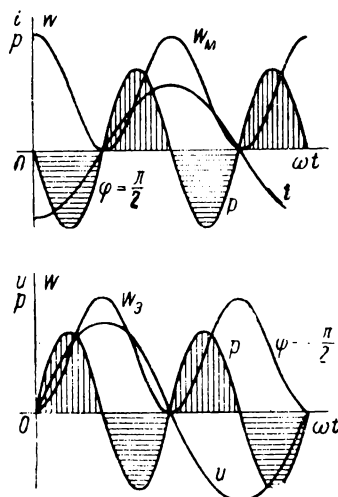


Рис. 33

На рис. 34 приведены соответствующие кривые напряжения, тока и мощности. Как из выражения для  $p$ , так и из кривых следует, что мощность колеблется с угловой частотой  $2\omega$  около оси, приподнятой над осью абсцисс на величину активной мощности  $P = UI \cos \varphi$ . При этом, хотя мгновенная мощность и принимает отрицательные значения, но части периода, в течение которых она остается положительной, преобладают, и площади кривой мощности, расположенные над осью абсцисс, превышают площади этой кривой, расположенные под осью абсцисс. В соответствии с этим энергия, поступающая

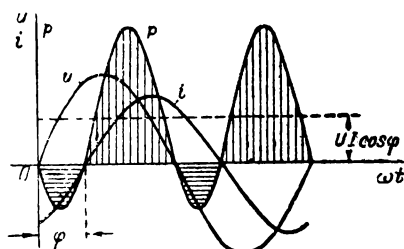


Рис. 34

от источника напряжения в цепь, превосходит энергию, возвращаемую цепью этому источнику. В цепи при  $1 > \cos \varphi > 0$  существуют одновременно процесс преобразования электромагнитной энергии в тепло и процесс запасаения и возврата энергии полями, связанными с цепью. В цепях более сложных, чем рассматриваемая нами, может, кроме того, происходить

как превращение электромагнитной энергии в механическую работу, так и необратимый переход энергии в соседние цепи.

Для более подробного анализа энергетических процессов, происходящих в рассматриваемой цепи, напишем для нее уравнение мощностей, получаемое или из уравнения напряжений умножением на  $i$ , или из уравнения элементарных работ делением обеих частей последнего на  $dt$ , а именно:

$$ui = u_r i + u_L i + u_C i = ri^2 + \frac{d(W_M + W_E)}{dt},$$

т. е. мгновенное значение мощности цепи, иными словами, скорость поступления энергии от источника напряжения в цепь, равно сумме  $p_r = ri^2$  — скорости преобразования электромагнитной энергии в тепло, выделяемое в цепи, и  $p_x = \frac{d(W_M + W_E)}{dt}$  — скорости поступления энергии в магнитное и электрическое поле, связанные с цепью. Так как

$$p_r = ri^2 = u_r i \text{ и } p_x = \frac{d(W_M + W_E)}{dt} = (u_L + u_C) i = u_p i,$$

то имеем:

$$p_r = U\sqrt{2} \cos \varphi \sin(\omega t - \varphi) I\sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi) = \\ = UI \cos \varphi [1 - \cos(2\omega t - 2\varphi)];$$

$$p_x = U\sqrt{2} \sin \varphi \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) I\sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi) = \\ = UI \sin \varphi \sin(2\omega t - 2\varphi).$$

Из последних выражений для  $p_r$  и  $p_x$  видно, что переменные составляющие их находятся в квадратуре. Заметим, что амплитуда переменной составляющей мощности  $p_r$  равна активной мощности  $P = UI \cos \varphi$ , амплитуда мощности  $p_x$  равна реактивной мощности  $Q = UI \sin \varphi$ , а амплитуда переменной составляющей всей мощности  $P$  равна полной мощности  $S = UI$ .

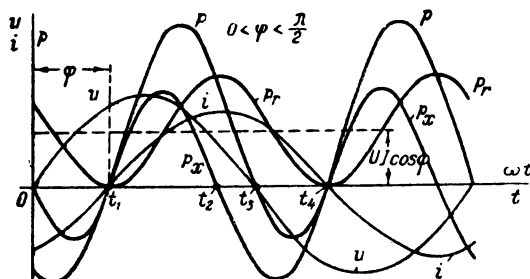


Рис. 35

Для рассматриваемой цепи (рис. 17)  $Q$  можно представить в следующем виде:

$$Q = UI \sin \varphi = I^2 X = I^2 \omega L - \frac{I^2}{\omega C} = \omega (W_{\text{м макс}} - W_{\text{э макс}}),$$

где  $W_{\text{м макс}} = LI^2$  и  $W_{\text{э макс}} = CU^2 = \frac{I^2}{\omega^2 C}$  — максимальные значения

энергии магнитного и электрического полей, связанных с цепью.

Нетрудно убедиться, что такое же выражение через  $W_{\text{м макс}}$  и  $W_{\text{э макс}}$  реактивная мощность имеет и для цепи рис. 21. Однако только для простейших цепей рис. 17 и 21 амплитуда скорости поступления энергии в поля, связанные с цепью, равна реактивной мощности  $UI \sin \varphi$ . Для более сложных цепей это равенство, вообще говоря, не имеет места.

На рис. 35 приведены кривые  $u$ ,  $i$ ,  $p_r$ ,  $p_x$  для случая  $\varphi > 0$ . Из этих кривых видно, что от момента  $t_1$  перехода тока через нуль до момента  $t_2$  достижения током максимума  $p > 0$  и  $p_x > 0$ , и, следовательно, энергия поступает от источника напряжения в цепь и отчасти преобразуется в цепи в тепло, а отчасти запасается в полях, связанных с ней. Далее, от момента  $t_2$  до момента  $t_3$  перехода напряжения через нуль  $p > 0$ , но  $p_x < 0$ , и, следовательно, энергия полей начинает убывать и в цепи преобразуется в тепло энергия, поступающая как от источника напряжения, так и из полей. Затем от момента  $t_3$  до момента  $t_4$  следующего перехода тока через нуль



$p < 0$  и  $p_x < 0$ , и энергия, поступающая из полей, отчасти преобразуется в тепло, а отчасти возвращается источнику напряжения. Аналогичным образом протекают энергетические процессы и в случае  $\varphi < 0$ . В течение тех промежутков времени, когда энергия возвращается из полей цепи в источник напряжения, этот последний является приемником энергии.

## § 21. Треугольник мощности

Введя понятия об активной, реактивной и полной мощностях, имеем:

$$P = UI \cos \varphi = I^2 r = U^2 g;$$

$$Q = UI \sin \varphi = I^2 x = U^2 b;$$

$$S = UI = I^2 z = U^2 y.$$

Из этих выражений видно, что мощности  $P$ ,  $Q$ ,  $S$  пропорциональны сопротивлениям  $r$ ,  $x$ ,  $z$ , причем коэффициентом пропорцио-

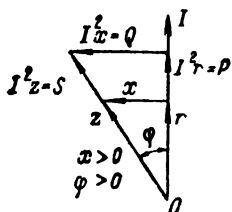


Рис. 36

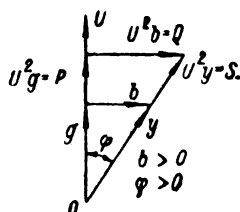


Рис. 37

нальности является  $I^2$ , а также пропорциональны проводимостям  $g$ ,  $b$ ,  $y$ , причем коэффициентом пропорциональности является  $U^2$ . Отсюда следует, что, умножая стороны треугольника сопротивлений на  $I^2$ , мы получим треугольник мощностей (рис. 36), подобный треугольникам сопротивлений и напряжений, а умножая стороны треугольника проводимостей на  $U^2$ , мы также получим треугольник мощностей (рис. 37), но этот треугольник будет подобен треугольникам проводимостей и токов. Хотя оба способа получения треугольника мощностей равноценны, но для определенности принято строить треугольник мощностей как подобный треугольнику проводимостей или токов, так как по условиям работы цепей в большинстве случаев как величину постоянную рассматривают не ток, а то или иное напряжение, вектор которого и принимают за исходный вектор.

Из треугольника мощностей видно, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Q}{P}; \quad \cos \varphi = \frac{P}{S}; \quad \sin \varphi = \frac{Q}{S}.$$

В заключение заметим, что все основные соотношения и графические построения, полученные нами для случая, когда к цепи приложено синусоидальное напряжение  $U$ , сохраняют свой вид в том случае, когда в цепи действует синусоидальная э. д. с.  $E$ , если, конечно, при этом параметры цепи будут определены с учетом внутреннего сопротивления источника э. д. с. или если это сопротивление пренебрежимо мало по сравнению с сопротивлением самой цепи.

Так, в частности, при помощи рассуждений, в точности совпадающих с приведенными ранее, связь между внешней э. д. с.  $E$ , действующей в цепи, и током  $I$  в этой цепи мы получим в виде:

$$I = \frac{E}{z} = Ey$$

и для активной, реактивной и полной мощности найдем:

$$P = EI \cos \varphi = I^2 r = E^2 g;$$

$$Q = EI \sin \varphi = I^2 x = E^2 b;$$

$$S = EI = I^2 z = E^2 y.$$

## § 22. Эквивалентные параметры и их экспериментальное определение

На практике часто приходится встречаться с цепями переменного тока, значительно более сложными, чем рассмотренные нами. При этом сложность процессов в цепи может быть обусловлена как сложностью строения самих цепей, так и особыми явлениями, происходящими в цепях переменного тока. К такого рода явлениям в первую очередь следует отнести поверхностный эффект и вихревые токи, которые будут нами рассмотрены в следующем параграфе.

Независимо от строения цепи и сложности происходящих в ней явлений всегда, когда напряжение, приложенное к зажимам цепи, и ток в ней являются синусоидальными функциями времени, эту цепь в целом можно охарактеризовать эквивалентными параметрами, которые могут быть определены расчетом или из опыта. Таковыми являются, как было отмечено в §§ 13, 14, эквивалентные полное, активное и реактивное сопротивления

$$z, r \text{ и } x$$

и эквивалентные полная, активная и реактивная проводимости

$$y, g \text{ и } b,$$

определяемые из треугольников напряжения и тока из соотношений:

$$U = Iz; \quad U_a = Ir; \quad U_p = Ix;$$

$$I = Uy; \quad I_a = Ug; \quad I_p = Ub.$$

Итак имеем:

$$z = U : I; \quad y = I : U,$$

в соответствии с чем под *эквивалентным полным сопротивлением* цепи будем понимать величину, равную отношению действующего значения напряжения, приложенного к зажимам цепи, к действующему значению тока в этой цепи, а под *эквивалентной полной проводимостью* — обратную величину.

Для экспериментального определения величин  $z$  и  $y$  необходимо измерить напряжение  $U$  с помощью вольтметра и ток  $I$  с помощью амперметра.

Далее, так как

$$r = \frac{U_a}{I} = \frac{U_a I}{I^2} = \frac{P}{I^2}; \quad g = \frac{I_a}{U} = \frac{I_a U}{U^2} = \frac{P}{U^2},$$

то под *эквивалентным активным сопротивлением* цепи мы будем понимать величину, равную отношению активной мощности в цепи, к квадрату действующего значения тока в этой цепи, а под *эквивалентной активной проводимостью* — величину, равную отношению активной мощности в цепи, к квадрату действующего значения напряжения, приложенного к зажимам этой цепи.

Необходимо иметь в виду, что  $r$  и  $g$ , как это следует из их определений, учитывают не только мощность, расходуемую на тепло, выделяющееся в цепи, но и все другие виды расхода мощности, как, например, на совершение механической работы, на излучение и т. д.

Для  $x$  и  $b$  имеем:

$$x = \pm \sqrt{z^2 - r^2}; \quad b = \pm \sqrt{y^2 - g^2},$$

на основании чего под *эквивалентными реактивными сопротивлениями* и *проводимостями* будем понимать величину, равную корню квадратному из разности квадратов эквивалентных полного и активного сопротивлений и, соответственно, из разности квадратов полной и активной проводимостей.

Для экспериментального определения величины  $r$  необходимо измерить мощность ваттметром и ток амперметром, а для определения величины  $g$  измерить мощность ваттметром и напряжение вольтметром.

Затем, зная  $z$  и  $r$ , можно вычислить  $x$ , а зная  $y$  и  $g$ , можно вычислить  $b$ . Для определения знака  $x$  и  $b$  или, что то же, для определения знака угла  $\varphi$  в тех случаях, когда этот знак представляется сомнительным, следует включить последовательно или параллельно с исследуемой цепью вполне известное сопротивление, в котором преобладает реактивная составляющая, и произвести второе измерение.

Так, определив величины  $z$ ,  $r$ ,  $x$  для некоторого приемника и желая определить знак угла сдвига  $\varphi$  в нем, можно включить последовательно с ним конденсатор, реактивное сопротивление  $x' = -\frac{1}{\omega C}$

которого таково, что  $\frac{1}{\omega C} < |2x|$ . Тогда при повторном измерении после включения конденсатора будет  $|\varphi_1| < |\varphi|$  в случае индуктивного приемника и  $|\varphi_2| > |\varphi|$  в случае емкостного (рис. 38).

Две цепи, имеющие одинаковые параметры  $r, x, z, g, b, y$ , эквивалентны друг другу, и сколь угодно сложную цепь можно заменить другой ей эквивалентной цепью, имеющей те же параметры, в частности, цепью, состоящей из последовательно соединенных  $r$  и  $x$  или из параллельно соединенных  $g$  и  $b$ .

По  $x$  и  $b$ , зная угловую частоту  $\omega$  переменного тока, можно вычислить эквивалентную индуктивность  $L$  сложной цепи при  $x > 0$

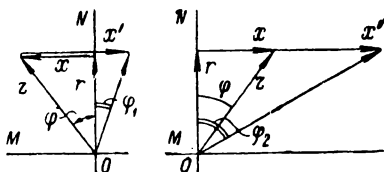


Рис. 38

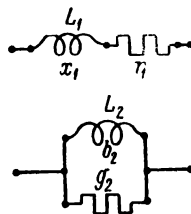


Рис. 39

и  $b > 0$  или ее эквивалентную емкость  $C$  при  $x < 0$  и  $b < 0$ . При этом следует иметь в виду, что эквивалентные параметры цепи зависят от параметров всех элементов этой цепи и являются функциями частоты и что эквивалентные индуктивность или емкость, вычисленные по  $x$ , не равны эквивалентным индуктивности или, соответственно, емкости, вычисленным по  $b$ . Это можно показать, рассмотрев две простейшие цепи  $r_1, x_1$ , и  $g_2, b_2$  (рис. 39). При эквивалентности этих цепей, приняв во внимание, что

$$x_1 = \omega L_1 \text{ и } b_2 = \frac{1}{\omega L_2},$$

имеем:

$$r_1 = \frac{g_2}{g_2^2 + b_2^2} = \frac{g_2 \omega^2 L_2^2}{1 + g_2^2 \omega^2 L_2^2}; \quad x_1 = \frac{b_2}{g_2^2 + b_2^2} = \frac{\omega L_2}{1 + g_2^2 \omega^2 L_2^2};$$

$$L_1 = \frac{x_1}{\omega} = \frac{L_2}{1 + g_2^2 \omega^2 L_2^2},$$

т. е. уже в этом простом случае  $L_1 \neq L_2$  и каждый из параметров первой цепи зависит от обоих параметров второй цепи и от частоты.

Даже если мы имеем простую реактивную катушку, то, строго говоря, ее параметры сложным образом зависят от частоты. При низких частотах катушка представляет индуктивное сопротивление, но при высоких частотах наличие емкости между витками катушки может повести к тому, что ее эквивалентное сопротивление

приобретает емкостный характер. Активное сопротивление катушки также зависит от частоты вследствие влияния поверхностного эффекта и вихревых токов, что будет пояснено в следующем параграфе.

Из сказанного вытекает, что, определив теоретически или экспериментально параметры цепи или отдельных ее элементов при одной частоте, в частности при постоянном токе, нельзя пользоваться этими параметрами при другой частоте, не убедившись предварительно в допустимости этого.

В дальнейшем мы всегда будем вводить в рассмотрение эквивалентные параметры цепей, определенные так, как указано выше. Все сказанное выше об эквивалентных параметрах относится только к таким цепям, параметры которых при данной частоте неизменны.

### § 23. Влияние поверхностного эффекта и вихревых токов на параметры цепи

При прохождении переменного тока по проводу как вне провода, так и внутри него существует переменное магнитное поле, причем по отношению к этому полю не все части сечения провода

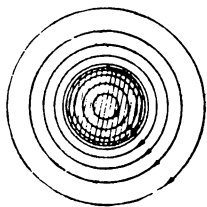


Рис. 40

находятся в одинаковых условиях. Действительно, если мы представим себе провод как совокупность проводящих нитей, параллельных его оси, то из рис. 40 ясно, что нить, расположенная в центральной части сечения, охвачена всеми линиями магнитной индукции, в то время как нить, расположенная на поверхности провода, охвачена лишь линиями магнитной индукции, проходящими вне провода. Так как при изменении тока в проводе изменяется и магнитный поток, то в нитях возникают индуктированные э. д. с. Величина этих э. д. с. тем больше, чем больше магнитный поток, сцепляющийся

с нитью, т. е. чем ближе к центру сечения расположена нить. Поэтому плотность тока в центральных частях сечения будет меньше, чем у поверхности провода. При высоких частотах эта разница настолько велика, что плотность тока во всех частях сечения, за исключением небольшого поверхностного слоя, практически можно считать равной нулю. Так как при этом центральная часть сечения почти совсем не используется, то активное сопротивление  $r$  провода при прохождении по нему переменного тока больше, чем его сопротивление  $r_0$  при постоянном токе, и потери при переменном токе больше, чем при постоянном токе такой же величины. Кроме этого, вследствие ослабления плотности тока в центральных частях сечения, магнитный поток внутри провода уменьшается, и при высоких частотах его можно считать практически равным нулю. Поэтому эквивалентная индуктивность  $L$  провода при переменном токе меньше, чем при постоянном токе.

Неравномерное распределение плотности тока по сечению провода носит название *поверхностного эффекта*. Резкость проявления его возрастает не только при увеличении частоты, но также при увеличении радиуса  $a$  поперечного сечения провода, абсолютной магнитной проницаемости  $\mu$  и удельной проводимости  $\gamma$  материала провода. Это объясняется тем, что увеличение  $\mu$  вызывает увеличение потока внутри провода, а увеличение  $\gamma$  и  $a$  усиливает влияние э. д. с. индукции.

Следует иметь в виду, что при частотах порядка 50 гц для медных проводов диаметром до 1 см можно пренебрегать повышением сопротивления, вызванным поверхностным эффектом. При низких частотах с поверхностным эффектом в медных проводах приходится считаться лишь в случае больших сечений, как, например, при подводе тока к мощным электрическим печам.



Рис. 41

В алюминиевых проводах поверхностный эффект сказывается менее резко, чем в медных, так как  $\gamma_{ал} < \gamma_{м}$ . В стальных проводах вследствие большой магнитной проницаемости стали с поверхностным эффектом необходимо считаться даже при малых сечениях и низких частотах.

Если повышение сопротивления по расчету оказывается значительным, то для лучшего использования материала применяют провода, имеющие такую форму поперечного сечения, при которой проводящий материал по возможности удален от центра сечения (рис. 41).

Влияние поверхностного эффекта используют в технике для поверхностной закалки стальных изделий. При закалке током соответствующей частоты интенсивному нагреву подвергается лишь поверхностный слой изделия, в то время как его внутренние части не испытывают нежелательного повышения температуры.

Близость соседних проводов, несущих переменные токи, нарушает симметричное распределение плотности тока по сечению провода. Картины магнитных полей показывают, что в проводах, несущих токи одного направления, части сечений проводов, обращенные друг к другу, охватываются большим магнитным потоком, чем части сечений, удаленные друг от друга, и поэтому плотность тока имеет наибольшее значение в частях сечений, наиболее удаленных друг от друга. Если провода несут токи различного направления, то по аналогичным причинам плотность тока достигает наибольшего значения в частях сечений, наиболее близких друг к другу. Влияние наличия токов в соседних проводах на распределение плотности тока по сечению провода называют *эффектом близости*.

На параметры электрической цепи влияют также *вихревые электрические токи*, называемые также *токами Фуко*, возникающие

в сплошных проводящих массах, расположенных в переменном магнитном поле рассматриваемой цепи.

Изменяющийся магнитный поток, пронизывающий сплошные проводящие массы, индуцирует в этих массах электродвижущие силы, которые вызывают вихревые токи. При этом безразлично, является ли изменение потока следствием перемещения проводящих масс в магнитном поле или оно происходит вследствие того, что поток изменяется во времени. Вихревые токи представляют собою частный случай явления взаимной индукции.

В соответствии с принципом Ленца вихревые токи, индуцируемые в проводящих массах, стремятся воспрепятствовать тем изменениям, которые их вызывают. Поэтому собственное поле вихревых токов всегда стремится ослабить изменение основного магнитного поля, что при периодическом режиме сказывается в *размагничивающем действии* вихревых токов, т. е. в уменьшении амплитуды результирующего магнитного потока.

Это обстоятельство ведет к уменьшению эквивалентной индуктивности  $L$  цепи. По той же причине вихревые токи, возникающие при перемещении проводящих масс в магнитных полях, оказывают тормозящее действие на эти массы.

Наличие вихревых токов сопровождается выделением тепла, и в тех случаях, когда это тепло не используется, соответствующая мощность носит название *потерь на вихревые токи* или *потерь на токи Фуко*.

Рассматривая реактивную катушку с сердечником из проводящего материала, мы допустили бы существенную ошибку, положив, что ее активное сопротивление  $r$  равно сопротивлению  $r_0$  при постоянном токе, так как при прохождении переменного тока в обмотке катушки в ее сердечнике возникают вихревые токи, и в этом случае мы должны принять во внимание не только мощность, идущую на тепло, выделяемое в обмотке катушки, но и мощность  $P_\theta$ , расходуемую на тепло, выделяемое вихревыми токами в сердечнике. Поэтому для  $r$  имеем:

$$r = [(I^2 r_0 + P_\theta) : I^2] > r_0.$$

Вихревые токи в технике используют в двух направлениях: для создания тормозных устройств и для индукционного нагрева. Индукционные печи, в которых используют вихревые токи, отличаются исключительной простотой конструкции. Они состоят из тигля с загрузкой, подлежащей расплавлению, и охватывающего его индуктора, по которому проходит ток соответствующей частоты (рис. 42).

Вихревые токи возникают в сердечниках электрических машин, трансформаторов и реактивных катушек, выполняемых из электротехнической стали. Для уменьшения потерь в стали на вихревые токи и для уменьшения их размагничивающего действия следует

стремиться к возможно большему ослаблению вихревых токов. Этого можно достичь, с одной стороны, уменьшая удельную проводимость материала сердечников, а с другой стороны, устраивая сердечники из тонких проволок или из тонких листов, электрически изолированных друг от друга. Так как в сердечниках контуры вихревых токов располагаются в поверхностях, нормальных к линиям магнитной индукции, то подразделять сердечники на проволоки или плоские листы следует так, чтобы оси проволок или плоскости листов были направлены вдоль линий магнитной индукции. Тогда вихревые токи встретят препятствие в виде изолирующих

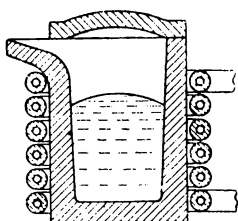


Рис. 42

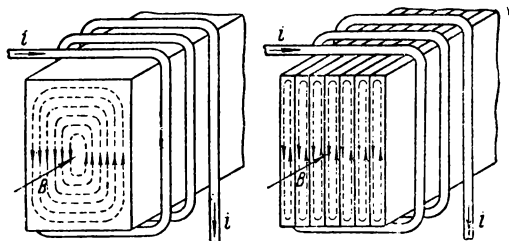


Рис. 43

прослоек и будут принуждены замыкаться по более узким путям (рис. 43). В реактивных катушках, применяемых в технике связи, в последнее время сердечники часто изготовляют из спрессованных ферромагнитных порошков.

Из картины распределения вихревых токов по поперечному сечению стержня вытекает, что размагничивающее действие вихревых токов не одинаково в различных частях сечения и наиболее резко выражено в центральных частях, так как они охватываются наибольшим числом контуров вихревых токов. В центре сечения м. д. с., создаваемая вихревыми токами, равна сумме м. д. с., создаваемых всеми контурами вихревых токов, на поверхности же она равна нулю. Это обстоятельство служит причиной того, что переменный магнитный поток распределяется по сечению магнитной цепи неравномерно, и магнитная индукция имеет наименьшее значение в центральных частях сечения. Поэтому часто говорят, что вихревые токи *экранируют* центральные части сечения от магнитного потока.

Неравномерное распределение переменного магнитного потока по поперечному сечению магнитной цепи при наличии в последней вихревых токов вполне сходно с поверхностным эффектом в электрической цепи и так же, как и последний, проявляется тем резче, чем больше частота магнитного потока и чем больше магнитная проницаемость, удельная проводимость и толщина листов или диаметр проволок, из которых состоит магнитная цепь.



## § 24. Параметры несовершенного конденсатора

При переменном напряжении в конденсаторах с твердыми и жидкими диэлектриками в отличие от воздушных конденсаторов часть подводимой к ним энергии рассеивается в виде тепла, выделяемого в диэлектрике. Такого рода конденсаторы, обладающие потерями, принято называть *несовершенными конденсаторами*. В несовершенных конденсаторах разность фаз  $\varphi$  приложенного напряжения и тока

по абсолютной величине меньше  $\frac{\pi}{2}$  на угол  $\delta$ , называемый *углом потерь*. Таким образом,

$$\delta = \frac{\pi}{2} - |\varphi|.$$

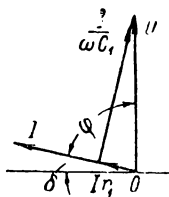


Рис. 44

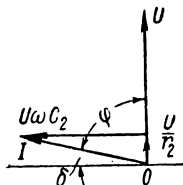
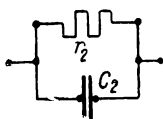
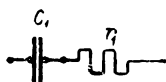


Рис. 45



Несовершенный конденсатор можно изобразить эквивалентной схемой, состоящей из совершенного конденсатора и последовательно или параллельно соединенного с ним сопротивления. Эти эквивалентные схемы,

одинаково часто применяемые, приведены на рис. 44 и 45 вместе с соответствующими векторными диаграммами.

Обозначив полное сопротивление конденсатора через  $z$ , имеем:

$$\operatorname{tg} \delta = \omega C_1 r_1; \quad \sin \delta = \frac{r_1}{z}; \quad \cos \delta = \frac{1}{\omega C_1 z};$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{\omega C_2 r_2}; \quad \sin \delta = \frac{z}{r_2}; \quad \cos \delta = \omega C_2 z,$$

откуда

$$r_1 : r_2 = \sin^2 \delta; \quad C_2 : C_1 = \cos^2 \delta.$$

Так как угол  $\delta$  очень мал, то  $C_1 \approx C_2$ , но  $r_1 \ll r_2$ , причем, приняв во внимание, что  $\operatorname{tg} \delta \approx \delta$ , имеем:

$$r_1 = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\omega C_1} \approx \frac{\delta}{\omega C_1}; \quad r_2 = \frac{1}{\omega C_2 \operatorname{tg} \delta} \approx \frac{1}{\omega C_2 \delta}.$$

На практике за основные параметры конденсаторов принимают их емкость и угол потерь.

## § 25. Параметры различных устройств в цепи переменного тока

Изложенное в предыдущих параграфах свидетельствует, что параметры даже таких простых элементов цепи переменного тока, как реостат, реактивная катушка и конденсатор зависят от ряда

факторов и, вообще говоря, сложным образом изменяются с изменением частоты. Тем не менее в некоторых ограниченных пределах изменения частоты можно с большой точностью считать, что сопротивление  $r$  реостатов, индуктивность  $L$  катушек и емкость  $C$  конденсаторов остаются постоянными. Сопротивление ламп накаливания при промышленной частоте можно считать чисто активным и практически не зависящим от частоты.

Асинхронные двигатели, как уже было отмечено, обладают сопротивлением, имеющим индуктивный характер, причем их эквивалентные параметры и, особенно, эквивалентная активная проводимость зависят от нагрузки на валу двигателя.

Особый интерес с рассматриваемой точки зрения представляют синхронные двигатели, которые в зависимости от величины тока в обмотке возбуждения могут иметь индуктивный (при недо возбуждении) или емкостный (при перевозбуждении) характер.

В дальнейшем при рассмотрении тех или иных устройств в цепи переменного тока будет уясняться и характер их эквивалентных параметров.

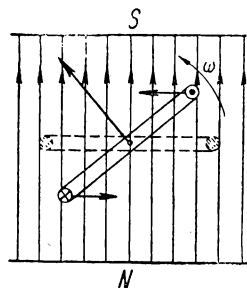


Рис. 46

Рассмотрим схематически процессы в синхронном двигателе, эквивалентные параметры которого весьма своеобразно зависят от тока в обмотке возбуждения. Для уяснения этой зависимости рассмотрим элементарную систему, которая по принципу действия не отличается от применяемых на практике синхронных двигателей. Именно, элементарный синхронный двигатель можно представить в виде витка, расположенного в однородном постоянном магнитном поле. При наличии тока в витке к нему приложены силы, создающие вращающий момент (рис. 46), величина и знак которого зависят от положения витка и направления тока в витке. При неизменном направлении тока в витке момент изменяет свой знак при переходе витка через положение, в котором нормаль к его плоскости направлена вдоль линий постоянного магнитного поля. Если при переходе витка через это нейтральное положение изменить направление тока в нем, то знак момента останется неизменным. Следовательно, посылая в виток переменный ток и доводя угловую скорость витка до величины, равной угловой частоте переменного тока, мы добьемся постоянства знака вращающего момента, если направление тока в витке будет изменяться при переходе последнего через нейтральное положение, и тогда виток будет продолжать вращаться с угловой скоростью, равной угловой частоте переменного тока. Таким образом, рассматриваемое устройство может работать в качестве двигателя. Так как скорость вращения двигателей этого рода прямо пропорциональна частоте питающего их тока, то они носят наименование *синхронных двигателей*.

Рассмотрим работу этого двигателя при постоянстве приложенного напряжения  $U$  и постоянстве потребляемой им мощности  $P$ , причем для простоты активным сопротивлением витка пренебрежем. При таком допущении приложенное к витку напряжение  $U$  уравнивает лишь э. д. с.  $E$ , индуктирующуюся в витке вследствие изменения потока  $\Phi$ , его пронизывающего, и векторы  $\vec{\Phi}$  и  $\vec{U} = -\vec{E}$  ориентированы так, как показано на рис. 47. Из выражения  $P = UI_a$  при  $P = \text{const}$  и  $U = \text{const}$  следует, что, как бы не

изменялся ток  $I$  в витке, его активная составляющая  $I_a$  должна оставаться постоянной и, следовательно, вектор тока  $\vec{I}$  должен скользить своим концом по прямой, перпендикулярной к вектору  $\vec{U}$ . Поток  $\Phi$  сквозь виток складывается из потока самоиндукции  $\Phi_L$ , связанного с током  $I$  в витке, и из потока возбуждения  $\Phi_M$ . Поток возбуждения представляет собою часть магнитного потока, создаваемого электромагнитом, в обмотке которого, называемой *обмоткой возбуждения*, проходит постоянный по величине и направлению ток. Часть  $\Phi_M$  этого потока, пронизывающая виток, вращающийся с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , изменяется по закону синуса с угловой частотой  $\omega$  и поэтому может быть изображена вектором  $\vec{\Phi}_M$ . Поток  $\Phi_L$ , пропорциональный току  $I$ , изобразится вектором  $\vec{\Phi}_L$ , совпадающим по направлению с вектором тока  $\vec{I}$ . Вектор  $\vec{\Phi}_L$  в силу указанной пропорциональности должен скользить своим концом по прямой, параллельной прямой  $I$ . Вектор суммарного потока  $\vec{\Phi}$  при  $\vec{U} = -\vec{E} = \text{const}$  должен оставаться неизменным, а из равенства  $\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_L + \vec{\Phi}_M$  следует, что вектор  $\vec{\Phi}_M$  может быть определен как геометрическая разность векторов  $\vec{\Phi}$  и  $\vec{\Phi}_L$ .

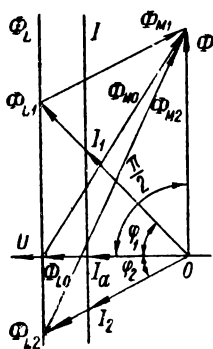


Рис. 47

Пусть ток в витке отстает от напряжения  $U$  и изображается вектором  $\vec{I}_1$ . Тогда поток самоиндукции витка будет  $\vec{\Phi}_{L1}$  и поток возбуждения изобразится вектором  $\vec{\Phi}_{M1}$ . При увеличении тока в обмотке возбуждения вектор  $\vec{\Phi}_M$  будет возрастать, а вектор  $\vec{\Phi}_L$  и, соответственно, вектор  $\vec{I}$  будут убывать, причем угол  $\varphi$  между векторами  $\vec{U}$  и  $\vec{I}$  будет уменьшаться. При некотором значении потока  $\Phi_M$ , соответствующем так называемому нормальному току возбуждения, ток  $I$  совпадает по фазе с напряжением  $U$ , а при дальнейшем увеличении тока возбуждения ток  $I$  будет опережать приложенное напряжение  $U$ .

Таким образом, мы видим, что «недовозбужденный» синхронный двигатель ведет себя, как сопротивление, имеющее индуктивный характер. Особенно интересно отметить, что «перевозбужденный» синхронный двигатель ведет себя, как сопротивление, имеющее емкостный характер, так как ток, потребляемый им, опережает по фазе приложенное напряжение, несмотря на то, что в устройстве, рассмотренном нами, конденсаторы отсутствуют, и на первый взгляд нельзя было предположить, что эквивалентом этого устройства при каких бы то ни было условиях его работы явится емкостное сопротивление. Эта особенность перевозбужденных синхронных двигателей позволяет использовать их вместо конденсаторов для улучшения коэффициента мощности индуктивных цепей.

Конструкция реальных синхронных двигателей подобна конструкции синхронных генераторов, в общих чертах описанных в § 6. Переменный ток в них подводится к обмотке статора, заложенной в пазы стальной части статора. Обмотка возбуждения наложена на роторе.

---

## ГЛАВА ВТОРАЯ

### СИМВОЛИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

#### § 26. Основы символического метода

Применение векторных диаграмм к расчету цепей переменного тока не только позволяет достигнуть наглядности, но и упрощает самый расчет. Однако, как все графические построения, векторные диаграммы не всегда дают достаточную точность и, что еще более существенно, не всегда позволяют получать заключения общего характера. Значительным шагом вперед по сравнению с методом векторных диаграмм является введенный в теорию переменных токов Штейнмецом *символический метод*, основанный на изображении векторов комплексными числами и позволяющий свести геометрические операции над векторами к алгебраическим операциям над комплексными числами. В России символический метод был введен в широкое употребление академиком В. Ф. Миткевичем.

Символический метод объединяет в себе простоту векторных диаграмм с возможностью производить расчеты с любой желаемой степенью точности. Особенно отчетливо преимущества символического метода сказываются при расчете и анализе сложных цепей, не сводящихся к последовательному и параллельному соединениям. Недостатком символического метода по сравнению с методом векторных диаграмм является отсутствие наглядности. Поэтому решение различных вопросов при помощи символического метода иногда целесообразно сопровождать соответствующими графическими построениями. Следует иметь в виду, что символический метод, как и метод векторных диаграмм, непосредственно применим лишь в тех случаях, когда все э. д. с. и токи в цепи являются синусоидальными функциями времени.

Комплексное число  $A$  можно представить в трех формах, а именно:

$$A = a_1 + ja_2 = a(\cos \alpha + j \sin \alpha) = ae^{j\alpha},$$

где  $j = \sqrt{-1}$ , а  $e$  — основание натуральной системы логарифмов. Форму  $a_1 + ja_2$  мы будем называть *алгебраической* формой комплексного числа, форму  $a(\cos \alpha + j \sin \alpha)$  — *тригонометрической*, форму  $ae^{j\alpha}$  — *показательной*.

Для перехода от алгебраической формы комплексного числа к двум другим и обратно имеем следующие очевидные соотношения:

$$a_1 = a \cos \alpha; \quad a_2 = a \sin \alpha;$$

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}; \quad \alpha = \arctg \frac{a_2}{a_1}.$$

Напомним, что  $a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$  называют *модулем* комплексного числа, а  $\alpha = \arctg a_2/a_1$  — его *аргументом*.

Пользуясь формулами перехода, найдем, что, в частности,

$$e^{\pm j\pi/2} = \pm j; \quad e^{\pm j\pi} = -1; \quad e^{\pm j2\pi} = 1.$$

Для геометрического изображения комплексных чисел возьмем прямоугольную систему координат (рис. 48) и условимся откладывать по оси  $ON$  вещественные числа, а по оси  $OM$  — мнимые числа. Назовем ось  $ON$  *осью вещественных*, ось  $OM$  — *осью мнимых*, а плоскость  $NOM$  — *комплексной плоскостью*. В дальнейшем положительные направления оси вещественных и оси мнимых мы будем снабжать, соответственно, пометками «+1» и «+j».

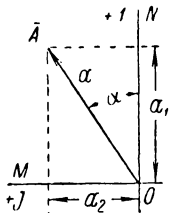


Рис. 48

Имея комплексное число  $a_1 + ja_2$ , отложим по оси вещественных отрезок, равный  $a_1$ , а по оси мнимых — отрезок, равный  $a_2$ , приняв во внимание знаки  $a_1$  и  $a_2$ , и восставим в концах этих отрезков перпендикуляры к осям. Точку  $A$ , в которой пересекаются перпендикуляры, условимся считать геометрическим изображением комплексного числа  $a_1 + ja_2$ . При этом условию каждому комплексному числу соответствует только одна точка комплексной плоскости и, наоборот, каждой точке комплексной плоскости соответствует только одно комплексное число. С другой стороны, каждая точка комплексной плоскости определяет только один вектор, если принять, что конец вектора лежит в этой точке, а начала всех векторов лежат в начале координат. Следовательно, можно *символически* изображать векторы, проведенные из начала координат, комплексными числами, отвечающими их концам, и наоборот. При этом, как видно из рис. 48, модуль комплексного числа дает длину вектора, изображаемого данным числом, а аргумент комплексного числа дает угол, который вектор, изображаемый этим числом, составляет с осью вещественных.

Напомним, что комплексные числа  $a_1 + ja_2 = ae^{j\alpha}$  и  $a_1 - ja_2 = ae^{-j\alpha}$ , имеющие равные модули и равные, но противоположные по знаку аргументы, называют *сопряженными* и заметим, что векторы, изображаемые сопряженными комплексными числами, яв-

ляются зеркальными изображениями друг друга в оси вещественных (рис. 49).

Рассмотрим основные геометрические операции над векторами и соответствующие алгебраические операции над изображающими их комплексными числами. Пусть требуется сложить векторы  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$ , изображаемые комплексными числами:

$$A = a_1 + ja_2 \quad \text{и} \quad B = b_1 + jb_2.$$

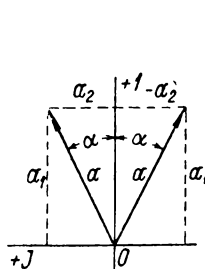


Рис. 49

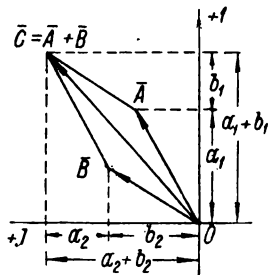


Рис. 50

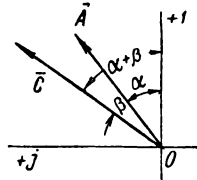


Рис. 51

Как видно из рис. 50, для комплексного числа  $C$ , изображающего геометрическую сумму  $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ , мы имеем:

$$C = (a_1 + b_1) + j(a_2 + b_2) = A + B.$$

Отсюда следует, что для определения комплексного числа, изображающего геометрическую сумму векторов, надлежит сложить комплексные числа, изображающие слагаемые векторы.

Рассмотрим вектор  $\vec{A}$ , изображаемый комплексным числом  $\bar{A} = ae^{j\alpha}$ , и вектор  $\vec{C}$ , имеющей длину в  $b$  раз большую и повернутый относительно вектора  $\vec{A}$  на угол  $\beta$  в положительном направлении (рис. 51). Тогда для комплексного числа  $C$ , изображающего вектор  $\vec{C}$ , очевидно, имеем:

$$C = bae^{j(\alpha+\beta)} = ae^{j\alpha} \cdot be^{j\beta} = A \cdot be^{j\beta}.$$

Следовательно, умножение комплексного числа, изображающего некоторый вектор, на комплексный множитель  $be^{j\beta}$  дает комплексное число, изображающее новый вектор, который в  $b$  раз больше исходного и повернут относительно него на угол  $\beta$  в положительном направлении. Обратно, деление комплексного числа, изображающего некоторый вектор, на комплексное число  $be^{j\beta}$  дает комплексное число, изображающее новый вектор, который в  $b$  раз меньше исходного и повернут относительно него на угол  $\beta$  в отрицательном направлении.

В дальнейшем для краткости мы будем говорить непосредственно об умножении и делении векторов на комплексные числа и будем писать:

$$\bar{C} = \bar{A} \cdot b e^{j\beta} \text{ и } \bar{A} = \bar{C} : b e^{j\beta},$$

желая выразить соответствующие соотношения между длинами и направлениями векторов.

В частном случае, когда некоторый вектор умножается или делится на вещественное число  $b$ , т. е. на комплексное число, аргумент которого равен нулю, в результате получается вектор, имеющий в  $b$  раз большую или, соответственно, меньшую длину и совпадающий по направлению с исходным вектором.

В другом частном случае, когда некоторый вектор умножается или делится на комплексное число  $e^{j\beta}$ , модуль которого равен единице, в результате получается вектор, повернутый относительно исходного на угол  $\beta$  в положительном или, соответственно, в отрицательном направлении и имеющий длину, равную длине исходного вектора. Так как  $e^{\pm j\pi/2} = \pm j$ , то умножение вектора на  $j$  соответствует повороту его на угол  $\pi/2$ , а умножение на  $(-j)$  — повороту его на угол  $(-\pi/2)$ .

## § 27. Символическое изображение синусоидальных функций, их сумм, интегралов и производных

При рассмотрении синусоидальных э. д. с. и токов мы познакомились с изображением их векторами, которые, в свою очередь, как мы установили, можно изображать комплексными числами. Следовательно, синусоидальные функции можно изображать непосредственно соответствующими комплексными числами.

При изображении комплексными числами синусоидальных функций условимся обозначать эти комплексные числа теми же буквами, которыми обозначены соответствующие амплитуды или действующие значения, но с точкой наверху. Так, изображая функцию  $v = V_m \sin(\omega t + \vartheta) = V \sqrt{2} \sin(\omega t + \vartheta)$  комплексным числом, это последнее будем обозначать соответственно  $\dot{V}_m$  или  $\dot{V}$ . При этом  $\dot{V}_m = V_m e^{j\vartheta}$  и  $\dot{V} = V e^{j\vartheta}$ , если условиться векторы  $\bar{V}_m$  и  $\bar{V}$ , изображающие функцию  $v$ , располагать к оси вещественных под углом, равным начальной фазе  $\vartheta$  этой функции. Заметим, что комплексное число  $\dot{V}_m$ , модуль которого равен амплитуде, а аргумент — начальной фазе синусоидальной функции, называют *комплексной амплитудой* этой функции.

В некоторых случаях не ограничиваются рассмотрением амплитуды или действующего значения и начальной фазы функции  $v = V_m \sin(\omega t + \vartheta)$ , а интересуются и ее мгновенными значениями.

Тогда эту функцию изображают не неподвижным вектором, а вектором, вращающимся с неизменной угловой скоростью  $\omega$ , равной угловой частоте функции, и имеющим неизменную длину, равную в соответствующем масштабе ее амплитуде. В соответствии с этим комплексное число, изображающее вращающийся вектор, который, в свою очередь, изображает функцию  $v = V_m \sin(\omega t + \vartheta)$ , имеет постоянный модуль, равный амплитуде  $V_m$  этой функции, и переменный аргумент, равный  $(\omega t + \vartheta)$ , и можно сказать, что комплексное число  $V_m e^{j(\omega t + \vartheta)}$  изображает функцию  $v = V_m \sin(\omega t + \vartheta)$ . Так как  $V_m e^{j(\omega t + \vartheta)} = V_m [\cos(\omega t + \vartheta) + j \sin(\omega t + \vartheta)]$ , то для перехода от комплексного числа к изображаемой им функции следует брать коэффициент при мнимой единице в этом числе.

Заметим, что

$$V_m e^{j(\omega t + \vartheta)} = V_m e^{j\vartheta} \cdot e^{j\omega t} = \dot{V}_m e^{j\omega t},$$

где  $\dot{V}_m = V_m e^{j\vartheta}$  — комплексная амплитуда функции  $v$ .

Так как вектор, изображающий сумму нескольких синусоидальных функций одной и той же частоты, равен геометрической сумме векторов, изображающих суммируемые функции, а комплексное число, изображающее геометрическую сумму векторов, равно алгебраической сумме комплексных чисел, изображающих суммируемые векторы, то можно утверждать, что комплексное число, изображающее сумму нескольких синусоидальных функций одной и той же частоты, равно алгебраической сумме комплексных чисел, изображающих суммируемые функции.

Часто, оперируя с синусоидальными функциями времени, приходится рассматривать интегралы и производные от них, взятые по времени и являющиеся также синусоидальными функциями времени.

Установим связь между комплексным числом, изображающим исходную синусоидальную функцию времени, и комплексными числами, изображающими ее интеграл и производную. Пусть мы имеем  $v = V_m \sin(\omega t + \vartheta)$ . Тогда

$$\int v dt = -\frac{V_m}{\omega} \cos(\omega t + \vartheta) = \frac{V_m}{\omega} \sin\left(\omega t + \vartheta - \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\frac{dv}{dt} = \omega V_m \cos(\omega t + \vartheta) = \omega V_m \sin\left(\omega t + \vartheta + \frac{\pi}{2}\right),$$

откуда следует, что если синусоидальная функция времени изображается комплексным числом

$$V_m e^{j(\omega t + \vartheta)} = \dot{V}_m e^{j\omega t},$$



то  $\int v dt$  и  $\frac{dv}{dt}$  изображаются, соответственно, комплексными числами

$$\frac{V_m}{\omega} e^{j\left(\omega t + \theta - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{V_m}{\omega} e^{j(\omega t + \theta)} e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{V_m}{j\omega} e^{j(\omega t + \theta)} = \frac{\dot{V}_m}{j\omega} e^{j\omega t},$$

$$\omega V_m e^{j\left(\omega t + \theta + \frac{\pi}{2}\right)} = \omega V_m e^{j(\omega t + \theta)} e^{j\frac{\pi}{2}} = j\omega V_m e^{j(\omega t + \theta)} = j\omega \dot{V}_m e^{j\omega t},$$

так как  $e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j = \frac{1}{j}$  и  $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$ .

Таким образом, комплексное число, изображающее интеграл синусоидальной функции, можно получить, разделив на  $j\omega$  комплексное число, изображающее данную функцию, а комплексное число, изображающее производную от синусоидальной функции, можно получить, умножив на  $j\omega$  комплексное число, изображающее данную функцию.

В дальнейшем комплексные числа, изображающие физические величины, мы будем для краткости называть просто комплексами.

## § 28. Применение символического метода к расчету цепей переменного тока

Изображая синусоидальные функции, а также их интегралы и производные комплексными числами, можно весьма просто находить частные решения линейных интегро-дифференциальных уравнений, определяющие установившийся режим работы электрических цепей с постоянными параметрами при синусоидальных внешних э. д. с. Покажем это на примере цепи ( $r, L, C$ ), к зажимам которой приложено напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ , изображаемое комплексом  $\dot{U}_m e^{j\omega t}$ , где  $\dot{U}_m = U_m e^{j\psi_u}$ . Для этой цепи имеем:

$$ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

Так как последний член этого уравнения является синусоидальной функцией, то частное решение его можно получить в виде синусоидальной функции той же частоты, а именно в виде  $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ , причем комплекс, изображающий эту функцию, будет  $\dot{I}_m e^{j\omega t}$ , где  $\dot{I}_m = I_m e^{j\psi_i}$ . Тогда, на основании изложенного в предыдущем параграфе,  $\frac{di}{dt}$  и  $\int i dt$  будут, соответственно, изображаться комплексами  $j\omega \dot{I}_m e^{j\omega t}$  и  $\frac{\dot{I}_m}{j\omega} e^{j\omega t}$ . Поэтому от интегро-дифференциального

уравнения для нашей цепи можно перейти к следующему уравнению:

$$r\dot{i}_m e^{j\omega t} + j\omega L \dot{i}_m e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C} \dot{i}_m e^{j\omega t} = \dot{U}_m e^{j\omega t},$$

сократив которое на  $e^{j\omega t}$  или на  $e^{j\omega t} \sqrt{2}$ , найдем:

$$\dot{i}_m \left( r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) = \dot{U}_m$$

или

$$\dot{i} \left( r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) = \dot{U}.$$

Из последних алгебраических уравнений легко определяются комплексная амплитуда тока  $\dot{i}_m = I_m e^{j\psi_i}$  или соответственно комплексное действующее значение тока  $\dot{I} = I e^{j\psi_i}$ , найдя которые, сразу можно написать разыскиваемое частное решение, т. е. выражение для мгновенного значения тока установившегося режима, а именно:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Из рассмотренного примера следует, что, изображая синусоидальные функции комплексными числами, можно от линейных интегро-дифференциальных уравнений перейти к *линейным алгебраическим уравнениям*, дающим связь между комплексными амплитудами или комплексными действующими значениями токов и напряжений или э. д. с.

Нас сейчас интересует расчет установившихся режимов в цепях с постоянными параметрами, когда все э. д. с., действующие в цепи синусоидальны и имеют одну и ту же частоту  $\omega$  и когда все токи будут также синусоидальными функциями времени той же частоты. Так как законы Кирхгофа в применении к цепям с постоянными параметрами всегда приводят нас к линейным уравнениям относительно э. д. с., напряжений и токов и их производных и интегралов, то, изображая синусоидальные э. д. с., напряжения и токи комплексными и вводя эти изображения в линейные интегро-дифференциальные уравнения, мы перейдем к уравнениям, каждый член которых является комплексным числом с постоянной комплексной амплитудой и комплексным множителем  $e^{j\omega t}$ , одинаковым для всех членов. Сокращая на этот множитель, мы получим в общем случае систему линейных алгебраических уравнений, связывающих комплексные амплитуды соответствующих э. д. с., напряжений и токов или комплексные действующие их значения. Это значительно облегчает расчет цепей переменного тока с постоянными параметрами при установившемся режиме. Особенно ярко преимущества изображения синусоидальных функций времени комплексными числами сказываются в тех случаях, когда амплитуды или действующие значения этих

функций сами являются функциями расстояния от некоторой точки, с чем нам, в частности, придется встретиться при изучении длинных линий. В этих случаях изображение синусоидальных функций времени комплексными числами дает возможность перейти от уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям, решение которых значительно проще.

В дальнейшем комплексные действующие значения тока, напряжения или э. д. с. будем для краткости именовать *комплексными током, напряжением или э. д. с.*

## § 29. Комплексное сопротивление и комплексная проводимость

Найдем отношение комплексного напряжения  $\dot{U}$  к комплексному току  $\dot{I}$ . Пусть (рис. 52)

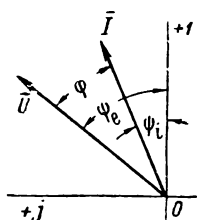


Рис. 52

Тогда  $\dot{U} = Ue^{j\psi_u}$ ;  $\dot{I} = Ie^{j\psi_i}$ ;  $\psi_u - \psi_i = \varphi$ .

$$\begin{aligned} \frac{\dot{U}}{\dot{I}} &= \frac{Ue^{j\psi_u}}{Ie^{j\psi_i}} = \frac{U}{I} e^{j\varphi} = ze^{j\varphi} = \\ &= z \cos \varphi + jz \sin \varphi = r + jx, \end{aligned}$$

где  $r$ ,  $x$  и  $z$  — соответственно активное, реактивное и полное сопротивления рассматриваемой цепи.

Комплексное число, дающее отношение комплексных напряжения и тока, будем обозначать  $Z$  и называть *комплексным сопротивлением цепи*. Имеем:

$$Z = r + jx = ze^{j\varphi}.$$

Рассматривая обратное отношение комплексного тока к комплексному напряжению, найдем:

$$\frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{Ie^{j\psi_i}}{Ue^{j\psi_u}} = \frac{I}{U} e^{-j\varphi} = ye^{-j\varphi} = y \cos \varphi - jy \sin \varphi = g - jb,$$

где  $g$ ,  $b$  и  $y$  — соответственно активная, реактивная и полная проводимости рассматриваемой цепи.

Комплексное число, дающее отношение комплексных тока и напряжения, будем обозначать  $Y$  и назовем его *комплексной проводимостью цепи*. Имеем:

$$Y = g - jb = ye^{-j\varphi}.$$

Во избежание недоразумений следует иметь в виду, что для емкостной цепи, т. е. при  $x < 0$  и  $b < 0$ , в числовом выражении комплексного сопротивления мы будем иметь перед мнимой частью знак

«минус», а в числовом выражении комплексной проводимости перед мнимой частью должен стоять знак «плюс».

Произведение комплексных сопротивления и проводимости, как вытекает из их определения, равняется единице, т. е.

$$ZY=1 \quad \text{или} \quad (r+jx)(g-jb)=1,$$

и, следовательно, комплексное сопротивление и комплексная проводимости суть величины взаимно обратные.

Так как каждому комплексному числу отвечает определенный вектор, то комплексным сопротивлению и проводимости также отвечают вполне определенные векторы. Из того что проекции этих векторов на ось вещественных равны, соответственно, активному сопротивлению и активной проводимости, а проекции на ось мнимых — реактивному сопротивлению и взятой с обратным знаком реактивной проводимости, нетрудно заключить, что этими векторами являются уже известные нам вектор полного сопротивления  $\bar{Z}$  и вектор полной проводимости  $\bar{Y}$ . Из выражений

$$Z=ze^{j\varphi} \quad \text{и} \quad Y=ye^{-j\varphi}$$

следует, что направление вектора  $\bar{Z}$  есть зеркальное изображение направления вектора  $\bar{Y}$  в оси вещественных, и обратно.

Опирируя с комплексными напряжением и током, следует помнить, что аргументы их  $\psi_u$  и  $\psi_i$  не дают угла сдвига в цепи, а дают лишь угол, составляемый вектором напряжения или тока с осью вещественных. Угол сдвига  $\varphi$  в цепи определяется или как разность аргументов комплексных напряжения и тока, или как аргумент комплексного сопротивления, или как взятый с обратным знаком аргумент комплексной проводимости.

### § 30. Законы Ома и Кирхгофа в символической форме

Соотношения

$$i = \frac{\dot{U}}{Z}; \quad \dot{U} = iZ; \quad i = \dot{U}Y, \quad \dot{U} = \frac{i}{Y}$$

выражают в символической форме закон Ома для цепи переменного тока и дают в одной формуле связь между действующими значениями синусоидальных напряжения и тока с учетом разности их фаз.

Переходя к рассмотрению законов Кирхгофа в символической форме, заметим, что при применении этих законов к той или иной электрической цепи необходимо всем э. д. с. и токам в этой цепи приписать условные положительные направления. При этом, приписывая синусоидальным э. д. с. и токам некоторое условное положительное направление, следует иметь в виду, что их действительное направление изменяется два раза в течение периода, и если,

рассматривая мгновенные значения этих э. д. с. и токов, мы найдем, что для некоторого момента времени те или иные из них имеют отрицательные значения, то в этот момент времени их действительное направление противоположно условно принятому нами за положительное.

По первому закону Кирхгофа для мгновенных значений токов, сходящихся в узле электрической цепи, имеем:

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0,$$

откуда при синусоидальных токах одной и той же частоты, изображая эти токи комплексами, непосредственно получим:

$$\sum_{k=1}^n \dot{i}_k = 0,$$

если условиться перед комплексными токами, условное положительное направление которых принято к рассматриваемому узлу, ставить знак «плюс», а перед комплексными токами, условное положительное направление которых принято от этого узла, ставить знак «минус».

Рассматривая замкнутый контур, мы можем по второму закону Кирхгофа написать, что сумма мгновенных значений э. д. с.  $e_k$  источников энергии, действующих в этом контуре, равна сумме падений напряжения  $u_k$  во всех ветвях, образующих контур:

$$\sum_{k=1}^n e_k = \sum_{k=1}^n u_k.$$

При постоянном токе, согласно закону Ома,  $u_k = r_k i_k$ , где  $i_k$  — ток в  $k$ -той ветви и  $r_k$  — сопротивление этой ветви.

При синусоидальном токе, согласно выражению закона Ома в символической форме, имеем:

$$\dot{U}_k = Z_k \dot{i}_k,$$

где  $\dot{i}_k$  — комплексный ток в  $k$ -той ветви, и  $Z_k$  — комплексное сопротивление этой ветви. Таким образом, второй закон Кирхгофа в символической форме получает вид:

$$\sum_{k=1}^n \dot{E}_k = \sum_{k=1}^n Z_k \dot{i}_k,$$

где  $\sum_{k=1}^n \dot{E}_k$  есть сумма комплексных э. д. с. всех источников энергии, действующих в рассматриваемом контуре цепи.

При этом перед  $\dot{E}_k$  и, соответственно, перед  $Z_k \dot{I}_k$  мы должны поставить знак «плюс», если условное положительное направление э. д. с.  $e_k$  или, соответственно, тока  $i_k$  совпадает с выбранным направлением обхода контура, и поставить знак «минус», если условное положительное направление  $e_k$  или  $i_k$  противоположно выбранному направлению обхода контура.

Например, если в ветвях, образующих рассматриваемый контур, содержатся источники энергии с э. д. с.  $e_k$ , реостаты с сопротивлениями  $r_k$ , катушки с индуктивностями  $L_k$  и конденсаторы с емкостями  $C_k$ , причем в каждой ветви все эти элементы соединены последовательно, то уравнение, согласно второму закону Кирхгофа, для мгновенных значений э. д. с., напряжений и токов имеет вид:

$$\sum_{k=1}^n e_k = \sum_{k=1}^n \left( r_k i_k + L_k \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{C_k} \int i_k dt \right).$$

Это же уравнение в символической форме при синусоидальных э. д. с., напряжениях и токах напишется в виде:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \dot{E}_k &= \sum_{k=1}^n \left( r_k \dot{I}_k + j\omega L_k \dot{I}_k + \frac{1}{j\omega C_k} \dot{I}_k \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left[ r_k + j \left( \omega L_k - \frac{1}{\omega C_k} \right) \right] \dot{I}_k = \sum_{k=1}^n (r_k + jx_k) \dot{I}_k = \sum_{k=1}^n Z_k \dot{I}_k. \end{aligned}$$

При наличии взаимной индукции между ветвями различных контуров или одного и того же контура необходимо учитывать э. д. с. взаимной индукции или соответствующие падения напряжения, что будет рассмотрено в § 38.

### § 31. Определение мощности по комплексным напряжению и току

Пусть даны комплексное напряжение  $\dot{U} = Ue^{j\psi_u}$  и комплексный ток  $\dot{I} = Ie^{j\psi_i}$ . Умножим комплексную величину  $\dot{U} = Ue^{-j\psi_u}$ , сопряженную с комплексным напряжением  $\dot{U}$ , на комплексный ток  $\dot{I}$ . В результате получим новую комплексную величину  $\dot{P}$ , которую назовем *комплексной мощностью*, причем

$$\dot{P} = \dot{U}^* \dot{I} = Ue^{-j\psi_u} Ie^{j\psi_i} = UIe^{-j\varphi} = UI \cos \varphi - jUI \sin \varphi = P - jQ.$$

Отсюда мы видим, что вещественная часть комплексной мощности, полученной путем умножения комплексной величины, сопряжен-

ной с комплексным напряжением, на комплексный ток, дает нам активную мощность  $P$  цепи, а коэффициент при  $(-j)$  в выражении комплексной мощности дает реактивную мощность  $Q$  цепи. Модуль комплексной мощности равен  $UI$ , т. е. равен полной мощности  $S$  цепи.

Из соотношения

$$\dot{P} = P - jQ = U^2 g - jU^2 b = U^2 Y$$

следует, что в выражении комплексной мощности, как и в выражении комплексной проводимости, коэффициент при  $(-j)$  будет положителен в случае  $\varphi > 0$ , т. е. в случае, когда цепь имеет индуктивный характер, т. е. ток отстает по фазе от напряжения.

---

# ГЛАВА ТРЕТЬЯ

## РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПРИ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ПРОЦЕССАХ

### § 32. Расчет цепи при последовательном соединении приемников

Рассмотрим цепь, состоящую из ряда последовательно соединенных приемников (рис. 53). Пусть к ней приложено напряжение  $u = U\sqrt{2}\sin\omega t$ . Обозначим активные и реактивные сопротивления отдельных приемников соответственно через  $r_1, r_2, \dots, r_n$  и  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , а напряжения на зажимах этих приемников через  $u_1, u_2, \dots, u_n$ . Наша задача состоит в определении тока

$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t - \varphi)$ , протекающего в рассматриваемой цепи.

Для мгновенных значений напряжений имеем:

$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

Изображая напряжения комплексными числами, будем иметь:

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dots + \dot{U}_n,$$

т. е. комплексное напряжение на зажимах цепи равно алгебраической сумме комплексных напряжений на отдельных приемниках.

Применяя закон Ома в символической форме для каждого приемника и учитывая, что при последовательном соединении через все приемники проходит один и тот же ток  $I$ , получим:

$$\dot{U} = Z_1 \dot{I} + Z_2 \dot{I} + \dots + Z_n \dot{I} = Z \dot{I},$$

где

$$Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

есть комплексное сопротивление всей цепи. Таким образом, при последовательном соединении приемников комплексное сопротивление всей цепи равно алгебраической сумме комплексных сопротивлений отдельных приемников.

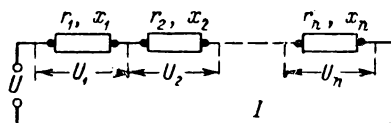


Рис. 53



Так как  $Z_k = r_k + jx_k$ , то

$$Z = \sum_{k=1}^n r_k + j \sum_{k=1}^n x_k = r + jx.$$

Следовательно:

$$r = \sum_{k=1}^n r_k \quad \text{и} \quad x = \sum_{k=1}^n x_k.$$

Таким образом, при последовательном соединении эквивалентное активное сопротивление всей цепи равно алгебраической сумме

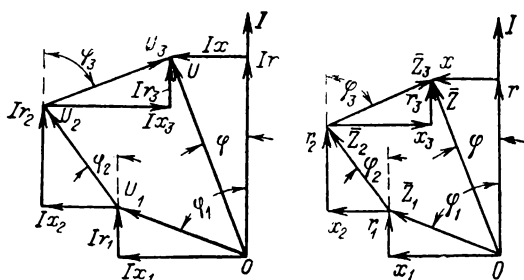


Рис. 54

активных сопротивлений всех отдельных приемников, а эквивалентное реактивное сопротивление всей цепи равно алгебраической сумме реактивных сопротивлений всех отдельных приемников.

Из выражений для эквивалентного активного и эквивалентного реактивного сопротивлений непосредственно следует:

$$I^2 r = I^2 r_1 + I^2 r_2 + \dots + I^2 r_n; \quad I^2 x^2 = I^2 x_1 + I^2 x_2 + \dots + I^2 x_n$$

или

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_n; \quad Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n,$$

т. е. активная мощность  $P$  всей цепи равна алгебраической сумме активных мощностей всех приемников, а реактивная мощность  $Q$  всей цепи равна алгебраической сумме их реактивных мощностей. Изображая действующие значения напряжений векторами, найдем:

$$\bar{U} = \bar{U}_1 + \bar{U}_2 + \dots + \bar{U}_n,$$

т. е. вектор  $\bar{U}$  равен геометрической сумме векторов  $\bar{U}_1$ ,  $\bar{U}_2$ , ...,  $\bar{U}_n$ , при этом вектор напряжения на каждом из приемников может быть разложен на активную (в направлении вектора тока) и реактивную (в направлении, перпендикулярном вектору тока) составляющие.

На рис. 54 дана векторная диаграмма напряжений для последовательного соединения трех приемников, причем первые два прием-

ника индуктивные, а третий — емкостный, а также векторная диаграмма сопротивлений, полученная из предыдущей путем деления всех отрезков на величину тока  $I$  в цепи.

Из диаграммы сопротивлений видно, что в общем случае для полных сопротивлений, т. е. для модулей комплексных сопротивлений имеем:

$$z \leq z_1 + z_2 + \dots + z_n.$$

Обратим внимание на то, что в общем случае разложение напряжений на активные и реактивные составляющие не совпадают с разложением их комплексных выражений на вещественные и мнимые составляющие. Такое совпадение имеет место только если вектор тока направлен по оси вещественных количеств.

### § 33. Расчет цепи при параллельном соединении приемников

Рассмотрим цепь, состоящую из ряда параллельно соединенных приемников, к зажимам которой приложено напряжение  $u = U\sqrt{2} \sin \omega t$  (рис. 55). Обозначим активные и реактивные проводимости отдельных приемников через  $g_1, g_2, \dots, g_n$  и  $b_1, b_2, \dots, b_n$ , а токи, протекающие в этих приемниках, через  $i_1, i_2, \dots, i_n$ .

Определим ток  $i = I\sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi)$  в неразветвленной цепи. По первому закону Кирхгофа для тока  $i$  имеем:

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_n.$$

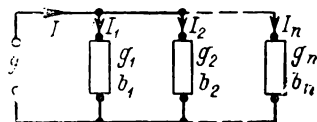


Рис. 55

Пользуясь для решения этой задачи символическим методом, напишем:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dots + \dot{I}_n,$$

т. е. комплексный ток в неразветвленной части цепи равен алгебраической сумме комплексных токов в отдельных ветвях.

Применяя закон Ома в символической форме для каждой ветви и учитывая, что при параллельном соединении все приемники находятся под одним и тем же напряжением  $U$ , получим:

$$\dot{I} = Y_1 \dot{U} + Y_2 \dot{U} + \dots + Y_n \dot{U} = Y \dot{U},$$

где

$$Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

есть комплексная проводимость всей цепи. Таким образом, при параллельном соединении приемников комплексная проводимость всей цепи равна алгебраической сумме комплексных проводимостей отдельных приемников.

Так как  $Y_k = g_k - jb_k$ , то

$$Y = \sum_{k=1}^n g_k - j \sum_{k=1}^n b_k = g - jb.$$

Следовательно:

$$g = \sum_{k=1}^n g_k \quad \text{и} \quad b = \sum_{k=1}^n b_k.$$

Таким образом, при параллельном соединении эквивалентная активная проводимость всей цепи равна алгебраической сумме ак-

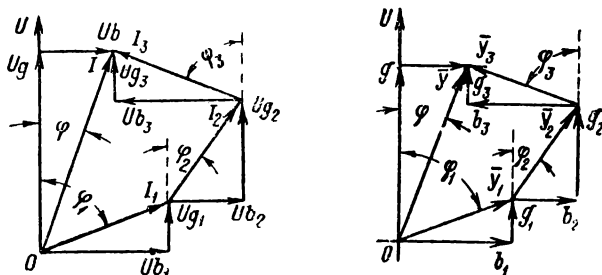


Рис. 56

тивных проводимостей всех отдельных приемников, а эквивалентная реактивная проводимость всей цепи равна алгебраической сумме реактивных проводимостей всех отдельных приемников.

Из выражений для эквивалентной активной и эквивалентной реактивной проводимостей непосредственно следует:

$$U^2 g = U^2 g_1 + U^2 g_2 + \dots + U^2 g_n; \quad U^2 b = U^2 b_1 + U^2 b_2 + \dots + U^2 b_n$$

или

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_n; \quad Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n,$$

т. е. активная мощность  $P$  всей цепи равна алгебраической сумме активных мощностей всех приемников, а реактивная мощность  $Q$  всей цепи равна алгебраической сумме их реактивных мощностей.

Изображая действующие значения токов векторами, найдем:

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \dots + \bar{I}_n,$$

т. е. вектор  $\bar{I}$  равен геометрической сумме векторов  $\bar{I}_1, \bar{I}_2, \dots, \bar{I}_n$ . При этом вектор тока в каждом приемнике может быть разложен на активную (в направлении вектора напряжения) и реактивную (в направлении, перпендикулярном вектору напряжения) составляющие.

На рис. 56 дана векторная диаграмма токов для случая параллельного соединения трех приемников, причем первые два приемника индуктивные, а третий — емкостный, а также векторная диаграмма проводимостей, полученная из предыдущей делением всех отрезков на величину приложенного к цепи напряжения  $U$ .

Из диаграммы проводимостей видно, что в общем случае для полных проводимостей, т. е. для модулей комплексных проводимостей, имеем:

$$y \leq y_1 + y_2 + \dots + y_n.$$

Обратим внимание на то, что в общем случае разложение токов на активные и реактивные составляющие не совпадает с разложением их комплексных выражений на вещественные и мнимые составляющие. Такое совпадение имеет место только, если вектор напряжения направлен по оси вещественных количеств.

#### § 34. Расчет цепей при смешанном соединении приемников

Только что изложенные методы расчета цепей при последовательном и параллельном соединениях можно непосредственно применить при смешанном соединении, представляющем собою сочетание последовательного и параллельного соединений. Покажем это на примере цепи, схема которой дана на рис. 57.

Пусть даны активные и реактивные сопротивления всех приемников и напряжение  $U$ , приложенное к зажимам цепи. Воспользуемся для расчета символическим методом.

Второй и третий приемники соединены параллельно, и, следовательно, необходимо сложить их комплексные проводимости  $Y_2$  и  $Y_3$  для получения комплексной проводимости  $Y_{23}$  обоих параллельно соединенных приемников. Имеем:

$$Y_{23} = Y_2 + Y_3 = (g_2 + g_3) - j(b_2 + b_3).$$

Здесь

$$Y_2 = \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{r_2 + jx_2}; \quad Y_3 = \frac{1}{Z_3} = \frac{1}{r_3 + jx_3}.$$

Чтобы избавиться от мнимости в знаменателе, необходимо умножить числитель и знаменатель на сопряженный знаменателю комплекс. Например:

$$Y_2 = \frac{r_2 - jx_2}{(r_2 + jx_2)(r_2 - jx_2)} = \frac{r_2}{r_2^2 + x_2^2} - j \frac{x_2}{r_2^2 + x_2^2} = g_2 - jb_2.$$

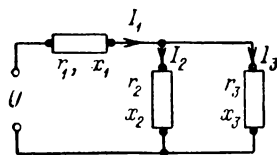


Рис. 57

Интересно здесь отметить, что, пользуясь символическим методом, мы автоматически получаем соотношения между эквивалентными проводимостями  $g$  и  $b$  и сопротивлениями  $r$  и  $x$  цепи или ее участка, выведенные в § 15.

Первый приемник соединен последовательно с взятыми вместе вторым и третьим приемниками. Следовательно, комплексное сопротивление  $Z$  всей цепи равно:

$$Z = Z_1 + Z_{23},$$

где

$$Z_1 = r_1 + jx_1; \quad Z_{23} = \frac{1}{Y_{23}} = \frac{1}{g_{23} - jb_{23}} = \frac{g_{23}}{g_{23}^2 + b_{23}^2} + j \frac{b_{23}}{g_{23}^2 + b_{23}^2}.$$

Комплексный ток в неразветвленной части цепи:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z},$$

причем  $\dot{U}$  можно принять вещественным, т. е. положить  $\dot{U} = U$ . Это значит, что вектор приложенного напряжения  $\bar{U}$  мы направляем по оси вещественных. Комплексное напряжение на втором и третьем приемниках находим из равенства:

$$\dot{U}_{23} = \dot{U} - \dot{I}_1 Z_1,$$

после чего легко определяются комплексные токи в этих приемниках:

$$\dot{I}_2 = \dot{U}_{23} Y_2; \quad \dot{I}_3 = \dot{U}_{23} Y_3.$$

Имея комплексное сопротивление  $Z = r + jx$  всей цепи, определяем угол сдвига  $\varphi$  между напряжением  $U$  и током  $I_1$  из соотношения:

$$\varphi = \arctg \frac{x}{r}.$$

Пользуясь выражениями для активной и реактивной мощностей при последовательном и при параллельном соединениях, нетрудно усмотреть, что и в случае смешанного соединения активная мощность всей цепи равна сумме активных мощностей, расходуемых в отдельных ее участках, а реактивная мощность всей цепи равна алгебраической сумме соответствующих реактивных мощностей.

### § 35. Передача энергии по индуктивной линии

При рассмотрении передачи энергии от генератора к приемнику линию, соединяющую их, можно для расчетов заменить реактивной катушкой, если длина линии мала, и поэтому емкость между проводами линии весьма незначительна. Внутреннее сопротивление генератора можно в случае надобности учесть соответствующим увели-

чением активного и реактивного сопротивлений этой катушки. Тогда рассмотрение вопроса о передаче энергии сведется к анализу работы цепи (рис. 58), состоящей из последовательно соединенных реактивной катушки с сопротивлениями  $r_1$  и  $x_1 = \omega L_1$ , изображающей линию передачи, и приемника, сопротивления которого мы обозначим через  $r_2$  и  $x_2$ . Эта цепь настолько проста, что она здесь рассматривается не для иллюстрации методов расчета, а ввиду практической важности этого случая и с целью рассмотреть некоторые существенно важные вопросы, которые нас обычно при этом интересуют. Поэтому мы не будем здесь применять символический метод, а построим векторную диаграмму, дающую наглядное представление об имеющихся в этой цепи соотношениях.

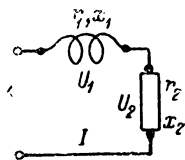


Рис. 58

Первый вопрос, возникающий при анализе работы этой цепи, сводится к выяснению соотношения между напряжением  $U_0$  на за-

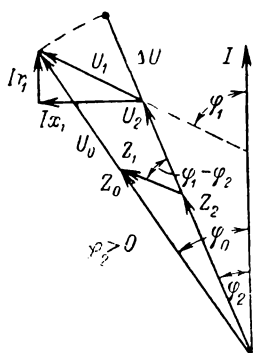


Рис. 59

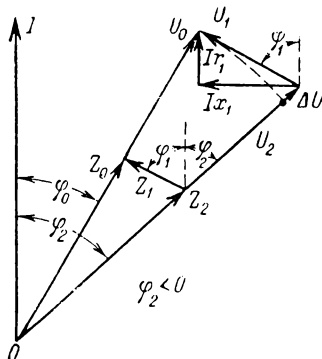


Рис. 60

жимах генератора и напряжением  $U_2$  на зажимах приемника. Векторная диаграмма напряжений для рассматриваемой цепи при  $\varphi_2 > 0$  дана на рис. 59.

Геометрическую разность напряжений  $\bar{U}_1 = \bar{U}_0 - \bar{U}_2$  принято называть *падением напряжения* в линии, а алгебраическую разность их  $\Delta U = U_0 - U_2$  — *потерей напряжения* в линии. Так как величина геометрической разности векторов больше алгебраической разности их длин, то падение напряжения больше потери напряжения, и только при  $\varphi_2 = \varphi_1$  они равны друг другу, потому что в этом случае векторы  $\bar{U}_0$ ,  $\bar{U}_1$  и  $\bar{U}_2$  совпадают по направлению. Потеря напряжения определяется из векторной диаграммы как алгебраическая разность длин векторов  $\bar{U}_0$  и  $\bar{U}_2$ . При емкостной нагрузке  $U_2$  может превзойти  $U_0$ , как это видно из рис. 60. В этом случае потеря напряжения  $\Delta U$  будет иметь отрицательное значение.

Потеря напряжения  $\Delta U$  нас интересует потому, что приемники рассчитываются на определенное действующее значение напряжения  $U_2$  на их зажимах, и весьма важно, насколько  $U_2$  меньше действующего значения напряжения  $U_0$  на зажимах генератора. В качестве примера можно указать, что в распределительных городских сетях низкого напряжения допускается потеря напряжения 3—4 % от напряжения на приемниках.

Вторым вопросом, представляющим интерес, является вопрос об условиях, при которых в случае  $U_0 = \text{const}$  мощность  $P_2$ , передаваемая приемнику, получает наибольшее значение. Для  $P_2$  имеем:

$$P_2 = I^2 r_2 = U_0^2 \frac{r_2}{z_0^2} = U_0^2 \frac{r_2}{(r_1 + r_2)^2 + (x_1 + x_2)^2},$$

где  $z_0$  — эквивалентное полное сопротивление всей цепи.

Из выражения для  $P_2$  видно, что при постоянстве сопротивлений  $r_1$ ,  $x_1$  и  $r_2$  мощность достигает своего максимума при  $x_1 + x_2 = 0$ , т. е. при осуществлении в цепи *резонанса*. При этом выражение для мощности  $P_2$  упрощается, а именно:

$$P_2 = U_0^2 \frac{r_2}{(r_1 + r_2)^2}.$$

Из этого выражения видно, что абсолютный максимум  $P_2$  при заданных  $U_0$  и  $r_1$  и переменном  $r_2$  имеет место при условии  $r_2 = r_1$ . При этом:

$$P_{2\text{ макс}} = \frac{U_0^2}{4r_1} \quad \text{и} \quad \eta = \frac{P_2}{P_0} \cdot 100 = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \cdot 100 = 50\%,$$

где  $\eta$  — коэффициент полезного действия рассматриваемого устройства. Так как выполнение условий, необходимых для достижения максимума  $P_2$ , сопряжено с низким значением коэффициента полезного действия, то на практике эти условия в линиях передачи не выполняются. Передаваемая мощность, на которую рассчитывается линия, обычно значительно меньше  $P_{2\text{ макс}}$ .

Однако режим максимальной передаваемой мощности представляет интерес в маломощных передаточных устройствах, применяемых в электроизмерительной технике, в радиотехнике и в электроавтоматике, в тех случаях, когда вопрос о коэффициенте полезного действия имеет значительно меньшее значение, чем вопрос о получении наибольшей возможной мощности.

### § 36. О расчете сложных цепей переменного тока

При применении символического метода соотношения, выражающие законы Ома и Кирхгофа, имеют совершенно такой же вид, как и соотношения, выражающие эти законы для цепей постоянного тока. Поэтому все выражения, получаемые при расчете цепей пере-

менного тока символическим методом, отличаются от соответствующих выражений, получаемых при расчете аналогичных цепей постоянного тока, только тем, что в них вместо э. д. с., напряжений и токов входят комплексы, изображающие соответствующие синусоидальные э. д. с., напряжения и токи, а вместо сопротивлений и проводимостей — комплексные сопротивления и проводимости.

Из сказанного вытекает, что, пользуясь символическим методом, можно применять для расчета цепей переменного тока все методы, установленные для расчета цепей постоянного тока, причем принципиальные выводы, к которым мы пришли по отношению к цепям постоянного тока, справедливы и по отношению к цепям переменного тока. Так, при расчете цепей переменного тока можно пользоваться методом контурных токов, методом узловых напряжений, принципом наложения, принципом взаимности, теоремой об эквивалентном генераторе, заменой источников э. д. с. источниками тока. При этом необходимо иметь в виду, что полная аналогия между расчетом цепей постоянного и переменного тока существует лишь при отсутствии явления взаимной индукции и что при наличии взаимной индукции расчет цепи переменного тока может в некоторых случаях существенно осложниться.

Для пояснения применения общих методов к расчету цепей переменного тока остановимся вкратце на методе контурных токов. Приступая к составлению уравнений по этому методу для цепи переменного тока, состоящей из  $n$  независимых контуров, зададим произвольно положительные направления контурных токов во всех контурах и условимся направления обхода контуров выбирать совпадающими с направлением контурных токов. Сумму комплексных э. д. с. всех источников э. д. с., входящих в контур  $k$ , обозначим  $\dot{E}_{kk}$ . При составлении этой суммы комплексные э. д. с. следует брать со знаком «плюс», если условное положительное направление э. д. с. совпадает с направлением обхода контура, и брать со знаком «минус» в противоположном случае. Сумму всех комплексных сопротивлений, входящих в контур  $k$ , условимся обозначать  $Z_{kk}$  и называть собственным комплексным сопротивлением контура, а сумму всех комплексных сопротивлений в общей ветви контуров  $k$  и  $m$  будем обозначать  $Z_{km}$  или  $Z_{mk}$  и называть взаимным комплексным сопротивлением контуров  $k$  и  $m$ . При этом для соблюдения единообразия в написании уравнений будем полагать:

$$Z_{km} = r_{km} + jx_{km},$$

если условные положительные напряжения токов в общей ветви контуров  $k$  и  $m$  совпадают, и

$$Z_{km} = -r_{km} - jx_{km},$$

если они противоположны. В этих выражениях  $r_{km}$  и  $x_{km}$  — алгебраические суммы активных и реактивных сопротивлений в общей ветви.



Если контуры  $k$  и  $m$  связаны не только электрически, но и индуктивно, то необходимо учесть явление взаимной индукции. Рассмотрение этого вопроса будет произведено в § 38. Заметим, что всегда  $Z_{km} = Z_{mk}$ .

При принятых обозначениях и условиях, пользуясь методом контурных токов, мы получим по второму закону Кирхгофа  $n$  линейных уравнений, из которых приведем только одно уравнение для  $k$ -того контура, а именно:

$$Z_{k1}\dot{I}_1 + Z_{k2}\dot{I}_2 + Z_{k3}\dot{I}_3 + \dots + Z_{kk}\dot{I}_k + \dots + Z_{kn}\dot{I}_n = \dot{E}_{kk}.$$

Из вида этого уравнения нетрудно заключить, что системы уравнений, получаемых по методу контурных токов для цепи постоянного

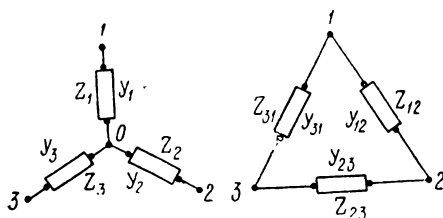


Рис. 61

тока и для соответствующей цепи переменного тока, совершенно аналогичны друг другу даже при наличии в цепи переменного тока явления взаимной индукции.

Расчет цепи переменного тока так же, как и расчет цепи постоянного тока, иногда удается значительно упростить, применив преобразование сое-

динения трехлучевой звездой в соединение треугольником или обратно. Ввиду особой важности этого преобразования, весьма часто применяемого при расчете трехфазных цепей, приводим формулы для перехода от соединения трехлучевой звездой к соединению треугольником, и обратно (рис. 61):

$$Y_{12} = \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3}; \quad Y_{23} = \frac{Y_2 Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3}; \quad Y_{31} = \frac{Y_3 Y_1}{Y_1 + Y_2 + Y_3}.$$

$$Z_1 = \frac{Z_{12} Z_{31}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}; \quad Z_2 = \frac{Z_{23} Z_{12}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}; \quad Z_3 = \frac{Z_{31} Z_{23}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}.$$

Необходимо, однако, иметь в виду, что эти зависимости справедливы лишь при отсутствии взаимной индукции между лучами звезды или соответственно между сторонами треугольника.

### § 37. Теорема Ланжевена

Теорема Ланжевена решает вопрос о равенстве суммы реактивных мощностей всех источников энергии, имеющих в сколь угодно сложной электрической цепи, сумме реактивных мощностей приемников в этой цепи, а попутно и вопрос о равенстве соответствующих активных мощностей, которое, вообще говоря, вытекает непосредственно из закона сохранения энергии.

Для любой цепи, имеющей  $q$  узлов, можно на основании первого закона Кирхгофа составить систему из  $(q - 1)$  независимых уравнений вида  $\dot{I}_{k1} + \dot{I}_{k2} + \dots + \dot{I}_{k,q-1} + \dot{I}_{k0} = 0$ , аналогичную системе уравнений, которая была составлена при рассмотрении метода узловых напряжений для расчета цепей постоянного тока. Здесь  $\dot{I}_{k1}$ ,  $\dot{I}_{k2}$  и т. д. — комплексные выражения токов, направленных от  $k$ -того узла к 1-му, 2-му и т. д. узлам. Очевидно, в этих уравнениях отсутствуют члены с одинаковыми индексами. Напомним, что в этом методе опорный узел отмечается индексом 0, и узловые напряжения являются напряжениями между каждым из прочих  $(q - 1)$  узлов и опорным. Умножая каждое из приведенных выше уравнений на комплекс, сопряженный с соответствующим комплексным узловым напряжением, и суммируя все эти произведения, получим:

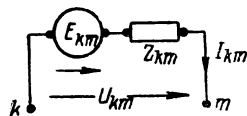


Рис. 62

$$\dot{U}_{10}(\dot{I}_{12} + \dot{I}_{13} + \dots + \dot{I}_{10}) + \dot{U}_{20}(\dot{I}_{21} + \dot{I}_{23} + \dots + \dot{I}_{20}) + \dots + \dot{U}_{q-1,0}(\dot{I}_{q-1,1} + \dot{I}_{q-1,2} + \dots + \dot{I}_{q-1,0}) = 0,$$

откуда, приняв во внимание, что  $\dot{I}_{mk} = -\dot{I}_{km}$  и  $\dot{U}_{k0} - \dot{U}_{m0} = \dot{U}_{km}$ , найдем:

$$\dot{U}_{12}\dot{I}_{12} + \dot{U}_{13}\dot{I}_{13} + \dots + \dot{U}_{q-1,0}\dot{I}_{q-1,0} = 0.$$

Рассматривая напряжение  $\dot{U}_{km}$  между узлами  $k$  и  $m$ , мы имеем:  $\dot{U}_{km} = \dot{I}_{km}Z_{km} - \dot{E}_{km}$  (рис. 62) и, следовательно;

$$\dot{U}_{km} = \dot{U}'_{km} - \dot{E}_{km},$$

где  $\dot{U}'_{km}$  — комплекс, сопряженный с комплексным падением напряжения  $\dot{U}_{km} = \dot{I}_{km}Z_{km}$  в ветви  $km$ . Подставляя в последнее уравнение вместо  $\dot{U}_{12}$ ,  $\dot{U}_{13}$ , ...,  $\dot{U}_{q-1,0}$  разности вида  $\dot{E}_{km} - \dot{U}'_{km}$ , получим:

$$\dot{E}_{12}\dot{I}_{12} + \dot{E}_{13}\dot{I}_{13} + \dots + \dot{E}_{q-1,0}\dot{I}_{q-1,0} = \dot{U}'_{12}\dot{I}_{12} + \dot{U}'_{13}\dot{I}_{13} + \dots + \dot{U}'_{q-1,0}\dot{I}_{q-1,0}$$

или

$$\sum \dot{I}^2 - j\zeta = \sum (P' - jQ').$$

откуда

$$\sum P = \sum P' \quad \text{и} \quad \sum Q = Q'.$$

где  $\sum P$  и  $\sum Q$  — сумма активных и сумма реактивных мощностей всех источников энергии, имеющих в цепи, а  $\sum P'$  и  $\sum Q'$  — сумма активных и сумма реактивных мощностей всех приемников. Последние два равенства и выражают *теорему Ланжевена*.

## § 38. Расчет цепей при наличии взаимной индукции

При наличии явления взаимной индукции между отдельными ветвями сложной цепи переменного тока или между отдельными участками одной и той же ветви при составлении уравнений необ-

ходимо учитывать э. д. с. взаимной индукции, или, соответственно, напряжение, уравнивающее эти э. д. с.

Пусть, например, взаимная индуктивность ветвей двух контуров, токи в которых обозначим  $i_1$  и  $i_2$ , равна  $M$ . Тогда в первом контуре, кроме всех прочих э. д. с., должна быть учтена э. д. с. взаимной индукции  $\left(-M \frac{di_2}{dt}\right)$ , которая при синусоидальном токе может быть представлена в символической форме  $(-j\omega M \dot{I}_2)$  или мы должны учесть соответствующее падение напряжения  $\left(+M \frac{di_2}{dt}\right)$ , изображаемое при синусоидальном токе комплексом  $(+j\omega M \dot{I}_2)$ . При составлении уравнения для второго контура в сумму э. д. с. также должна быть включена э. д. с. взаимной индукции  $\left(-M \frac{di_1}{dt}\right)$ , изображаемая комплексом  $(-j\omega M \dot{I}_1)$ , или в сумму падений напряжения должно быть введено дополнительное падение напряжения  $\left(+M \frac{di_1}{dt}\right)$ , изображаемое комплексом  $(+j\omega M \dot{I}_1)$ .

Заметим, как это уже было принято в первой части курса, что величина  $M$  может быть как положительной, так и отрицательной. Положительные направления токов в ветвях выбираются произвольно. Если катушки в ветвях расположены взаимно так, что при обоих положительных токах ( $i_1 > 0$  и  $i_2 > 0$ ) потоки самоиндукции и взаимной индукции в каждой катушке направлены согласно, т. е. оба положительны, то  $M > 0$ . Если же катушки расположены так, что при  $i_1 > 0$  и  $i_2 > 0$  потоки самоиндукции и взаимной индукции направлены встречно, т. е. имеют разные знаки, то  $M < 0$ .

В качестве простейшего случая рассмотрим цепь, состоящую из двух катушек, соединенных последовательно и связанных между собой индуктивно. При этом по обеим катушкам проходит один и тот же ток  $i$ . Пусть индуктивности катушек будут  $L_1$  и  $L_2$ , а их взаимная индуктивность будет  $M$ . Назовем *согласным включением* катушек случай, когда потоки самоиндукции и взаимной индукции направлены согласно ( $M > 0$ ). *Встречным включением* назовем случай, когда эти потоки направлены встречно ( $M < 0$ ).

Для суммы э. д. с., индуктируемых во всей рассматриваемой цепи, и при согласном и при встречном включении, имеем:

$$-L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} - L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} = -(L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt}.$$

Величина  $L = L_1 + L_2 + 2M$  представляет собой эквивалентную индуктивность всей цепи.

Так как  $(\sqrt{L_1} - \sqrt{L_2})^2 = L_1 + L_2 - 2\sqrt{L_1 L_2} \geq 0$ , то  $L = L_1 + L_2 + 2M \geq 2\sqrt{L_1 L_2} + 2M > 0$ , потому что всегда  $L_1 L_2 > M^2$ .

Таким образом, эквивалентная индуктивность рассматриваемой цепи всегда больше нуля.

Напряжения  $u_1$  и  $u_2$  на отдельных катушках равны:

$$u_1 = r_1 i + L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt}; \quad u_2 = r_2 i + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt},$$

где  $r_1$  и  $r_2$  — активные сопротивления катушек.

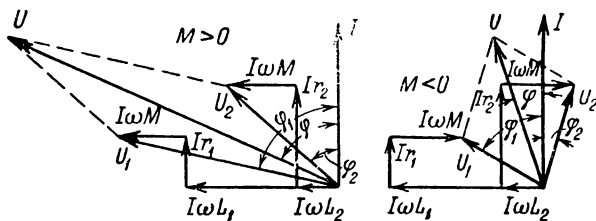


Рис. 63

Напряжение на зажимах всей цепи равно:

$$u = u_1 + u_2 = (r_1 + r_2) i + (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt}.$$

При синусоидальном режиме эти уравнения можно записать в символической форме:

$$\dot{U}_1 = r_1 \dot{I} + j\omega L_1 \dot{I} + j\omega M \dot{I}; \quad \dot{U}_2 = r_2 \dot{I} + j\omega L_2 \dot{I} + j\omega M \dot{I};$$

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = (r_1 + r_2) \dot{I} + j\omega (L_1 + L_2 + 2M) \dot{I}.$$

При этом, так как  $L > 0$ , ток в цепи будет отставать по фазе от напряжения на ее зажимах, что и показано на векторных диаграммах рис. 63. Что касается углов сдвига тока относительно напряжений на зажимах каждой из катушек, то один из этих углов может оказаться отрицательным. А именно, при встречном включении и  $L_1 \geq |M| \geq L_2$  ток будет упреждать напряжение на зажимах той катушки, индуктивность которой меньше (рис. 63).

Определив измерением эквивалентные индуктивности при согласном  $L' = L_1 + L_2 + 2|M|$  и при встречном  $L'' = L_1 + L_2 - 2|M|$  включениях катушек можно вычислить абсолютное значение их взаимной индуктивности из соотношения

$$4|M| = L' - L''.$$

Переход от согласного включения к встречному при этом следует выполнить пересоединением концов обмотки одной из катушек, не изменяя взаимного расположения катушек.

Рассмотрим параллельное соединение двух катушек, имеющих сопротивления  $r_1$  и  $r_2$ , индуктивности  $L_1$  и  $L_2$  и взаимную индуктивность  $M$ . Обозначив токи в катушках через  $i_1$  и  $i_2$ , а напряжение, приложенное к их зажимам, через  $u$ , имеем:

$$r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = u, \quad r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = u.$$

Заменяя ток  $i_2$  через  $i - i_1$ , где  $i$  — ток в неразветвленной части цепи, и исключив из обоих уравнений  $i_1$ , мы получим одно дифференциальное уравнение второго порядка, решив которое, найдем  $i$ , а затем можем определить  $i_1$  и  $i_2$ .

Эта задача упрощается, если пренебречь сопротивлениями катушек, положив  $r_1 = r_2 = 0$ . Тогда имеем:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = u; \quad L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = u,$$

и, исключая по очереди  $i_1$  и  $i_2$ , найдем:

$$\frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2 - M} \frac{di_1}{dt} = u; \quad \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 - M} \frac{di_2}{dt} = u,$$

и так как  $i = i_1 + i_2$ , то

$$\frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \frac{di}{dt} = L \frac{di}{dt} = u.$$

Множитель  $L$  при  $di/dt$  в последнем равенстве представляет собой эквивалентную индуктивность рассматриваемой цепи при  $r_1 = r_2 = 0$ , и так как всегда  $L_1 L_2 > M^2$  и  $L_1 + L_2 > 2M$ , то и при согласном и при встречном включении  $L > 0$ . Поэтому при синусоидальном режиме ток в неразветвленной части цепи будет отставать по фазе от напряжения на ее зажимах. Что же касается углов сдвига тока в каждой из катушек относительно напряжения на зажимах цепи, то один из этих углов может оказаться отрицательным. А именно, при согласном включении и  $L_1 \geq M \geq L_2$  ток в той из катушек, индуктивность которой меньше, будет упреждать напряжение на зажимах цепи, как это следует из вида множителей при  $\frac{di_1}{dt}$  и  $\frac{di_2}{dt}$  в только что полученных равенствах.

В измерительной технике и в радиотехнике для плавного изменения индуктивности часто пользуются *вариометрами*, состоящими из двух катушек, укрепленных одна внутри другой таким образом, что одну из катушек можно поворачивать около их общей оси (рис. 64). Такое устройство при последовательном соединении катушек позволяет плавно изменять индуктивность от  $L_1 + L_2 + 2M_0$  при согласном включении до  $L_1 + L_2 - 2M_0$  при встречном включении, где  $M_0$  — абсолютное значение взаимной индуктивности катушек

при совпадении плоскостей их витков. Переход от согласного включения к встречному происходит, когда плоскости витков катушек составляют прямой угол, причем взаимная индуктивность их в этом положении равна нулю. Если катушки соединить параллельно, то индуктивность вариометра можно изменять в пределах от  $\frac{L_1 L_2 - M_0^2}{L_1 + L_2 - 2M_0}$  до  $\frac{L_1 L_2 - M_0^2}{L_1 + L_2 + 2M_0}$ . Для сопряжения областей изменения индуктивности вариометра при переходе от последовательного к параллельному соединению достаточно соблюсти условие  $(L_1 + L_2 - 2M_0)^2 = L_1 L_2 - M_0^2$ .

Рассмотрим еще в виде примера составление уравнений по

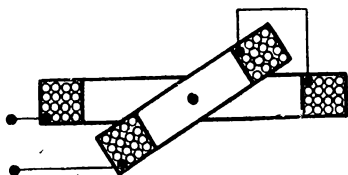


Рис. 64

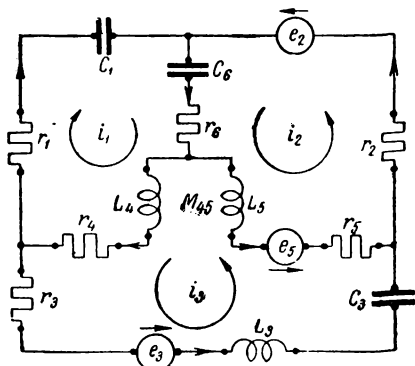


Рис. 65

методу контурных токов при наличии взаимной индукции между отдельными участками цепи для конкретного случая цепи, изображенной на рис. 65.

В общем виде эти уравнения записываются в обычной форме, как и при отсутствии взаимной индукции:

$$Z_{11} \dot{I}_1 + Z_{12} \dot{I}_2 + Z_{13} \dot{I}_3 = \dot{E}_{11};$$

$$Z_{21} \dot{I}_1 + Z_{22} \dot{I}_2 + Z_{23} \dot{I}_3 = \dot{E}_{22};$$

$$Z_{31} \dot{I}_1 + Z_{32} \dot{I}_2 + Z_{33} \dot{I}_3 = \dot{E}_{33},$$

но в выражения для собственных и взаимных сопротивлений контуров войдут добавочные члены, учитывающие явление взаимной индукции.

Зададимся положительными направлениями контурных токов  $i_1, i_2, i_3$ , как показано на рис. 65 стрелками внутри контуров. Зададимся также положительными направлениями токов во всех шести ветвях, как показано стрелками на этих ветвях. Положительные направления э. д. с. в ветвях точно так же показаны на рисунке стрелками.

Емкости, индуктивности и сопротивления на рисунке перенумерованы соответственно номерам ветвей.

Пусть между катушками  $L_4$  и  $L_5$  в четвертой и пятой ветвях имеет место явление взаимной индукции. В соответствии с выше-принятым условием знак взаимной индуктивности  $M_{45}$  определяется тем, будут ли потоки самоиндукции и взаимной индукции согласны ( $M_{45} > 0$ ) или встречны ( $M_{45} < 0$ ), когда токи в обеих катушках, т. е. в четвертой и пятой ветвях цепи, положительны. Знак  $M_{45}$  должен быть задан, так как он зависит при заданных положительных направлениях токов еще также от взаимного расположения катушек в пространстве.

Для рассматриваемой конкретной цепи (рис. 65) имеем выражения собственных сопротивлений контуров:

$$Z_{11} = r_1 - j \frac{1}{\omega C_1} - j \frac{1}{\omega C_6} + r_6 + j\omega L_4 + r_4;$$

$$Z_{22} = r_2 - j \frac{1}{\omega C_6} + r_6 + j\omega L_5 + r_5;$$

$$Z_{33} = r_3 + j\omega L_3 - j \frac{1}{\omega C_3} + r_5 + j\omega L_5 + j\omega L_4 - j2\omega M_{45} + r_4.$$

В выражение для  $Z_{33}$  вошел два раза член  $-j\omega M_{45}$ , так как контурный ток  $i_3$ , проходя по катушке  $L_5$ , индуцирует э. д. с. взаимной индукции в катушке  $L_4$  и, проходя по катушке  $L_4$ , индуцирует такую же э. д. с. взаимной индукции в катушке  $L_5$ . Знак «минус» перед членом  $-j2\omega M_{45}$  необходимо поставить, так как знак  $M_{45}$  задан соответственно положительным направлением токов в ветвях 4 и 5, но положительное направление контурного тока  $i_3$ , совпадая с положительным направлением тока в катушке 4 (в ветви 4), противоположно положительному направлению тока в катушке 5 (в ветви 5).

Взаимные сопротивления контуров имеют выражения:

$$Z_{12} = Z_{21} = -j \frac{1}{\omega C_6} + r_6 + j\omega M_{45};$$

$$Z_{23} = Z_{32} = -r_5 - j\omega L_5 + j\omega M_{45};$$

$$Z_{31} = Z_{13} = r_4 + j\omega L_4 - j\omega M_{45}.$$

Член  $+j\omega M_{45}$ , учитывающий взаимную индукцию между первым и вторым контурами, входит в выражение  $Z_{12}$  со знаком «плюс», так как положительные направления обоих контурных токов  $i_1$  и  $i_2$  совпадают с положительными направлениями токов в ветвях 4 и 5.

Аналогично убеждаемся, что член, учитывающий взаимную индукцию между соответствующими контурами, входит в выражение  $Z_{23}$  со знаком «плюс», а в выражение  $Z_{31}$  со знаком «минус».

Наконец, для э. д. с.  $e_{11}$ ,  $e_{22}$  и  $e_{33}$  в контурах в соответствии с принятыми направлениями э. д. с.  $e_2$ ,  $e_3$  и  $e_5$  в ветвях имеем:

$$\dot{E}_{11} = 0; \quad \dot{E}_{22} = \dot{E}_2 + \dot{E}_5; \quad \dot{E}_{33} = \dot{E}_3 - \dot{E}_5.$$

### § 39. Трансформатор без сердечника

Важным случаем линейной электрической цепи с взаимной индукцией является трансформатор без сердечника. Наличие стального сердечника вследствие его насыщения делает цепь, строго говоря, нелинейной. Поэтому этот случай будет рассмотрен особо. Трансформатором называют статическое устройство, предназначенное для преобразования величины переменных напряжений и токов. В простейшем случае трансформатор состоит из двух электрически несоединенных и неподвижных друг относительно друга обмоток, связанных между собой путем электромагнитной индукции. Такого рода трансформаторы без сердечника применяют при высоких частотах, а также в некоторых измерительных цепях.

Пусть к зажимам одной обмотки трансформатора, которую мы назовем первичной, приложено напряжение  $u_1$ , а к зажимам другой обмотки — вторичной — присоединен приемник (рис. 66). Обозначим активные сопротивления обмоток  $r_1$  и  $r_2$ , их индуктивности  $L_1$  и  $L_2$ ; а взаимную индуктивность их  $M$ . Так как приложенное напряжение преодолевает активное сопротивление первичной обмотки и уравнивает э. д. с.  $e_1 = -\frac{d\Psi_1}{dt}$ , индуктируемую в этой обмотке вследствие изменения ее потокосцепления  $\Psi_1$ , то имеем:

$$u_1 = r_1 i_1 + \frac{d\Psi_1}{dt},$$

Э. д. с.  $e_2 = -\frac{d\Psi_2}{dt}$ , возникающая во вторичной обмотке вследствие изменения ее потокосцепления  $\Psi_2$ , должна иметь составляющую, преодолевающую активное сопротивление обмотки и составляющую, равную напряжению  $u_2$  на зажимах приемника. Поэтому можно написать:

$$-\frac{d\Psi_2}{dt} = r_2 i_2 + u_2.$$

Пользуясь известными соотношениями

$$\Psi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \quad \text{и} \quad \Psi_2 = L_2 i_2 + M i_1,$$

мы можем последние два уравнения привести к виду:

$$u_1 = r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}; \quad -M \frac{di_1}{dt} = r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + u_2.$$

Из этих двух дифференциальных уравнений трансформатора следует, что напряжение, приложенное к первичной обмотке, преодо-

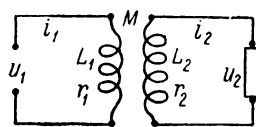


Рис. 66



лежит активное сопротивление последней и уравнивает возникающие в этой обмотке э. д. с. самоиндукции —  $L_1 \frac{di_1}{dt}$  и э. д. с. взаимной индукции —  $M \frac{di_2}{dt}$ , а э. д. с. —  $M \frac{di_1}{dt}$ , возникающая во вторичной обмотке вследствие явления взаимной индукции, преодолевает сопротивление вторичной обмотки, уравнивает э. д. с. самоиндукции —  $L_2 \frac{di_2}{dt}$ , возникающую в этой обмотке, и имеет, кроме того, составляющую, равную напряжению  $u_2$  на зажимах приемника.

Если напряжение  $u_1$  синусоидально, то при установившемся режиме  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $u_2$  также будут синусоидальными функциями времени, и уравнения трансформатора можно записать в символической форме:

$$\dot{U}_1 = r_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2; \quad -j\omega M \dot{I}_1 = r_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 + \dot{U}_2.$$

Решая эту систему, можно найти  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$ , если известны  $\dot{U}_1$ , параметры трансформатора и сопротивление приемника  $Z_{np} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}$ , или же можно по заданным  $\dot{U}_2$  и  $\dot{I}_2$  и параметрам трансформатора найти соответствующие значения  $\dot{U}_1$  и  $\dot{I}_1$ .

Найдем ток  $\dot{I}_1$  при заданном  $\dot{U}_1$  и  $Z_{np} = r_{np} + jx_{np}$  с целью выяснить влияние вторичной цепи на первичную. Положим

$$\omega L_1 = x_1, \quad r_2 + r_{np} = r_{II}; \quad \omega L_2 + x_{np} = x_{II},$$

имеем:

$$\dot{U}_1 = (r_1 + jx_1) \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2; \quad -j\omega M \dot{I}_1 = (r_{II} + jx_{II}) \dot{I}_2,$$

откуда

$$\dot{U}_1 = (r_1 + jx_1) \dot{I}_1 + \frac{\omega^2 M^2}{r_{II} + jx_{II}} \dot{I}_1,$$

и, следовательно,

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{\left( r_1 + \frac{\omega^2 M^2}{r_{II}^2 + x_{II}^2} r_{II} \right) + j \left( x_1 - \frac{\omega^2 M^2}{r_{II}^2 + x_{II}^2} x_{II} \right)}.$$

Знаменатель в выражении для  $\dot{I}_1$  представляет собою комплекс эквивалентного сопротивления  $Z = r + jx$  всей рассматриваемой нами цепи, состоящей из трансформатора и приемника, и из него следует, что при  $Z_{np} \neq \infty$  эквивалентное активное сопротивление

$r$  больше, чем  $r_1$ , а эквивалентное реактивное сопротивление  $x$  может быть и больше и меньше, чем  $x_1$ . Полагая

$$r = r_1 + \Delta r, \quad x = x_1 + \Delta x,$$

имеем:

$$\Delta r = \frac{\omega^2 M^2}{r_{II}^2 + x_{II}^2} r_{II}; \quad \Delta x = - \frac{\omega^2 M^2}{r_{II}^2 + x_{II}^2} x_{II},$$

причем  $\Delta r$  и  $\Delta x$  называют соответственно *вносимым активным и вносимым реактивным сопротивлениями*.

Представив систему уравнений трансформатора в виде:

$$\dot{U}_1 = r_1 \dot{I}_1 + j\omega (L_1 - M) \dot{I}_1 + j\omega M (\dot{I}_1 + \dot{I}_2);$$

$$0 = r_2 \dot{I}_2 + j\omega (L_2 - M) \dot{I}_2 + j\omega M (\dot{I}_1 + \dot{I}_2) + Z_{np} \dot{I}_2,$$

нетрудно убедиться, что трансформатор можно заменить Т-образной эквивалентной цепью (рис. 67), в которой взаимная индукция исключена. Действительно, применяя к каждому из двух контуров цепи рис. 67 второй закон Кирхгофа, мы получим такую же систему уравнений. Следует иметь в виду, что если  $M$  лежит между  $L_1$  и  $L_2$ , то или  $L_1 - M$ , или  $L_2 - M$  будет отрицательно.

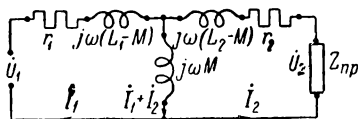


Рис. 67

Изложенным методом рассмотрения трансформаторов пользуются иногда и при наличии у них стального сердечника, если по условиям работы величина максимальной магнитной индукции в сердечнике незначительна, и можно поэтому считать, что магнитная проницаемость стали постоянна, и пренебрегать, кроме того, потерями в сердечнике.

---

## ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

### РЕЗОНАНС В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

#### § 40. Понятие о резонансе

Вследствие того что индуктивные и емкостные сопротивления, а также индуктивные и емкостные проводимости могут взаимно компенсироваться, возможны случаи, когда в цепи, содержащей реактивные элементы, эквивалентное реактивное сопротивление, а соответственно, и эквивалентная реактивная проводимость равны нулю, и ток в цепи совпадает по фазе с напряжением, приложенным к зажимам этой цепи, т. е. цепь, взятая в целом, ведет себя, как активное сопротивление. В дальнейшем, если ток в цепи, несмотря на наличие в ней реактивных сопротивлений, совпадает по фазе с напряжением, приложенным к этой цепи, мы будем говорить, что в цепи существует *резонанс*. Это определение относится и к таким цепям, которые сами являются частями более сложных цепей. Ввиду чрезвычайно важного значения резонанса и исключительно широкого использования его в электрических устройствах мы остановимся на этом явлении и выясним сначала характерные черты его на простейших случаях последовательного и параллельного соединения.

#### § 41. Резонанс в цепи с последовательным соединением участков $r$ , $L$ , $C$

Рассмотрим цепь, состоящую из последовательно включенных активного, индуктивного и емкостного сопротивлений (рис. 68, а). Для реактивного сопротивления этой цепи имеем:

$$x = \omega L - \frac{1}{\omega C},$$

откуда видно, что взаимная компенсация индуктивного и емкостного сопротивлений, а следовательно, и резонанс при последовательном соединении имеют место при условии:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad \text{или} \quad \omega^2 LC = 1.$$

Из этих зависимостей следует, что резонанса можно достичь, изменяя или частоту приложенного напряжения, или индуктив-

ность катушки, или емкость конденсатора. Значения угловой частоты, индуктивности и емкости, при которых наступает резонанс, определяются формулами:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad L_0 = \frac{1}{\omega^2 C}; \quad C_0 = \frac{1}{\omega^2 L}.$$

Если активное сопротивление цепи  $r$  неизменно, то полное сопротивление ее  $z = \sqrt{r^2 + x^2}$  при резонансе достигает своего наименьшего значения, равного  $r$ , так как тогда  $x = x_L - x_C = 0$ . Поэтому, если напряжение на зажимах цепи не изменяется, то при последовательном соединении ток в цепи при резонансе имеет наибольшее значение.

Рассмотрим векторную диаграмму цепи при резонансе (рис. 68, б). Угловую частоту, при которой наступает резонанс, обозначим через  $\omega_0$ . Эта частота называется *резонансной* или *собственной угловой*

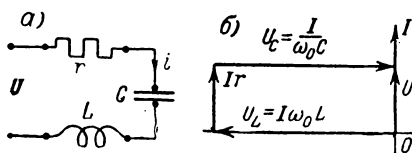


Рис. 68

*частотой цепи.* Так как векторы  $\bar{U}_L$  и  $\bar{U}_C$ , направленные прямо противоположно друг другу, при резонансе равны по величине, то вектор приложенного к цепи напряжения  $\bar{U}$  равен по величине и направлению вектору  $\bar{I}r$ . При этом может оказаться, что величина векторов  $\bar{U}$  и  $\bar{U}_C$  будет значительно больше, чем величина вектора  $\bar{U}$ . Иными словами, в случае резонанса, и даже при достаточном приближении к нему, напряжения на зажимах реактивной катушки и конденсатора могут превосходить, и иногда весьма значительно, напряжение на зажимах всей цепи. Поэтому резонанс при последовательном соединении называют *резонансом напряжений*. Местные повышения напряжения на отдельных участках цепи, если они не предусмотрены, могут повести к повреждению аппаратов и приборов, находящихся на этих участках.

Из векторной диаграммы видно, что при резонансе напряжения на зажимах индуктивного и емкостного сопротивлений будут превышать напряжение на зажимах всей цепи при условии:

$$r < \omega_0 L \quad \text{или} \quad r < \frac{1}{\omega_0 C}.$$

Так как  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , то оба эти условия приводят к одному:

$$r < \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Величина  $\sqrt{L/C}$ , имеющая размерность сопротивления, носит название *волнового сопротивления цепи*, а отношение активного сопротивления цепи к ее волновому сопротивлению называют *затуханием цепи*. Обозначив волновое сопротивление цепи через  $\rho$ , а затухание цепи, т. е.  $r/\rho$ , через  $d$ , получим следующее условие для наличия повышений напряжения при резонансе:

$$\frac{r}{\rho} = d < 1.$$

Заметим, что при резонансе волновое сопротивление

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

дает отношение напряжения на зажимах индуктивного или емкостного сопротивления к току в цепи, а затухание  $d = r/\rho$  — отношение напряжения на зажимах всей цепи к напряжению на зажимах индуктивного или емкостного сопротивлений.

Для оценки резонансных свойств контуров часто пользуются понятием о *добротности контура*, причем под добротностью  $Q$  понимают величину, обратную затуханию  $d$ .

Для уяснения энергетической стороны процессов, происходящих при резонансе в рассматриваемой цепи, определим сумму  $W = W_m + W_e$  энергий магнитного и электрического полей цепи. Так как ток  $i$  в реактивной катушке и напряжение  $u_c$  на обкладках конденсатора находятся в квадратуре, то при  $i = I \sqrt{2} \sin \omega_0 t$  имеем  $u_c = -U_c \sqrt{2} \cos \omega_0 t$  и, следовательно,

$$\begin{aligned} W &= W_m + W_e = \frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2} C u_c^2 = \\ &= L I^2 \sin^2 \omega_0 t + C U_c^2 \cos^2 \omega_0 t. \end{aligned}$$

При резонансе  $U_c : I = \omega_0 L = 1/\omega_0 C = \sqrt{L/C}$  и  $C U_c^2 = L I^2$ . Поэтому, приняв во внимание, что  $\sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t = 1$ , имеем:

$$W = L I^2 = C U_c^2 = \frac{1}{2} L I_m^2 = \frac{1}{2} C U_{cm}^2 = \text{const},$$

т. е. при резонансе сумма энергий магнитного и электрического полей с течением времени не изменяется, причем максимальные значения  $W_m$  и  $W_e$  равны  $W$ .

На рис. 69 приведены соответствующие кривые  $i$ ,  $u_c$ ,  $W_m$ ,  $W_e$ . Как из этих кривых, так и из аналитических выражений вытекает, что при резонансе в случае последовательного соединения магнитное и электрическое поля все время обмениваются энергией. Энер-

гия колеблется между этими полями и при максимуме тока в катушке сосредотачивается целиком в магнитном поле. При уменьшении тока энергия постепенно переходит из магнитного поля в электрическое, и при переходе тока в катушке через нуль, когда напряжение на обкладках конденсатора достигает максимума, вся энергия сосредоточена в электрическом поле. Затем начинается обратный переход энергии из электрического поля в магнитное и так далее. При этом, так как вся цепь в целом ведет себя как активное сопротивление, возврата энергии из полей цепи к источнику приложенного напряжения не происходит.

При малом затухании цепи энергия, посылаемая источником напряжения в цепь за полный период и равная  $rI^2T$ , значительно меньше энергии, сосредоточенной в магнитном и электрическом полях цепи, и интенсивные колебания энергии между этими полями проявляются в значительном повышении напряжений на зажимах индуктивного и емкостного сопротивлений. Если условия резонанса не выполнены, то  $W_{м макс} \neq W_{э макс}$ , и энергия, равная

( $W_{м макс} - W_{э макс}$ ), должна периодически доставляться полям цепи источником напряжения. Тогда возникают колебания энергии между источником напряжения и полями, изученные нами ранее.

В более сложных цепях при резонансе сумма энергий полей, связанных с отдельными элементами цепи, не остается постоянной, и энергетические процессы имеют более сложный характер.

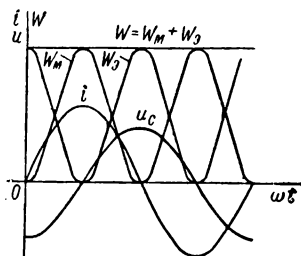


Рис. 69

## § 42. Частотные характеристики цепи с последовательным соединением участков $r, L, C$

Зависимости параметров электрической цепи ( $r, x, z, g, b, y$ ), а также величин, ими определяемых ( $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{x}{r}$ ;  $\cos \varphi = \frac{r}{z}$  и т. д.), от частоты тока в цепи называются *частотными характеристиками цепи*.

Зависимости действующих значений токов  $I$  в цепи, напряжений  $U$  на зажимах цепи и на отдельных участках цепи, а также активной и реактивной мощностей в цепи от частоты тока при неизменном значении одной из этих величин аналогичны зависимостям от частоты соответствующих параметров цепи или величин, определяемых как функции этих параметров. Поэтому такие зависимости, характеризующие изменение режима в цепи при изменении частоты, точно так же могут рассматриваться как частотные характеристики цепи.

Рассмотрим частотные характеристики цепи с последовательно соединенными участками  $r$ ,  $L$ ,  $C$  (рис. 68, а).

Определим зависимости тока  $I = U \frac{1}{z}$  в цепи, напряжений на зажимах катушки  $U_L = Ix_L = U \frac{x_L}{z}$  и на конденсаторе  $U_C = Ix_C = U \frac{x_C}{z}$ , а также угла сдвига  $\varphi$  в цепи от угловой частоты  $\omega$ , пред-

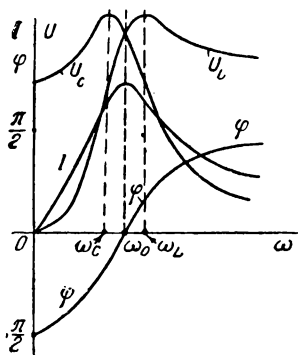


Рис. 70

полагая, что напряжение  $U$  на зажимах всей цепи и величины  $r$ ,  $L$ ,  $C$  остаются неизменными.

Имеем:

$$I = U : \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Так как при угловых частотах от 0 до  $\omega_0$  индуктивное сопротивление  $x_L = \omega L$  меньше емкостного сопротивления  $x_C = \frac{1}{\omega C}$  и  $x = x_L - x_C < 0$ , то в этой области частот ток в цепи упрещает напряжение на ее зажимах. При этом по мере повышения частоты  $x_L$  будет возра-

стать, а  $x_C$  будет уменьшаться и, следовательно,  $x$  по абсолютному значению будет также уменьшаться, т. е. ток в цепи будет возрастать. Когда при угловой частоте  $\omega_0$  сопротивления  $x_L$  и  $x_C$  сравняются и наступит резонанс,  $x$  будет равно нулю, ток в цепи достигнет своего максимума, равного  $\frac{U}{r}$ , и будет совпадать по фазе с напряжением на зажимах цепи. При дальнейшем повышении частоты  $x_L$  превзойдет  $x_C$ ,  $x$  сделается положительным и будет возрастать с увеличением частоты. Ток при этом уменьшается, стремясь к нулю, и по фазе отстает от напряжения на зажимах цепи. Кривая  $I = F(\omega)$ , называемая *резонансной кривой*, а также зависимости  $\varphi$ ,  $U_L$  и  $U_C$  в функции от  $\omega$  приведены на рис. 70.

Исследуя выражения  $U_L = I \omega L$  и  $U_C = \frac{I}{\omega C}$ , можно показать, что максимум  $U_L$  наступает при  $\omega_L = \omega_0 \sqrt{2 : (2 - d^2)} > \omega_0$ , а максимум  $U_C$  — при  $\omega_C = \omega_0 \sqrt{(2 - d^2) : 2} < \omega_0$ . Следовательно, расхождение частот  $\omega_L$  и  $\omega_C$  будет тем больше, чем больше  $d$ . При  $d > \sqrt{2}$  ни  $U_L$ , ни  $U_C$  максимумов не имеют, и при повышении частоты  $U_L$  монотонно возрастает, а  $U_C$  монотонно убывает.

Для удобства сравнения резонансных кривых различных цепей

отнесем ток в цепи к току в ней при резонансе, а частоту — к частоте, при которой наступает резонанс, и рассмотрим зависимость

$$\frac{I}{I_0} = F_0\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right),$$

где  $I_0 = \frac{U}{r}$  — ток при резонансе, а  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

Обозначим  $\frac{\omega}{\omega_0}$  через  $\eta$ . Тогда, приняв во внимание, что  $r = \rho d$ ,  $\omega L = \omega_0 L \frac{\omega}{\omega_0} = \rho \eta$ ,  $\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega_0 C} \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\rho}{\eta}$ , выражение для полного сопротивления цепи можно привести к виду:

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \\ &= \rho \sqrt{d^2 + \left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)^2}. \end{aligned}$$

Поэтому имеем:

$$\begin{aligned} \frac{I}{I_0} &= \frac{U}{z} : \frac{U}{r} = \frac{r}{z} = d : \sqrt{d^2 + \left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)^2} = \\ &= 1 : \sqrt{1 + \left[\left(\eta - \frac{1}{\eta}\right) : d\right]^2}. \end{aligned}$$

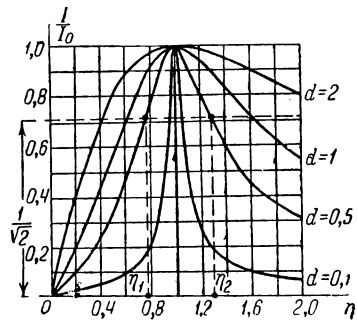


Рис. 71

Из последнего выражения следует, что форма резонансной кривой  $\frac{I}{I_0} = F_0\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = F_0(\eta)$  зависит только от величины затухания  $d$  цепи. Резонансные кривые  $\frac{I}{I_0} = F_0(\eta)$  для цепей с различными значениями затухания приведены на рис. 71. Покажем, что для определения затухания цепи достаточно провести на высоте  $\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  прямую, параллельную оси абсцисс, и найти длину отрезка этой прямой между точками пересечения ее с резонансной кривой. Для точек пересечения имеем:

$$1 + \left[\left(\eta - \frac{1}{\eta}\right) : d\right]^2 = 2,$$

откуда для положительных корней  $\eta_1$  и  $\eta_2$  этого уравнения найдем:

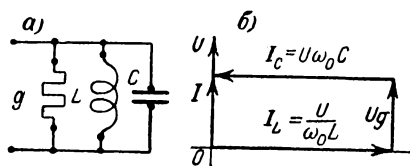
$$\eta_1 = -\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + 1}; \quad \eta_2 = +\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + 1}.$$



Следовательно, длина указанного отрезка  $\eta_2 - \eta_1$  действительно равна затуханию  $d$ , соответствующему рассматриваемой кривой. Поэтому, чем больше затухание цепи, тем шире и тупее резонансная кривая и, наоборот, чем меньше затухание, тем острее и уже кривая и тем резче выражен резонанс (рис. 71).

### § 43. Резонанс в цепи с параллельным соединением участков $g$ , $L$ , $C$

Рассмотрим цепь, состоящую из параллельно включенных активного, индуктивного и емкостного сопротивлений (рис. 72, а). Для этой цепи  $y = \sqrt{g^2 + b^2} = \sqrt{g^2 + (b_L - b_C)^2}$ , где  $b_L$  — проводимость индуктивной ветви, а  $b_C$  — проводимость емкостной ветви. Так как мы предполагаем, что индуктивная и емкостная ветви не обладают активным сопротивлением, то



$$b_L = \frac{1}{x_L} = \frac{1}{\omega L}; \quad b_C = \frac{1}{x_C} = \omega C,$$

и для реактивной проводимости цепи имеем:

$$b = b_L - b_C = \frac{1}{\omega L} - \omega C.$$

Рис. 72

Из последнего выражения видно, что взаимная компенсация реактивных проводимостей, а следовательно, и резонанс при параллельном соединении имеют место при условии:

$$\frac{1}{\omega L} = \omega C \quad \text{или} \quad \omega^2 LC = 1,$$

т. е. при том же условии, при котором имеет место резонанс при последовательном соединении. Из этих зависимостей следует, что резонанса можно достичь, изменяя или частоту приложенного напряжения, или индуктивность катушки, или емкость конденсатора. Значения угловой частоты, индуктивности и емкости, при которых наступает резонанс, определяются формулами:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad L_0 = \frac{1}{\omega^2 C}; \quad C_0 = \frac{1}{\omega^2 L}.$$

Если активная проводимость цепи  $g$  неизменна, то полная проводимость ее  $y$  при резонансе, когда  $b=0$ , достигает своего наименьшего значения, равного  $g$ , а полное сопротивление цепи, в отличие от резонанса при последовательном соединении, имеет тогда наибольшее значение. Поэтому, если величина напряжения на зажимах цепи не изменяется, то при параллельном соединении ток в неразветвленной части цепи при резонансе имеет наименьшее значение.

Векторная диаграмма для резонанса при параллельном соединении дана на рис. 72, б. Так как векторы  $\vec{I}_L$  и  $\vec{I}_C$ , направленные прямо противоположно друг другу, при резонансе равны по величине, то вектор тока  $\vec{I}$  в неразветвленной части цепи равен по величине и направлению вектору  $\vec{U}g$ , изображающему ток в ветви, обладающей только активным сопротивлением. При этом может оказаться, что величина векторов  $\vec{I}_L$  и  $\vec{I}_C$  будет значительно больше, чем величина вектора  $\vec{I}$ . Иначе говоря, при резонансе, и даже при достаточном приближении к нему, токи в реактивной катушке и в конденсаторе могут превосходить, и иногда весьма значительно, ток в неразветвленной части цепи. Поэтому резонанс при параллельном соединении называют *резонансом токов*.

Из диаграммы рис. 72, б видно, что при резонансе токи в индуктивной и емкостной ветвях будут превосходить ток в неразветвленной части цепи при условии:

$$g < \frac{1}{\omega_0 L} \quad \text{или} \quad g < \omega_0 C.$$

Так как  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , то оба эти условия приводятся к одному:

$$g < \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Назовем величину  $\sqrt{\frac{C}{L}}$ , имеющую размерность проводимости, *волновой проводимостью цепи*, обозначим ее через  $\gamma$  и определим затухание цепи  $d$  как отношение  $\frac{g}{\gamma}$ . Тогда предыдущее условие можно написать в виде:

$$\frac{g}{\gamma} = d < 1.$$

Заметим, что при резонансе волновая проводимость

$$\gamma = \sqrt{\frac{C}{L}} = \omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L}$$

дает отношение тока в индуктивной или емкостной ветви к напряжению на зажимах цепи, а затухание  $d$  — отношение тока в неразветвленной части цепи к току в индуктивной или емкостной ветви.

Величина  $Q = \frac{1}{d} = \frac{\gamma}{g}$ , обратная затуханию цепи, называется добротностью контура.

В рассматриваемой простейшей цепи с параллельным соединением участков  $g$ ,  $L$ ,  $C$  энергетические процессы при резонансе

аналогичны энергетическим процессам в цепи с последовательным соединением участков  $r$ ,  $L$ ,  $C$ . Действительно, здесь также ток в катушке  $i_L = -I_m \cos \omega_0 t$  находится в квадратуре с напряжением  $u = U_m \sin \omega_0 t$  на обкладках конденсатора. И при резонансе имеет место соотношение:

$$\begin{aligned} W &= W_s + W_m = \frac{1}{2} C u^2 + \frac{1}{2} L i_L^2 = \\ &= C U^2 \sin^2 \omega_0 t + L I_L^2 \cos^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} C U_m^2 = \frac{1}{2} L I_{Lm}^2 = \text{const}, \end{aligned}$$

так как

$$\frac{I_L}{U} = \frac{1}{\omega_0 L} = \omega_0 C = \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

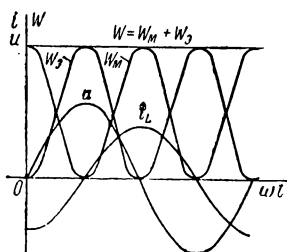


Рис. 73

Энергия магнитного поля катушки в течение четверти периода тока переходит в энергию электрического поля конденсатора и в последующую четверть периода возвращается обратно из конденсатора в катушку.

Обмен энергии между полями цепи и внешним источником не происходит, и последний лишь посылает энергию на покрытие потерь в активной ветви. Энергетический процесс в рассматриваемой цепи изображен на рис. 73.

#### § 44. Частотные характеристики цепи с параллельным соединением участков $g$ , $L$ , $C$

Рассмотрим зависимости тока  $I = Uy$  в неразветвленной части цепи, состоящей из параллельно соединенных участков  $g$ ,  $L$ ,  $C$  (рис. 72, а), тока  $I_L = Ub_L$  в катушке, тока  $I_C = Ub_C$  в конденсаторе и угла сдвига  $\varphi$  в цепи от угловой частоты  $\omega$ , предполагая, что напряжение  $U$  на зажимах цепи и величины  $g$ ,  $L$ , и  $C$  остаются неизменными, т. е. рассмотрим частотные характеристики этой цепи. Имеем:

$$I = U \sqrt{g^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}.$$

Так как при угловых частотах от 0 до  $\omega_0$  индуктивная проводимость  $b_L = \frac{1}{\omega L}$  больше емкостной проводимости  $b_C = \omega C$  и  $b = b_L - b_C > 0$ , то в этой области частот ток в цепи отстает от напряжения на ее зажимах. При этом по мере повышения частоты  $b_L$  уменьшается, а  $b_C$  возрастает и, следовательно,  $b$  по абсолютному значению умень-

шается, а вместе с ней уменьшается и ток  $I$ . Когда при угловой частоте  $\omega_0$  проводимости  $b_L$  и  $b_C$  сравняются, т. е. когда наступит резонанс,  $b$  будет равно нулю и ток  $I$  достигнет своего минимума, равного  $Ug$ , и будет совпадать по фазе с напряжением на зажимах цепи. При дальнейшем повышении частоты  $b_C$  превзойдет  $b_L$ ,  $b$  делается отрицательным и по абсолютной величине будет возрастать с увеличением частоты. Ток  $I$  при этом начнет постепенно возрастать и по фазе будет уже опережать напряжение на зажимах цепи. Резонансная кривая  $I = F(\omega)$ , а также зависимости  $\varphi$ ,  $I_L$  и  $I_C$  в функции от  $\omega$  даны на рис. 74.

Из выражений  $I_L = \frac{U}{\omega L}$  и  $I_C = U\omega C$  следует, что по мере увеличения частоты ток  $I_L$  убывает, а ток  $I_C$  возрастает, причем первая зависимость изображается равнобокой гиперболой, а вторая — прямой, проходящей через начало и пересекающей гиперболу при  $\omega = \omega_0$ .

Нетрудно показать, что имея резонансную кривую  $\frac{I}{I_0} = F_0\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = F(\eta)$  и проводя прямую  $\frac{I}{I_0} = \sqrt{2}$ , можно определить затухание цепи как длину отрезка этой прямой, заключенного между точками пересечения ее с резонансной кривой. Следовательно, чем меньше затухание цепи, тем острее резонансная кривая и тем резче выражен резонанс.

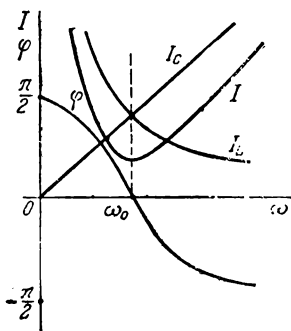


Рис. 74

## § 45. Резонанс в сложной цепи

В общем случае сложной цепи, содержащей реактивные сопротивления, имеет место резонанс для всей цепи, если ток и напряжение на зажимах цепи совпадают по фазе, т. е.  $\varphi = 0$ . При этом, если в цепи содержатся участки с активными сопротивлениями, то при резонансе сопротивление всей цепи в целом будет отличным от нуля активным сопротивлением  $r$ . Для отыскания связи между частотой, при которой наступает резонанс, и параметрами всех участков цепи необходимо найти выражение для реактивного сопротивления  $x$  всей цепи или для реактивной проводимости  $b$  всей цепи и положить то или иное из этих выражений равным нулю, так как если  $r \neq 0$ , то при  $x = 0$  также и  $b = 0$ , поскольку  $b = \frac{x}{r^2 + x^2}$ .

Однако при рассмотрении идеализированного случая чисто реактивной цепи, не содержащей участков с активными сопротивлениями, для которой связь между  $b$  и  $x$  имеет вид  $b = \frac{1}{x}$ , условия  $x = 0$

и  $b = 0$  не эквивалентны друг другу. В этом идеализированном случае условием резонанса будет либо  $x = 0$  ( $b = \infty$ ), либо  $b = 0$  ( $x = \infty$ ), в зависимости от конфигурации цепи. Например, для цепи, изображенной на рис. 75, а, условием резонанса будет  $x = 0$ , так как в этой цепи *сопротивление конденсатора*  $C_1$  компенсируется эквивалентным *сопротивлением* контура  $L_2$ ,  $C_2$ . В случае же цепи, изображенной на рис. 75, б, условием резонанса будет  $b = 0$ , так как в этой цепи *проводимость конденсатора*  $C_1$  компенсируется эквивалентной *проводимостью* контура  $L_2$ ,  $C_2$ .

В виде примера определения частоты резонанса в сложной цепи рассмотрим цепь, изображенную на рис. 76, содержащую как ре-

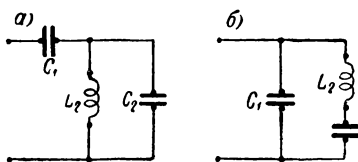


Рис. 75

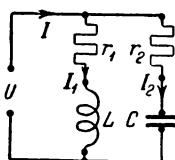


Рис. 76

активные, так и активные участки. Комплексная проводимость этой цепи имеет выражение:

$$Y = Y_1 + Y_2 = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{r_1 + j\omega L} + \frac{1}{r_2 - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{r_1}{r_1^2 + \omega^2 L^2} +$$

$$+ \frac{r_2}{r_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} - j \left( \frac{\omega L}{r_1^2 + \omega^2 L^2} - \frac{\frac{1}{\omega C}}{r_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \right) = g - jb.$$

Условием резонанса будет  $b = 0$ , откуда путем несложных преобразований найдем:

$$\omega_0 = \frac{\pi L}{1} \sqrt{\left( \frac{L}{C} - r_1^2 \right) : \left( \frac{L}{C} - r_2^2 \right)}.$$

Из выражения для  $\omega_0$  следует, что в рассматриваемой цепи условие резонанса отличается от условия  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , выведенного для простейших цепей, и совпадает с ним только при  $r_1 = r_2$ .

Так как потери в конденсаторах обычно пренебрежимо малы, то практически важным является случай  $r_2 = 0$ . При  $r_2 = 0$  имеем

$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} - \frac{r_1^2}{L^2}$  и для сопротивления  $r$  всей цепи при резонансе, когда ее реактивное сопротивление равно нулю, получим:

$$r = \frac{1}{g} = \frac{1}{g_1} = \frac{r_1^2 + \omega_0^2 L^2}{r_1} = \frac{L}{r_1 C}.$$

В другом частном случае, когда  $r_1 = r_2 = r = \sqrt{\frac{L}{C}}$ , рассматриваемая цепь при всех частотах представляет собою активное сопротивление, и, следовательно, при любой частоте в цепи имеет место резонанс.

Действительно, разделив числитель и знаменатель первого члена в выражении для  $b$  на  $\omega^2 LC$  и заметив, что  $r_1^2 = r_2^2 = \frac{L}{C}$ , получим:

$$\frac{\omega L}{r_1^2 + \omega^2 L^2} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\frac{1}{\omega^2 C^2} + \frac{L}{C}} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\frac{1}{\omega^2 C^2} + r_2^2},$$

т. е.  $b=0$  при любом значении  $\omega$ .

При напряжении на зажимах цепи  $u = U_m \sin \omega t$  ток  $i_1$  в катушке равен  $i_1 = I_{1m} \sin(\omega t - \varphi_1)$ , а ток  $i_2$  в конденсаторе и напряжение  $u_C$  на нем равны

$$i_2 = I_{2m} \sin(\omega t - \varphi_2) \text{ и } u_C = U_{Cm} \sin\left(\omega t - \varphi_2 - \frac{\pi}{2}\right).$$

При  $r_1 = r_2 = \sqrt{\frac{L}{C}}$  имеем:  $\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\omega L}{r_1} = \omega \sqrt{LC}$  и

$$\operatorname{tg}\left(\varphi_2 + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} \varphi_2 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{r_2}{\frac{1}{\omega C}} = \omega \sqrt{LC}.$$

Следовательно,  $\varphi_1 = \varphi_2 + \frac{\pi}{2}$ , и ток в катушке совпадает по фазе с напряжением на конденсаторе, т. е. энергия в катушке и энергия в конденсаторе *одновременно* достигают максимума и *одновременно* убывают до нуля. Таким образом, в рассматриваемой цепи при резонансе совсем не совершается обмена энергией между катушкой и конденсатором, а происходит в течение части периода поступление энергии из внешнего источника *одновременно* в электрическое поле конденсатора и в магнитное поле катушки, а также на выделение тепла в сопротивлениях  $r_1$  и  $r_2$ . В другую часть периода энергия, возвращаясь *одновременно* из конденсатора и из катушки, преобра-

зывается в тепло в сопротивлениях  $r_1$  и  $r_2$ . В то же время энергия продолжает поступать из внешнего источника, причем эта энергия также поглощается в виде тепла в сопротивлениях  $r_1$  и  $r_2$ .

Из этого примера видно, что энергетические процессы при резонансе в сложных цепях протекают значительно сложнее, чем это имело место в простых цепях с последовательным или параллельным соединением участков, рассмотренных в § 41 и в § 43.

#### § 46. Резонанс в двух связанных сверхпроводящих контурах

Под связанными контурами понимают контуры, электромагнитные процессы в которых тем или иным путем оказывают влияние друг на друга. В технике связи часто используют явление резонанса

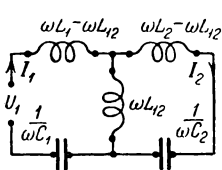


Рис. 77

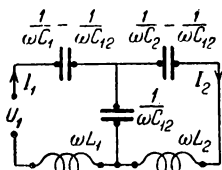


Рис. 78

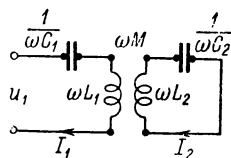


Рис. 79

в связанных колебательных контурах с малым затуханием, и мы остановимся на рассмотрении этого явления в двух цепях: в цепи, состоящей из двух контуров, связанных общей индуктивной ветвью (рис. 77), и в цепи, состоящей из двух контуров, связанных общей емкостной ветвью (рис. 78). При этом мы пренебрежем активными сопротивлениями контуров, что существенно упростит анализ и вместе с тем даст возможность выяснить наиболее характерные особенности резонансных явлений в двух связанных контурах, обладающих малым затуханием.

Случай двух контуров, связанных взаимной индуктивностью  $M$  (рис. 79), сводится к случаю, когда связь осуществляется общей индуктивной ветвью (рис. 77). Действительно, как было показано в § 39, два контура с индуктивностями  $L_1$  и  $L_2$  и взаимной индуктивностью  $M$  могут быть заменены эквивалентной Т-образной цепью (рис. 67), в которой взаимная индуктивность исключена и которая соответствует цепи на рис. 77, имеющей общую индуктивную ветвь. При этом  $L_{12} = M$ .

Степень связи контуров характеризуют коэффициентом связи  $k$ . В рассматриваемых случаях под коэффициентом связи понимают отношение сопротивления общей ветви к корню квадратному из произведения одноименных с ним сопротивлений каждого из двух связанных контуров, причем при определении последних сопротив-

лений должно быть учтено и сопротивление общей ветви. В соответствии с этим при индуктивной связи имеем:

$$k = \frac{\omega L_{12}}{\sqrt{\omega L_1 \omega L_2}} = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_1 L_2}},$$

где  $\omega L_1$  и  $\omega L_2$  — индуктивные сопротивления первого и второго контуров, а  $\omega L_{12}$  — индуктивное сопротивление их общей ветви, а при емкостной связи имеем:

$$k = \frac{1}{\omega C_{12}} : \sqrt{\frac{1}{\omega C_1} \frac{1}{\omega C_2}} = \frac{\sqrt{C_1 C_2}}{C_{12}},$$

где  $\frac{1}{\omega C_1}$  и  $\frac{1}{\omega C_2}$  — емкостные сопротивления первого и второго контуров, а  $\frac{1}{\omega C_{12}}$  — емкостное сопротивление их общей ветви.

Если контуры связаны через взаимную индуктивность, то, учитывая, что  $|M| = L_{12}$ , получаем:

$$k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}},$$

т. е. известное ранее выражение.

Пусть даны два связанных колебательных контура и пусть к зажимам первого из них приложено напряжение  $U$  (рис. 77 и 78).

Собственные частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  первого и второго контуров можно определить, исключив влияние одного контура на другой, т. е. разомкнув соответствующий контур. Тогда и при индуктивной и при емкостной связи получим:

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \quad \text{и} \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}.$$

Обозначая реактивные сопротивления двух рассматриваемых цепей соответственно через  $x'$  и  $x''$  и принимая во внимание, что каждая из них представляет собою частный случай последовательно-параллельного соединения, найдем:

$$\begin{aligned} x' &= (\omega L_1 - \omega L_{12}) - \frac{1}{\omega C_1} + \frac{\omega L_{12} \left( \omega L_2 - \omega L_{12} - \frac{1}{\omega C_2} \right)}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}} = \\ &= \left[ \left( \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) \left( \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) - \omega^2 L_{12}^2 \right] : \left( \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right); \\ x'' &= \omega L_1 - \left( \frac{1}{\omega C_1} - \frac{1}{\omega C_{12}} \right) - \frac{\frac{1}{\omega C_{12}} \left( \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} + \frac{1}{\omega C_{12}} \right)}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}} = \\ &= \left[ \left( \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) \left( \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) - \frac{1}{\omega^2 C_{12}^2} \right] : \left( \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right), \end{aligned}$$



где  $\omega$  — угловая частота напряжения  $U$ . Из полученных выражений следует, что  $x'$  и  $x''$  при  $\omega = 1/\sqrt{L_2 C_2}$  обращаются в бесконечность, и ток  $I_1$  будет равен нулю, т. е. при  $\omega = \omega_2$  мы имеем резонанс токов. Условия резонанса напряжений найдем, положив  $x' = 0$  и  $x'' = 0$ . Тогда, приняв во внимание, что  $\omega^2 L_{12}^2 = k^2 \omega^2 L_1 L_2$  и  $\frac{1}{\omega^2 C_{12}^2} = \frac{k^2}{\omega^2 C_1 C_2}$ ,

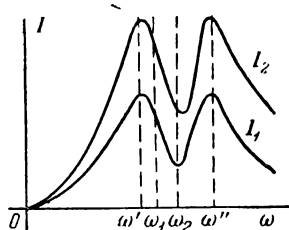


Рис. 80

имеем:

$$\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right) \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right) = \omega^2 L_{12}^2 = k^2 \omega^2 L_1 L_2;$$

$$\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right) \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right) = \frac{1}{\omega^2 C_{12}^2} = \frac{k^2}{\omega^2 C_1 C_2},$$

откуда для индуктивной и для емкостной связи соответственно получим:

$$\left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega^2}\right) \left(1 - \frac{\omega_2^2}{\omega^2}\right) = k^2 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\omega^2}{\omega_1^2} - 1\right) \left(\frac{\omega^2}{\omega_2^2} - 1\right) = k^2.$$

Решая эти уравнения относительно  $\omega$ , из первого найдем частоту  $\omega_L$  для индуктивной связи и из второго частоту  $\omega_C$  для емкостной связи, отвечающие резонансу напряжений, а именно:

$$\omega_L = \sqrt{\frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2) \pm \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4(1 - k^2)\omega_1^2\omega_2^2}}{2(1 - k^2)}};$$

$$\omega_C = \sqrt{\frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2) \pm \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4(1 - k^2)\omega_1^2\omega_2^2}}{2}}.$$

Из этих выражений следует, что при отсутствии затухания и в случае индуктивной и в случае емкостной связи есть две частоты, при которых  $I_1 = \infty$ . Поэтому резонансная кривая  $I_1 = F_1(\omega)$  при  $U = \text{const}$  и малом затухании имеет два максимума, причем можно показать, что одна из этих частот  $\omega'$  меньше  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , а другая  $\omega''$  — больше  $\omega_1$  и  $\omega_2$  (рис. 80). В частном случае при  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$  имеем:

$$\omega'_L = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}} < \omega_0 < \omega''_L = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}};$$

$$\omega'_C = \omega_0 \sqrt{1-k} < \omega_0 < \omega''_C = \omega_0 \sqrt{1+k}.$$

При отсутствии затухания при  $I_1 = \infty$  имеем и  $I_2 = \infty$ . Поэтому кривая  $I_2 = F_2(\omega)$  при  $U = \text{const}$  и малом затухании также имеет

два максимума примерно при тех же частотах  $\omega_L$  и  $\omega_C$ . Она достигает минимума при частоте несколько большей, чем  $\omega_2$  (§ 55).

Таким образом, при  $U = \text{const}$ , в отличие от резонансной кривой уединенного контура, имеющей один максимум при последовательном соединении или один минимум при параллельном соединении, резонансные кривые  $I_1 = F_1(\omega)$  и  $I_2 = F_2(\omega)$  цепи, состоящей из двух связанных контуров с малым затуханием, и при индуктивной и при емкостной связи имеют два максимума и один минимум. Однако при переходе величины затухания через некоторый предел оба максимума и минимум сливаются, и резонансные кривые имеют тогда лишь один максимум (§ 55).

#### § 47. Практическое значение явления резонанса в электрических цепях

Явление резонанса в электрических цепях весьма широко используется в современной электротехнике и наиболее широко в технике высокой частоты.

Генераторы высокой частоты, применяемые в радиотехнике, содержат в себе в качестве основного элемента колебательный контур, колебания тока и напряжения в котором происходят с резонансной частотой или с частотой, весьма близкой к резонансной. Антенны передающих и приемных радиостанций вместе с включенными в их цепь катушками или конденсаторами представляют собой также колебательные контуры, настраиваемые в резонанс с частотой колебаний тока в ламповом генераторе в случае передающей станции и с частотой колебаний напряженностей поля в электромагнитной волне в случае приемной станции. Радиоприемники содержат в себе настраиваемые в резонанс колебательные контуры. Настройка в резонанс на частоту одной из передающих радиостанций колебательных контуров в радиоприемнике, в том числе и контура антенны, обеспечивает возможность выделить в приемнике эту передающую радиостанцию из числа многих работающих одновременно.

Применение этой же идеи в проволочной междугородной телефонной связи позволяет осуществить так называемую многократную телефонию, т. е. осуществить по одной паре проводов одновременно несколько разговоров. При этом те или иные колебания выделяются на конечных пунктах к различным приемникам с помощью резонансных устройств.

В таких случаях эти устройства несколько усложняются по сравнению с выше рассмотренными простейшими цепями, так как здесь ставится более сложная задача выделить целую полосу частот, отвечающих диапазону частот звуковых колебаний. Обычно каждому телефонному разговору, так же как каждой передающей станции при радиопередаче отвечает определенная высокая частота, называемая несущей частотой. На колебания тока с этой частотой накладываются колебания с звуковой частотой. Этот процесс, назы-

ваемый модуляцией колебаний, будет рассмотрен в дальнейшем подробно. Сейчас существенно отметить, что около каждой несущей частоты образуется полоса частот, отвечающая диапазону частот звуковых колебаний, и оконечные устройства в телефонной передаче должны выделять определенную полосу частот, прилегающую к той или иной несущей частоте. Такие устройства называют электрическими фильтрами. В дальнейшем мы ознакомимся с принципом их устройства и их работы.

В радиоприемных устройствах точно так же существенно обеспечить пропускание и усиление в устройстве в одинаковой мере всей полосы частот, соответствующей диапазону звуковых частот, чтобы не было искажения речи и художественной передачи. С этой целью может быть использована система из двух связанных контуров, имеющая резонансную кривую, показанную на рис. 80. Подбирая надлежащим образом коэффициент связи и затухание контура, можно получить кривую с малым изменением тока — в пределах изменения частоты от  $\omega'$  до  $\omega''$  и с крутыми спадами за пределами этого диапазона частоты.

Явление резонанса используется в радиотехнике для измерения частоты колебаний или отвечающей ей длины электромагнитной волны с помощью измерительных приборов, называемых волномерами. Волномер содержит колебательный контур с градуированными индуктивностью и емкостью и прибором, указывающим ток в контуре. Колебательный контур волномера связывается индуктивно с контуром устройства, в котором необходимо измерить частоту тока. При плавном изменении емкости волномера добиваются максимума тока в контуре волномера и по величине индуктивности и емкости контура волномера судят о частоте.

Явление резонанса широко используется и в других электроизмерительных устройствах, а также в устройствах электроавтоматики.

Компенсация отстающей реактивной составляющей тока в мощных приемных устройствах электроэнергетических систем с помощью подключаемых параллельно этим устройствам конденсаторов или перевозбужденных синхронных двигателей, по сути дела, также представляет собой мероприятие, при котором достигается резонанс. Но в этом случае явление резкого увеличения тока в отдельных ветвях по сравнению с общим током, характерное для резонанса в контурах с малыми потерями энергии, не имеет места, так как эквивалентная активная проводимость таких устройств велика по сравнению с их эквивалентной индуктивной проводимостью.

Все вышеперечисленные примеры относились к случаям, когда явление резонанса в электрической цепи используется для практических целей. Однако в случаях, когда явление резонанса в электрической цепи возникает, не будучи специально предусмотренным, оно может повести к нежелательным последствиям. Особенно опасен в этом отношении резонанс при последовательном соединении

индуктивных и емкостных элементов цепи при малом активном сопротивлении цепи, так как при этом на индуктивных и на емкостных элементах могут появиться весьма высокие напряжения. Подобные явления могут, например, возникнуть при включении к зажимам генератора или трансформатора длинной линии передачи или кабеля, не замкнутых на другом их конце на приемник энергии. Генератор и трансформатор обладают индуктивностью, а линия и кабель обладают емкостью и индуктивностью. При отсутствии активной нагрузки в конце линии затухание такой цепи невелико, и легко могут появиться перенапряжения, если частота близка к резонансной. Следует отметить, что резонанс в подобных цепях может возникнуть и не для основной гармоники, а для высших гармонических, если они содержатся в кривой э. д. с. генератора или в кривой приложенного к зажимам цепи напряжения.

---

---

## ГЛАВА ПЯТАЯ

### ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ И ЦЕПНЫЕ СХЕМЫ

#### § 48. Уравнения четырехполюсника

Генератор и приемник энергии обычно соединяют через промежуточную цепь, которая в общем случае может быть сколь угодно сложна. Такого рода сколь угодно сложную цепь, имеющую два входных и два выходных зажима, условимся называть *четыре-полусником*. В настоящей главе за исключением ее последнего параграфа мы будем рассматривать только *пассивные* четырехполюсники, т. е. такие, внутри которых нет источников энергии, причем будем предполагать, что параметры всех элементов четырехполюсника постоянны.

В случае линейных четырехполюсников, которые мы здесь только и будем рассматривать, пассивный четырехполюсник, вообще говоря, может содержать внутри себя источники энергии, но с обязательным условием, что действие их взаимно компенсируется внутри четырехполюсника таким образом, что напряжения на обоих парах разомкнутых и отключенных от внешних цепей зажимов четырехполюсника равны нулю.

Действие таких полностью компенсирующих друг друга внутри четырехполюсника источников энергии совершенно не обнаруживается во внешних цепях, присоединенных к входным и выходным зажимам четырехполюсника. Поскольку основной задачей дальнейшего изложения будет отыскание общих свойств четырехполюсника по отношению к его входным и выходным зажимам, то для вывода соотношений, характеризующих эти свойства, мы без какого-либо ограничения задачи можем положить, что внутри пассивного четырехполюсника отсутствуют источники энергии, что и будет принято в дальнейшем.

На рис. 81 приведены примеры простейших четырехполюсников, а именно: линия передачи, трансформатор и мостовая схема. Каждое из этих устройств представляет собою пассивный четырехполюсник, так как имеет два входных ( $1'$ ,  $1''$ ) и два выходных зажима и не содержит внутри себя источников энергии.

В последующем, рассматривая установившиеся синусоидальные режимы, мы покажем, что пассивный четырехполюсник характеризуется тремя независимыми параметрами, которые можно опреде-

лить расчетом, если известны внутреннее строение четырехполюсника и частота напряжения, приложенного к его входным зажимам. Параметры четырехполюсника можно определить и экспериментально, причем для выполнения соответствующих опытов достаточно иметь доступ только к его входным и выходным зажимам. Такая возможность имеет особо существенное значение в тех случаях, когда внутреннее строение четырехполюсника неизвестно.

Для четырехполюсников можно установить две линейные зависимости, связывающие напряжения на его входных и выходных зажимах и токи в его входном и выходном контурах. Коэффициенты, входящие в эти зависимости, могут быть выражены через параметры четырехполюсника. Упомянутые зависимости между напряжениями и токами дают возможность изучить общие свойства четырехполюсников. Так, например, пользуясь

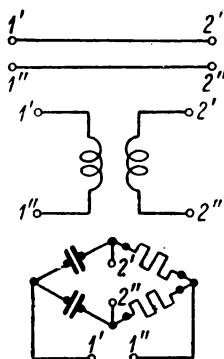


Рис. 81

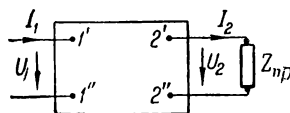


Рис. 82

этим зависимостями, можно показать, что для каждого пассивного четырехполюсника существуют две очень простые эквивалентные схемы, каждая из которых состоит всего из трех элементов. В ряде случаев замена четырехполюсника такой эквивалентной схемой позволяет значительно упростить исследование его работы.

Рассмотрим работу четырехполюсника при условии, что к его входным зажимам (1', 1'') приложено напряжение  $U_1$ , а выходные зажимы (2', 2'') замкнуты на сопротивление приемника  $Z_{np}$ . Токи во входном и выходном контурах и напряжение на выходных зажимах обозначим, соответственно,  $I_1$ ,  $I_2$  и  $U_2$  (рис. 82). При этом  $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z_{np}$ . Пользуясь методом контурных токов (ч. 1), для нашей сложной цепи, состоящей из входного и выходного контуров, и всех контуров, целиком находящихся внутри четырехполюсника, можно написать следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 + Z_{13}\dot{I}_3 + \dots + Z_{1n}\dot{I}_n &= \dot{U}_1; \\ Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 + Z_{23}\dot{I}_3 + \dots + Z_{2n}\dot{I}_n &= 0; \\ \dots & \\ \dots & \end{aligned}$$

причем правые части всех уравнений, за исключением первого уравнения, равны нулю, так как в соответствии с вышесказанным принимаем, что внутри пассивного четырехполюсника источники э. д. с. отсутствуют. Обозначим ту часть собственного сопротивления  $Z_{22}$  выходного контура, которая находится внутри четырехполюсника, через  $Z'_{22}$ ; тогда имеем:

$$Z_{22} = Z'_{22} + Z_{np}; \quad Z_{22}I_2 = Z'_{22}I_2 + Z_{np}I_2 = Z'_{22}I_2 + \dot{U}_2.$$

Подставив это значение  $Z_{22}I_2$  во второе уравнение и перенеся  $\dot{U}_2$  в правую часть, приведем нашу систему уравнений к виду:

$$\begin{aligned} Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + Z_{13}I_3 + \dots + Z_{1n}I_n &= \dot{U}_1; \\ Z_{21}I_1 + Z'_{22}I_2 + Z_{23}I_3 + \dots + Z_{2n}I_n &= -\dot{U}_2; \\ \dots & \\ \dots & \end{aligned}$$

Так как правые части всех уравнений этой системы, кроме первого и второго, равны нулю, то, решая ее для  $I_1$  и  $I_2$ , получим (ч. 1):

$$I_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} \dot{U}_1 - \frac{\Delta_{21}}{\Delta} \dot{U}_2; \quad I_2 = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} \dot{U}_1 - \frac{\Delta_{22}}{\Delta} \dot{U}_2,$$

откуда, приняв во внимание, что  $\Delta_{21} = \Delta_{12}$ , найдем:

$$\dot{U}_1 = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{12}} \dot{U}_2 + \frac{\Delta}{\Delta_{12}} I_2; \quad I_1 = \frac{\Delta_{22}\Delta_{11} - \Delta_{12}^2}{\Delta_{12}\Delta} \dot{U}_2 + \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{12}} I_2,$$

и положив

$$\frac{\Delta_{22}}{\Delta_{12}} = A; \quad \frac{\Delta}{\Delta_{12}} = B; \quad \frac{\Delta_{22}\Delta_{11} - \Delta_{12}^2}{\Delta_{12}\Delta} = C; \quad \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{12}} = D,$$

приведем эти зависимости к виду:

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + BI_2; \quad I_1 = C\dot{U}_2 + DI_2.$$

Таким образом, мы установили, что напряжения  $\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_2$  и токи  $I_1$  и  $I_2$  связаны между собой двумя линейными зависимостями, которые называют *уравнениями четырехполюсника*.

Коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , входящие в эти зависимости и называемые *постоянными четырехполюсника*, при неизменной частоте являются постоянными комплексными числами, которые зависят лишь от активных и реактивных сопротивлений элементов четырехполюсника. Заметим, что  $A$  и  $D$  имеют нулевую размерность,  $B$  имеет размерность сопротивления и  $C$  — размерность проводимости.

Между постоянными пассивного четырехполюсника существует важная связь, а именно:

$$AD - BC = 1.$$

Действительно, имеем:

$$AD - BC = \frac{\Delta_{22}\Delta_{11}}{\Delta_{12}^2} - \frac{\Delta_{22}\Delta_{11} - \Delta_{12}^2}{\Delta_{12}^2} = 1.$$

Если поменять местами входные и выходные зажимы четырехполюсника рис. 82, то получим схему, изображенную на рис. 83. Из сопоставления рис. 82 и 83 видим, что это соответствует замене  $\dot{U}_1$  на  $\dot{U}_2$ ,  $\dot{U}_2$  на  $\dot{U}_1$ ,  $\dot{I}_1$  на  $-\dot{I}_2$  и  $\dot{I}_2$  на  $-\dot{I}_1$ . Произведя такую замену в уравнениях четырехполюсника:

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2; \quad \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2,$$

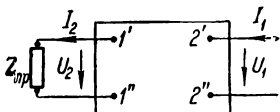


Рис. 83

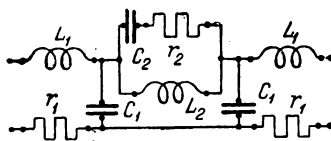


Рис. 84

соответствующих схеме рис. 82, и учитывая, что  $AD - BC = 1$ , получим уравнения четырехполюсника, соответственно схеме рис. 83 в виде:

$$\dot{U}_1 = D\dot{U}_2 + B\dot{I}_2; \quad \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + A\dot{I}_2.$$

Следовательно, если поменять местами входные и выходные зажимы четырехполюсника, то все изменения в уравнениях четырехполюсника сведутся к тому, что коэффициенты  $A$  и  $D$  поменяются местами.

Условимся называть четырехполюсник *симметричным*, если при рассмотрении его со стороны выходных зажимов он представляет собою точно такую же цепь, как и при рассмотрении со стороны входных зажимов. Пример такого четырехполюсника приведен на рис. 84. Из определения симметричного четырехполюсника непосредственно следует, что между его постоянными существует дополнительная связь:

$$A = D,$$

так как уравнения симметричного четырехполюсника должны остаться неизменными при взаимной замене входных и выходных зажимов.

#### § 49. Схемы, эквивалентные пассивному четырехполюснику

Из того обстоятельства, что *пассивный четырехполюсник характеризуется тремя независимыми постоянными*, следует, что его можно заменить трехэлементной схемой. Таких схем возможно две:



Т-образная (рис. 85), представляющая собою не что иное, как соединение звездой, и П-образная (рис. 86), представляющая собою соединение треугольником.

Установим связь между параметрами этих схем и постоянными четырехполюсника. Для Т-образной схемы имеем:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + (\dot{I}_2 Z_2 + \dot{U}_2) Y_0 = Y_0 \dot{U}_2 + (1 + Z_2 Y_0) \dot{I}_2,$$

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 Z_1 + \dot{I}_2 Z_2 + \dot{U}_2 = (1 + Z_1 Y_0) \dot{U}_2 + (Z_1 + Z_2 + Z_1 Z_2 Y_0) \dot{I}_2,$$

и, следовательно,

$$A = 1 + Z_1 Y_0, \quad B = Z_1 + Z_2 + Z_1 Z_2 Y_0, \quad C = Y_0, \quad D = 1 + Z_2 Y_0,$$

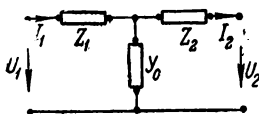


Рис. 85

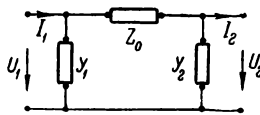


Рис. 86

и обратно:

$$Y_0 = C, \quad Z_1 = \frac{A-1}{C}, \quad Z_2 = \frac{D-1}{C}.$$

Для П-образной схемы имеем:

$$\dot{U}_1 = Z_0 (\dot{I}_2 + \dot{U}_2 Y_2) + \dot{U}_2 = (1 + Y_2 Z_0) \dot{U}_2 + Z_0 \dot{I}_2,$$

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_1 Y_1 + \dot{U}_2 Y_2 + \dot{I}_2 = (Y_1 + Y_2 + Y_1 Y_2 Z_0) \dot{U}_2 + (1 + Y_1 Z_0) \dot{I}_2,$$

и, следовательно,

$$A = 1 + Y_2 Z_0, \quad B = Z_0, \quad C = Y_1 + Y_2 + Y_1 Y_2 Z_0, \quad D = 1 + Y_1 Z_0,$$

и обратно:

$$Z_0 = B, \quad Y_1 = \frac{D-1}{B}, \quad Y_2 = \frac{A-1}{B}.$$

Из полученных выражений, в частности, вытекает, что схемы, эквивалентные симметричным четырехполюсникам, сами также симметричны, т. е. в этом случае  $Z_1 = Z_2$  и  $Y_1 = Y_2$ , как и следовало ожидать.

## § 50. Холостой ход и короткое замыкание четырехполюсника

Рассмотрим два предельных режима работы четырехполюсника, а именно *холостой ход*, когда сопротивление приемника  $Z_{np} = \infty$ , и *короткое замыкание*, когда  $Z_{np} = 0$ . Осуществим эти режимы ра-

боты так, чтобы при холостом ходе напряжение на зажимах приемника было равно  $\dot{U}_2$ , а при коротком замыкании ток в приемнике был равен  $\dot{I}_2$ . Обозначим напряжение на входных зажимах четырехполюсника и ток во входном контуре при холостом ходе  $\dot{U}_{10}$  и  $\dot{I}_{10}$ , а при коротком замыкании  $\dot{U}_{1k}$  и  $\dot{I}_{1k}$ . Тогда для холостого хода из уравнений четырехполюсника, полагая  $\dot{I}_2 = 0$ , получим:

$$\dot{U}_{10} = A\dot{U}_2; \quad \dot{I}_{10} = C\dot{U}_2,$$

а для короткого замыкания, полагая  $\dot{U}_2 = 0$ , найдем:

$$\dot{U}_{1k} = B\dot{I}_2; \quad \dot{I}_{1k} = D\dot{I}_2.$$

Вводя эти значения в уравнения четырехполюсника, имеем:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{10} + \dot{U}_{1k}; \quad \dot{I}_1 = \dot{I}_{10} + \dot{I}_{1k}.$$

Из последних выражений следует, что напряжение  $\dot{U}_1$  и ток  $\dot{I}_1$  при любом заданном режиме ( $\dot{U}_2, \dot{I}_2$ ) работы приемника можно определить путем сложения напряжений  $\dot{U}_{10}$  и  $\dot{U}_{1k}$  и токов  $\dot{I}_{10}$  и  $\dot{I}_{1k}$ , т. е. наложением соответствующих режимов холостого хода и короткого замыкания.

Из полученных выше соотношений видно, что  $A$  представляет собою отношение напряжений на входных и выходных зажимах при холостом ходе четырехполюсника, а  $D$  — отношение токов во входном и выходном контурах его при коротком замыкании. Обозначив сопротивление короткого замыкания и проводимость холостого хода через  $Z_{1k}$  и  $Y_{10}$  при определении их со стороны входных зажимов и через  $Z_{2k}$  и  $Y_{20}$  при определении со стороны выходных зажимов, найдем:

$$Z_{1k} = \frac{\dot{U}_{1k}}{\dot{I}_{1k}} = \frac{B}{D}; \quad Y_{10} = \frac{\dot{I}_{10}}{\dot{U}_{10}} = \frac{C}{A};$$

Приняв во внимание, что при взаимной замене входных и выходных зажимов четырехполюсника постоянные  $B$  и  $C$  не изменятся, а  $A$  и  $D$  поменяются местами, получим:

$$Z_{2k} = \frac{B}{A}; \quad Y_{20} = \frac{C}{D}.$$

Следовательно, имеем:

$$B = DZ_{1k} = AZ_{2k}; \quad C = AY_{10} = DY_{20},$$

причем

$$AD - BC = AD(1 - Z_{1k}Y_{10}) = AD(1 - Z_{2k}Y_{20}) = 1.$$

Поставив опыты холостого хода и короткого замыкания со стороны входных и со стороны выходных зажимов и измерив в каждом

из этих четырех опытов ток, напряжение и мощность, можно экспериментально определить  $Y_{10}$ ,  $Z_{1k}$ ,  $Y_{20}$ ,  $Z_{2k}$  и, вычислив

$$AD = \frac{1}{1 - Y_{10}Z_{1k}} = \frac{1}{1 - Y_{20}Z_{2k}} \quad \text{и} \quad \frac{A}{D} = \frac{Z_{1k}}{Z_{2k}} = \frac{Y_{20}}{Y_{10}},$$

найти  $A$  и  $D$ , а затем  $B$  и  $C$ . Так как из четырех постоянных независимыми являются лишь три, то из упомянутых опытов необходимы только три, а четвертый опыт может служить для контроля.

Для симметричного четырехполюсника имеем:

$$A = D; \quad Z_{1k} = Z_{2k}; \quad Y_{10} = Y_{20},$$

т. е. симметричный четырехполюсник характеризуется лишь двумя независимыми постоянными, и для определения его постоянных достаточно произвести два опыта — один опыт холостого хода и один опыт короткого замыкания.

В настоящем разделе мы рассматриваем только такие четырехполюсники, все элементы которых линейны, т. е. имеют параметры, не зависящие от тока и напряжения. Для таких четырехполюсников безразлично, при каких значениях напряжений  $U_{10}$  и  $U_{1k}$  будут произведены опыты холостого хода и короткого замыкания.

## § 51. Повторное сопротивление и коэффициент распространения симметричного четырехполюсника

Условимся называть *повторным сопротивлением* четырехполюсника такое сопротивление  $Z$ , замкнув на которое выходные зажимы четырехполюсника, мы будем иметь между его входными зажимами точно такое же сопротивление  $Z$ .

Пусть выходные зажимы симметричного четырехполюсника замкнуты на его повторное сопротивление  $Z$  и, следовательно,  $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z$ . Тогда из уравнений симметричного четырехполюсника

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2; \quad \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + A\dot{I}_2$$

получим:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \left( A + \frac{B}{Z} \right); \quad \dot{I}_1 = \dot{I}_2 (CZ + A).$$

Разделив первое равенство на второе и приняв во внимание, что в нашем случае по определению повторного сопротивления  $\dot{U}_1 : \dot{I}_1 = \dot{U}_2 : \dot{I}_2 = Z$ , найдем:

$$Z = Z \frac{A + B/Z}{CZ + A} \quad \text{или} \quad A + \frac{B}{Z} = CZ + A,$$

откуда

$$Z = \sqrt{\frac{B}{C}}.$$

Из уравнений симметричного четырехполюсника вытекает также, что при  $B = 0$  и  $C = 0$

$$\dot{U}_1 = A \dot{U}_2; \quad \dot{I}_1 = A \dot{I}_2,$$

и, следовательно, в этом особом случае любое конечное сопротивление является повторным.

Из выражений, связывающих постоянные симметричного четырехполюсника с параметрами эквивалентных Т- и П-образных схем, а именно:

$$B = 2Z_1 + Z_1^2 Y_0, \quad C = Y_0 \text{—для Т-образной схемы,}$$

$$B = Z_0, \quad C = 2Y_1 + Y_1^2 Z_0 \text{—для П-образной схемы,}$$

следует, что условия  $B = 0$  и  $C = 0$  эквивалентны условиям  $Y_0 = 0$  и  $Z_1 = 0$  или  $Z_0 = 0$  и  $Y_1 = 0$ , т. е. что эти условия могут быть осуществлены лишь для четырехполюсников, состоящих только из реактивных элементов, настроенных в резонанс (рис. 87). Поэтому для простейших Т- и П-образных схем, средним элементом которых является или реактивная катушка, или конденсатор, условия  $B = 0$  и  $C = 0$  не могут быть выполнены.

Из выражений для  $B$  и  $C$  видно, что для четырехполюсников, состоящих из реактивных элементов, эти постоянные будут мнимыми числами, и поэтому повторное сопротивление  $Z = \sqrt{B/C}$  является или вещественным, или мнимым числом.

При замыкании симметричного четырехполюсника на его повторное сопротивление  $Z = \sqrt{B/C}$ , т. е. при  $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z$ , имеем:

$$\dot{U}_1 = A \dot{U}_2 + B \dot{I}_2 = \dot{U}_2 (A + \sqrt{BC}); \quad \dot{I}_1 = C \dot{U}_2 + A \dot{I}_2 = \dot{I}_2 (A + \sqrt{BC}).$$

Следовательно, в этом случае

$$\dot{U}_1 : \dot{U}_2 = \dot{I}_1 : \dot{I}_2 = A + \sqrt{BC}.$$

Эти отношения целесообразно представить в иной форме, положив

$$A + \sqrt{BC} = e^\gamma \text{ или } \gamma = \ln(A + \sqrt{BC}),$$

где  $\gamma = \beta + j\alpha$  — комплексное число, называемое коэффициентом распространения симметричного четырехполюсника.

Тогда при замыкании симметричного четырехполюсника на повторное сопротивление получим:

$$\dot{U}_1 : \dot{U}_2 = \dot{I}_1 : \dot{I}_2 = e^\gamma = e^\beta e^{j\alpha}$$

или

$$\gamma = \ln(\dot{U}_1 : \dot{U}_2) = \ln(\dot{I}_1 : \dot{I}_2).$$

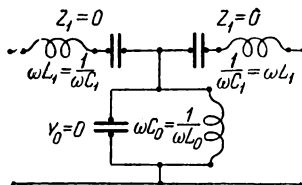


Рис. 87

Из полученных отношений видно, что в рассматриваемом случае при переходе от входных зажимов к выходным фазы напряжения и тока уменьшаются на угол  $\alpha$ , а амплитуды их уменьшаются в  $e^{\beta}$  раз или, иными словами, натуральный логарифм отношения этих амплитуд уменьшается в  $\beta$  раз. В соответствии с этим  $\alpha$  называют коэффициентом фазы, а  $\beta$  — коэффициентом затухания.

Покажем, что если в четырехполюснике имеются потери, то  $\beta > 0$ . Для этого рассмотрим отношение мощностей  $P_1$  и  $P_2$  на входных и выходных зажимах четырехполюсника, выходные зажимы которого замкнуты на повторное сопротивление  $Z = ze^{j\theta}$ . В этом случае разности фаз напряжения и тока у входных и выходных зажимов четырехполюсника одинаковы и равны аргументу  $\theta$  комплекса  $Z$ . Поэтому имеем:

$$P_1 : P_2 = U_1 I_1 \cos \vartheta : U_2 I_2 \cos \vartheta = e^{2\beta},$$

и, следовательно,  $\beta > 0$ , так как при наличии потерь  $P_1 > P_2$ . Заметим, что при отсутствии потерь, т. е. в четырехполюсниках, состоящих из реактивных элементов,  $\beta$  может иметь значения как равные нулю, так и отличные от нуля.

Так как  $e^{\gamma} = A + \sqrt{BC}$  и  $A^2 - BC = 1$ , то  $e^{-\gamma} = A - \sqrt{BC}$ , и для гиперболических косинуса и синуса от комплексного аргумента  $\gamma$  найдем:

$$\operatorname{ch} \gamma = \frac{1}{2} (e^{\gamma} + e^{-\gamma}) = A; \quad \operatorname{sh} \gamma = \frac{1}{2} (e^{\gamma} - e^{-\gamma}) = \sqrt{BC}.$$

Далее, приняв во внимание, что  $Z = \sqrt{B/C}$ , получим:

$$A = \operatorname{ch} \gamma; \quad B = Z \operatorname{sh} \gamma; \quad C = \frac{\operatorname{sh} \gamma}{Z},$$

и, следовательно, уравнения симметричного четырехполюсника можно написать в виде:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma + \dot{I}_2 Z \operatorname{sh} \gamma; \quad \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_2}{Z} \operatorname{sh} \gamma + \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma.$$

Из этих уравнений при холостом ходе, когда  $I_2 = 0$ , имеем:

$$\dot{U}_{10} = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma; \quad \dot{I}_{10} = \frac{\dot{U}_2}{Z} \operatorname{sh} \gamma; \quad Y_{10} = \frac{\dot{I}_{10}}{\dot{U}_{10}} = \frac{\operatorname{th} \gamma}{Z},$$

а при коротком замыкании, когда  $\dot{U}_2 = 0$ ,

$$\dot{U}_{1k} = \dot{I}_2 Z \operatorname{sh} \gamma; \quad \dot{I}_{1k} = \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma; \quad Z_{1k} = \frac{\dot{U}_{1k}}{\dot{I}_{1k}} = Z \operatorname{th} \gamma.$$

Из последних выражений видно, что по опытам холостого хода и короткого замыкания можно определить  $Z$  и  $\gamma$ , так как

$$Z = \sqrt{Z_{1k} : Y_{10}} \quad \text{и} \quad \operatorname{th} \gamma = \sqrt{Z_{1k} Y_{10}}.$$

В заключение заметим, что постоянные  $Z$  и  $\gamma$  так же, как  $A$ ,  $B$  и  $C$ , целиком определяются структурой и параметрами четырехполюсника и, вообще говоря, зависят от частоты.

## § 52. Симметричные однородные цепные схемы

В технических устройствах генератор и приемник иногда соединяют через цепь, состоящую из ряда четырехполюсников, выходные зажимы каждого из которых соединены с входными зажимами последующего. Такого рода цепи называют *цепными схемами*, а отдельные четырехполюсники, из которых они состоят, — *звеньями* этой цепной схемы. Всю цепную схему также можно рассматривать

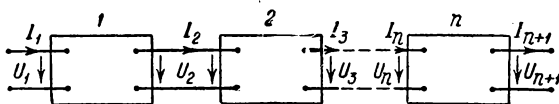


Рис. 88

как четырехполюсник, причем его постоянные можно или определить экспериментально указанным в § 50 способом, или вычислить по постоянным звеньев, из которых состоит цепная схема.

Рассмотрим цепную схему, состоящую из  $n$  одинаковых симметричных звеньев (рис. 88), которую в дальнейшем будем называть *симметричной однородной цепной схемой*. Покажем, что повторное сопротивление  $Z$  звена является в то же время и повторным сопротивлением всей схемы. Пусть цепная схема замкнута на повторное сопротивление звена  $Z$ . Тогда сопротивление между входными зажимами последнего или, что то же, сопротивление между выходными зажимами предпоследнего звена опять равно  $Z$ . Следовательно, предпоследнее звено также замкнуто на повторное сопротивление. Продолжая это рассуждение, нетрудно убедиться, что если симметричная однородная цепная схема замкнута на сопротивление, равное повторному сопротивлению  $Z$  звена, то в месте сопряжения двух любых звеньев сопротивление по направлению к концу цепи равно  $Z$ , а поэтому и сопротивление всей цепной схемы в этом случае равно  $Z$ .

На основании изложенного при замыкании рассматриваемой цепной схемы на сопротивление  $Z$  имеем:

$$\dot{U}_1 : \dot{I}_1 = \dot{U}_2 : \dot{I}_2 = \dots = \dot{U}_n : \dot{I}_n = \dot{U}_{n+1} : \dot{I}_{n+1} = Z.$$

Установим связь между коэффициентами распространения  $\gamma_1 = \beta_1 + j\alpha_1$  и  $\gamma_n = \beta_n + j\alpha_n$  одного звена и всей симметричной однородной цепной схемы, состоящей из  $n$  звеньев. Пусть цепная схема замкнута на повторное сопротивление  $Z$  звена, являющееся

в то же время и повторным сопротивлением всей цепной схемы. Тогда по определению:

$$\gamma_1 = \ln(\dot{U}_1 : \dot{U}_2); \quad \gamma_n = \ln(\dot{U}_1 : \dot{U}_{n+1}).$$

Так как все звенья одинаковы и каждое из них в рассматриваемом случае замкнуто на сопротивление, равное  $Z$ , то

$$\dot{U}_1 : \dot{U}_2 = \dot{U}_2 : \dot{U}_3 = \dots = \dot{U}_n : \dot{U}_{n+1} = e^{\gamma_1} = e^{\beta_1 + j\alpha_1},$$

т. е. в этом случае фазы напряжения, а также тока, при переходе от любого звена к последующему уменьшаются на один и тот же угол  $\alpha_1$ , а амплитуды напряжения и тока изменяются вдоль схемы по показательному закону, причем натуральный логарифм отношения амплитуд напряжений, а также и амплитуд токов, до и после прохождения звена для всех звеньев одинаков и равен  $\beta_1$ . Поэтому для симметричной однородной цепной схемы имеем:

$$\gamma_n = \ln \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_{n+1}} = \ln \left( \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \cdot \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_3} \cdot \frac{\dot{U}_3}{\dot{U}_4} \cdot \dots \cdot \frac{\dot{U}_n}{\dot{U}_{n+1}} \right) = n\gamma_1,$$

откуда следует, что для нее коэффициент затухания  $\beta_n = n\beta_1$  и коэффициент фазы  $\alpha_n = n\alpha_1$  пропорциональны числу звеньев.

Пользуясь обозначениями рис. 88, уравнения симметричной однородной цепной схемы можно написать в виде:

$$\dot{U}_1 = A_n \dot{U}_{n+1} + B_n \dot{I}_{n+1}; \quad \dot{I}_1 = C_n \dot{U}_{n+1} + A_n \dot{I}_{n+1},$$

где  $A_n, B_n, C_n$  — постоянные всей цепной схемы, связанные зависимостью

$$A_n^2 - B_n C_n = 1.$$

Приняв во внимание, что для рассматриваемой цепной схемы повторное сопротивление равно повторному сопротивлению  $Z$  звена, а коэффициент распространения  $\gamma_n$  в  $n$  раз больше коэффициента распространения  $\gamma_1$  одного звена, из выражений для постоянных симметричного четырехполюсника (§ 51) имеем:

$$A_n = \operatorname{ch} \gamma_n = \operatorname{ch} n\gamma_1; \quad B_n = Z \operatorname{sh} \gamma_n = Z \operatorname{sh} n\gamma_1; \quad C_n = \frac{\operatorname{sh} \gamma_n}{Z} = \frac{\operatorname{sh} n\gamma_1}{Z},$$

и, следовательно, уравнения  $n$ -звенной цепной схемы можно представить в виде:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{n+1} \operatorname{ch} n\gamma_1 + \dot{I}_{n+1} Z \operatorname{sh} n\gamma_1; \quad \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_{n+1}}{Z} \operatorname{sh} n\gamma_1 + \dot{I}_{n+1} \operatorname{ch} n\gamma_1.$$

Уравнения с постоянными  $Z$  и  $\gamma_1$  позволяют установить связь между  $\dot{U}_1$  и  $\dot{I}_1$  и комплексами напряжения и тока в месте сопряже-

ния двух любых звеньев, для чего достаточно подставить в эти уравнения вместо  $n$  номер звена. Выражая напряжения  $\dot{U}_{k+1}$  и ток  $\dot{I}_{k+1}$  на выходной стороне  $k$ -того звена через  $\dot{U}_1$  и  $\dot{I}_1$ , получим:

$$\dot{U}_{k+1} = \dot{U}_1 \operatorname{ch} k\gamma_1 - \dot{I}_1 Z \operatorname{sh} k\gamma_1; \quad \dot{I}_{k+1} = \dot{I}_1 \operatorname{ch} k\gamma_1 - \frac{\dot{U}_1}{Z} \operatorname{sh} k\gamma_1,$$

так как  $\operatorname{ch}^2 k\gamma_1 - \operatorname{sh}^2 k\gamma_1 = 1$ .

### § 53. Частотные электрические фильтры

В технике связи часто встречается необходимость допустить к приемнику только те токи, частоты которых лежат в заданном диапазоне. Для достижения этой цели между приемником и питающим его устройством включают соответствующие четырехполюсники или цепные схемы, которые и называют *частотными электрическими фильтрами* или просто *электрическими фильтрами*. Обычно эти цепные схемы составляют из одинаковых симметричных реактивных звеньев. Электрические фильтры, пропускающие к приемнику только те токи, частоты которых лежат в пределах от  $\omega_1$  до  $\omega_2$ , называют *полосными фильтрами*. Фильтры, пропускающие к приемнику токи всех частот, кроме частот, лежащих в пределах от  $\omega_1$  до  $\omega_2$ , называют *заграждающими*. Фильтры, пропускающие к приемнику токи, частоты которых лежат в пределах от 0 до  $\omega_0$ , или токи, частоты которых лежат в пределах от  $\omega_0$  до  $\infty$ , и не пропускающие токов иных частот, называют *режущими*. Режущие фильтры можно рассматривать как частный случай и полосных и заграждающих фильтров. Развитие теории частотных фильтров тесно связано с развитием радиосвязи, а также многократного телеграфирования и телефонирования, так как в этих областях фильтры нашли широкое применение.

Условимся называть *зоной прозрачности* фильтра область, в которой лежат частоты токов, пропускаемых фильтром, а область, в которой лежат частоты токов, не пропускаемых фильтром, будем называть *зоной затухания*.

В зоне прозрачности идеальный фильтр должен пропускать токи всех частот без ослабления, т. е. ток в выходном контуре должен равняться току во входном контуре. Иными словами, в этой зоне коэффициент затухания  $\beta_n$  идеального фильтра должен равняться нулю, и, следовательно, такой фильтр должен состоять из реактивных элементов. Если  $\beta_n = 0$ , то, замкнув фильтр на сопротивление, равное его повторному сопротивлению, мы получим в оконечном сопротивлении ток, по величине равный току во входном контуре. В зоне затухания идеальный фильтр должен задерживать токи всех частот, и коэффициент затухания его в этой зоне должен равняться бесконечности.



На практике к выполнению этих условий можно только приблизиться. Так, потери в элементах фильтра можно сделать столь малыми, что практически фильтр будет реактивным. Можно подобрать элементы фильтра таким образом, что внутри заданной зоны коэффициент затухания фильтра будет равен нулю. Однако следует иметь в виду, что только для нескольких частот, лежащих в зоне прозрачности, можно добиться равенства между конечным сопротивлением и повторным сопротивлением фильтра, так как это последнее зависит от частоты. Далее, при переходе в зону затухания коэффициент затухания возрастает лишь постепенно. Так как для фильтра, составленного из  $n$  одинаковых звеньев,  $\beta_n = n\beta_1$ , где  $\beta_1$  — коэффициент затухания одного звена, то для увеличения быстроты нарастания  $\beta_n$  в зоне затухания следует брать возможно большее число звеньев. Увеличение числа звеньев увеличивает также число частот, при которых для коэффициентов схемы выполняются условия  $B_n = 0$  и  $C_n = 0$  и при которых, следовательно, повторное сопротивление схемы равно конечному сопротивлению. На практике число звеньев фильтра обычно не превосходит пяти.

Зона прозрачности фильтра, состоящего из одинаковых звеньев, и зона прозрачности его звена совпадают, так как из равенства  $\beta_n = n\beta_1$  следует, что  $\beta_n = 0$  лишь при  $\beta_1 = 0$  и, наоборот, если  $\beta_1 = 0$ , то и  $\beta_n = 0$ . Поэтому для определения границ зоны прозрачности такого фильтра достаточно найти границы этой зоны для одного звена.

Предполагая, что фильтр состоит из симметричных реактивных звеньев, в отношении постоянных  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  его звена можно утверждать, что  $A_1$  будет вещественным числом, а  $B_1$  и  $C_1$  — мнимыми числами (§ 49). При этом

$$A_1 = \operatorname{ch} \gamma_1 = \operatorname{ch} (\beta_1 + j\alpha_1) = \operatorname{ch} \beta_1 \cos \alpha_1 + j \operatorname{sh} \beta_1 \sin \alpha_1,$$

где  $\gamma_1 = \beta_1 + j\alpha_1$  — коэффициент распространения звена. В зоне прозрачности  $\beta_1 = 0$  и, следовательно,  $A_1 = \cos \alpha_1$ , т. е.  $A_1^2 \leq 1$ . В зоне затухания  $\beta_1 \neq 0$ ,  $\operatorname{sh} \beta_1 \neq 0$ , следовательно,  $\sin \alpha_1 = 0$ , т. е.  $\alpha_1 = m\pi$ , где  $m$  — целое число. Поэтому в зоне затухания  $A_1 = \pm \operatorname{ch} \beta_1$  и  $A_1^2 > 1$ . Из сказанного вытекает, что частоты, являющиеся границами зоны прозрачности звена, а следовательно, и всего фильтра должны удовлетворять уравнению  $A_1^2 = 1$ .

Из зависимости  $A_1^2 - B_1 C_1 = 1$ , связывающей постоянные звена, и из выражения для повторного сопротивления  $Z = \sqrt{B_1/C_1}$  имеем  $A_1^2 - Z^2 C_1^2 = 1$  и для зоны прозрачности, где  $A_1^2 \leq 1$ , найдем  $Z^2 C_1^2 \leq 0$ , а для зоны затухания, где  $A_1^2 > 1$ , получим  $Z^2 C_1^2 > 0$ . Так как  $C_1$  — мнимое число, то из последних неравенств следует, что в зоне прозрачности повторное сопротивление является вещественным числом, а в зоне затухания — мнимым числом.

## § 54. Зона прозрачности простейших фильтров

Определим границы зоны прозрачности и повторное сопротивление звеньев простейших полосных фильтров. Для симметричного Т-образного звена, представленного на рис. 89, вводя обозначения:

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0; \quad \frac{\omega}{\omega_0} = \eta; \quad \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho; \quad \frac{L_0}{L} = k,$$

где  $\omega$  — угловая частота внешней э. д. с., а  $k$  — коэффициент связи двух контуров, из которых состоит Т-образное звено, имеем:

$$Z_1 = j \left( \omega L - \omega L_0 - \frac{1}{\omega C} \right) = j \rho \eta \left[ (1-k) - \frac{1}{\eta^2} \right];$$

$$Y_0 = \frac{1}{j \omega L_0} = -\frac{j}{\rho \eta k}$$

и для постоянных  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  найдем (§ 49):

$$A_1 = 1 + Z_1 Y_0 = \left( 1 - \frac{1}{\eta^2} \right) : k;$$

$$C_1 = Y_0 = -\frac{j}{\rho \eta k};$$

$$B_1 = 2Z_1 + Z_1^2 Y_0 = -\frac{j \rho \eta}{k} \left[ k^2 - \left( 1 - \frac{1}{\eta^2} \right)^2 \right].$$

Обозначая через  $Z$  повторное сопротивление звена, получим:

$$Z^2 = \frac{B_1}{C_1} = \frac{Z_1}{Y_0} (2 + Z_1 Y_0) = \rho^2 \left[ k^2 \eta^2 - \left( \eta - \frac{1}{\eta} \right)^2 \right].$$

Границы  $\eta_1$  и  $\eta_2$  зоны прозрачности определим, положив  $A_1^2 = 1$ , в результате чего найдем:

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{1+k}}; \quad \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{1-k}}.$$

В зоне затухания  $\alpha_1 = m\pi$ ,  $A_1 = \operatorname{ch} \gamma_1 = \pm \operatorname{ch} \beta_1$ , и поэтому  $\operatorname{ch} \beta_1 = \pm \left( 1 - \frac{1}{\eta^2} \right) : k$ . Графики зависимостей  $z = F(\eta)$  и  $\beta_1 = F_1(\eta)$  приведены на рис. 89.

При  $k=1$ , когда  $\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  и  $\eta_2 = \infty$ , получим звено (рис. 90).

пропускающее только высокие частоты от  $\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$  до  $\omega = \infty$ .

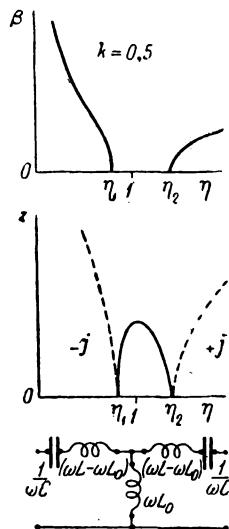


Рис. 89

Для Т-образного звена, представленного на рис. 91, полагая  $C/C_0 = k$  и сохраняя значения  $\omega_0$ ,  $\eta$  и  $\rho$ , таким же путем получим:

$$Z^2 = \rho^2 \left[ \frac{k^2}{\eta^2} - \left( \eta - \frac{1}{\eta} \right)^2 \right];$$

$$\eta_1 = \sqrt{1-k}; \quad \eta_2 = \sqrt{1+k}$$

и, кроме того, в зоне затухания  $\text{ch } \beta_1 = \pm (1 - \eta^2) : k$ . Соответствующие графики  $z = F(\eta)$  и  $\beta_1 = F(\eta)$  даны на рис. 91.

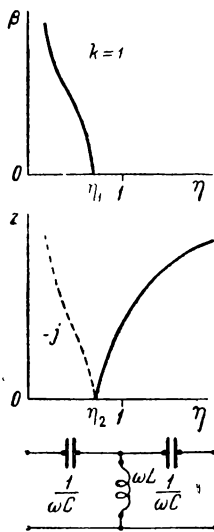


Рис. 90

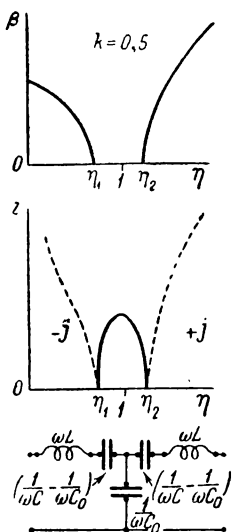


Рис. 91

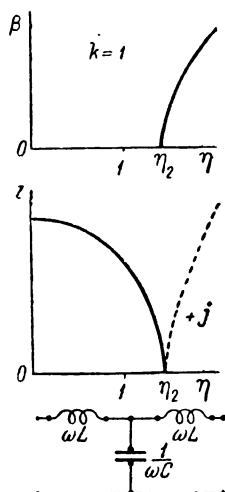


Рис. 92

При  $k=1$ , когда  $\eta_1=0$  и  $\eta_2=\sqrt{2}$ , получим звено (рис. 92), пропускающее только низкие частоты от  $\omega = 0$  до  $\omega = \omega_0 \sqrt{2}$ . Фильтры, составленные из таких звеньев, однозвенные или многозвенные, а иногда состоящие только из половины звена, применяют, в частности, при питании приемников постоянного тока от выпрямительных устройств. Выпрямленный ток, кроме постоянной составляющей, содержит еще и переменную составляющую, которую обычно желательно свести к минимуму. Реактивные катушки рассматриваемого фильтра, включенные в линию, не оказывают сопротивления постоянной составляющей, но представляют значительное сопротивление для переменной составляющей. В то же время конденсаторы, не пропускающие постоянной составляющей, представляют собою сравнительно легкий путь для замыкания переменной составляющей.

Для П-образного звена, представленного на рис. 93, положив  $\sqrt{C/L} = \gamma$  и  $C_0/C = k$  и сохранив значения  $\omega_0$  и  $\eta$ , найдем:

$$Y_1 = j \left( \omega C - \omega C_0 - \frac{1}{\omega L} \right) = j \gamma \eta \left[ (1-k) - \frac{1}{\eta^2} \right];$$

$$Z_0 = -\frac{j}{\omega C_0} = -\frac{j}{\gamma \eta k}.$$

Далее для постоянных четырехполюсника получим (§ 49):

$$A_1 = 1 + Z_0 Y_1 = \left( 1 - \frac{1}{\eta^2} \right) : k,$$

$$B_1 = Z_0 = -\frac{j}{\gamma \eta k};$$

$$C_1 = 2Y_1 + Z_0 Y_1^2 = -\frac{j \gamma \eta}{k} \left[ k^2 - \left( 1 - \frac{1}{\eta^2} \right)^2 \right],$$

откуда

$$Z^2 = 1 : \gamma^2 \left[ k^2 \eta^2 - \left( \eta - \frac{1}{\eta} \right)^2 \right];$$

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{1+k}};$$

$$\eta_2 = \frac{1}{\sqrt{1-k}}.$$

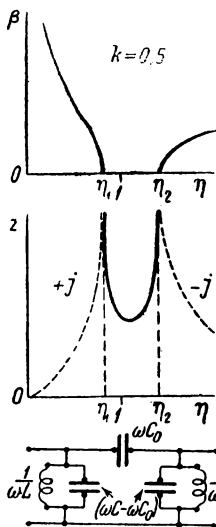


Рис. 93

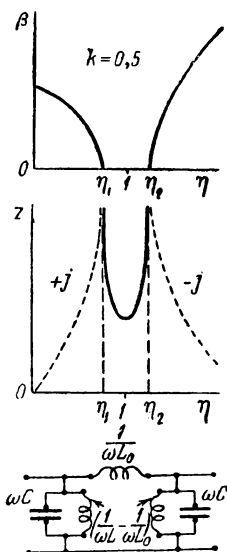


Рис. 94

и, кроме того, в зоне затухания  $\text{ch } \beta_1 = \pm \left( 1 - \frac{1}{\eta^2} \right) : k$ . Соответствующие графики  $z = F(\eta)$  и  $\beta_1 = F_1(\eta)$  даны на рис. 93.

Для П-образного звена, представленного на рис. 94, полагая  $L/L_0 = k$  и сохраняя значения  $\omega_0$ ,  $\eta$  и  $\gamma$ , таким же путем получим:

$$Z^2 = 1 : \gamma^2 \left[ \frac{k^2}{\eta^2} - \left( \eta - \frac{1}{\eta} \right)^2 \right];$$

$$\eta_1 = \sqrt{1-k}, \quad \eta_2 = \sqrt{1+k}$$

и, кроме того, в зоне затухания  $\text{ch } \beta_1 = \pm (1 - \eta^2) : k$ . Соответствующие графики  $z = F(\eta)$  и  $\beta_1 = F_1(\eta)$  даны на рис. 94.

Полагая в рассмотренных П-образных звеньях  $k = 1$ , мы получим в первом случае звено, пропускающее только токи высоких частот ( $\eta_1 = 1/\sqrt{2}$ ,  $\eta_2 = \infty$ ), а во втором случае звено, пропускающее только токи низких частот ( $\eta_1 = 0$ ;  $\eta_2 = \sqrt{2}$ ).

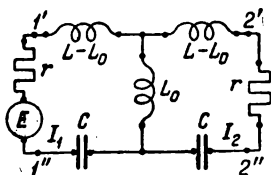
Из кривых  $z = F(\eta)$  и  $\beta_1 = F_1(\eta)$  для рассмотренных звеньев видно, что с изменением частоты повторное сопротивление в зоне

прозрачности заметно изменяется, а коэффициент затухания при переходе из зоны прозрачности в зону затухания возрастает недостаточно резко. Применяя звенья с большим числом элементов, а также многозвенные фильтры, можно приблизить эти зависимости к условиям идеальной фильтрации.

В заключение заметим, что фильтрующие свойства четырехполюсников и цепных схем лучше оценивать не по виду зависимостей  $z = F(\eta)$  и  $\beta_1 = F_1(\eta)$ , а по виду резонансной кривой, дающей зависимость тока в оконечном сопротивлении от частоты приложенного к входным зажимам четырехполюсника или цепной схемы напряжения при постоянстве действующего значения этого напряжения.

### § 55. Резонансная кривая реактивного Т-образного звена

Определим вид резонансной кривой симметричного реактивного Т-образного звена, замкнутого на оконечное активное сопротивление  $r$ . Пусть ко входным зажимам  $1'-1''$  этого звена (рис. 95) приключен генератор, э. д. с. которого  $E = \text{const}$  и внутреннее сопротивление которого равно оконечному сопротивлению  $r$ . Тогда всю цепь можно рассматривать как два одинаковых, индуктивно связанных контура. В дальнейшем воспользуемся обозначениями § 54, а затухание каждого из контуров обозначим  $d$ , причем



$$d = r : \sqrt{L/C} = r : \rho.$$

Рис. 95

Можно утверждать, что ток  $I_2$  в оконечном сопротивлении будет иметь наибольшее значение, когда это сопротивление окажется равным повторному сопротивлению Т-образного звена. Действительно, при выполнении этого условия генератор будет замкнут на внешнее сопротивление, равное его внутреннему сопротивлению. При этом генератор будет отдавать во внешнюю цепь наибольшую мощность, равную  $\frac{E^2}{4r}$  (§ 35), а так как в реактивном

Т-образном звене мощность не расходуется, то и мощность в оконечном сопротивлении, а следовательно, и ток  $I_2$  будут иметь наибольшие возможные значения. При выполнении указанного условия комплекс полного сопротивления всей цепи равен  $2r$  и в цепи существует резонанс, так как ток  $I_1$  совпадает по фазе с  $E$ , причем  $I_2 = I_1 = \frac{E}{2r}$ . Следовательно, значения  $\eta$ , при которых ток  $I_2$  имеет максимумы и которые мы обозначим через  $\eta_L$ , можно определить из условия:

$$Z = r = \rho d,$$

где  $Z$  — повторное сопротивление Т-образного звена. В § 54 показано, что для рассматриваемого Т-образного звена  $Z^2 = \rho^2 \left[ k^2 \eta^2 - \left( \eta - \frac{1}{\eta} \right)^2 \right]$ . Поэтому условие, определяющее значения  $\eta_L$ , т. е., иными словами, определяющее частоты, при которых ток имеет максимумы, приводится к виду:

$$k^2 \eta_L^2 - \left( \eta_L - \frac{1}{\eta_L} \right)^2 = d^2$$

или

$$(1 - k^2) \eta_L^4 - (2 - d^2) \eta_L^2 + 1 = 0,$$

откуда имеем:

$$\eta_L^2 = \frac{2 - d^2 \pm \sqrt{(2 - d^2)^2 - 4(1 - k^2)}}{2(1 - k^2)}.$$

Так как физический смысл имеют лишь положительные значения  $\eta$ , то для  $\eta_L$  мы получим два значения  $\eta'_L$  и  $\eta''_L$ , при которых  $I_2$  имеет максимум. Если  $d^2 \ll 1$ , то

$$\eta'_L \approx \frac{1}{\sqrt{1 + k}}; \quad \eta''_L \approx \frac{1}{\sqrt{1 - k}},$$

т. е. мы приходим к выражениям, полученным в § 46 и 54.

Из выражения для  $\eta_L^2$  следует, что при некотором значении  $k$ , когда  $(2 - d^2)^2 = 4(1 - k^2)$ , оба максимума сольются, так как тогда  $\eta'_L = \eta''_L$ . Это значение  $k_{кр}$  коэффициента связи называют *критическим* и мы имеем:

$$k_{кр} = \sqrt{d^2 - \frac{d^4}{4}} \approx d.$$

Пока  $k > k_{кр}$ , или, как говорят, пока связь больше критической, резонансная кривая имеет два максимума и один минимум между ними. При связи, равной критической, т. е. при  $k =$

$k_{кр} = \sqrt{d^2 - \frac{d^4}{4}}$ , оба максимума и минимум

сливаются при  $\eta_m = \frac{1}{\sqrt{4 - k_{кр}^2}}$ , и при дальнейшем уменьшении связи,

т. е. при  $k < k_{кр}$ , резонансная кривая  $I_2 = F_2(\eta)$  имеет только один максимум, и в то время как при  $k > k_{кр}$  максимумы  $I_2$  имели одну и ту же величину, не зависящую от значения  $k$ , при  $k < k_{кр}$  величина максимума  $I_2$  будет уменьшаться вместе с уменьшением  $k$ . Влияние  $k$  на характер кривой  $I_2 = F_2(\eta)$  показано на рис. 96.

Рассматривая аналогичным методом вопрос о характере резонансной кривой  $I_2 = F_2(\eta)$  при емкостной связи таких же двух контуров (рис. 91) следует принять во внимание, что в этом случае, как показано в § 54,  $Z^2 = \rho^2 \left[ \frac{k^2}{\eta^2} - \left( \eta - \frac{1}{\eta} \right)^2 \right]$ . Тогда для значений  $\eta_c$ , при которых  $I_2$  имеет максимум, мы получим уравнение:

$$\eta_c^4 - (2 - d^2) \eta_c^2 + (1 - k^2) = 0,$$

откуда найдем:

$$\eta_c^2 = \frac{2 - d^2 \pm \sqrt{(2 - d^2)^2 - 4(1 - k^2)}}{2}.$$

Если  $d^2 \ll 1$ , то

$$\eta'_c \approx \sqrt{1 - k}; \quad \eta''_c \approx \sqrt{1 + k},$$

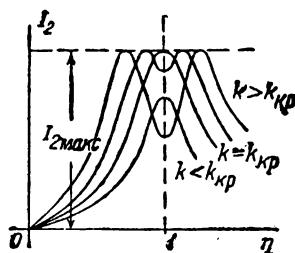


Рис. 96

т. е. мы приходим к выражениям, полученным в § 46 и 54. Для критической связи найдем опять:

$$k_{кр} = \sqrt{d^2 - \frac{d^4}{4}}.$$

При  $k = k_{кр}$  оба максимума и лежащий между ними минимум сольются при  $\tau_m = \sqrt{1 - k_{кр}^2}$  и при  $k < k_{кр}$  кривая  $I_2 = F(\tau)$  имеет только один максимум, величина которого уменьшается с уменьшением  $k$ .

Таким образом, если связь больше критической, то резонансная кривая  $I_2 = F_2(\tau)$  цепи из двух связанных контуров имеет два равных по величине максимума и один минимум. При переходе к значениям связи меньшим, чем критическое, кривая  $I_2 = F_2(\tau)$  имеет только один максимум. Так как при  $k < k_{кр}$  конечное сопротивление не может стать равным повторному сопротивлению Т-образного звена, то в этих случаях наибольшее значение мощности во вторичном контуре будет меньше той максимальной мощности  $\frac{E^2}{4r}$ , которую может отдавать генератор. При  $d > \sqrt{2}$  и  $\eta_L$  и  $\eta_C$  имеют минимальные значения, и кривая  $I_2 = F_2(\tau)$  имеет только один максимум, каково бы ни было значение  $k$ .

Путем, аналогичным изложенному, можно исследовать вид резонансных кривых П-образных звеньев рис. 93 и 94, замкнутых на активное сопротивление.

## § 56. Резонансная кривая реактивной цепной схемы

Рассмотренная в § 55 резонансная кривая  $I_2 = F_2(\tau)$ , характеризующая фильтрующие свойства Т-образного звена, имеет форму, существенно отличающуюся от прямоугольной кривой идеального фильтра. Это обстоятельство является следствием того, что для простейших звеньев не могут быть выполнены условия  $B_1 = 0$  и  $C_1 = 0$ , в соответствии с чем резонансная кривая имеет только два максимума. Для приближения формы резонансной кривой к прямоугольной необходимо увеличить число ее максимумов. Это может быть достигнуто как увеличением числа звеньев, так и усложнением их строения, т. е. путем перехода к звеньям, для которых могут быть выполнены и условия  $B_1 = 0$  и  $C_1 = 0$ .

Путем рассуждений, приведенных при исследовании резонансной кривой Т-образных звеньев, можно убедиться, что ток в конечном сопротивлении цепной схемы имеет максимумы при тех частотах, при которых повторное сопротивление схемы равно конечному сопротивлению, и что все эти максимумы одинаковы по величине. Повторное сопротивление  $Z$  цепной схемы будет равно конечному сопротивлению  $r$  или при выполнении условия

$$Z = \sqrt{\frac{B_1}{C_1}} = r, \text{ или при выполнении условий } B_n = 0 \text{ и } C_n = 0, \text{ когда любое}$$

оконечное сопротивление является повторным сопротивлением. Таким образом, задача об определении максимумов резонансной кривой цепной схемы сводится к определению частот, при которых выполняются эти условия.

Определим частоты, при которых имеет максимумы резонансная кривая цепной схемы, состоящей из Т-образных звеньев, показанных на рис. 89, предполагая, что сохраняются обозначения, принятые в § 54. Частоты, при

$$\text{которых } Z = \sqrt{\frac{B_1}{C_1}} = r, \text{ определены в § 55, где показано, что при } d^2 > 2 \text{ и}$$

$$k > d \sqrt{1 - \frac{d^2}{4}} \text{ для } \eta_L = \frac{\omega}{\omega_0} \text{ получаются два положительных значения,}$$

которым отвечают два максимума резонансной кривой.

Условия  $B_n = 0$  и  $C_n = 0$ , не зависящие от конечного сопротивления, определяются не только строением звеньев, но и их числом, и приводятся к условиям  $\beta_n = n\beta_1 = 0$  и  $\alpha_n = n\alpha_1 = m\pi$  или  $\beta_1 = 0$  и  $\alpha_1 = \frac{m\pi}{n}$ , откуда для  $A_1$  имеем:

$$A_1 = \operatorname{ch} \gamma_1 = \operatorname{ch} j\alpha_1 = \cos \alpha_1 = \cos \frac{m\pi}{n}.$$

С другой стороны, для рассматриваемого Т-образного звена, как показано в § 54,  $A_1 = 1 + Z_1 Y_0 = \left(1 - \frac{1}{\eta_L^2}\right) : k$ . Следовательно, в нашем случае

$$\eta_L^2 = \frac{1}{1 - kA_1} = \frac{1}{1 - k \cos \frac{m\pi}{n}}.$$

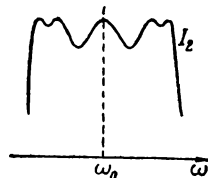


Рис. 97

Давая  $m$  значения от 1 до  $n - 1$ , мы получим еще  $(n - 1)$  частот, при которых резонансная кривая имеет максимумы. Условия  $B_1 = 0$  и  $C_1 = 0$  отпадают, так как  $C_1 = Y_0 \neq 0$ . Таким образом, при  $k > k_{кр}$  общее число максимумов первого и второго рода для рассматриваемой цепной схемы будет  $(n + 1)$ , т. е. на единицу больше числа звеньев схемы, и равно числу контуров схемы.

На рис. 97 дана резонансная кривая для четырехзвенной цепной схемы, составленной из звеньев, приведенных на рис. 89. Сравнение этой кривой с кривой для одного звена (рис. 96) показывает, что увеличение числа звеньев приводит к существенному приближению резонансной кривой к прямоугольной кривой идеального фильтра.

В заключение заметим, что резонансная кривая дает возможность составить ясное представление о степени пропускания фильтром токов различных частот, в то время как из условия  $A_1^2 = 1$  мы получаем лишь границы зоны прозрачности, т. е. область частот, внутри которой затухание равно нулю. При оценке фильтра по его резонансной кривой принято областями пропускания считать те области частот, внутри которых ток не меньше максимального тока, деленного на  $\sqrt{2}$ .

## § 57. Различные формы записи уравнений четырехполюсника

Помимо использованной в предыдущих параграфах формы записи уравнений четырехполюсника

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2; \quad \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2,$$

в которой величины первичной стороны  $\dot{U}_1$  и  $\dot{I}_1$  выражены через величины вторичной стороны  $\dot{U}_2$  и  $\dot{I}_2$ , возможна запись уравнений в других формах, а именно, любую пару из четырех величин  $\dot{U}_1$ ,  $\dot{I}_1$ ,  $\dot{U}_2$  и  $\dot{I}_2$  можно выразить через другую пару величин.

Часто используется форма записи в виде:

$$\dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2; \quad \dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2,$$

а также в виде:

$$\dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2; \quad \dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2.$$



Встречается использование также формы, в которой  $\dot{U}_1$  и  $\dot{I}_2$  выражаются через  $\dot{U}_2$  и  $\dot{I}_1$ .

Целесообразность использования той или иной формы определяется условиями конкретной задачи.

Нетрудно убедиться, что между коэффициентами приведенных выше форм уравнений имеются следующие связи:

$$Z_{11} = \frac{A}{C} = \frac{Y_{22}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}}; \quad Z_{12} = -\frac{AD - BC}{C} = -\frac{Y_{12}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}},$$

$$Z_{21} = \frac{1}{C} = -\frac{Y_{21}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}}, \quad Z_{22} = -\frac{D}{C} = \frac{Y_{11}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}}.$$

В случае *пассивного* четырехполюсника, как было показано выше, между четырьмя коэффициентами уравнений имеется связь, так



Рис. 98

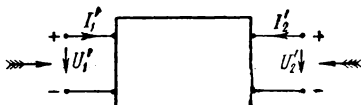


Рис. 99

что только три коэффициента являются независимыми. Знаки в выражении этой связи зависят от выбора положительных направлений напряжений и токов на обеих сторонах четырехполюсника. Ранее были приняты положительные направления напряжений и токов, показанные на рис. 98. Это соответствует на первичных зажимах положительному направлению потока энергии от внешней цепи к четырехполюснику, а на вторичных зажимах — от четырехполюсника к внешней цепи. Иными словами, первичные зажимы рассматриваются как вход энергии, а вторичные как выход энергии, что показано на рис. 98 стрелками с хвостовым оперением. Такой выбор положительных направлений целесообразен при рассмотрении четырехполюсника как устройства для передачи энергии или сигнала от первичных (входных) ко вторичным (выходным) зажимам. При таком выборе положительных направлений мы имели следующую связь между коэффициентами пассивного четырехполюсника:

$$AD - BC = 1.$$

Из приведенных выше соотношений между коэффициентами уравнений в различных формах, получаем в этом случае соответствующие связи для пассивного четырехполюсника при использовании  $Z$ -формы и  $Y$ -формы уравнений:

$$Z_{21} = -Z_{12} \quad \text{и} \quad Y_{21} = -Y_{12}.$$

Иногда положительные направления напряжений и токов принимают так, как это показано на рис. 99. Это соответствует поло-

жительному направлению потоков энергии с обеих сторон к четырехполюснику. Такой выбор положительных направлений имеет достоинство в наличии полной симметрии обеих сторон четырехполюсника.

Отмечая все величины в уравнениях в этом случае штрихами, запишем уравнения, сохраняя в них перед всеми членами знак плюс:

$$\dot{U}'_1 = A' \dot{U}'_2 + B' \dot{I}'_2; \quad \dot{I}'_1 = C' \dot{U}'_2 + D' \dot{I}'_2,$$

или

$$\dot{U}'_1 = Z'_{11} \dot{I}'_1 + Z'_{12} \dot{I}'_2; \quad \dot{U}'_2 = Z'_{21} \dot{I}'_1 + Z'_{22} \dot{I}'_2,$$

или

$$\dot{I}'_1 = Y'_{11} \dot{U}'_1 + Y'_{12} \dot{U}'_2; \quad \dot{I}'_2 = Y'_{21} \dot{U}'_1 + Y'_{22} \dot{U}'_2.$$

Так как рис. 99 отличается от рис. 98 только положительным направлением тока во вторичной цепи, то имеем:

$$\dot{U}'_1 = \dot{U}_1, \quad \dot{U}'_2 = \dot{U}_2 \text{ и } \dot{I}'_1 = \dot{I}_1, \text{ но } \dot{I}'_2 = -\dot{I}_2,$$

а следовательно:

$$A' = A, \quad C' = C; \quad Z'_{11} = Z_{11}, \quad Z'_{21} = Z_{21}; \quad Y'_{11} = Y_{11} \text{ и } Y'_{12} = Y_{12},$$

однако

$$B' = -B; \quad D' = -D; \quad Z'_{12} = -Z_{12}; \\ Z'_{22} = -Z_{22}; \quad Y'_{21} = -Y_{21} \text{ и } Y'_{22} = -Y_{22}.$$

Соответственно, связи между коэффициентами для пассивного четырехполюсника имеют теперь вид:

$$A'D' - B'C' = -1; \\ Z'_{12} = Z'_{21} \text{ и } Y'_{12} = Y'_{21}.$$

Все сказанное следует учитывать, выражая коэффициенты уравнений четырехполюсника через сопротивления или проводимости схем, эквивалентных четырехполюснику. Например, в случае Т-образной эквивалентной схемы пассивного четырехполюсника (рис. 100) имеем:

$$A = 1 + Y_0 Z_1; \quad B = Z_1 + Z_2 + Y_0 Z_1 Z_2; \\ C = Y_0; \quad D = 1 + Y_0 Z_2$$

или

$$Z'_{11} = Z_1 + Z_0; \quad Z'_{12} = -Z_0; \\ Z'_{21} = Z_0; \quad Z'_{22} = -(Z_2 + Z_0),$$

что соответствует положительным направлениям, указанным на рис. 98.

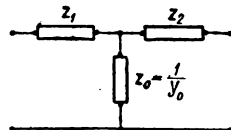


Рис. 100

Для той же схемы замещения имеем:

$$A' = 1 + Y_0 Z_1; \quad B' = -(Z_1 + Z_2 + Y_0 Z_1 Z_2);$$

$$C' = Y_0; \quad D' = -(1 + Y_0 Z_2)$$

или

$$Z'_{11} = Z_1 + Z_0; \quad Z'_{12} = Z_0;$$

$$Z'_{21} = Z_0; \quad Z'_{22} = Z_2 + Z_0,$$

что соответствует положительным направлениям, указанным на рис. 99.

### § 58. Активный четырехполюсник

*Активным* называют четырехполюсник, содержащий внутри себя источники электрической энергии, причем действие этих источников не компенсируется взаимно внутри четырехполюсника. Это значит, что при отключении четырехполюсника от внешних цепей на одной или на обеих парах его разомкнутых зажимов возникает напряжение, обусловленное наличием источников энергии внутри четырехполюсника. Пусть э. д. с. источников не зависят от токов в них. Пользуясь принципом наложения, нетрудно привести такой активный четырехполюсник с любым числом внутренних источников энергии к пассивному четырехполюснику с двумя дополнительными источниками э. д. с. во входной и в выходной цепях.

Пусть при отключении активного четырехполюсника, содержащего внутри себя э. д. с.  $E_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) на его зажимах появляются напряжения  $\dot{U}_{01}$  и  $\dot{U}_{02}$  (рис. 101, а). При этом  $I_1 = 0$  и  $I_2 = 0$ . Тот же результат получим, если замкнем накоротко все источники э. д. с. во *внешних* цепях, сохранив сопротивления этих цепей и этих источников и введя дополнительно источники э. д. с.  $\dot{E}'_{01} = -\dot{U}_{01}$  и  $\dot{E}'_{02} = -\dot{U}_{02}$ , как показано на рис. 101, б. Внешние цепи с их источниками на рис. 101, б, в, г показаны пунктирными прямоугольниками.

Замкнем теперь накоротко все источники э. д. с. *внутри* четырехполюсника, сохранив их внутренние сопротивления, т. е. положим  $\dot{E}_k = 0$ . Пусть теперь действуют все источники э. д. с. во внешних цепях и, кроме того, перед зажимами четырехполюсника в первичной и во вторичной цепях введены дополнительные источники э. д. с.  $\dot{E}'_{01} = -\dot{E}_{01} = \dot{U}_{01}$  и  $\dot{E}'_{02} = -\dot{E}_{02} = \dot{U}_{02}$  (рис. 101, в).

Осуществляя наложение токов, э. д. с. и напряжений в случаях, изображенных на рис. 101, б и 101, в, получаем действительную цепь, в которой действуют все источники э. д. с. как во внешних цепях, так и внутри активного четырехполюсника (рис. 101, г), и в которой нет никаких дополнительных источников э. д. с. Следовательно, токи  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$ , так же как и напряжения  $\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_2$ , в случае,

изображенном на рис. 101, в, и являются токами в действительных условиях (рис. 101, г).

Таким образом, активный четырехполюсник с источниками энергии, э. д. с. которых не зависят от токов в них, может быть заменен пассивным четырехполюсником, получающимся из данного активного четырехполюсника путем закорачивания в нем всех ис-

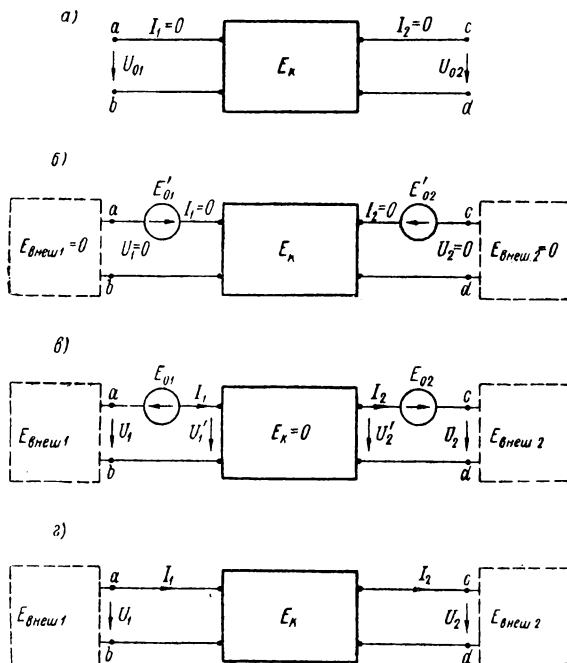


Рис. 101

точников э. д. с. с сохранением их внутренних сопротивлений, с введенными в первичную и во вторичную цепь дополнительными источниками, э. д. с. которых равны напряжениям на разомкнутых зажимах данного активного четырехполюсника.

Если параметры эквивалентного пассивного четырехполюсника при Z-форме уравнений обозначить через  $Z_{11}$ ,  $Z_{12}$ ,  $Z_{21}$  и  $Z_{22}$ , то, учитывая, что напряжения на его зажимах (рис. 101, в) равны:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_1 - \dot{E}_{01} \quad \text{и} \quad \dot{U}_2 = \dot{U}_2 - \dot{E}_{02},$$

получаем для активного четырехполюсника уравнения:

$$\dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 + \dot{E}_{01}; \quad \dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 + \dot{E}_{02}.$$

В дальнейшем при рассмотрении полупроводниковых триодов мы увидим, что иногда приходится рассматривать активные четырехполюсники, в которых дополнительные э. д. с. зависят от тока.

---

## ГЛАВА ШЕСТАЯ

### ЛИНЕЙНЫЕ И КРУГОВЫЕ ДИАГРАММЫ

#### § 59. Применение геометрических мест для исследования работы цепей переменного тока

При исследовании цепей переменного тока иногда необходимо рассмотреть не какой-либо один вполне определенный режим работы, а некоторую совокупность режимов, подчиненных тем или иным условиям, связывающим величины, которые характеризуют работу цепи. При синусоидальных установившихся режимах такого рода вопросы с наибольшей простотой и наглядностью разрешаются путем нахождения *геометрических мест* концов векторов, изображающих интересующие нас величины. Геометрические места, о которых идет речь и которые мы будем называть также *диаграммами* или *кривыми*, могут иметь сложную форму. Однако в значительном числе практически важных случаев эти геометрические места оказываются прямыми линиями и окружностями. Примерами этого являются диаграммы, рассмотренные в § 17.

#### § 60. Умножение и деление кривых

При решении задач, относящихся к цепям переменного тока, нам уже приходилось встречаться с умножением и делением векторов на комплексные числа. Так, например, известно, что нахождение вектора  $\bar{U}$  напряжения на зажимах цепи по заданному вектору  $\bar{I}$  тока, протекающего в этой цепи, сводится к умножению вектора тока на комплексное сопротивление цепи  $Z = ze^{j\varphi} = r + jx$ , а именно:

$$\bar{U} = \bar{I}Z = \bar{I}ze^{j\varphi} = \bar{I}(r + jx),$$

или к делению вектора тока на комплексную проводимость цепи  $Y = ye^{-j\varphi} = g - jb$ , а именно:

$$\bar{U} = \bar{I} : Y = \bar{I} : ye^{-j\varphi} = \bar{I} : (g - jb).$$

В тех случаях, когда мы рассматриваем не некоторый вполне определенный режим работы цепи, а совокупность режимов, приходится иметь дело не с отдельными векторами напряжения, тока,

полного сопротивления и полной проводимости, а с геометрическими местами — диаграммами — концов векторов, изображающих соответствующие величины. В связи с этим возникает задача об умножении и делении на комплексные числа кривых, служащих диаграммами этих величин.

Переходя к вопросу об умножении и делении кривых на комплексные числа, мы сначала рассмотрим случай, когда множителем или делителем является вещественное число. Так как при умножении или делении отдельных векторов на вещественное число  $a$  длина векторов изменяется в  $a$  раз, а направление их остается неизменным, то в результате получается кривая, подобная исходной, причем на-

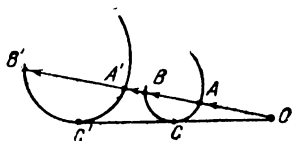


Рис. 102

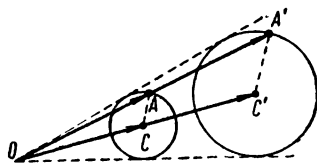


Рис. 103

чала векторов является *центром подобия*. Точки исходной и результирующей кривых, например  $A$  и  $A'$  или  $B$  и  $B'$ , лежащие на одном луче, проходящем через центр подобия  $O$ , и удовлетворяющие условию  $OA \cdot a = OA'$  или  $OB \cdot a = OB'$ , называют *соответственными точками* (рис. 102). Заметим, что луч, исходящий из центра подобия и касающийся исходной кривой, касается также и результирующей кривой, причем точки касания будут соответственными точками.

Умножение и деление кривых сложной формы приходится выполнять по точкам. В случаях прямой и окружности эти операции значительно упрощаются. Так, для умножения или деления окружности на вещественное число  $a$  следует умножить или разделить на это число вектор  $\overline{OC}$ , определяющий центр окружности, а затем из конца  $C'$  вновь полученного вектора описать, как из центра, новую окружность радиусом, в  $a$  раз большим или соответственно меньшим, чем радиус исходной окружности. В правильности этого построения можно убедиться, рассматривая подобные треугольники  $OAC$  и  $OA'C'$  на рис. 103.

Так как при умножении или делении на комплексное число  $ae^{j\alpha}$  вектор подвергается не только изменению длины в  $a$  раз, но и повороту на угол  $\alpha$ , то умножение или деление кривой на комплексное число распадается на две операции. Сначала исходная кривая умножается или делится на модуль  $a$  комплексного числа, что производится по только что изложенным правилам, а затем вновь полученная кривая поворачивается около начала на угол  $\alpha$ , равный

аргументу комплексного числа, в положительном направлении при умножении и в отрицательном—при делении. Обе указанные операции могут быть выполнены и в обратном порядке.

Для того чтобы умножить или разделить окружность на комплексное число  $ae^{j\alpha}$ , достаточно умножить или разделить на это число вектор  $\overline{OC}$ , определяющий центр окружности, а затем из конца  $C'$  вновь полученного вектора описать новую окружность радиусом в  $a$  раз большим или соответственно меньшим, чем радиус исходной окружности (рис. 104).

При умножении и делении кривых должно быть принято во внимание соотношение масштабов, выбранных при изображении векторами величин, определяемых исходной и результирующей кривыми. Так, определяя кривую напряжения по кривой тока и комплексному сопротивлению цепи  $Z = ze^{j\varphi}$  и приняв при изображении напряжения и тока масштабы, равные соответственно  $v$  и  $a$ , мы должны для получения кривой напряжения умножить кривую тока не на комплекс  $Z = ze^{j\varphi}$ , а на комплекс  $\frac{a}{v}Z = \frac{a}{v}ze^{j\varphi}$ . Напомним, что под

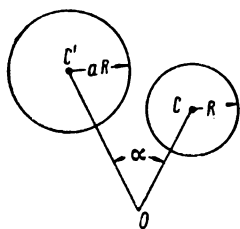


Рис. 104

масштабом, принятым для изображения какой-либо величины, понимают число единиц, которыми измеряют эту величину, соответствующее принятой единице длины. Так, если говорят, что масштаб тока равен  $5 \text{ а/см}$ , то это значит, что отрезок длиной в  $1 \text{ см}$  изображает ток силой  $5 \text{ а}$ .

В дальнейшем для упрощения мы большей частью не будем вводить в рассмотрение соотношение масштабов, предполагая, что при построении диаграмм это соотношение будет учтено.

Когда диаграмма какой-либо величины получается из диаграммы другой величины путем умножения или деления последней на вещественное число, то при соответствующем подборе масштабов можно обе эти диаграммы изобразить одной и той же кривой, что не только упрощает построение, но часто облегчает и исследование. Действительно, пусть требуется найти диаграмму тока  $\bar{I}$  в цепи, напряжение  $\bar{U}$  на зажимах которой не изменяется и диаграмма полной проводимости  $Y$  которой дана. Расположим вектор  $\bar{U}$  по оси вещественных. Тогда комплексное напряжение  $\bar{U}$  будет вещественным числом, и из равенства  $\bar{I} = \bar{U}Y$  следует, что диаграмму тока можно получить, умножая диаграмму полной проводимости на вещественное число  $U$ . Если мы желаем, чтобы обе диаграммы изображались одной и той же кривой, то достаточно масштаб тока  $a$  взять равным  $nU$ , где  $n$  — масштаб проводимости.

## § 61. Обращение кривых

То обстоятельство, что две основные величины, характеризующие цепь переменного тока, а именно полное сопротивление и полная проводимость обратны друг другу, приводит нас к построению кривых, обратных друг другу.

Условимся называть две точки  $A$  и  $A'$  *обратными* или *взаимными* относительно окружности  $O$ , если луч  $AA'$  проходит через центр окружности  $O$  и если, кроме того, выполнено условие

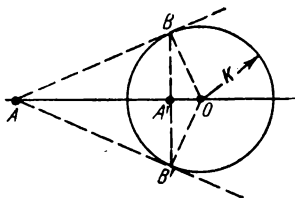


Рис. 105

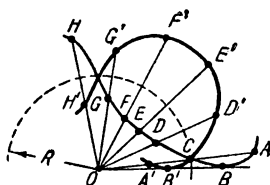


Рис. 106

$OA \cdot OA' = R^2$ , где  $R$  — радиус окружности. При этом центр окружности  $O$  носит название *центра обращения*, а величина  $R^2$ , в дальнейшем обозначаемая  $S$ , называется *степенью обращения*. Из условия  $OA \cdot OA' = S = R^2$  следует, что если одна из обратных точек лежит вне круга, то другая лежит внутри него. Для построения точки  $A'$ , обратной данной точке  $A$ , расположенной вне круга, следует провести из точки  $A$  две касательные к окружности  $O$  и соединить прямой точки касания  $B$  и  $B'$  (рис. 105). На пересечении последней прямой с лучом  $OA$  и лежит искомая точка  $A'$ , так как  $OA \cdot OA' = (OB)^2 = R^2$ . Если данная точка  $A'$  расположена внутри круга, то для построения точки  $A$ , обратной ей, следует восставить в точке  $A'$  перпендикуляр к лучу  $OA'$  и в точках  $B$  и  $B'$  пересечения его с окружностью провести касательные. Точка пересечения этих касательных с лучом  $OA'$  и будет искомой точкой  $A$ . Операцию обращения обычно выполняют по степени обращения  $S$ , помечая лишь центр обращения, но не вычерчивая окружности, относительно которой производится обращение. Тогда для определения точки  $A'$ , обратной данной точке  $A$ , вычисляют ее расстояние  $OA'$  от центра обращения  $O$ , исходя из того, что произведение расстояний двух взаимных точек от центра обращения есть величина постоянная, равная степени обращения, т. е.  $OA \cdot OA' = S$ .

Операции обращения могут быть подвергнуты не только отдельные точки, но и кривые. При этом, если кривая имеет сложную форму, то ее обращение выполняют по точкам (рис. 106). Следует заметить, что луч, исходящий из центра обращения и касающийся



обращаемой кривой, касается также и обращенной кривой, причем точки касания будут обратными точками.

Рассмотрим обращение прямой, не проходящей через центр обращения, и покажем, что в результате получается проходящая через центр обращения окружность, центр которой лежит на перпендикуляре, опущенном из центра обращения на данную прямую. Возьмем на обращаемой прямой  $AB$  точку  $A$ , ближайшую к центру обращения  $O$ , и найдем обратную ей точку  $A'$ , вычислив  $OA' = S : OA$ , где  $S$  — заданная степень обращения (рис. 107). Построим на отрезке  $OA'$ , как на диаметре, окружность и докажем, что она обратна прямой  $AB$ . Для этого возьмем на обращаемой пря-

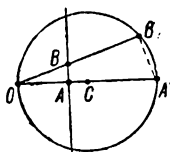


Рис. 107

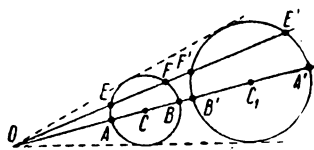


Рис. 108

мой произвольную точку  $B$  и проведем луч  $OB$  до пересечения с окружностью в точке  $B'$ . Из подобия прямоугольных треугольников  $OAB$  и  $OA'B'$  имеем:

$$OB \cdot OB' = OA \cdot OA' = S,$$

что и требовалось доказать.

Отсюда же непосредственно следует и обратная теорема, гласящая, что в результате обращения окружности, проходящей через центр обращения, получается прямая, не проходящая через центр обращения, причем эта прямая перпендикулярна к диаметру обращаемой окружности, проведенному через центр обращения.

Если обращаемая прямая проходит через центр обращения, то в результате обращения получится та же самая прямая.

Рассмотрим вопрос об обращении окружности, не проходящей через центр обращения  $O$ . Соединим  $O$  с центром  $C$  обращаемой окружности и обратим точки  $A$  и  $B$ , лежащие на пересечении луча  $OC$  с окружностью (рис. 108). В результате получим две новые точки  $A'$  и  $B'$ , лежащие на луче  $OC$  и удовлетворяющие условию:

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = S.$$

Построим на отрезке  $B'A'$ , как на диаметре, окружность  $C_1$  и докажем, что она обратна окружности  $C$ . Имеем:

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OA'}{OB'}, \quad \text{или} \quad \frac{OB + OA}{OB - OA} = \frac{OA' + OB'}{OA' - OB'}, \quad \text{или} \quad \frac{OC}{CB} = \frac{OC_1}{C_1A'},$$

откуда следует, что окружности  $C$  и  $C_1$  подобны друг другу, причем центром подобия служит центр обращения  $O$ .

Проведем из  $O$  произвольный луч, пересекающий окружность  $C$  в точках  $E$  и  $F$  и окружность  $C_1$  в точках  $E'$  и  $F'$ . Тогда из подобия окружностей  $C$  и  $C_1$  найдем:

$$OE : OF' = OF : OE' \quad \text{или} \quad OE \cdot OE' = OF \cdot OF'.$$

Так как для каждой окружности произведение из секущей на ее внешнюю часть есть величина постоянная, то

$$OA \cdot OB = OE \cdot OF \quad \text{и} \quad OA' \cdot OB' = OE' \cdot OF'$$

и, следовательно,

$$OA \cdot OA' \cdot OB \cdot OB' = OE \cdot OE' \cdot OF \cdot OF',$$

откуда, приняв во внимание, что

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = S \quad \text{и} \quad OE \cdot OE' = OF \cdot OF',$$

найдем:

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OE \cdot OE' = OF \cdot OF' = S,$$

что и требовалось доказать.

Аналогичным путем эту теорему можно доказать для случая, когда центр обращения расположен внутри круга, ограниченного обращаемой окружностью. Таким образом, в результате обращения окружности, не проходящей через центр обращения, получается также окружность, не проходящая через центр обращения. При этом обратные окружности подобны друг другу относительно центра обращения. Заметим, что в то время как центры подобных окружностей являются соответственными точками, центры обратных окружностей не обратны друг другу. Следует иметь в виду, что если центр обращения расположен вне круга, то можно выбрать такую степень обращения  $S$ , при которой обратная окружность совпадет с обращаемой. Действительно, из рис. 108 видно, что если, обращая окружность  $C$  относительно центра  $O$ , мы положим  $S = OA \cdot OB$ , то точкой, обратной  $A$ , будет  $B$ , а точкой, обратной  $B$ , будет  $A$  и, следовательно, окружность  $C$  будет сама себе обратна. Указанное обстоятельство иногда позволяет значительно упростить построения.

## § 62. Обращение в комплексной плоскости

Установленные в § 61 положения относятся к обращению в декартовой плоскости. В дальнейшем мы будем пользоваться обращением для определения диаграмм полного сопротивления по соответствующим диаграммам полной проводимости и обратно. Так как все операции над векторами полного сопротивления и полной проводимости мы выполняем в комплексной плоскости, то необходимо ввести понятие об *обращении в комплексной плоскости*.

Условимся называть две точки комплексной плоскости  $K$  и  $K'$  обратными друг другу при центре обращения, расположенном в начале координат  $O$ , и степени обращения  $S$ , если выполнено условие

$$A \cdot A' = S,$$

где  $A = ae^{j\alpha}$  и  $A' = a'e^{ja'}$  — комплексные числа, определяющие положения точек  $K$  и  $K'$  относительно начала  $O$ . Пусть дана точка  $K$  (рис. 109) и требуется найти точку  $K'$ , обратную данной. Имеем:

$$A' = a'e^{ja'} = \frac{S}{A} = \frac{S}{ae^{j\alpha}} = \frac{S}{a} e^{-j\alpha},$$

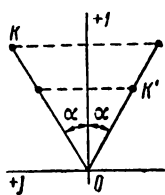


Рис. 109

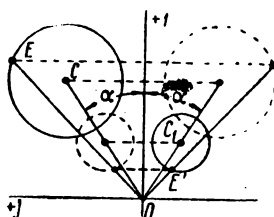


Рис. 110

откуда следует:

$$a' = \frac{S}{a} \quad \text{и} \quad \alpha' = -\alpha,$$

т. е. расстояние  $a'$  искомой точки  $K'$  от центра обращения  $O$  определяется так же, как и при обращении в декартовой плоскости, но эта точка будет лежать уже не на луче, соединяющем центр обращения с данной точкой, а на луче, являющемся зеркальным изображением последнего в оси вещественных.

Таким образом, обращение точки в комплексной плоскости сводится к двум операциям — к обращению точки по правилам, установленным для декартовой плоскости, и к построению зеркального изображения полученной обратной точки в оси вещественных, причем обе эти операции можно выполнять в любой последовательности.

Из сказанного вытекает, что и обращение кривых в комплексной плоскости распадается на две операции, а именно: нахождение кривой, обратной данной, по правилам обращения в декартовой плоскости и нахождение зеркального изображения последней кривой в оси вещественных, причем обе эти операции можно выполнять в любой последовательности (рис. 110).

Так как в дальнейшем мы будем пользоваться обращением кривых для нахождения диаграммы полного сопротивления по диаграмме полной проводимости, и наоборот, то покажем, как в этих случаях надлежит определять степень обращения. Пусть масштабы

сопротивления и проводимости равны соответственно  $m$  и  $n$ . Тогда, если вектор  $\overline{OA}$  изображает комплексное сопротивление  $Z = ze^{j\varphi}$ , а вектор  $\overline{OA'}$  соответствующую комплексную проводимость  $Y = ye^{-j\varphi}$ , то

$$zy = OA \cdot m \cdot OA' \cdot n = 1,$$

откуда

$$S = OA \cdot OA' = \frac{1}{mn},$$

т. е. степень обращения в этом случае должна равняться единице, деленной на произведение масштабов сопротивления и проводимости.

### § 63. Диаграммы для случая передачи энергии к приемнику с постоянным коэффициентом мощности

Рассмотрим применение методов умножения и обращения к построению диаграмм для случая передачи энергии по индуктивной линии, обладающей сопротивлением  $Z_1 = z_1 e^{j\varphi_1} = r_1 + jx_1$ , к приемнику с постоянным коэффициентом мощности при условии, что напряжение на входных зажимах линии  $U_0 = \text{const}$  (рис. 111).

Обозначим ток в цепи через  $I$ , напряжение на зажимах приемника через  $U_2$  и падение напряжения в линии через  $U_1$ . Комплексное сопротивление приемника  $Z_2 = z_2 e^{j\varphi_2} = r_2 + jx_2$  может изменяться, но коэффициент мощности  $\cos \varphi_2$  приемника, а следовательно, и угол сдвига в

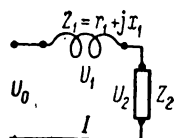


Рис. 111

нем  $\varphi_2 = \arctg \frac{x_2}{r_2}$  должны при этом по условию оставаться

неизменными. Построим диаграммы тока  $\bar{I}$  и напряжений  $\bar{U}_1$  и  $\bar{U}_2$  в предположении, что  $\varphi_2 > 0$ . Выбрав масштаб напряжений  $v$ , отложим по оси вещественных вектор  $\bar{U}_0$ . Тогда  $\bar{U}_0$  будет вещественным числом, и из соотношения  $\bar{I}_0 = \bar{U}_0 Y_0$ , где  $Y_0$  — комплексная проводимость всей цепи, мы получим, что диаграмма тока будет подобна диаграмме  $\bar{Y}_0$ . Так как  $Y_0 = \frac{1}{Z_0} = \frac{1}{Z_1 + Z_2}$ , то диаграмму

полной проводимости  $\bar{Y}_0$  всей цепи можно получить, обращая диаграмму полного сопротивления  $\bar{Z}_0$  этой цепи, которое равно геометрической сумме неизменного сопротивления  $\bar{Z}_1$  линии и переменного сопротивления  $\bar{Z}_2$  приемника. Обращение в комплексной плоскости сопряжено с нахождением зеркального изображения обрабатываемой кривой в оси вещественных, и поэтому мы сразу будем строить зеркальное изображение  $\tilde{Z}_0$  диаграммы  $\bar{Z}_0$ . Для этого, выбрав масштаб сопротивлений  $m$ , построим по  $x_1$  и  $r_1$  вектор  $\tilde{Z}_1$

(рис. 112). Так как  $\varphi_2 = \text{const}$ , то диаграммой  $\tilde{Z}_2$  будет прямая, проходящая через конец вектора  $\tilde{Z}_1$  под углом  $\varphi_2$  к оси вещественных. Относительно начала  $O$  эта же прямая будет диаграммой  $\tilde{Z}_0 = \tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2$ . Обращая последнюю прямую относительно начала  $O$ , получим диаграмму  $\bar{Y}_0$ . Теперь диаграмму тока  $I$  можно найти, умножая диаграмму  $\bar{Y}_0$  на вещественное число  $U_0$ .

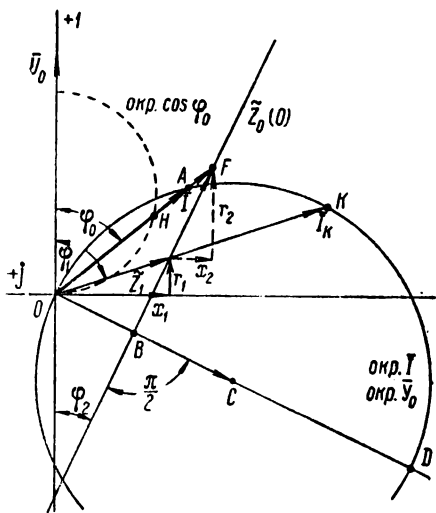


Рис. 112

Для того чтобы подобные друг другу диаграммы  $\bar{Y}$  и  $\bar{I}$  совпали, необходимо соблюсти условие  $a = nU_0$ , где  $a$  — масштаб тока, а  $n$  — масштаб проводимости (§ 60). Так как наибольший интерес представляет диаграмма тока  $\bar{I}$ , то обычно задаются масштабом тока, определяют масштаб проводимости из соотношения  $n = \frac{a}{U_0}$  и затем вычисляют степень обращения  $S = \frac{1}{mn} = \frac{U_0}{ma}$ . Найдя степень обращения  $S$ , ее делят на расстояние  $OB$  от начала  $O$  до обращаемой

прямой  $\tilde{Z}_0$ , в результате чего получают длину диаметра  $OD$  окружности, обратной данной прямой. Эта окружность, центр  $C$  которой лежит на перпендикуляре, опущенном из начала  $O$  на прямую  $\tilde{Z}_0$ , и будет диаграммой полной проводимости  $\bar{Y}_0$  цепи и тока  $\bar{I}$  в ней.

Если потребуется определить ток для какого-либо частного значения  $Z_2$ , то достаточно отложить  $\tilde{Z}_2$  от конца  $\tilde{Z}_1$  вдоль прямой  $\tilde{Z}_0$  и полученную точку  $F$  соединить с началом  $O$ . Тогда конец  $A$  искомого вектора тока найдется как пересечение луча  $OF$  с окружностью тока.

Угол  $\varphi_0$ , составляемый вектором  $\overline{OA}$  с осью вещественных, по которой направлен вектор  $\bar{U}_0$ , есть угол сдвига тока относительно напряжения  $U_0$ . Числовое значение  $\cos \varphi_0$  можно определить, построив из центра, лежащего на оси вещественных, окружность, проходящую через начало и имеющую диаметр, равный 100 произвольным единицам длины. Пусть  $H$  — точка пересечения этой окруж-



видно, что в рассматриваемом случае центр  $C_2$  является зеркальным изображением центра  $C_1$  в оси вещественных.

Когда окружности  $\bar{U}_1$  и  $\bar{U}_2$  построены, то для определения векторов  $\bar{U}_1 = \bar{I}z_1 e^{j\varphi_1}$  и  $\bar{U}_2 = \bar{I}z_2 e^{j\varphi_2}$ , соответствующих данному вектору тока  $\bar{I}$ , следует из начала  $O$  провести лучи, составляющие углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  с этим вектором. Точки пересечения этих лучей с окружностями  $\bar{U}_1$  и  $\bar{U}_2$  определяют концы искомых векторов  $\bar{U}_1$  и  $\bar{U}_2$ .

На рис. 114 представлены полученные из диаграмм зависимости  $\frac{U_1}{U_0}$ ,  $\frac{U_2}{U_0}$  и  $\cos \varphi_0$  от отношения  $\frac{I}{I_k}$ .

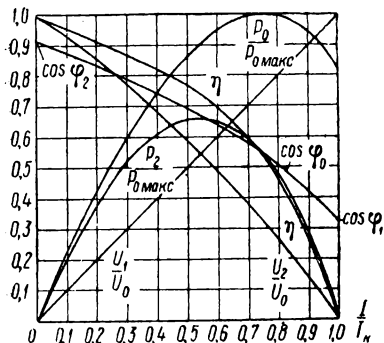


Рис. 114

Построим диаграммы для случая передачи энергии к приемнику с постоянной реактивной проводимостью  $b_2$  при условии, что напряжение на входных зажимах линии  $U_0 = \text{const}$ , причем воспользуемся обозначениями, принятыми в § 63 (рис. 111).

Отложим от начала  $O$  по оси вещественных вектор  $\bar{U}_0$  (рис. 115) и построим зеркальное изображение  $\tilde{Z}_1$  вектора полного сопротивления  $\bar{Z}_1$  линии передачи. Диаграмму полного сопротивления приемника  $\tilde{Z}_2$  можно построить, исходя из условия  $b_2 = \text{const}$ , для чего надлежит воспользоваться соответствующей диаграммой в отрезках на осях. Пусть  $b_2 > 0$ . Примем за начало координат конец вектора  $\tilde{Z}_1$  и отложим в отрицательном направлении оси мнимых отрезок,

#### § 64. Диаграммы для случая передачи энергии к приемнику с постоянной реактивной проводимостью

Построим диаграммы для случая передачи энергии по индуктивной линии, обладающей сопро-

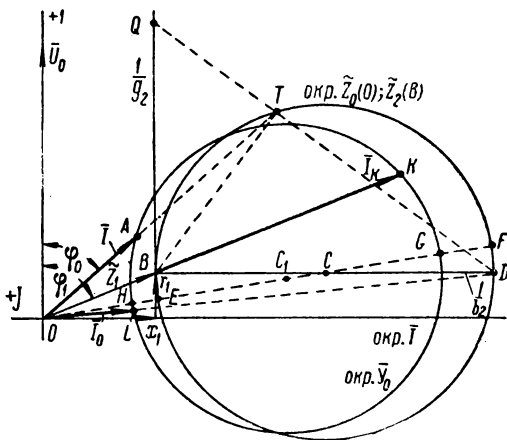


Рис. 115

равный  $\frac{1}{b_2}$ . Окружность, описанная на этом отрезке, как на диаметре, даст нам диаграмму  $\tilde{Z}_2$ . Эта же окружность относительно начала  $O$  будет диаграммой  $\tilde{Z}_0 = \tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2$ . Обращая окружность  $\tilde{Z}_0$  относительно центра  $O$ , получим диаграмму полной проводимости  $Y_0$  всей цепи. Для тока имеем  $\bar{I} = \dot{U}_0 Y_0$ , где  $\dot{U}_0$  — вещественное число, так как вектор  $\bar{U}_0$  расположен по оси вещественных. Поэтому диаграмма  $\bar{I}$  будет подобна диаграмме  $\bar{Y}_0$  и совпадает с нею, если масштабы тока и проводимости подчинить условию  $a = nU_0$ .

В результате обращения окружности  $\tilde{Z}_0$ , не проходящей через центр обращения  $O$ , должна получиться также окружность, не проходящая через  $O$ . Эту окружность проще всего построить, обратив две точки  $E$  и  $F$  окружности  $\tilde{Z}_0$ , лежащих на луче  $OC$ , проходящем через ее центр. Точки  $G$  и  $H$ , обратные точкам  $E$  и  $F$ , являются концами диаметра искомой окружности  $\bar{Y}_0$  и  $\bar{I}$ , и, разделив расстояние между ними пополам, мы получим центр  $C_1$  искомой окружности.

Имея окружность тока  $\bar{I}$ , можно для любого значения  $g_2$  найти соответствующий вектор тока. Для этого следует из конца  $B$  вектора  $\tilde{Z}_1$  отложить по прямой, параллельной оси вещественных, отрезок  $BQ$ , равный  $\frac{1}{g_2}$ , и соединить конец  $Q$  этого отрезка с точкой  $D$ . Тогда точка  $T$ , лежащая на пересечении прямой  $QD$  с окружностью  $\tilde{Z}$ , определит конец соответствующего вектора  $\tilde{Z}_0$ . Проведя из начала луч  $OT$  до пересечения с окружностью  $\bar{I}$ , мы определим искомый вектор тока  $\bar{OA}$ , являющийся в то же время и вектором полной проводимости всей цепи.

Угол  $\varphi_0$ , составляемый вектором тока  $\bar{OA}$  с осью вещественных, по которой направлен вектор  $\bar{U}_0$ , есть угол сдвига тока  $I$  относительно напряжения  $U$ . Числовое значение  $\cos \varphi_0$  можно определить при помощи построения, указанного в § 63.

При коротком замыкании приемника, т. е. при  $g_2 = \infty$ , мы имеем  $Z_2 = 0$  и  $Z_0 = Z_1 + Z_2 = Z_1$ . Поэтому конец  $B$  вектора  $\tilde{Z}_1$  является точкой короткого замыкания на окружности  $\tilde{Z}_0$ . Продолжая луч  $OB$  до пересечения с окружностью  $\bar{I}$  в точке  $K$ , получим вектор тока короткого замыкания  $I_k$ . Точка  $K$  является точкой короткого замыкания на окружности тока.

При холостом ходе, т. е. при  $g_2 = 0$ ,  $\tilde{Z}_2$  изобразится вектором  $\bar{BD}$ , а  $\tilde{Z}_0$  — вектором  $\bar{OD}$ . Поэтому точка  $D$  является точкой холо-



стого хода на окружности  $\tilde{Z}_0$ . На окружности тока точкой холостого хода будет ближайшая к началу координат точка  $L$  пересечения луча  $OD$  с окружностью тока. Вектор тока холостого хода  $\bar{I}_0$  показан на рис. 115.

Диаграмму  $\bar{U}_1 = \bar{I}\tilde{Z}_1$  можно получить, умножая окружность тока  $\bar{I}$  на комплекс  $Z_1 = z_1 e^{j\varphi_1}$ , а затем можно построить диаграмму  $\bar{U}_2$ , вычитая из вектора  $\bar{U}_0$  окружность  $\bar{U}_1$  так, как это указано в § 63.

На рис. 116 представлены полученные из диаграмм зависимости  $\frac{U_1}{U_0}$ ,  $\frac{U_2}{U_0}$  и  $\cos \varphi_0$  от отношения  $\frac{I}{I_k}$ .

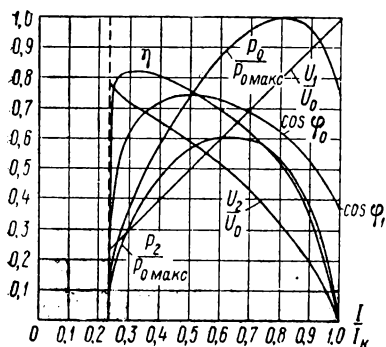


Рис. 116

### § 65. Уравнения прямой и окружности в символической форме

Разыскание и построение геометрических мест концов векторов, изображающих какую-либо из величин, характеризующих работу цепи переменного тока, в некоторых случаях упрощается, если вос-

пользоваться уравнениями кривых в символической форме. Мы рассмотрим уравнения прямой и окружности, так как эти кривые чаще всего встречаются при изучении цепей переменного тока. Обозначим через  $V$  комплексное число, изображающее интересующий нас переменный вектор  $\bar{V}$ , а через  $p$  — переменное вещественное число, называемое *параметром*, которое может, вообще говоря, принимать все значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Пусть  $B = be^{j\beta}$  — комплексное число, изображающее постоянный вектор  $\bar{B}$ , исходящий из начала и составляющий угол  $\beta$  с осью вещественных. Тогда при принятых нами обозначениях уравнение

$$V = pB$$

есть уравнение прямой, проходящей через начало и составляющей угол  $\beta$  с осью вещественных, так как при любом значении параметра  $p$  вектор  $\bar{V}$  будет направлен вдоль вектора  $\bar{B}$  (рис. 117).

Уравнение

$$V = A + pB,$$

где  $A = ae^{j\alpha} = \text{const}$  и  $B = be^{j\beta} = \text{const}$ , является уравнением прямой, проходящей через конец вектора  $\bar{A}$  и составляющей угол  $\beta$

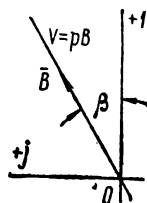


Рис. 117

с осью вещественных, так как в соответствии с уравнением вектор  $\bar{V}$  есть сумма постоянного вектора  $\bar{A}$  и прямой, составляющей угол  $\beta$  с осью вещественных (рис. 118).

Уравнение

$$V = \frac{C}{A + pB},$$

где  $A = ae^{j\alpha} = \text{const}$ ,  $B = be^{j\beta} = \text{const}$ ,  $C = ce^{j\gamma} = \text{const}$ , представляет окружность, проходящую через начало. Чтобы показать это, напомним данное уравнение в виде:

$$V = \frac{ce^{j\gamma}}{ae^{j\alpha} + pbe^{j\beta}} = \frac{c}{ae^{j(\alpha-\gamma)} + pbe^{j(\beta-\gamma)}}.$$

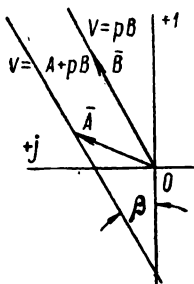


Рис. 118

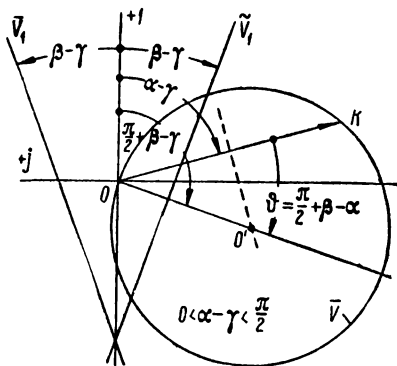


Рис. 119

Так как уравнение  $V_1 = ae^{j(\alpha-\gamma)} + pbe^{j(\beta-\gamma)}$  является уравнением прямой, то геометрическое место концов вектора  $\bar{V}$  можно рассматривать как результат обращения этой прямой относительно начала  $O$  при степени обращения, равной  $c$ . Выполнив эту операцию, мы получим окружность, проходящую через начало. Луч  $OO'$ , на котором лежит центр  $O'$  этой окружности, перпендикулярен к зеркальному изображению прямой  $V_1 = ae^{j(\alpha-\gamma)} + pbe^{j(\beta-\gamma)}$  в оси вещественных (рис. 119) и отстает от этой оси на угол  $\left(\frac{\pi}{2} + \beta - \gamma\right)$ . Для построения окружности можно, кроме того, весьма просто получить две ее точки, отвечающие значениям параметра  $p = \pm \infty$  и  $p = 0$ . Из уравнения  $V = \frac{C}{A + pB}$  при  $p = \pm \infty$  и при  $p = 0$  имеем:

$$V_{p=\pm\infty} = 0, \quad V_{p=0} = \frac{C}{A},$$

и, следовательно, первой из этих точек будет начало координат, а вторая точка является концом вектора  $\overline{OK}$ , изображаемого комплексным числом  $\frac{C}{A} = \frac{c}{a} e^{-j(\alpha-\gamma)}$  и отстающего от оси вещественных на угол  $(\alpha-\gamma)$ . Построение окружности по вектору  $\overline{OK}$  и лучу  $OO'$ , отстающему от вектора  $\overline{OK}$  на угол  $\vartheta = \frac{\pi}{2} + \beta - \alpha$ , показано на рис. 119.

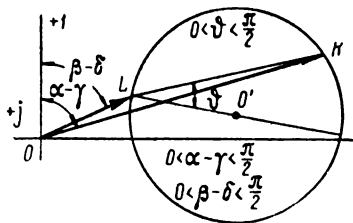


Рис. 120

При  $\alpha = \beta$  окружность превращается в прямую, совпадающую с вектором  $\overline{OK}$ , так как центр  $O'$  уходит в бесконечность.

Уравнение

$$V = \frac{C + pD}{A + pB}, \quad (*)$$

где  $A = ae^{j\alpha} = \text{const}$ ,  $B = be^{j\beta} = \text{const}$ ,  $C = ce^{j\gamma} = \text{const}$ ,  $D = de^{j\delta} = \text{const}$ , представляет окружность, не проходящую в общем случае через начало координат. Для того чтобы показать это, преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$V = \frac{C + pD}{A + pB} = \frac{C - \frac{A \cdot D}{B} + \frac{A \cdot D}{B} + pD}{A + pB} = \frac{C - \frac{A \cdot D}{B}}{A + pB} + \frac{D}{B}$$

и, положив

$$C - \frac{A \cdot D}{B} = F; \quad \frac{D}{B} = G,$$

найдем окончательно:

$$V = G + \frac{F}{A + pB}.$$

Так как комплексное число  $G$  изображает постоянный вектор, а уравнение  $V_1 = \frac{F}{A + pB}$  является уравнением окружности, проходящей через начало, то, следовательно, геометрическим местом концов вектора  $\overline{V}$  будет окружность, проходящая через конец вектора  $\overline{G}$  и не проходящая в общем случае через начало.

Для построения окружности  $\overline{V}$  можно воспользоваться двумя ее точками, отвечающими значениям параметра  $p = \pm \infty$  и  $p = 0$ . Из уравнения  $V = \frac{C + pD}{A + pB}$  при  $p = \pm \infty$  и  $p = 0$  имеем:

$$V_{p=\pm\infty} = \frac{D}{B} = G \quad \text{и} \quad V_{p=0} = \frac{C}{A}.$$

Построив векторы  $\overline{OK}$  и  $\overline{OL}$ , изображаемые, соответственно, комплексами  $\frac{C}{A} = \frac{c}{a} e^{-j(\alpha-\gamma)}$  и  $\frac{D}{B} = \frac{d}{b} e^{-j(\beta-\delta)}$ , мы найдем две точки  $K$  и  $L$  окружности  $\bar{V}$ . Кроме того, можно построить луч  $LO'$ , на котором лежит центр  $O'$  этой окружности, так как из предыдущего известно, что луч  $LO'$  отстает от луча  $LK$  на угол  $\vartheta = \frac{\pi}{2} + \beta - \alpha$  (рис. 120).

При  $\gamma = \delta$  и при  $\gamma - \delta = \pm \pi$  окружность пройдет через начало, так как при этих условиях можно найти такое значение параметра  $p$ , при котором числитель правой части уравнения обратится в нуль.

### § 66. Диаграмма для четырехполюсника

Определим, пользуясь уравнениями в символической форме, диаграмму тока  $\bar{I}_1$  в пассивном четырехполюснике, подчиняющемся линейным зависимостям:

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2; \quad \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2,$$

при условии  $U_1 = \text{const}$  и  $\varphi_2 = \text{const}$ , где  $\varphi_2$  — угол сдвига в приемнике. Здесь  $A, B, C, D$  — постоянные четырехполюсника, которые отличны от величин в уравнениях предыдущего параграфа, имевших такое же обозначение. Переменное сопротивление приемника можно изобразить комплексом  $pZ_{np} = pz_{np}e^{j\varphi_2}$ , где  $p$  — переменный вещественный параметр. Подставив  $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 pZ_{np}$  в уравнения четырехполюсника и исключив из них  $\dot{I}_2$ , найдем:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_1 \frac{D + pZ_{np}C}{B + pZ_{np}A}. \quad (**)$$

Последнее уравнение является уравнением окружности, не проходящей через начало. Определим две точки этой окружности, отвечающие значениям параметра  $p = \infty$  и  $p = 0$ . При  $p = \infty$ , что соответствует холостому ходу, получим:

$$\dot{I}_{1,p=\infty} = \dot{U}_1 \frac{C}{A} = \dot{U}_1 Y_{10} = \dot{I}_{10}.$$

При  $p = 0$ , что соответствует короткому замыканию, имеем

$$\dot{I}_{1,p=0} = \dot{U}_1 \frac{D}{B} = \frac{\dot{U}_1}{Z_{1k}} = \dot{I}_{1k}.$$

Направим вектор  $\bar{U}_1$  по оси вещественных (рис. 121). Тогда, построив векторы  $\overline{OL} = \bar{I}_{10}$  и  $\overline{OK} = \bar{I}_{1k}$ , найдем точку холостого

хода  $L$  и точку короткого замыкания  $K$ , через которые должна пройти окружность  $\bar{I}_1$ . Затем можно построить луч  $LO'$ , на котором лежит центр окружности  $\bar{I}_1$ , по углу  $\vartheta = \frac{\pi}{2} + \beta - \alpha$ , на который этот

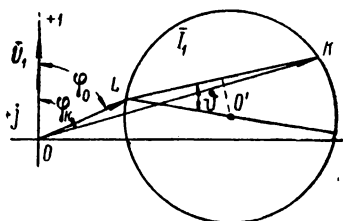


Рис. 121

луч отстает от вектора  $\overline{LK}$  (§ 65). Положим:

$$A = me^{-j\psi_0}; \quad D = ne^{-j\psi_k}; \quad Z_{1k} = z_{1k}e^{j\psi_k}.$$

Сопоставляя уравнение (\*) предыдущего параграфа с уравнением (\*\*), видим, что величине  $A = ae^{j\alpha}$  в уравнении (\*) отвечает величина  $B = DZ_{1k}$  в уравнении (\*\*), и, следовательно, теперь  $\alpha = \varphi_k - \psi_k$ . Величине  $B = be^{j\beta}$

в уравнении (\*) соответствует величина  $Z_{np}A$  в уравнении (\*\*), и, следовательно, теперь  $\beta = \varphi_2 - \psi_0$ . Таким образом имеем:

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} + \varphi_2 - \psi_0 - \varphi_k + \psi_k.$$

При симметрии четырехполюсника  $\psi_k = \psi_0$  и  $\vartheta = \frac{\pi}{2} + \varphi_2 - \varphi_k$ .

### § 67. Графическое определение мощностей

При рассмотрении вопросов, связанных с передачей энергии, нас обычно интересуют три активные мощности: мощность  $P_0$ , подведенная к передающему устройству, мощность  $P_1$ , теряемая в этом передающем устройстве, и мощность  $P_2$ , переданная приемнику и называемая полезной мощностью. Эти три мощности связаны между собой зависимостью  $P_0 = P_1 + P_2$ . Мы рассмотрим два случая.

Во-первых, покажем, каким образом можно графически определить мощность  $P$ , расходуемую в той части цепи, напряжение  $U$  на зажимах которой остается неизменным. Пусть вектор  $\bar{U}$  расположен по оси вещественных и диаграмма тока  $\bar{I}$  в цепи построена (рис. 122). Для мощности  $P$  имеем:

$$P = UI \cos \varphi,$$

где  $\varphi$  — угол сдвига тока  $I$  относительно напряжения  $U$ . Возьмем произвольный вектор тока и из конца его опустим перпендикуляр  $AB$  на ось мнимых. Величина этого перпендикуляра в масштабе

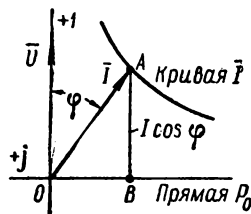


Рис. 122

тока равна  $I \cos \varphi$ , т. е.  $I \cos \varphi = AB \cdot a$ , где  $a$ —масштаб тока, и, следовательно,

$$P = AB \cdot aU = AB \cdot \omega,$$

где  $\omega = aU$  — величина постоянная. Отсюда вытекает, что мощность  $P$  в рассматриваемой части цепи пропорциональна длине перпендикуляра, опущенного из конца вектора тока на ось мнимых, и может быть измеряема длиной этого перпендикуляра в масштабе  $\omega = aU$ .

Условимся в дальнейшем называть прямую линию *прямую мощности*  $P$ , если длины перпендикуляров, опускаемых на эту прямую

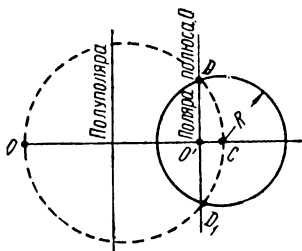


Рис. 123

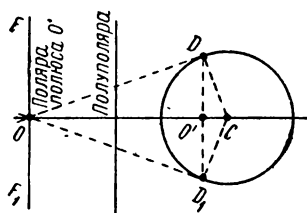


Рис. 124

из концов векторов тока, пропорциональны мощности  $P$ . В соответствии с этим определением можно сказать, что в рассмотренном случае ось мнимых при  $U = \text{const}$  служит *прямой мощности*  $P$ .

Во-вторых, рассмотрим вопрос об определении мощности  $P$ , расходуемой в неизменном сопротивлении  $Z = r + jx$ , когда диаграммой тока  $\vec{I}$  в этом сопротивлении является окружность.

Напомним некоторые определения, относящиеся к геометрии. Пусть дана окружность  $C$ , имеющая радиус  $R$ , и две точки  $O$  и  $O'$ , обратные друг другу относительно этой окружности, т. е. удовлетворяющие условию  $OC \cdot O'C = R^2$  и лежащие на одном луче, проходящем через центр  $C$ . Прямую, проходящую через одну из точек  $O$  и  $O'$  перпендикулярно этому лучу, называют *полярной* другой точки относительно окружности  $C$ . Так, прямая  $DD_1$  (рис. 123) будет полярной точки  $O$  относительно окружности  $C$ , а прямая  $FF_1$  (рис. 124) будет полярной точки  $O'$  относительно окружности  $C$ . При этом точка  $O$  в первом случае и точка  $O'$  во втором случае называется *полюсом*. Способы построения полярной, непосредственно вытекающие из способа построения обратных точек, приведены на рис. 123 и 124 для случаев расположения полюса как вне, так и внутри круга.

В дальнейшем нам встретится *полуполярная*, под которой понимают прямую, проходящую через середину расстояния от полюса до полярной и параллельную полярной. Нетрудно убедиться, хотя бы

из рассмотрения рис. 123 и 124, в том, что полуполюара не может пересекать окружность и в предельном случае, когда полюс расположен на окружности, может лишь касаться ее. В этом последнем случае полуполюара и полюара совпадают с касательной, проведенной через полюс.

Покажем, что полуполюара начала векторов тока относительно окружности тока будет прямою мощности  $P$ , расходуемой в неизменном сопротивлении  $Z = r + jx$ . Проведем из начала  $O$  произвольный вектор тока  $\vec{OA}$  и соединим конец его с центром окружности  $C$  и с точкой  $O'$ , обратной точке  $O$  (рис. 125). Затем, проведя полуполюару, опустим на нее из конца вектора тока перпендикуляр  $AF$ , который продолжим на расстояние  $BF = AF$ .

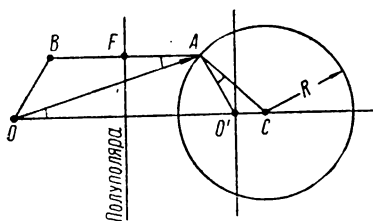


Рис. 125

Рассмотрим треугольники  $AO'C$ ,  $AOC$ ,  $ABO$ . Треугольники  $AO'C$  и  $AOC$  имеют общий угол при вершине  $C$ , причем стороны, заключающие этот угол, пропорциональны, так как  $OC \times O'C = R^2 = (AC)^2$ . Следовательно,  $\angle CAO' = \angle AOC = \angle OAB$ . Далее имеем

$\angle ABO = \angle O'AB = \angle CAO$ , причем первые два угла равны, как углы при основании равнобокой трапеции  $ABOO'$ , а последние два равны вследствие того, что  $\angle CAO' = \angle OAB$ . Из равенств  $\angle AOC = \angle OAB$  и  $\angle CAO = \angle ABO$  следует подобие треугольников  $AOC$  и  $ABO$ , и мы окончательно имеем:

$$\triangle AO'C \sim \triangle AOC \sim \triangle ABO.$$

Из подобия треугольников  $ABO$  и  $AOC$  найдем:

$$AB : OA = OA : OC$$

или

$$(OA)^2 = AB \cdot OC = 2AF \cdot OC.$$

Приняв во внимание последнее соотношение и обозначив масштаб тока через  $a$ , для мощности  $P$  получим:

$$P = rI^2 = ra^2 \cdot (OA)^2 = 2ra^2 \cdot OC \cdot AF.$$

Так как длина отрезка  $OC$  — величина постоянная, то действительно мощность  $P$  можно измерять перпендикуляром  $AF$ , опускаемым из конца вектора тока на полуполюару, в масштабе, равном  $2ra^2 \cdot OC$ .

Для случая, когда начало векторов тока лежит внутри круга тока, можно воспользоваться построением рис. 125 и, приняв за

начало точку  $O'$ , показать, что  $(O'A)^2 = 2AF \cdot O'C$  и что, следовательно,

$$P = 2ra^2 \cdot O'C \cdot AF.$$

В заключение покажем, что, когда для двух из мощностей, связанных зависимостью  $P_0 = P_1 + P_2$ , можно построить прямые мощности, то и для третьей мощности можно построить прямую. Пусть, например, известно, что для  $P_1$  и  $P_2$  можно построить прямые мощности, выражаемые уравнениями:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{и} \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

причем масштаб мощности  $P_1$  равен  $w_1$ , а масштаб мощности  $P_2$  равен  $w_2$ . Тогда, обозначив текущие координаты конца вектора тока через  $x_0$  и  $y_0$ , для соответствующих значений  $P_1$  и  $P_2$  имеем:

$$P_1 = w_1 \frac{a_1x_0 + b_1y_0 + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = w'_1 (a_1x_0 + b_1y_0 + c_1);$$

$$P_2 = w_2 \frac{a_2x_0 + b_2y_0 + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = w'_2 (a_2x_0 + b_2y_0 + c_2),$$

где  $w'_1$  и  $w'_2$  — постоянные величины, и для значения мощности  $P_0 = P_1 + P_2$  можем написать:

$$P_0 = (a_1w'_1 + a_2w'_2)x_0 + (b_1w'_1 + b_2w'_2)y_0 + (c_1w'_1 + c_2w'_2).$$

Обозначив в последнем уравнении коэффициенты при  $x_0$  и  $y_0$  через  $a$  и  $b$  и свободный член через  $c$ , получим:

$$P_0 = ax_0 + by_0 + c = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} (ax_0 + by_0 + c)}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

откуда и следует, что мощность  $P_0$  можно измерять длиной перпендикуляра, опущенного из конца вектора тока  $(x_0, y_0)$  на прямую  $ax + by + c = 0$ , причем масштаб  $P_0$  равен  $w_0 = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

Весьма существенно заметить, что координаты точки пересечения прямых  $P_1$  и  $P_2$  удовлетворяют уравнению прямой  $P_0$  и, следовательно, все три прямые  $P_0$ ,  $P_1$  и  $P_2$  пересекаются в одной точке.

## § 68. Шкала коэффициента полезного действия

Пусть для мощностей  $P_0$ ,  $P_1$  и  $P_2$ , связанных зависимостью  $P_0 = P_1 + P_2$ , построены прямые и пусть мощность  $P_2$  рассматривается как полезная мощность, а мощность  $P_1$  — как теряемая. Тогда можно построить шкалу, позволяющую очень просто определять коэффициент полезного действия  $\eta = P_2 : P_0$  соответствующего устройства.





другом только тогда, когда точка  $F$  пересечения прямых мощности совпадает с началом  $O$  векторов тока.

Из приведенного доказательства непосредственно вытекает соотношение:

$$P_2 : P_0 : P_1 = AH : GH : AG,$$

из которого следует, что отрезками  $AH$ ,  $GH$  и  $AG$  прямой, проведенной через конец вектора тока параллельно линии мощности  $P_0$ , можно измерять мощности  $P_2$ ,  $P_0$  и  $P_1$  в одном и том же масштабе.

Этот масштаб равен  $\frac{\omega_0}{\text{ctg } \beta + \text{ctg } \gamma}$ , так как

$$P_0 = AB \cdot \omega_0 = GH \frac{\omega_0}{\text{ctg } \beta + \text{ctg } \gamma}.$$

### § 69. Построение прямых мощности для двух частных случаев передачи энергии по индуктивной линии

Применим изученные нами методы построения прямых мощности к рассмотренным в § 63 и 64 случаям передачи энергии по индуктивной линии. Так как вектор  $\bar{U}_0$  при построении соответствующих диаграмм мы расположили по оси вещественных, то ось мнимых в обоих случаях будет прямою подведенной мощности  $P_0$  (рис. 127 и 128). Прямую потерь в линии можно построить как полуполару начала координат относительно окружности тока, причем для случая  $\cos \varphi_2 = \text{const}$  она совпадает с касательной, так как окружность тока проходит через начало координат. Прямая полезной мощности  $P_2$  и в том и в другом случае должна пройти через точку холостого хода и через точку короткого замыкания, так как при обоих этих режимах полезная мощность равна нулю. При  $\cos \varphi_2 = \text{const}$  точка холостого хода лежит в начале координат, и все три прямые  $P_0$ ,  $P_1$  и  $P_2$  пересекаются в этой точке. При  $b_2 = \text{const}$  как точка холостого хода, так и точка пересечения прямых  $P_0$ ,  $P_1$  и  $P_2$  не совпадают с началом координат.

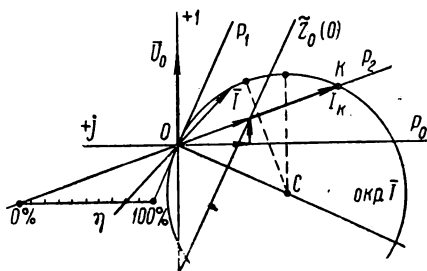


Рис. 127

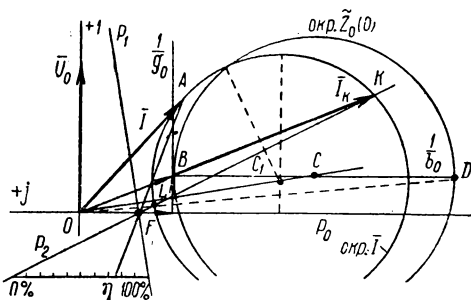


Рис. 128

Построив прямые  $P_0$ ,  $P_1$  и  $P_2$ , можно построить и шкалу коэффициента полезного действия  $\eta$ , проведя ее параллельно прямой  $P_0$  между прямыми  $P_2$  и  $P_1$  на любом расстоянии от начала координат.

Определение режимов работы цепи, при которых  $P_0$  и  $P_2$  получают наибольшие значения, не представляет затруднений. Для этого достаточно как при  $\cos \varphi_2 = \text{const}$ , так и при  $b_2 = \text{const}$  провести из центра окружности тока перпендикуляры к прямым  $P_0$  и  $P_2$ . Точки пересечения этих перпендикуляров с окружностью тока и определяют искомые режимы работы.

На рис. 114 и 116 представлены полученные из диаграмм зависимости  $\frac{P_0}{P_{0 \text{ макс}}}$ ,  $\frac{P_2}{P_{2 \text{ макс}}}$  и  $\eta$  от отношения  $\frac{I}{I_k}$  для случаев  $\cos \varphi_2 = \text{const}$  и  $b_2 = \text{const}$ .

---

## ГЛАВА СЕДЬМАЯ

### МНОГОФАЗНЫЕ ЦЕПИ

#### § 70. Понятие о многофазных системах и цепях

Совокупность нескольких электрических цепей, в которых действуют синусоидальные электродвижущие силы одной и той же частоты, отличающиеся друг от друга по фазе и создаваемые общим источником электрической энергии, мы будем называть *многофазной системой электрических цепей*. Отдельные электрические цепи, образующие многофазную систему, называют фазами. Соответственно, число цепей, входящих в систему, называют *числом фаз многофазной системы*.

Совокупность э. д. с., действующих в многофазной системе электрических цепей, называют *многофазной системой электродвижущих сил*, а совокупность токов, протекающих в этих цепях, называют *многофазной системой токов*. Заметим, что как э. д. с., так и токи, образующие многофазную систему, могут отличаться друг от друга не только по фазе, но и по величине.

Элементарный многофазный генератор можно устроить аналогично элементарному однофазному генератору (§ 6), укрепив на оси несколько витков или обмоток, плоскости которых сдвинуты друг относительно друга на некоторые углы. Вращая с постоянной угловой скоростью в однородном магнитном поле такую систему из  $m$  обмоток, мы получим  $m$ -фазный генератор, причем все э. д. с., генерируемые в нем, будут синусоидальны и сдвинуты по фазе на углы, равные углам между плоскостями, в которых расположены обмотки. На рис. 129 дана схема устройства элементарного трехфазного генератора, а на рис. 130 приведены кривые э. д. с., индуктируемых в его обмотках, причем предположено, что эти обмотки совершенно одинаковы и расположены в плоскостях, сдвинутых на угол  $2\pi/3$  друг относительно друга.

В действительности трехфазные генераторы переменного тока конструктивно выполняют так, как это было изложено в § 6. Обмотки, в которых индуктируются э. д. с., располагают на неподвижной части машины — статоре, а на вращающейся части машины роторе располагают обмотку возбуждения, по которой проходит постоянный ток. На рис. 9 в пазах статора показаны сечения проводов, принадлежащих обмотке одной фазы. Обмотки двух других

фаз располагаются в свободных (рис. 9) пазах так, что оси всех трех обмоток составляют друг с другом при двухполюсной машине угол  $2\pi/3$ , а при числе пар полюсов, равном  $p$ , угол  $2\pi/3p$ .

Многофазную систему электрических цепей называют *несвязанной*, если цепи, образующие эту систему, не соединены электрически между собою; при наличии же электрического соединения между цепями многофазную систему цепей называют *связанной*. На практике почти исключительно применяют связанные системы как обладающие существенными преимуществами. Из связанных систем особенно широкое распространение, как наиболее совершенная и наиболее экономичная, получила трехфазная система. Честь изобретения

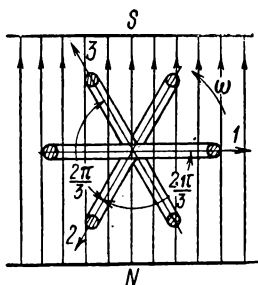


Рис. 129

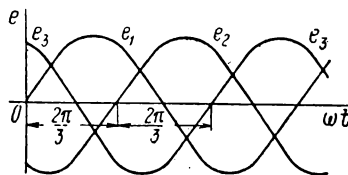


Рис. 130

связанной трехфазной системы и введения ее в электротехнику принадлежит М. О. Доливо-Добровольскому, который разработал и осуществил все звенья передачи, распределения и преобразования энергии при помощи этой системы, а именно трехфазные генераторы, трехфазные трансформаторы и, наконец, трехфазные асинхронные двигатели, являющиеся самыми простыми и самыми дешевыми двигателями переменного тока. Связанные многофазные системы цепей, по сути дела, представляют собой сложные электрические цепи, которые принято называть *многофазными цепями*. Многофазные цепи, комплексные сопротивления всех фаз которых одинаковы, мы будем называть *симметричными*, а в противном случае будем говорить, что многофазная цепь *несимметрична*.

## § 71. Симметричные многофазные системы

Многофазную систему синусоидальных э. д. с., напряжений или токов называют *симметричной*, если все э. д. с., или напряжения, или токи, входящие в нее, равны по величине и если каждая э. д. с., или каждое напряжение, или каждый ток отстает по фазе от предыдущей э. д. с., или напряжения, или тока на один и тот же угол, равный  $\frac{2\pi}{m}$ , где  $m$  — число фаз системы. Пусть дана  $m$ -фазная система синусоидальных э. д. с.:

$$\dot{E}_1 = E_1 e^{j\psi_1}, \quad \dot{E}_2 = E_2 e^{j\psi_2}, \quad \dot{E}_3 = E_3 e^{j\psi_3}, \quad \dots, \quad \dot{E}_m = E_m e^{j\psi_m}.$$

Тогда, считая, что э. д. с. следуют друг за другом в том же порядке, что и цифры, которыми они помечены, условия симметрии можно написать в виде:

$$E_1 = E_2 = E_3 = \dots = E_{m-1} = E_m;$$

$$\psi_1 - \psi_2 = \psi_2 - \psi_3 = \dots = \psi_{m-1} - \psi_m = \psi_m - \psi_1 = \frac{2\pi}{m}.$$

Более общий случай симметрии, когда разность фаз двух соседних э. д. с., напряжений или токов равна  $\frac{2\pi q}{m}$ , где  $q$  — целое число, будет нами рассмотрен позднее (§ 82).

Из изложенного непосредственно вытекает, что векторы, изображающие все э. д. с., или все напряжения, или токи симметричной системы, образуют симметричную звезду, если все они имеют общее начало, или замкнутый правильный многоугольник, если конец одного вектора служит началом следующего (рис. 131). Поэтому геометрическая сумма всех этих векторов равна нулю.

Из последнего обстоятельства вытекает основное свойство рассматриваемых симметричных систем, а именно: сумма мгновенных значений всех э. д. с., напряжений или токов, образующих симметричную систему, равна нулю для любого момента времени, точно так же, как равна нулю сумма всех комплексов, изображающих эти э. д. с., напряжения или токи, т. е.:

$$\sum e_k = e_1 + e_2 + \dots + e_m = 0;$$

$$\sum \dot{E}_k = \dot{E}_1 + \dot{E}_2 + \dots + \dot{E}_m = 0.$$

Не представляет труда написать выражения для всех э. д. с., напряжений или токов, образующих симметричную систему. Так, например, для мгновенных значений э. д. с. пятифазной системы и для их комплексных действующих значений имеем:

$$e_1 = E_m \sin \omega t, \quad \dot{E}_1 = E;$$

$$e_2 = E_m \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{5} \right), \quad \dot{E}_2 = E e^{-j \frac{2\pi}{5}};$$

$$e_3 = E_m \sin \left( \omega t - \frac{4\pi}{5} \right), \quad \dot{E}_3 = E e^{-j \frac{4\pi}{5}};$$

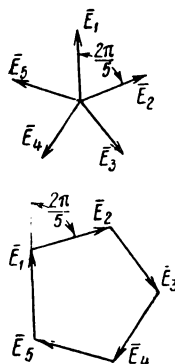


Рис. 131

$$e_4 = E_m \sin\left(\omega t - \frac{6\pi}{5}\right), \quad \dot{E}_4 = E e^{-j\frac{6\pi}{5}};$$

$$e_5 = E_m \sin\left(\omega t - \frac{8\pi}{5}\right), \quad \dot{E}_5 = E e^{-j\frac{8\pi}{5}},$$

если положить, что начальная фаза э. д. с.  $e_1$  равна нулю.

Если комплексные сопротивления всех фаз одинаковы, т. е. многофазная цепь симметрична, то при симметрии системы э. д. с., действующих в этой цепи, система токов будет симметрична.

Для симметричной трехфазной системы э. д. с. ( $e_1, e_2, e_3$ ) или ( $\dot{E}_1, \dot{E}_2, \dot{E}_3$ ), имеющей наиболее важное практическое значение, обозначая начальную фазу э. д. с.  $e_1$  через  $\psi$ , можно написать:

$$e_1 = E_m \sin(\omega t + \psi), \quad \dot{E}_1 = \dot{E} = E e^{j\psi};$$

$$e_2 = E_m \sin\left(\omega t + \psi - \frac{2\pi}{3}\right), \quad \dot{E}_2 = \dot{E} e^{-j\frac{2\pi}{3}} = E e^{j\left(\psi - \frac{2\pi}{3}\right)};$$

$$e_3 = E_m \sin\left(\omega t + \psi - \frac{4\pi}{3}\right), \quad \dot{E}_3 = \dot{E} e^{-j\frac{4\pi}{3}} = E e^{j\left(\psi - \frac{4\pi}{3}\right)}.$$

При рассмотрении трехфазных систем комплексный множитель  $e^{j\frac{2\pi}{3}}$  принято обозначать через  $a$ . Вводя это обозначение, имеем:

$$a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$a^2 = e^{j\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$a^3 = e^{j2\pi} = 1,$$

причем существенно иметь в виду, что  $1 + a + a^2 = 0$  и  $a^4 = a$ .

В соответствии со сказанным для симметричной трехфазной системы э. д. с. можем написать:

$$\dot{E}_1 = \dot{E}, \quad \dot{E}_2 = a^2 \dot{E}; \quad \dot{E}_3 = a \dot{E},$$

так как

$$e^{-j\frac{2\pi}{3}} = e^{j\frac{4\pi}{3}} = a^2$$

и

$$e^{-j\frac{4\pi}{3}} = e^{j\frac{2\pi}{3}} = a.$$

Векторные диаграммы симметричной трехфазной системы э. д. с. даны на рис. 132.

В заключение заметим, что все многофазные системы, не удовлетворяющие хотя бы одному из указанных в начале параграфа условий симметрии, называют *несимметричными*. Для несимметричных систем геометрическая сумма векторов, изображающих все э. д. с., все напряжения или все токи системы, в общем случае, не равна нулю.

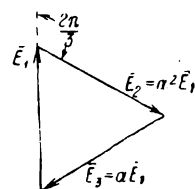
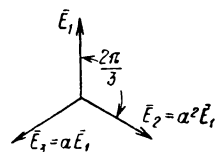


Рис. 132

## § 72. Уравновешенные и неуравновешенные многофазные системы

Многофазные системы подразделяют на системы *уравновешенные*, мгновенное значение мощности которых не зависит от времени, и системы *неуравновешенные*, мгновенное значение мощности которых с течением времени изменяется.

Покажем, что при симметрии системы э. д. с. и системы токов многофазная система уравновешена, если  $m > 2$ . Имеем для э. д. с. и тока в  $k$ -той фазе:

$$e_k = E\sqrt{2} \sin \left[ \omega t - (k-1) \frac{2\pi}{m} \right];$$

$$i_k = I\sqrt{2} \sin \left[ \omega t - \varphi - (k-1) \frac{2\pi}{m} \right]$$

и для мгновенного значения мощности в этой фазе:

$$\begin{aligned} p_k = e_k i_k &= 2EI \sin \left[ \omega t - (k-1) \frac{2\pi}{m} \right] \sin \left[ \omega t - \varphi - (k-1) \frac{2\pi}{m} \right] = \\ &= EI \cos \varphi - EI \cos \left[ 2\omega t - \varphi - 2(k-1) \frac{2\pi}{m} \right]. \end{aligned}$$

Так как мгновенное значение  $p$  мощности всей системы равно сумме мгновенных значений мощности во всех фазах, то

$$p = \sum_{k=1}^m p_k = \sum_{k=1}^m EI \cos \varphi - EI \sum_{k=1}^m \cos \left[ 2\omega t - \varphi - 2(k-1) \frac{2\pi}{m} \right].$$

При  $m > 2$  последняя из этих сумм равна нулю, так как, изображая все слагаемые этой суммы векторами, мы получим симметричную звезду. Поэтому при  $m > 2$  окончательно имеем:

$$p = \sum_{k=1}^m EI \cos \varphi = mEI \cos \varphi = P = \text{const},$$



т. е. в рассматриваемом случае мгновенное значение мощности многофазной системы не зависит от времени и равно сумме активных мощностей отдельных фаз или, что то же, равно активной мощности  $P$  всей системы, т. е. среднему за период значению мощности всей системы, и, следовательно, такая система уравновешена. Если система э. д. с. симметрична, но многофазная цепь несимметрична, то, вообще говоря, мгновенное значение мощности всей системы зависит от времени и пульсирует с угловой частотой  $2\omega$ .

Несимметрия системы не является признаком ее неуравновешенности. Так, несимметричная двухфазная система, образуемая двумя равными э. д. с., сдвинутыми на угол  $\frac{\pi}{2}$ , будет уравновешена при симметрии цепи, что вытекает из следующих выражений:

$$p_1 = e_1 i_1 = E \sqrt{2} \sin \omega t \cdot I \sqrt{2} \sin (\omega t - \varphi) = EI [\cos \varphi - \cos (2\omega t - \varphi)];$$

$$\begin{aligned} p_2 = e_2 i_2 &= E \sqrt{2} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) \cdot I \sqrt{2} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \\ &= EI [\cos \varphi - \cos (2\omega t - \varphi - \pi)]; \end{aligned}$$

$$p = p_1 + p_2 = 2EI \cos \varphi = P = \text{const.}$$

Характерным примером неуравновешенной системы является однофазная система, мощность которой колеблется между

$$P \left( 1 + \frac{1}{\cos \varphi} \right) \text{ и } P \left( 1 - \frac{1}{\cos \varphi} \right),$$

где  $P$  — активная мощность системы (§ 20).

Неуравновешенность системы оказывает неблагоприятное влияние на работу генерирующих, передающих и преобразующих устройств, что бывает, в частности, при непосредственном присоединении мощных однофазных приемников к трехфазным сетям.

### § 73. О связывании многофазных систем

Существует два основных способа связывания многофазных систем: *соединение звездой* и *соединение многоугольником*, причем способ связывания обмоток генератора или трансформатора не предвещает способа связывания приемников.

Заметим, что каждая обмотка генератора или трансформатора имеет две конечные точки, одну из которых называют *началом*, а другую *концом* обмотки. Выбор этих наименований, вообще говоря, произволен. Однако в многофазных генераторах и трансформаторах целесообразно именовать началами симметрично расположенные конечные точки обмоток, причем и концы обмоток тогда будут также расположены симметрично. При таком выборе начал и кон-

цов обмоток система э. д. с., индуктируемых в обмотках симметричных генераторов и трансформаторов, будет симметрична, если условиться за направление всех этих э. д. с. выбирать направление от начал обмоток к их концам или, наоборот, направлять все эти э. д. с. от концов обмоток к их началам.

Соединение обмоток генератора или трансформатора звездой выполняют, объединяя начала всех его обмоток в одну общую точку, называемую *нейтральной точкой* (рис. 133). Связь между генератором и приемниками в этом случае осуществляют при помощи проводов, идущих от концов всех обмоток, а иногда и от нейтраль-

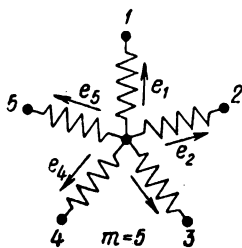


Рис. 133

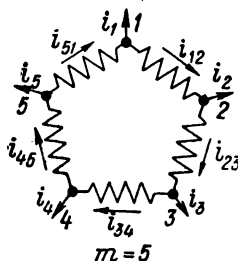


Рис. 134

ной точки генератора. При этом провода, идущие от концов обмоток, называют *линейными*, а провод, идущий от нейтральной точки, — *нейтральным*.

Соединение обмоток генератора или трансформатора многоугольником выполняют, соединяя начало обмотки каждой фазы с концом обмотки следующей фазы (рис. 134). Связь между генератором и приемниками в этом случае осуществляют при помощи проводов, идущих от общих точек обмоток соседних фаз и называемых *линейными* проводами.

Электродвижущие силы, индуктируемые в обмотках генератора или трансформатора, напряжения на зажимах этих обмоток и токи в них называют *фазными* э. д. с. ( $e_\phi$ ,  $E_\phi$ ), напряжениями ( $u_\phi$ ,  $U_\phi$ ) и токами ( $i_\phi$ ,  $I_\phi$ ), а напряжения между соседними линейными проводами и токи в них называют *линейными* напряжениями ( $u_\lambda$ ,  $U_\lambda$ ) и токами ( $i_\lambda$ ,  $I_\lambda$ ).

Соединение приемников звездой или многоугольником выполняют таким же образом, причем определение фазных и линейных напряжений и токов для приемников остаются теми же, что и для генераторов и трансформаторов.

В дальнейшем, рассматривая как симметричные, так и несимметричные системы, будем выбирать положительные направления всех токов единообразно, а именно так, чтобы положительные линейные токи все были направлены к приемнику или все были на-

правлены от него, а положительные фазные токи в сторонах многоугольника все были направлены по движению стрелки часов или все имели обратное направление. При этом положительные фазные токи в лучах звезды все будут сходиться в нейтральной точке или все будут расходиться из нее. Положительные направления всех э. д. с. и всех напряжений будем выбирать также единообразно в указанном выше смысле и, в частности, при соединении звездой условимся все положительные линейные напряжения направлять от предыдущей фазы к последующей или, наоборот, все их направлять от последующей фазы к предыдущей. Положительное направ-

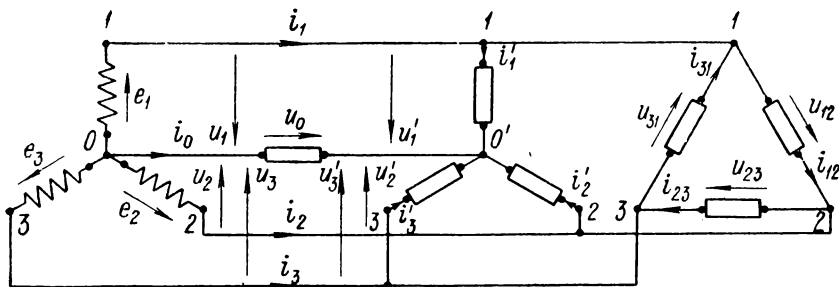


Рис. 135

ление тока в нейтральном проводе можно выбирать произвольно: или от нейтральной точки генератора к нейтральной точке приемника, или наоборот. Положительное напряжение между нейтральными точками генератора и приемника будем выбирать в соответствии с выбранным направлением тока в нейтральном проводе.

На рис. 135 приведен один из возможных вариантов выбора положительных направлений токов, э. д. с. и напряжений, удовлетворяющий принятым выше условиям единообразия, для случая, когда трехфазный трансформатор, вторичные обмотки которого соединены звездой, питает два приемника, один из которых соединен также звездой, а другой соединен треугольником.

Приняв только что изложенные правила выбора положительных направлений токов и напряжений в многофазных цепях, установим основные положения, относящиеся к этим токам и напряжениям.

Как видно из схемы рис. 136, при соединении звездой линейные токи равны соответствующим фазным токам, а линейные напряжения равны разностям соответствующих фазных напряжений. При соединении многоугольником (рис. 137), наоборот, линейные напряжения равны соответствующим фазным напряжениям, а линейные токи равны разностям соответствующих фазных токов.

При соединении звездой для линейных напряжений имеем:

$$u_{12} = u_2 - u_1, \quad u_{23} = u_3 - u_2, \quad \dots, \quad u_{m1} = u_1 - u_m$$

и, сложив эти равенства, найдем, что сумма мгновенных значений всех линейных напряжений равна нулю. Это положение справедливо и при соединении многоугольником, в чем можно убедиться, применив второй закон Кирхгофа к контуру приемника или генератора.

При соединении многоугольником для линейных токов имеем:

$$i_1 = i_{m1} - i_{12}, \quad i_2 = i_{12} - i_{23}, \quad \dots, \quad i_m = i_{m-1, m} - i_{m1}.$$

Сложив эти равенства, найдем, что сумма мгновенных значений всех линейных токов равна нулю. Это положение справедливо и

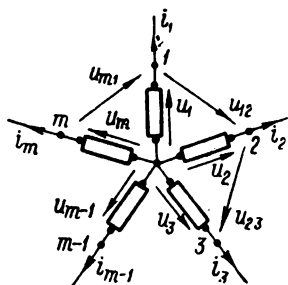


Рис. 136

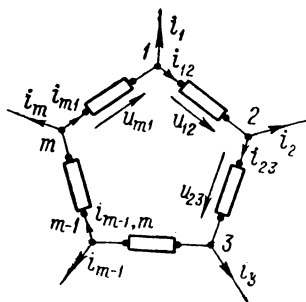


Рис. 137

при соединении звездой в случае отсутствия нейтрального провода, что следует из первого закона Кирхгофа, но при наличии нейтрального провода сумма линейных токов, вообще говоря, отличается от нуля.

При синусоидальных токах и напряжениях, переходя от мгновенных значений к комплексам, получим: для линейных напряжений при соединении звездой

$$\dot{U}_{12} = \dot{U}_2 - \dot{U}_1, \quad \dot{U}_{23} = \dot{U}_3 - \dot{U}_2, \quad \dots, \quad \dot{U}_{m1} = \dot{U}_1 - \dot{U}_m,$$

для линейных токов при соединении многоугольником

$$\dot{i}_1 = \dot{i}_{m1} - \dot{i}_{12}, \quad \dot{i}_2 = \dot{i}_{12} - \dot{i}_{23}, \quad \dots, \quad \dot{i}_m = \dot{i}_{m-1, m} - \dot{i}_{m1}.$$

#### § 74. Многофазные цепи при симметрии системы напряжений и системы токов

Рассмотрим соотношения между линейными и фазными напряжениями и токами в  $m$ -фазной цепи при симметрии системы напряжений и системы токов. При соединении звездой для линейных и фазных токов имеем:

$$I_\lambda = I_\phi,$$

а для линейных и фазных напряжений из диаграммы рис. 138 получим:

$$U_A = 2U_\phi \sin \frac{\pi}{m}.$$

В частности, для трехфазной цепи при соединении звездой:

$$I_A = I_\phi; \quad U_A = \sqrt{3} U_\phi.$$

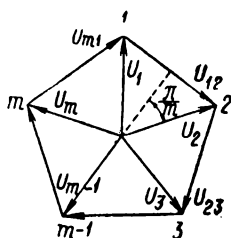


Рис. 138

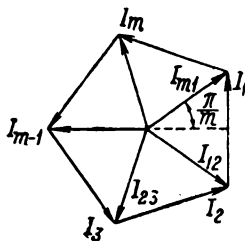


Рис. 139.

При соединении многоугольником для линейных и фазных напряжений имеем:

$$U_A = U_\phi,$$

а для линейных и фазных токов из диаграммы рис. 139 получим:

$$I_A = 2I_\phi \sin \frac{\pi}{m}.$$

В частности, для трехфазной цепи при соединении треугольником имеем:

$$U_A = U_\phi; \quad I_A = \sqrt{3} I_\phi.$$

Пользуясь полученными соотношениями, при симметрии и системы напряжений и системы токов, для мощности  $m$ -фазной цепи найдем и для соединения звездой и для соединения многоугольником:

$$P = m U_\phi I_\phi \cos \varphi = \frac{m}{2 \sin \frac{\pi}{m}} U_A I_A \cos \varphi.$$

В частности, для трехфазной цепи получим:

$$P = 3 U_\phi I_\phi \cos \varphi = \sqrt{3} U_A I_A \cos \varphi.$$

Аналогично для реактивной мощности  $m$ -фазной цепи в рассматриваемом случае найдем:

$$Q = m U_{\phi} I_{\phi} \sin \varphi = \frac{m}{2 \sin \frac{\pi}{m}} U_A I_A \sin \varphi$$

и при  $m = 3$  получим:

$$Q = 3 U_{\phi} I_{\phi} \sin \varphi = \sqrt{3} U_A I_A \sin \varphi.$$

### § 75. Соединение звездой и треугольником в трехфазной системе

На рис. 140 показано, как осуществляют связывание трехфазной системы при соединении обмоток генератора и приемников звездой. В этом случае начала обмоток генератора объединяют в

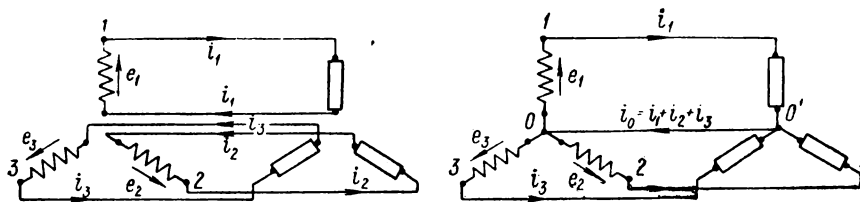


Рис. 140

общую нейтральную точку генератора  $O$ , конечные зажимы приемников объединяют в общую нейтральную точку приемников  $O'$ , а все обратные провода — в один общий нейтральный провод, соединяющий точки  $O$  и  $O'$ . При симметрии системы токов  $i_1 + i_2 + i_3 = 0$  и ток в нейтральном проводе равен нулю. Следовательно, в этом случае нейтральный провод можно устранить, что позволит сэкономить значительное количество проводящего материала. При несимметрии системы токов во избежание значительного нарушения симметрии системы напряжений на зажимах приемников, которая возникает при несимметрии цепи, нейтральный провод обычно сохраняют, но сечение его берут или равным сечению линейного провода, или даже меньшим, причем и в этих случаях получается значительная экономия. При наличии нейтрального провода приемники можно включать и между линейными проводами под линейное напряжение и между одним из линейных проводов и нейтральным проводом под фазное напряжение. Такая возможность в цепи с нейтральным проводом представляет собою весьма важное преимущество, и в частности, четырехпроводные цепи с напряжениями 380/220 и 220/127 в получили широкое распространение.

На рис. 141 показано, как осуществляют связывание трехфазной системы при соединении обмоток генератора и приемников

треугольником. В этом случае начало обмотки каждой фазы генератора соединяют с концом обмотки следующей фазы, а начальный зажим каждого приемника соединяют с конечным зажимом приемника, включенного в предыдущую фазу. При этом два провода, идущих от объединенных точек генератора к соответствующим объединенным точкам приемника, объединяют в один общий линейный провод. При симметрии системы токов действующее значение тока в этом общем проводе не в два раза, а только в  $\sqrt{3}$  раз больше дей-

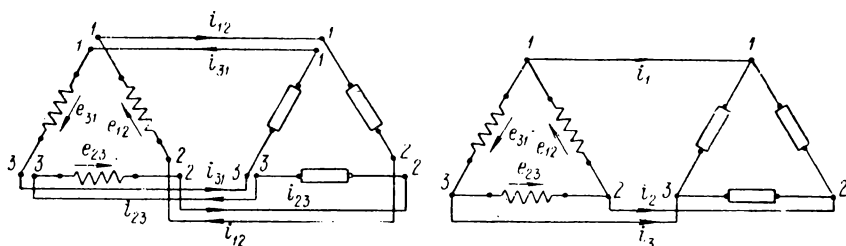


Рис. 141

ствующего значения фазного тока. Это обстоятельство позволяет достигнуть экономии проводящего материала и при соединении треугольником.

## § 76. Топографические диаграммы

Определение напряжений между различными точками сложной цепи, в частности трехфазной цепи, упрощается, если пользоваться особым видом векторных диаграмм, а именно *топографическими диаграммами*. Отличительная особенность этих диаграмм состоит в том, что векторы напряжений на зажимах отдельных элементов сложной цепи на топографической диаграмме располагают в том порядке, в котором в рассматриваемой цепи расположены соответствующие ее элементы, причем вектор напряжения на последующем элементе цепи примыкает обязательно к вектору напряжения на предыдущем элементе, в то время как на обычных векторных диаграммах любой вектор можно переносить параллельно самому себе в любое место плоскости. Направление векторов на топографической диаграмме должно соответствовать, как и на обычных векторных диаграммах, выбранному положительному направлению напряжений на соответствующих участках.

Поясним сказанное на примере цепи, приведенной на рис. 142. Пусть нам известно напряжение  $U_{ab}$ , приложенное к зажимам цепи, и параметры ее отдельных элементов. Определив тем или иным способом напряжения  $U_{ac}$ ,  $U_{ce}$ ,  $U_{ed}$ ,  $U_{db}$ ,  $U_{cf}$ ,  $U_{fd}$  и углы сдвига их друг

относительно друга, построим вектор  $\overline{U}_{ab} = \overline{AB}$  и векторы  $\overline{U}_{ac} = \overline{AC}$ ,  $\overline{U}_{ce} = \overline{CE}$ ,  $\overline{U}_{ed} = \overline{ED}$ ,  $\overline{U}_{db} = \overline{DB}$ ,  $\overline{U}_{cf} = \overline{CF}$ ,  $\overline{U}_{fd} = \overline{FD}$  именно в том порядке, в котором соответствующие элементы цепи следуют друг за другом (рис. 143). Тогда для определения вектора напряжения  $\overline{U}_{cd}$ , действующего от точки  $c$  к точке  $d$  цепи, достаточно соединить прямой соответствующие точки  $C$  и  $D$  векторной диаграммы, и вектор  $\overline{CD}$  будет представлять собой искомый вектор  $\overline{U}_{cd}$ . Действительно, из схемы цепи видно, что напряжение  $\overline{U}_{cd}$  является геометрической суммой напряжений  $\overline{U}_{ce}$  и  $\overline{U}_{ed}$ , чему и со-

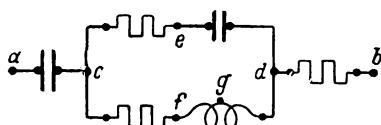


Рис. 142

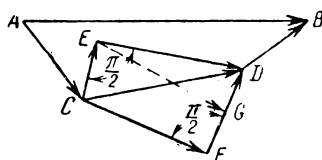


Рис. 143

ответствуют построения на векторной диаграмме, так как  $\overline{CD} = \overline{CE} + \overline{ED} = \overline{U}_{ce} + \overline{U}_{ed} = \overline{U}_{cd}$ .

Аналогичным путем можно показать, что вектором напряжения, действующего от точки  $e$  к точке  $b$ , будет вектор  $\overline{EB}$ , а вектором напряжения, действующего между точкой  $e$  и средней точкой  $g$  реактивной катушки, включенной в ветвь  $cf$ , будет вектор  $\overline{EG}$ , соединяющий точку  $E$  с серединой  $G$  вектора  $FD$ .

Таким образом, мы видим, что каждой точке цепи соответствует вполне определенная точка топографической диаграммы и что вектор напряжения между двумя любыми точками цепи, для которых имеются пометки на топографической диаграмме, можно получить как отрезок, соединяющий эти пометки.

Естественно, метод топографических диаграмм может быть применен для любой сложной цепи, но он имеет особое достоинство в применении к многофазным цепям.

## § 77. Расчет несимметричных трехфазных цепей при отсутствии взаимной индукции

Для ознакомления с расчетом несимметричных цепей рассчитаем две трехфазные цепи, причем для общности предположим, что как сами цепи, так и системы приложенных к ним напряжений несимметричны.

Ограничимся в этом параграфе случаем, когда взаимная индукция между фазами приемника отсутствует, или ею можно прене-



бречь. Сюда относится важный случай бытовой нагрузки, которая обычно осуществляется отдельными однофазными приемниками.

Пусть генератор и приемник соединены звездой, и проводимость между нейтральными точками их имеет конечное значение. Тогда при принятых на рис. 144 направлениях напряжений топографическая диаграмма напряжений будет иметь вид, показанный на рис. 145. При этом в общем случае между точками  $O$  и  $O'$  будет существовать некоторое напряжение  $U_0$ , не равное нулю и изображаемое вектором  $\overline{OO'}$ . Применяя к точке  $O'$  первый закон Кирхгофа, найдем:

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = \dot{I}_0.$$

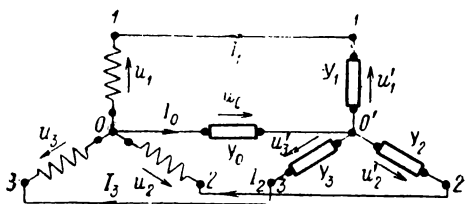


Рис. 144

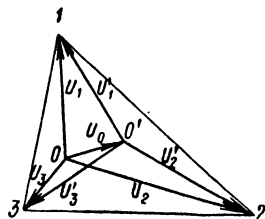


Рис. 145

Токи, входящие в последнее равенство, можно выразить через соответствующие проводимости и напряжения. Обозначив фазные напряжения на зажимах генератора через  $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{U}_3$ , а фазные напряжения на зажимах приемника через  $\dot{U}'_1, \dot{U}'_2, \dot{U}'_3$ , получим:

$$\dot{I}_0 = \dot{U}_0 Y_0;$$

$$\dot{I}_1 = \dot{U}'_1 Y_1 = (\dot{U}_1 - \dot{U}_0) Y_1;$$

$$\dot{I}_2 = \dot{U}'_2 Y_2 = (\dot{U}_2 - \dot{U}_0) Y_2;$$

$$\dot{I}_3 = \dot{U}'_3 Y_3 = (\dot{U}_3 - \dot{U}_0) Y_3$$

и найдем

$$\dot{U}_1 Y_1 + \dot{U}_2 Y_2 + \dot{U}_3 Y_3 = \dot{U}_0 (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_0),$$

откуда

$$\dot{U}_0 = \frac{\dot{U}_1 Y_1 + \dot{U}_2 Y_2 + \dot{U}_3 Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_0}.$$

Последнее соотношение позволяет по фазным напряжениям генератора и проводимостям  $Y_1, Y_2, Y_3, Y_0$  определить напряжение  $\dot{U}_0$  между нейтральными точками, зная которое, легко найти напряжения на зажимах приемников и вычислить ток в каждом из них.

Если нейтральный провод отсутствует, то в выражении для  $\dot{U}_0$  нужно положить  $Y_0 = 0$ .

Следует иметь в виду, что в частных случаях точка  $O'$  диаграммы может лежать вне треугольника линейных напряжений. Смещение нейтральной точки приемника относительно нейтральной точки генератора вызывает уменьшение напряжения в одной или двух фазах приемника и увеличение напряжения в других фазах, что нежелательно, а при значительном смещении и недопустимо.

В качестве второго примера рассмотрим случай, когда приемник соединен звездой, нейтральный провод отсутствует и в отличие от

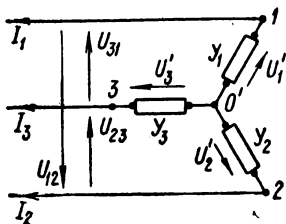


Рис. 146

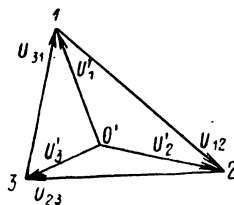


Рис. 147

предыдущего случая даны линейные напряжения  $\dot{U}_{12}$ ,  $\dot{U}_{23}$ ,  $\dot{U}_{31}$  на зажимах приемника (рис. 146). Тогда

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0$$

или

$$\dot{U}'_1 Y_1 + \dot{U}'_2 Y_2 + \dot{U}'_3 Y_3 = 0$$

и, так как из топографической диаграммы рис. 147 мы имеем:

$$\dot{U}'_2 = \dot{U}'_1 + \dot{U}_{12}, \quad \dot{U}'_3 = \dot{U}'_1 - \dot{U}_{31},$$

то

$$\dot{U}'_1 (Y_1 + Y_2 + Y_3) = \dot{U}_{31} Y_3 - \dot{U}_{12} Y_2,$$

откуда

$$\dot{U}'_1 = \frac{\dot{U}_{31} Y_3 - \dot{U}_{12} Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3}.$$

Аналогично определяются  $\dot{U}'_2$  и  $\dot{U}'_3$ , после чего нетрудно определить и  $\dot{I}_1$ ,  $\dot{I}_2$ ,  $\dot{I}_3$ .

В частном случае, когда  $Y_1 = Y_2 = Y_3$ , имеем:

$$\dot{U}'_1 = \frac{1}{3} (\dot{U}_{31} - \dot{U}_{12}), \quad \dot{U}'_2 = \frac{1}{3} (\dot{U}_{12} - \dot{U}_{23}),$$

$$\dot{U}'_3 = \frac{1}{3} (\dot{U}_{23} - \dot{U}_{31}),$$

т. е. если цепь симметрична, то точка  $O'$  лежит в центре тяжести треугольника линейных напряжений даже при несимметрии системы последних (рис. 148).

В заключение заметим, что в некоторых случаях расчет трехфазной цепи можно существенно упростить, применив преобразование соединения звездой в соединение треугольником или, наоборот, соединения треугольником в соединение звездой (§ 36).

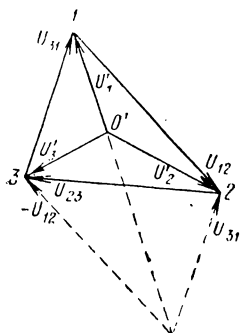


Рис. 148

В настоящем параграфе был рассмотрен случай, когда отсутствует взаимная индукция между фазами трехфазной цепи.

В длинных линиях передачи или при очень больших токах даже в коротких проводах, подводящих ток к мощным приемникам, например к трехфазным электрическим печам, необходимо учитывать явление взаимной индукции между проводами. При несимметричном расположении проводов взаимная индуктивность между ними различна для разных пар проводов, что приводит к своеобразному явлению переноса мощности из одной фазы в другую. Учет явления взаимной индукции

между проводами трехфазной линии и рассмотрение связанных с ним явлений будет произведен в последней части курса при изложении метода расчета параметров трехфазной линии.

Явление взаимной индукции между фазами трехфазной цепи должно быть учтено при наличии в цепи трехфазных электрических машин или трехфазных трансформаторов, в которых взаимная индукция между фазными обмотками осуществляется через общую магнитную цепь. В случае электрических машин явление еще осложняется тем, что в машине имеется вращающаяся часть — ротор. Все эти вопросы будут рассмотрены в конце настоящей главы при изложении так называемого метода симметричных составляющих трехфазной системы.

## § 78. Пульсирующее магнитное поле

Значительный класс электрических машин имеет магнитную цепь, осуществленную в виде двух коаксиальных цилиндров, собранных из стальных листов и отделенных друг от друга воздушным зазором (рис. 149). Внешний цилиндр, обычно неподвижный, называют статором, а внутренний, обычно вращающийся, — ротором.

Пусть в пазы, имеющиеся в теле статора, заложена обмотка, состоящая из проводящих изолированных стержней, соединенных друг с другом на торцевых сторонах статора. При наличии тока в этой обмотке с ней сцепляется магнитный поток, линии магнитной индукции которого замыкаются по телу статора, воздушному за-

зору и телу ротора. Место выхода линии магнитной индукции из статора можно рассматривать как северный полюс, а место входа — как южный полюс магнитного поля в полости статора. Тогда можно сказать, что при наличии одной обмотки мы получили поле с одной парой полюсов. Если на статоре расположить две последовательно соединенные обмотки, оси которых сдвинуты на угол  $\pi$ , то мы получим магнитное поле с двумя парами полюсов, что видно из рис. 150.

Линии магнитной индукции, входящие в статор в той его части, которая не занята обмоткой, сцепляются со всеми витками обмотки,

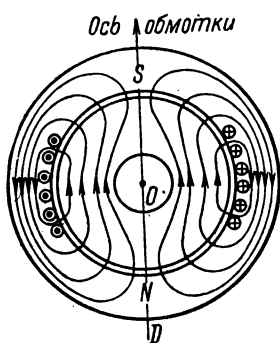


Рис. 149

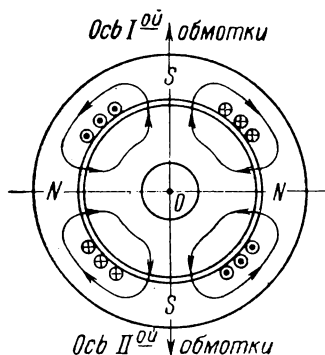


Рис. 150

и м. д. с. вдоль каждой из этих линий равно произведению из тока в обмотке на число ее витков. Линии магнитной индукции, входящие в статор в той его части, которая занята обмоткой, сцепляются лишь с частью витков обмотки, и м. д. с. вдоль каждой из этих линий тем меньше, чем меньше число витков, с которыми она сцепляется. Магнитное сопротивление путей, по которым замыкаются трубки магнитной индукции, в значительной мере определяется их участками, расположенными в воздушном зазоре, и магнитную индукцию в той или иной точке внутренней поверхности статора можно считать пропорциональной м. д. с., действующей вдоль линии магнитной индукции, проходящей через эту точку. Поэтому картина распределения магнитной индукции по внутренней окружности статора имеет ступенчатую форму, которая при большом числе пазов близка к трапеции. Эта картина представлена на рис. 151 в развернутом виде для одной пары полюсов в предположении, что статор разрезан по линии OD. В дальнейшем мы будем предполагать, что эта кривая разложена в ряд Фурье, и будем оперировать с основной ее волной (§ 1, § 88), т. е., иными словами, будем предполагать, что магнитная индукция распределена по окружности ста-

тора по синусоидальному закону. Такое предположение дает возможность с достаточной точностью рассмотреть интересные нас процессы и на основе этого рассмотрения выяснить, при желании, влияние высших гармонических кривой магнитной индукции.

При сделанных допущениях магнитная индукция в воздушном зазоре имеет наибольшее значение  $B_0$  на оси обмотки и равна нулю на нейтральной линии, перпендикулярной к оси обмотки, а для индукции  $B$  в точке, смещенной относительно оси обмотки на угол  $\alpha$ , имеем:

$$B = B_0 \cos \alpha.$$

Пусть к рассматриваемой нами обмотке приложено синусоидальное напряжение. Тогда поток, сцепляющийся с обмоткой, и маг-

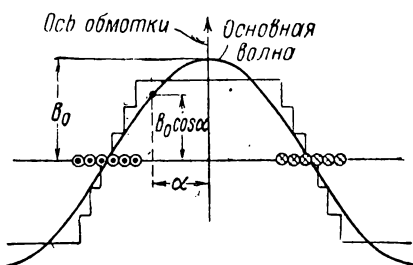


Рис. 151

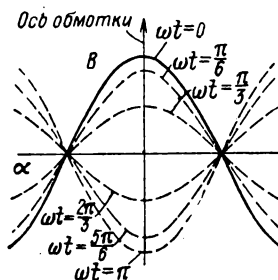


Рис. 152

нитная индукция в любой точке окружности статора будут изменяться во времени также по синусоидальному закону. Следовательно, обозначив максимальное значение индукции на оси обмотки через  $B_m$ , мы имеем:

$$B_0 = B_m \cos \omega t \text{ и } B = B_0 \cos \alpha = B_m \cos \omega t \cos \alpha,$$

если счет времени вести от того момента, когда индукция имеет максимальное значение. Заметим, что при изменении индукции во времени синусоидальное распределение ее по окружности статора не будет нарушаться, что и показано на рис. 152, дающем картину распределения магнитной индукции по окружности статора для различных моментов времени.

Направление, в котором основная волна индукции имеет наибольшее значение, называют *осью магнитного поля*. В рассматриваемом случае ось поля, изменяющегося во времени, имеет неизменное направление в пространстве, совпадающее с осью обмотки. Такого рода магнитное поле принято называть *пульсирующим полем*.

### § 79. Вращающееся магнитное поле

Одним из основных преимуществ многофазных систем является возможность получения при их помощи вращающихся магнитных полей, что, в частности, широко используют при конструировании электрических машин переменного тока.

Рассмотрим получение вращающегося магнитного поля при помощи трехфазной системы. Расположим на статоре три обмотки, оси которых сдвинуты друг относительно друга на угол  $\frac{2\pi}{3}$  (рис. 153), и приложим к этим обмоткам синусоидальные токи, сдвинутые друг относительно друга на угол  $\frac{2\pi}{3}$ .

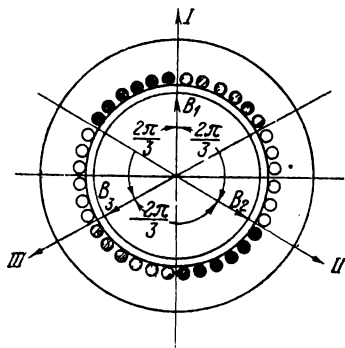


Рис. 153

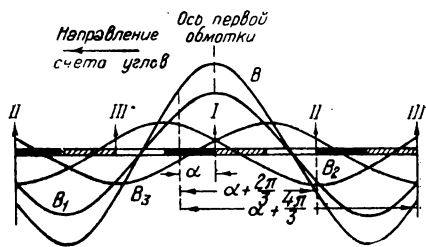


Рис. 154

соидально изменяющиеся напряжения, образующие симметричную трехфазную систему.

Наличие воздушного зазора, магнитное сопротивление которого неизменно, дает возможность применить при определении результирующей индукции принцип наложения, не внося существенных неточностей. Тогда для индукции  $B$  в зазоре в точке, смещенной относительно оси первой обмотки на угол  $\alpha$  (рис. 154), имеем:

$$B = B_1 + B_2 + B_3,$$

где  $B_1, B_2, B_3$  — индукции, создаваемые в этой точке пульсирующими полями, связанными с первой, второй и третьей обмотками. При этом

$$B_1 = B_{10} \cos \alpha = B_m \cos \omega t \cos \alpha,$$

$$B_2 = B_{20} \cos \left( \alpha + \frac{2\pi}{3} \right) = B_m \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \cos \left( \alpha + \frac{2\pi}{3} \right),$$

$$B_3 = B_{30} \cos \left( \alpha + \frac{4\pi}{3} \right) = B_m \cos \left( \omega t - \frac{4\pi}{3} \right) \cos \left( \alpha + \frac{4\pi}{3} \right),$$

где  $B_{10}, B_{20}, B_{30}$  — индукции на осях соответствующих обмоток, а  $B_m$  — максимальное значение индукции на оси каждой обмотки.

Преобразуя произведения косинусов в полусуммы, получим:

$$B = \frac{B_m}{2} \left[ 3 \cos(\omega t + \alpha) + \cos(\omega t - \alpha) + \right. \\ \left. + \cos\left(\omega t - \alpha - \frac{4\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega t - \alpha - \frac{8\pi}{3}\right) \right] = \frac{3}{2} B_m \cos(\omega t + \alpha).$$

Положим, что точка, в которой мы рассматриваем индукцию, перемещается по окружности статора от оси первой обмотки с угловой скоростью  $\omega$  в отрицательном направлении, т. е. по направлению вращения стрелки часов. Тогда  $\alpha = -\omega t$ , и в этой перемещающейся точке мы имеем:

$$B = \frac{3}{2} B_m \cos(\omega t + \alpha) = \frac{3}{2} B_m.$$

Отсюда следует, что ось результирующего магнитного поля вращается в отрицательном направлении с угловой скоростью  $\omega$ , совершая полный оборот за время, равное полному периоду переменного тока, питающего обмотки, причем значение индукции на этой оси, равное  $\frac{3}{2} B_m$ , остается неизменным, а по окружности статора индукция распределяется по синусоидальному закону.

Магнитное поле, ось которого вращается, принято называть *вращающимся магнитным полем*. Если значение индукции в воздушном зазоре в точке, лежащей на оси вращающегося поля, остается неизменным, то такое поле называют *круговым вращающимся полем*, так как его можно изобразить вращающимся вектором неизменной длины, описывающим своим концом окружность. При изменении порядка следования фаз направление вращения результирующего поля изменится на прямо противоположное, в чем можно убедиться, изменив соответствующим образом выражения для  $B_2$  и  $B_3$ .

Весьма существенно, что из равенства  $B = B_m \cos \omega t \cos \alpha = \frac{B_m}{2} [\cos(\omega t + \alpha) + \cos(\omega t - \alpha)]$  следует, что пульсирующее магнитное поле  $B = B_m \cos \omega t \cos \alpha$ , синусоидально изменяющееся во времени и распределенное по окружности статора по синусоидальному закону, можно рассматривать как результат наложения двух круговых полей  $\frac{B_m}{2} \cos(\omega t + \alpha)$  и  $\frac{B_m}{2} \cos(\omega t - \alpha)$ , вращающихся в противоположные стороны с угловой скоростью, равной угловой частоте переменного тока, и имеющих амплитуду, в два раза меньшую, чем амплитуда пульсирующего поля.

Заметим, что в общем случае при несимметрии системы напряжений, питающих обмотки, а также при несимметрии самих обмоток, мы получим не круговое, а *эллиптическое вращающееся поле*. Так, в частности, эллиптическое вращающееся поле получится,

если в рассмотренном нами случае изменить направление тока в одной из обмоток.

Все сказанное выше о вращающемся поле относится к случаям, когда на каждую фазу приходится одна обмотка и, соответственно, одна пара полюсов. Если на каждую фазу приходится  $p$  пар полюсов, как это часто и бывает в электрических машинах, то все отличие от рассмотренного случая  $p = 1$  состоит в том, что угловая скорость вращения поля будет в  $p$  раз меньше угловой частоты переменного тока, так как за один полный период переменного тока ось поля повернется на угол  $\frac{2\pi}{p}$ , соответствующий полюсному делению.

### § 80. Асинхронная машина с заторможенным ротором

Рассположим на роторе такую же систему обмоток, как и на статоре. Устройство, состоящее из статора и ротора с наложенными на них обмотками, называют *асинхронной машиной*. Предположим, что ротор асинхронной машины заторможен, а к обмоткам статора приложены напряжения, образующие симметричную систему. Пусть обмотки ротора замкнуты на сопротивления, которые в частных случаях могут равняться нулю или бесконечности. Предположим, что оси обмоток статора и ротора совпадают. Линии магнитной индукции вращающегося поля, пересекая проводники соответствующих обмоток статора и ротора, будут индуцировать в них э. д. с. одной и той же частоты, совпадающие по фазе, величины которых относятся друг к другу, как числа витков обмоток статора и ротора. Следовательно, асинхронная машина с заторможенным ротором

представляет собою не что иное, как *многофазный трансформатор*.

Если оси обмоток ротора в двухполюсной машине сместить относительно осей обмоток статора на некоторый угол против направления вращения поля, то э. д. с., индуцируемые в обмотках ротора, будут упреждать во времени на такой же угол э. д. с., индуцируемые в соответствующих обмотках статора. Поэтому асинхронная машина с заторможенным ротором, который можно смещать относительно статора на определенные углы, может служить *фазорегулятором* — устройством, позволяющим сдвигать по фазе на тот или иной угол систему напряжений, получаемых от обмоток ротора, по отношению к системе напряжений, приложенных к обмоткам статора.

Асинхронную машину с заторможенным ротором можно использовать также в качестве *регулятора напряжения*. Для этой цели соединяют каждую из обмоток ротора с соответствующей обмоткой статора так, как показано на рис. 155, причем точки  $a, b$  и  $c$  присоединяют к сети, а от точек  $a', b'$  и  $c'$  питают приемники. Тогда каждая из э. д. с., действующих между точкой  $o$  и точками  $a', b'$  и  $c'$ , равна сумме э. д. с.  $\dot{E}_{ст}$  и  $\dot{E}_{рот}$ , индуцированных в обмотке статора и в соединенной с ней обмотке ротора. Поворачивая ротор, мы будем изменять разность фаз этих э. д. с., не изменяя их величины, и сможем плавно регулировать величину их суммы в пределах от  $(E_{ст} + E_{рот})$  до  $(E_{ст} - E_{рот})$ , как это следует из диаграммы рис. 156.

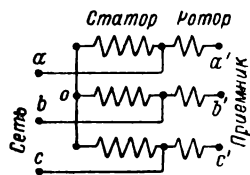


Рис. 155

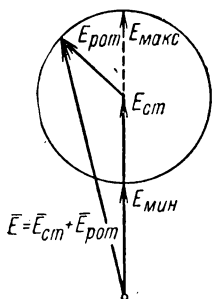


Рис. 156



Наконец, асинхронная машина с заторможенным ротором может служить для *преобразования числа фаз* многофазной системы. Для этого достаточно расположить на статоре число обмоток, равное числу фаз исходной системы, а на роторе — число обмоток, равное числу фаз той системы, которую мы желаем получить. Если  $m$  обмоток ротора с равными числами витков будут смещены друг относительно друга на угол  $\frac{2\pi}{m}$ , то э. д. с., индуцируемые в них вращающимся полем, образуют симметричную  $m$ -фазную систему, независимо от числа фаз многофазной системы напряжений, приложенных к обмоткам статора.

## § 81. Асинхронная машина с вращающимся ротором

Пусть на статоре двухполусной асинхронной машины и на ее роторе, который может вращаться, расположены две тождественные системы обмоток и пусть к обмоткам статора приложена симметричная система напряжений, а обмотки ротора замкнуты накоротко. Тогда э. д. с., индуцируемые вращающимся полем в обмотках ротора, вызовут в этих последних токи. В результате взаимодействия токов статора и ротора последний придет в движение и в соответствии с правилом Ленца будет стремиться вращаться с угловой скоростью, равной угловой скорости вращающегося поля, так как при одинаковых угловых скоростях ротора и поля линии последнего не перерезали бы проводов обмоток ротора, и причина, вызывающая появление индуцированных токов в обмотках ротора, исчезла бы. Но при исчезновении токов в обмотках ротора, последний затормозился бы, и в его обмотках снова возникли бы индуцированные токи. Поэтому ротор асинхронной машины, предоставленный самому себе, вращаясь, отстаёт от поля или, как говорят, наблюдается *скольжение* ротора, увлекаемого вращающимся полем, относительно этого поля.

В двухполусной машине угловая скорость поля, называемая *синхронной скоростью* машины, равна угловой частоте  $\omega_1$  токов в статоре, а угловая скорость вращения ротора  $\omega_2$  меньше  $\omega_1$ . Относительно ротора вращающееся поле перемещается с угловой скоростью  $\omega_s = \omega_1 - \omega_2$ , и угловая частота э. д. с. и токов, индуцируемых вращающимся полем в обмотках ротора, равна  $\omega_s$ , называемой *угловой частотой скольжения*. Отношение

$$s = (\omega_1 - \omega_2) : \omega_1 = \omega_s : \omega_1$$

называют *скольжением*, и мы имеем:

$$\omega_s = s\omega_1 \quad \text{и} \quad \omega_2 = (1 - s)\omega_1,$$

причем покою ротора отвечает  $s = 1$ , а вращению его с синхронной скоростью отвечает  $s = 0$ .

Из изложенного следует, что асинхронная машина, весьма простая по конструкции, может быть использована и действительно используется в качестве двигателя. Так как скорость вращения ротора этих двигателей не равна синхронной скорости вращения их поля, то они получили наименование *асинхронных двигателей*. Отметим, что у асинхронных двигателей скольжение при нормальной нагрузке в среднем лежит в пределах от 3 до 4%.

Наиболее широкое распространение получили *трехфазные асинхронные двигатели*, изобретателем и первым конструктором которых был М. О. Дольво-Добровольский.

Заметим, что если к ротору асинхронной машины подводить механическую мощность и вращать его по направлению вращения поля с угловой скоростью, превышающей синхронную, то скольжение станет отрицательным. При этом энергия будет передаваться вращающимся полем от ротора к ста-

тору. Следовательно, при  $s < 0$  асинхронная машина работает *генератором*, преобразуя механическую энергию, подводимую к ротору, в электрическую энергию, поступающую из обмоток статора в сеть. Такого рода генераторы могут работать только параллельно с синхронными генераторами и носят название асинхронных, так как частота их э. д. с., определяемая частотой сети, не зависит от скорости вращения машины.

Вращая ротор против направления вращения поля, мы будем иметь  $s > 1$  и получим тормозной режим работы асинхронной машины, при котором как энергия, получаемая статором из сети, так и механическая энергия, подводимая к ротору, превращаются в тепло. При этом угловая частота тока в роторе двухполюсной машины превышает частоту сети на величину угловой скорости ротора. Если при вращении ротора против направления вращения поля ротор использовать в качестве источника э. д. с., то асинхронная машина будет работать как генератор, дающий частоту, превышающую частоту сети.

## § 82. Обобщение понятия о симметричных системах

В § 71 уже было указано, что в общем случае под симметричной  $m$ -фазной системой э. д. с. или токов понимают систему из  $m$  равных по величине э. д. с. или токов при условии, что все последующие

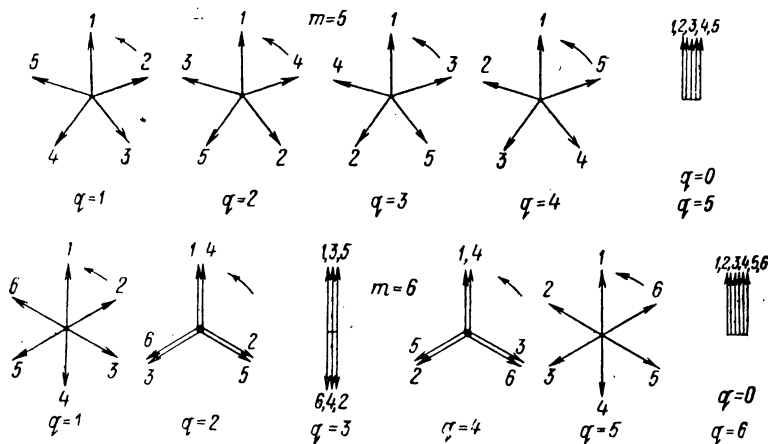


Рис. 157

э. д. с. или токи отстают по фазе от предыдущих на один и тот же угол, равный  $\frac{2\pi q}{m}$ , где  $q$  — любое целое число. Давая  $q$  все значения от 0 до  $m - 1$  или от 1 до  $m$ , мы получим все возможные типы  $m$ -фазной симметричной системы. На рис. 157 приведены векторные диаграммы для всех типов пятифазной и шестифазной симметричных систем. Системы, получающиеся при  $q = 1$ , когда соседние векторы следуют друг за другом в том же порядке, что и цифры (или буквы по алфавиту), которыми они помечены, называют *системами*

с прямым порядком следования фаз или системами прямой последовательности. Системы, получающиеся при  $q = -1$ , когда соседние векторы следуют друг за другом в порядке, обратном порядку следования цифр (или букв по алфавиту), которыми они помечены, называются системами с обратным порядком следования фаз или системами обратной последовательности. Системы, получаю-

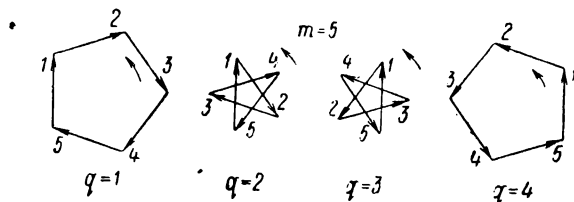


Рис. 158

ющиеся при  $q = 0$  или, что то же, при  $q = m$ , когда все векторы совпадают друг с другом, называются системами нулевого порядка или системами нулевой последовательности. При прочих значениях  $q$  получают системы с перемежающимся порядком следования фаз, причем, если  $m$  и  $q$  имеют общий наибольший делитель  $p$ , то получающаяся система кратна системе с числом фаз, равным  $\frac{m}{p}$ .

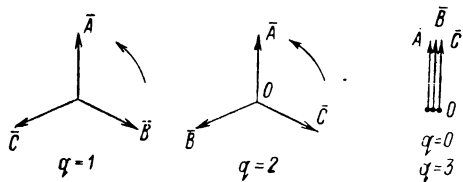


Рис. 159

Из указанных обобщенных условий симметрии вытекает, что векторы, изображающие все э. д. с. или все токи любой ненулевой последовательности симметричной системы, образуют симметричную звезду, если все они имеют общее начало (рис. 157), или замкнутый правильный многоугольник, если конец одного вектора служит началом следующего (рис. 158), и, следовательно, геометрическая сумма этих векторов равна нулю. Поэтому сумма мгновенных значений всех э. д. с. или токов, образующих симметричную систему ненулевой последовательности, равна нулю для любого момента времени, точно так же, как равна нулю и сумма всех комплексов, изображающих эти э. д. с. или токи.

В отличие от этого для симметричных систем нулевой последовательности имеем:

$$\Sigma e_k = e_1 + e_2 + \dots + e_m = m e_1;$$

$$\Sigma \dot{E}_k = \dot{E}_1 + \dot{E}_2 + \dots + \dot{E}_m = m \dot{E}_1,$$

так как все векторы, изображающие э. д. с., образующие нулевую систему, равны по величине и совпадают по направлению.

Для трехфазной системы возможны три типа симметричных систем (рис. 159): система прямой последовательности, в которой векторы  $A, B, C$ , образующие ее, при принятом направлении вращения векторов против стрелки часов следуют друг за другом в порядке букв алфавита, их обозначающих; система обратной последовательности, в которой порядок следования векторов  $\bar{C}, \bar{B}, \bar{A}$  обратен порядку букв алфавита; система нулевой последовательности, в которой векторы  $\bar{A} = \bar{B} = \bar{C}$  совпадают друг с другом. Следует иметь в виду, что в некоторых случаях порядок следования фаз имеет весьма существенное значение. Так, при изменении порядка следования фаз системы напряжений на зажимах трехфазного двигателя изменяется направление его вращения.

### § 83. Симметричные составляющие трехфазной системы

Любую несимметричную трехфазную систему можно разложить на три симметричные трехфазные системы: нулевой, прямой и обратной последовательностей. Такое разложение широко применяют при анализе работы трехфазных машин и в особенности при расчете токов короткого замыкания в трехфазных цепях.

Пусть дана несимметричная трехфазная система векторов  $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ . Каждый из векторов этой системы можно представить в виде суммы трех составляющих, положив

$$\bar{A} = \bar{A}_0 + \bar{A}_1 + \bar{A}_2; \quad \bar{B} = \bar{B}_0 + \bar{B}_1 + \bar{B}_2; \quad \bar{C} = \bar{C}_0 + \bar{C}_1 + \bar{C}_2.$$

Девять векторов, стоящих в правых частях этих равенств, подчинены только трем условиям. Поэтому можно добавить еще шесть условий, которые мы подберем так, чтобы векторы  $\bar{A}_0, \bar{B}_0, \bar{C}_0$  образовали систему нулевой последовательности, векторы  $\bar{A}_1, \bar{B}_1, \bar{C}_1$  — систему прямой последовательности и векторы  $\bar{A}_2, \bar{B}_2, \bar{C}_2$  — систему обратной последовательности. Для этого к имеющимся уравнениям присоединим еще шесть уравнений:

$$\bar{B}_0 = \bar{A}_0, \quad \bar{B}_1 = a^2 \bar{A}_1, \quad \bar{B}_2 = a \bar{A}_2;$$

$$\bar{C}_0 = \bar{A}_0, \quad \bar{C}_1 = a \bar{A}_1, \quad \bar{C}_2 = a^2 \bar{A}_2,$$

где

$$a = e^{j \frac{2\pi}{3}} = \cos \frac{2\pi}{3} + j \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$a^2 = e^{j \frac{4\pi}{3}} = \cos \frac{4\pi}{3} + j \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда будем иметь:

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \bar{A}_0 + \bar{A}_1 + \bar{A}_2; \\ \bar{B} &= \bar{A}_0 + a^2 \bar{A}_1 + a \bar{A}_2; \\ \bar{C} &= \bar{A}_0 + a \bar{A}_1 + a^2 \bar{A}_2,\end{aligned}$$

откуда и следует, что несимметричную систему  $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$  можно рассматривать как совокупность трех симметричных систем: нулевой последовательности —  $(\bar{A}_0, \bar{A}_0, \bar{A}_0)$ , прямой последовательности —  $(\bar{A}_1, a^2 \bar{A}_1, a \bar{A}_1)$  и обратной последовательности —  $(\bar{A}_2, a \bar{A}_2, a^2 \bar{A}_2)$ . Эти симметричные системы называют *симметричными составляющими* несимметричной системы  $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$  и основными векторами в них являются составляющие  $\bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{A}_2$  вектора  $\bar{A}$ , принятого за основной вектор исходной системы. Заметим, что часто симметричными составляющими называют основные векторы соответствующих симметричных систем.

Определим основные векторы  $\bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{A}_2$ . Суммируя равенства, выражающие векторы  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$  через симметричные составляющие, и принимая во внимание, что  $1 + a + a^2 = 0$  получим:

$$\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} = 3\bar{A}_0.$$

Умножая второе равенство на  $a$  и третье на  $a^2$  и суммируя, найдем:

$$\bar{A} + a\bar{B} + a^2\bar{C} = 3\bar{A}_1,$$

а умножая второе равенство на  $a^2$  и третье на  $a$  и суммируя, найдем:

$$\bar{A} + a^2\bar{B} + a\bar{C} = 3\bar{A}_2,$$

так как  $a^3 = e^{2\pi j} = 1$  и  $a^4 = a$ . Из этих соотношений имеем:

$$\begin{aligned}\bar{A}_0 &= \frac{1}{3} (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}); \\ \bar{A}_1 &= \frac{1}{3} (\bar{A} + a\bar{B} + a^2\bar{C}); \\ \bar{A}_2 &= \frac{1}{3} (\bar{A} + a^2\bar{B} + a\bar{C}),\end{aligned}$$

откуда следует, что разложение несимметричной трехфазной системы на симметричные составляющие нулевой, прямой и обратной последовательностей может быть выполнено всегда и притом является **единственным**.

Из выражений для  $\bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{A}_2$  непосредственно вытекает простой графический метод определения векторов  $3\bar{A}_0, 3\bar{A}_1$  и  $3\bar{A}_2$  по задан-

ным векторам  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$  и  $\bar{C}$ . А именно (рис. 160), для определения вектора  $3\bar{A}_0$  следует просуммировать геометрически три вектора  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$ , образующих данную несимметричную систему. Для определения вектора  $3\bar{A}_1$  следует найти геометрическую сумму вектора  $\bar{A}$ , вектора  $\bar{B}$ , повернутого на угол  $2\pi/3$  в положительном направлении, и вектора  $\bar{C}$ , повернутого на угол  $2\pi/3$  в отрицательном направлении. Для определения вектора  $3\bar{A}_2$  следует найти геометрическую сумму вектора  $\bar{A}$ , вектора  $\bar{B}$ , повернутого на угол  $2\pi/3$  в отрицательном направлении, и вектора  $\bar{C}$ , повернутого на угол  $2\pi/3$

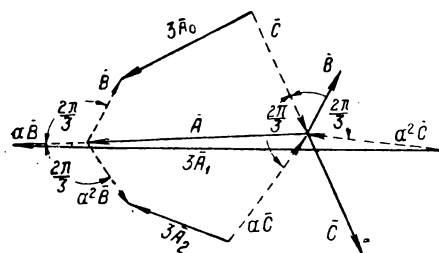


Рис. 160

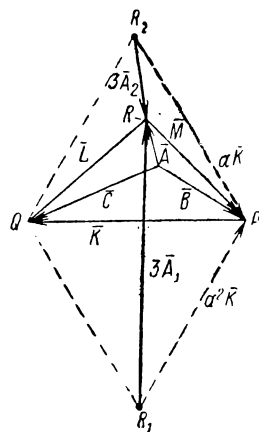


Рис. 161

в положительном направлении. Из приведенного построения следует, что если векторы  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$  образуют замкнутый треугольник, т. е. если геометрическая сумма их равна нулю, то  $\bar{A}_0 = 0$ . Поэтому система линейных напряжений, а при отсутствии нейтрального провода и система линейных токов, не могут содержать составляющей нулевой последовательности.

Рассмотрим еще один метод определения симметричных составляющих. Пусть дана система фазных векторов  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$  и соответствующая система линейных векторов  $\bar{K}$ ,  $\bar{L}$ ,  $\bar{M}$  (рис. 161).

Для симметричных составляющих прямой и обратной последовательностей системы фазных векторов имеем:

$$\bar{A}_1 = \frac{1}{3} (\bar{A} + a\bar{B} + a^2\bar{C}), \quad \bar{A}_2 = \frac{1}{3} (\bar{A} + a^2\bar{B} + a\bar{C});$$

заменяя  $\bar{A}$  через  $\bar{B} - \bar{M}$  и  $\bar{C}$  через  $\bar{B} + \bar{K}$ , найдем:

$$3\bar{A}_1 = \bar{B} - \bar{M} + a\bar{B} + a^2\bar{B} + a^2\bar{K} = a^2\bar{K} - \bar{M};$$

$$3\bar{A}_2 = \bar{B} - \bar{M} + a^2\bar{B} + a\bar{B} + a\bar{K} = a\bar{K} - \bar{M},$$

откуда следует, что для определения векторов  $3\bar{A}_1$  и  $3\bar{A}_2$  достаточно на стороне  $PQ$  треугольника линейных векторов построить равнобедренные треугольники  $PQR_1$  и  $PQR_2$ . Тогда

$$\overline{R_1R} = a^2\bar{K} - \bar{M} = 3\bar{A}_1; \quad \overline{R_2R} = a\bar{K} - \bar{M} = 3\bar{A}_2.$$

Из этих построений вытекает, что если система линейных векторов неизменна, то, как бы ни изменялась система фазных векторов, симметричные составляющие прямой и обратной последовательностей последней остаются неизменными. Поэтому системы фазных векторов, соответствующие данной системе линейных векторов, могут отличаться друг от друга только составляющей нулевой последовательности. Кроме того, из построения, приведенного на рис. 161,

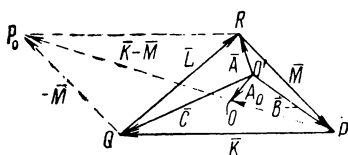


Рис. 162

непосредственно следует, что при симметрии системы линейных векторов составляющая обратной последовательности фазной системы равна нулю.

На рис. 161 направления линейных векторов  $\bar{K}$ ,  $\bar{L}$ ,  $\bar{M}$  приняты такими, чтобы при обходе треугольника этих векторов в положительном направлении концы фазных векторов следовали в порядке алфавита  $A, B, C$ . В случае, изображенном на рис. 161, треугольник обходится по часовой стрелке, и при этом преобладает система прямой последовательности, т. е. модуль вектора  $\bar{A}_1$  больше модуля вектора  $\bar{A}_2$ . Если система векторов  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$  будет такова, что точка  $R$  окажется ниже линии  $QP$ , то, соблюдая то же правило положительного обхода треугольника линейных векторов (в порядке букв  $A, B, C$ ), мы будем обходить этот треугольник против часовой стрелки. В таком случае будем иметь  $|\bar{A}_2| > |\bar{A}_1|$ , т. е. будет преобладать система обратной последовательности. Если такое напряжение будет подведено к асинхронному двигателю, то он будет вращаться в обратном направлении по сравнению со случаем, соответствующим рис. 161. Нетрудно убедиться, что и порядок следования линейных напряжений при этом изменяется на обратный. Подобного рода явления иногда наблюдались при обрыве одного из проводов трехфазной линии, и связь между двумя частями разорванного провода сохранялась только через емкость линии.

Заметим, что при отсутствии составляющей нулевой последовательности, степень несимметрии системы определяют как отношение составляющей обратной последовательности к составляющей прямой последовательности, причем систему считают практически симметричной, если это отношение не превышает 5%.

Для определения составляющей  $A_0$  нулевой последовательности имеем:

$$\bar{A}_0 = \frac{1}{3} (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}) = \frac{1}{3} (\bar{B} - \bar{M} + \bar{B} + \bar{B} + \bar{K}) = \bar{B} + \frac{1}{3} (\bar{K} - \bar{M}).$$

Из рис. 162, где  $PQP_0R$  — параллелограмм, легко усмотреть, что конец  $O$  вектора  $\overline{PO} = \frac{\bar{K} - \bar{M}}{3}$  лежит в центре тяжести треугольника  $PQR$ . Отсюда следует, что, соединив точку  $O'$  с точкой  $O$ , мы получим вектор  $\overline{O'O} = \bar{B} + \frac{1}{3} (\bar{K} - \bar{M}) = \bar{A}_0$ . Поэтому, если точка  $O'$  лежит в центре тяжести треугольника линейных векторов, то составляющая нулевой последовательности системы фазных векторов равна нулю.

### § 84. Фильтры симметричных составляющих

Симметричные составляющие несимметричных систем можно определять не только аналитически или графически, но и экспериментально при помощи электрических схем, получивших наименование *фильтров симметричных составляющих*. Эти фильтры часто применяют в схемах, защищающих электрические установки от ненормальных режимов. Действительно, в мощных электрических установках для генерирования, передачи и распределения энергии степень асимметрии системы напряжений и токов не должна превосходить известных пределов. Иными словами, составляющие нулевой и обратной последовательностей системы напряжений и системы токов при нормальных режимах должны быть меньше некоторых наперед заданных величин, определяемых индивидуально для каждой установки.

Возможность выделить при помощи электрических схем отдельные симметричные составляющие позволяет осуществить воздействие любой из них на приборы, защищающие установку, которые, будучи соответствующим образом отрегулированы, выключат или всю установку, или отдельную часть ее, как только величина той или иной составляющей превзойдет допустимый предел и, таким образом, защитят установку от ненормального режима работы.

Рассматривая схемы фильтров симметричных составляющих, для простоты предположим, что у трансформаторов, входящих в эти схемы, отношения напряжений на зажимах первичных и вторичных обмоток трансформаторов напряжения, а также отношения токов в первичных и вторичных обмотках трансформаторов тока равны единице. На рис. 163 даны схемы фильтров для выделения составляющей нулевой последовательности системы фазных напряжений и системы линейных токов. В первой схеме вторичные обмотки трансформаторов напряжения включены последовательно, и поэтому напряжение на зажимах вольтметра равно сумме фазных напряжений, т. е. утроенной составляющей нулевой последовательности системы фазных на-

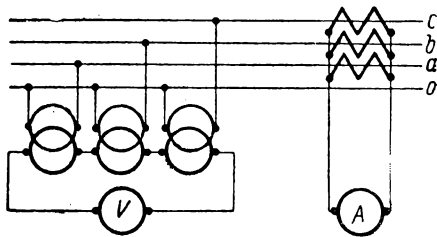


Рис. 163



пряжений. Во второй схеме вторичные обмотки трансформаторов тока включены параллельно, и, следовательно, ток, проходящий через амперметр, равен сумме линейных токов, т. е. утроенной составляющей нулевой последовательности системы линейных токов.

На рис. 164 дана схема фильтра для выделения составляющих прямой или обратной последовательностей системы токов, составляющая нулевой последовательности которой равна нулю. Определим условия, которым следует подчинить полные сопротивления  $Z_{ab}$  и  $Z_{bc}$  элементов этой схемы, причем полное сопротивление амперметра обозначим через  $Z_{ca}$ . На основании законов Кирхгофа имеем:

$$I_{ab}Z_{ab} + I_{bc}Z_{bc} + I_{ca}Z_{ca} = 0; \quad I_{ab} = I_a + I_{ca}, \quad I_{bc} = I_c + I_{ca};$$

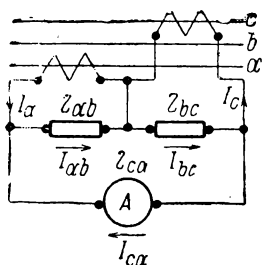


Рис. 164

$$I_{ca} = -\frac{I_a Z_{ab} + I_c Z_{bc}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}}.$$

Так как составляющая нулевой последовательности системы линейных токов по условию равна нулю, то, выражая токи  $I_a$  и  $I_c$  через составляющие прямой и обратной последовательностей  $I_1$  и  $I_2$ , получим:

$$I_a = I_1 + I_2; \quad I_c = aI_1 + a^2I_2$$

и, подставив эти значения в выражение для  $I_{ca}$ , найдем:

$$I_{ca} = -\frac{I_1(Z_{ab} + aZ_{bc}) + I_2(Z_{ab} + a^2Z_{bc})}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}}.$$

Из этого выражения следует, что ток  $I_{ca}$ , проходящий через амперметр, не зависит от составляющей обратной последовательности и пропорционален составляющей прямой последовательности, если выполнено условие:

$$Z_{ab} + a^2Z_{bc} = 0$$

или

$$Z_{ab} = -a^2Z_{bc} = Z_{bce}^{j\frac{\pi}{3}},$$

и не зависит от составляющей прямой последовательности и пропорционален составляющей обратной последовательности, если выполнено условие:

$$Z_{ab} + aZ_{bc} = 0$$

или

$$Z_{bc} = -a^2Z_{ab} = Z_{abe}^{j\frac{\pi}{3}}.$$

В частности, фильтр для выделения составляющей прямой последовательности можно получить, положив

$$Z_{bc} = a \quad \text{и} \quad Z_{ab} = re^{j\frac{\pi}{3}} = \frac{r}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}r,$$

а фильтр для выделения составляющей обратной последовательности (рис. 165), взяв:

$$Z_{ab} = r \quad \text{и} \quad Z_{bc} = re^{j\frac{\pi}{3}} = \frac{r}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}r,$$

где  $r$  — некоторое активное сопротивление.

На рис. 166 дана схема фильтра для выделения составляющей прямой последовательности или составляющей обратной последовательности системы линейных напряжений. Найдем условия, которым должны быть подчинены полные проводимости  $Y_a$  и  $Y_c$  элементов этой схемы, причем полную прово-

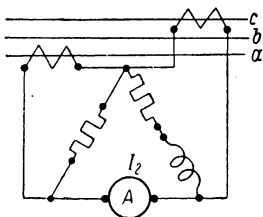


Рис. 165

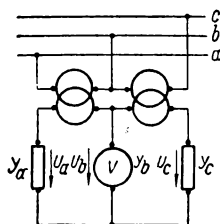


Рис. 166

димость вольтметра обозначим через  $Y_b$ . На основании законов Кирхгофа имеем (§ 77):

$$\dot{U}_a Y_a + \dot{U}_b Y_b + \dot{U}_c Y_c = 0; \quad \dot{U}_{ab} = \dot{U}_b - \dot{U}_a, \quad \dot{U}_{bc} = \dot{U}_c - \dot{U}_b,$$

откуда

$$\dot{U}_b = \frac{\dot{U}_{ab} Y_a - \dot{U}_{bc} Y_c}{Y_a + Y_b + Y_c}.$$

Так как составляющая нулевой последовательности системы линейных напряжений  $\dot{U}_{ab}$ ,  $\dot{U}_{bc}$ ,  $\dot{U}_{ca}$  равна нулю, то, выражая их через составляющие прямой и обратной последовательности  $\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_2$ , имеем:

$$\dot{U}_{ab} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2; \quad \dot{U}_{bc} = a^2 \dot{U}_1 + a \dot{U}_2; \quad \dot{U}_{ca} = a \dot{U}_1 + a^2 \dot{U}_2$$

и, подставив эти значения в выражение  $\dot{U}_b$ , найдем:

$$\dot{U}_b = \frac{\dot{U}_1 (Y_a - a^2 Y_c) + \dot{U}_2 (Y_a - a Y_c)}{Y_a + Y_b + Y_c}.$$

Из этого выражения следует, что напряжение  $\dot{U}_b$  на зажимах вольтметра не зависит от составляющей обратной последовательности и пропорционально составляющей прямой последовательности, если выполнено условие:

$$Y_a = a Y_c \quad \text{или} \quad Y_c = a^2 Y_a$$

и не зависит от составляющей прямой последовательности и пропорционально составляющей обратной последовательности, если выполнено условие:

$$Y_a = a^2 Y_c \quad \text{или} \quad Y_c = a Y_a.$$

В частности, фильтр для выделения составляющей прямой последовательности можно получить, положив:

$$Y_a = -jb, \text{ причем } b = -\omega C;$$

$$Y_c = Y_a \left( -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} b + j \frac{b}{2},$$

а фильтр для выделения составляющей обратной последовательности (рис. 167), взяв:

$$Y_c = -jb; Y_a = Y_c \left( -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} b + j \frac{b}{2}$$

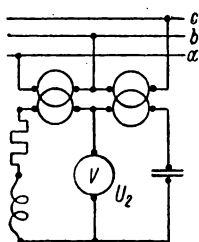


Рис. 167

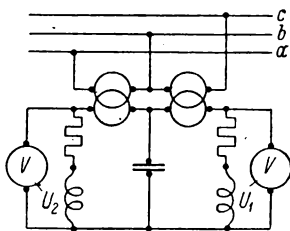


Рис. 168

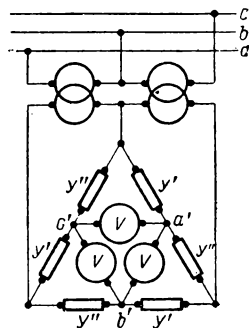


Рис. 169

Покажем, что возможно элементы фильтрующей схемы подобрать так, что в одной ветви схемы будет выделена составляющая прямой последовательности, а в другой — составляющая обратной последовательности. Для этого исследуем выражения для напряжений  $\dot{U}_a$  и  $\dot{U}_c$  в схеме рис. 166, а именно:

$$\dot{U}_a = \dot{U}_b - \dot{U}_{ab} = \frac{-(\dot{U}_{ab} + \dot{U}_{bc}) Y_c - \dot{U}_{ab} Y_b}{Y_a + Y_b + Y_c} = \frac{\dot{U}_{ca} Y_c - \dot{U}_{ab} Y_b}{Y_a + Y_b + Y_c};$$

$$\dot{U}_c = \dot{U}_b + \dot{U}_{bc} = \frac{\dot{U}_{bc} Y_b + (\dot{U}_{ab} + \dot{U}_{bc}) Y_a}{Y_a + Y_b + Y_c} = \frac{\dot{U}_{bc} Y_b - \dot{U}_{ca} Y_a}{Y_a + Y_b + Y_c},$$

откуда, вводя вместо  $\dot{U}_{ab}$ ,  $\dot{U}_{bc}$ ,  $\dot{U}_{ca}$  симметричные составляющие прямой и обратной последовательности  $\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_2$ , получим:

$$\dot{U}_a = \frac{\dot{U}_1 (a Y_c - Y_b) + \dot{U}_2 (a^2 Y_c - Y_b)}{Y_a + Y_b + Y_c};$$

$$\dot{U}_c = \frac{\dot{U}_1 (a^2 Y_b - a Y_a) + \dot{U}_2 (a Y_b - a^2 Y_a)}{Y_a + Y_b + Y_c}.$$

Из этих выражений следует, что  $\dot{U}_a$  пропорционально составляющей обратной последовательности, а  $\dot{U}_c$  — составляющей прямой последовательности, если выполнены условия:

$$Y_a = Y_c = a^2 Y_b.$$

Взяв  $Y_b = -jb$ , причем  $b = -\omega C$ , получим  $Y_a = Y_c = -\frac{\sqrt{3}}{2} b + j \frac{b}{2}$ , чему соответствует схема, приведенная на рис. 168.

Имеются схемы, позволяющие получить всю систему напряжений или токов прямой или обратной последовательностей. Так, в схеме рис. 169 между точками  $a'$ ,  $b'$  и  $c'$  получается симметричная система напряжений, пропорциональных при  $Y' = Y''e^{-j\frac{\pi}{3}}$  составляющей прямой последовательности, а при  $Y' = Y''e^{j\frac{\pi}{3}}$  составляющей обратной последовательности системы линейных напряжений.

### § 85. Независимость симметричных составляющих в симметричной трехфазной цепи

Рассмотрим участок трехфазной четырехпроводной цепи, не содержащий вращающихся машин. Пусть на этом участке цепи полные сопротивления всех трех фаз одинаковы и взаимные индуктивности любых двух фаз равны между собой точно так же, как равны и взаимные индуктивности между каждой из фаз и нейтральным проводом и включенными в него элементами цепи.

Предположим, что токи, протекающие в цепи, образуют несимметричную систему, симметричные составляющие которой равны  $\dot{I}_0$ ,  $\dot{I}_1$ ,  $\dot{I}_2$ . Рассмотрим действие каждой из симметричных составляющих. Пусть в нашей цепи протекают токи, образующие систему или прямой или обратной последовательностей. И в том и в другом случае падения напряжения в отдельных фазах рассматриваемого участка цепи вследствие его полной симметрии образуют также систему прямой последовательности или, соответственно, систему обратной последовательности, а ток в нейтральном проводе будет равен нулю. При этом комплексные эквивалентные сопротивления каждой из фаз этого участка цепи, учитывающие и взаимную индукцию, очевидно, будут одинаковы для систем и прямой и обратной последовательности. При прохождении в цепи токов нулевой последовательности падения напряжения во всех фазах участка будут одинаковы и по величине и по фазе, т. е. образуют также систему нулевой последовательности. Однако комплексное эквивалентное сопротивление для токов нулевой последовательности имеет иное значение, чем для токов прямой или обратной последовательности, так как в отличие от последних токи нулевой последовательности замыкаются по нейтральному проводу, т. е.

$$Z_0 \neq Z_1 = Z_2,$$

если через  $Z_0$ ,  $Z_1$ ,  $Z_2$  обозначить, соответственно, комплексные эквивалентные сопротивления для составляющих нулевой, прямой и обратной последовательностей.

Таким образом, в симметричной цепи любая симметричная система токов вызывает падения напряжения, образующие симметричную систему с тем же порядком следования фаз, и мы можем написать:

$$\dot{U}_0 = \dot{I}_0 Z_0; \quad \dot{U}_1 = \dot{I}_1 Z_1; \quad \dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z_2,$$

где  $\dot{U}_0$ ,  $\dot{U}_1$ ,  $\dot{U}_2$  — симметричные составляющие системы падений напряжений в симметричной трехфазной цепи. Эти равенства и выражают собою независимость симметричных составляющих в симметричных цепях.

Заметим, что наличие в симметричной цепи вращающихся машин, выполненных в конструктивном отношении симметрично, не нарушает независимости симметричных составляющих, но эквивалентные комплексные сопротивления в этом случае будут различны для всех симметричных составляющих, т. е.

$$Z_0 \neq Z_1 \neq Z_2,$$

так как магнитное поле, связанное с системой токов прямой последовательности, вращается в одном направлении с ротором машины, а поле, связанное с системой токов обратной последовательности, вращается в противоположном направлении.

Следует иметь в виду, что, если проводимость между нейтральными точками генератора или трансформатора и приемника равна нулю, то  $Z_0 = \infty$ , и составляющей нулевой последовательности в системе токов быть не может.

В несимметричной цепи каждая из симметричных составляющих системы напряжений в общем случае зависит от всех симметричных составляющих системы токов и, наоборот, каждая из симметричных составляющих системы токов зависит от всех симметричных составляющих системы напряжений.

## § 86. Применение метода симметричных составляющих к расчету токов короткого замыкания

Рассмотрим вопрос о расчете токов короткого замыкания симметричного трехфазного генератора, нейтральная точка которого заземлена через некоторое сопротивление (рис. 170). Вследствие симметрии генератора для симметричных составляющих системы фазных э. д. с. его мы имеем:  $\dot{E}_0 = 0$ ;  $\dot{E}_1 = \dot{E}$ ,  $\dot{E}_2 = 0$ . Пусть до места короткого замыкания цепь вполне симметрична и комплексные эквивалентные сопротивления ее  $Z_0$ ,  $Z_1$ ,  $Z_2$  для составляющих нулевой, прямой и обратной последовательности нам известны.

При коротком замыкании система фазных напряжений ( $\dot{U}_a$ ,  $\dot{U}_b$ ,  $\dot{U}_c$ ) относительно земли у места короткого замыкания и система токов ( $\dot{I}_a$ ,  $\dot{I}_b$ ,  $\dot{I}_c$ ) будут несимметричны и, разлагая их на симметричные составляющие  $\dot{U}_0$ ,  $\dot{U}_1$ ,  $\dot{U}_2$ , и  $\dot{I}_0$ ,  $\dot{I}_1$ ,  $\dot{I}_2$ , можно, независимо от характера короткого замыкания, написать:

$$0 = \dot{I}_0 Z_0 + \dot{U}_0; \quad \dot{E} = \dot{I}_1 Z_1 + \dot{U}_1; \quad 0 = \dot{I}_2 Z_2 + \dot{U}_2.$$

Эти три уравнения являются основными при расчете токов короткого замыкания.

Составляя эти уравнения, мы пользуемся принципом независимости симметричных составляющих в симметричной трехфазной цепи. До места короткого замыкания, как было оговорено, цепь вполне симметрична. Короткое замыкание на землю только одной или только двух фаз нарушает симметрию цепи, если всю цепь вместе с местом короткого замыкания рассматривать как целое, в которой действуют э. д. с. генератора. Однако в уравнения явно введены, помимо э. д. с. генератора, также напряжения  $\dot{U}_0$ ,  $\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_2$  или, что то же, однозначно через них определяемые напряжения  $\dot{U}_a$ ,  $\dot{U}_b$  и  $\dot{U}_c$ . Мы получили бы тот же самый режим, если бы предположили, что у места короткого замыкания провода присоединены к зажимам еще одного соединенного в звезду генератора с заземленной нейтралью, имеющего во всех фазах равное нулю сопротивление и э. д. с.  $\dot{E}_a = -\dot{U}_a$ ,  $\dot{E}_b = -\dot{U}_b$  и  $\dot{E}_c = -\dot{U}_c$ , т. е. э. д. с., обеспечивающие систему напряжений  $\dot{U}_a$ ,  $\dot{U}_b$  и  $\dot{U}_c$ . При таком рассмотрении вся цепь получается симметричной. Однако в трех уравнениях содержатся шесть неизвестных  $\dot{I}_0$ ,  $\dot{I}_1$ ,  $\dot{I}_2$ ,  $\dot{U}_0$ ,  $\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_2$  или, что то же, однозначно через них определяемых шесть неизвестных  $\dot{I}_a$ ,  $\dot{I}_b$ ,  $\dot{I}_c$ ,  $\dot{U}_a$ ,  $\dot{U}_b$  и  $\dot{U}_c$ . Таким образом, вообще говоря, этих уравнений недостаточно. Если же при заданных  $\dot{E}$ ,  $Z_0$ ,  $Z_1$ ,  $Z_2$  по условиям задачи из шести величин  $\dot{I}_a$ ,  $\dot{I}_b$ ,  $\dot{I}_c$ ,  $\dot{U}_a$ ,  $\dot{U}_b$ ,  $\dot{U}_c$  известны три величины или три независимых уравнения, связывающих их, то можно вычислить все величины, характеризующие данный режим работы генератора и приемника.

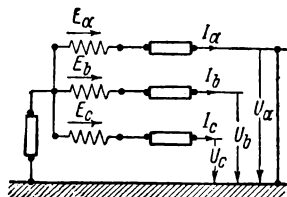


Рис. 170

Пусть, например, фаза  $a$  замкнулась на землю (рис. 170). Тогда, пренебрегая токами нормальной нагрузки по сравнению с токами короткого замыкания, имеем:

$$\dot{U}_a = 0; \quad \dot{I}_b = 0; \quad \dot{I}_c = 0,$$

и так как  $\dot{U}_a = \dot{U}_0 + \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 0$ , то, суммируя основные уравнения, получим:

$$\dot{E} = \dot{I}_0 Z_0 + \dot{I}_1 Z_1 + \dot{I}_2 Z_2,$$

откуда, приняв во внимание, что при  $\dot{I}_b = \dot{I}_c = 0$  симметричные составляющие системы токов будут  $\dot{I}_0 = \dot{I}_1 = \dot{I}_2 = \frac{1}{3} \dot{I}_a$ , найдем:

$$\dot{E} = \frac{1}{3} \dot{I}_a (Z_0 + Z_1 + Z_2)$$

и

$$\dot{I}_a = \frac{3\dot{E}}{Z_0 + Z_1 + Z_2}.$$

Для симметричных составляющих системы напряжений в месте короткого замыкания из основных уравнений получим:

$$\begin{aligned}\dot{U}_0 &= -\frac{\dot{I}_a Z_0}{3} = -\frac{\dot{E} Z_0}{Z_0 + Z_1 + Z_2}; \\ \dot{U}_1 &= \dot{E} - \frac{\dot{I}_a Z_1}{3} = \frac{\dot{E}(Z_0 + Z_2)}{Z_0 + Z_1 + Z_2}; \\ \dot{U}_2 &= -\frac{\dot{I}_a Z_2}{3} = -\frac{\dot{E} Z_2}{Z_0 + Z_1 + Z_2},\end{aligned}$$

после чего легко определяются  $\dot{U}_b$  и  $\dot{U}_c$ .

На первый взгляд кажется, что эта задача решается гораздо проще прямым применением закона Ома к контуру, по которому проходит ток  $I_a$ . Этот контур образован участком между землей и нейтралью генератора, фазой  $a$  генератора, проводом в этой фазе до места короткого замыкания и землей. Пусть участок между землей и нейтралью генератора имеет сопротивление  $Z_{00}$ . Если бы сопротивление фазы генератора и провода было одинаковым для всех трех составляющих трехфазной системы и равным  $Z$  с учетом сопротивления земли, то ток  $I_a$  вычислялся бы элементарно:

$$I_a = \frac{\dot{E}}{Z_{00} + Z}.$$

Это соотношение вытекает при таком условии и из полученного выше выражения. Действительно, при этом было бы:

$$Z_0 = 3Z_{00} + Z; \quad Z_1 = Z; \quad Z_2 = Z.$$

Первое из этих трех равенств следует из того, что через участок  $Z_{00}$  проходят все три тока нулевой последовательности, протекающих по всем трем фазам. Следовательно, этот участок можно заменить тремя ветвями, соединенными параллельно и имеющими каждая сопротивление  $3Z_{00}$ , но по каждой из которых протекает только ток  $I_0$ . Подставив эти выражения для  $Z_0$ ,  $Z_1$  и  $Z_2$  в выражение для  $I_a$ , получим:

$$I_a = \frac{3\dot{E}}{Z_0 + Z_1 + Z_2} = \frac{3\dot{E}}{3Z_{00} + Z + Z + Z} = \frac{\dot{E}}{Z_{00} + Z},$$

т. е. получаем то же выражение, что и непосредственно из закона Ома. Однако это получается только в предположении, что сопротивления фаз генератора *одинаковы* для составляющих любой последовательности. В действительности наличие вращающегося ротора и взаимной индукции между фазами приводит к тому, что со-

противления генератора для систем прямой, обратной и нулевой последовательностей различны. Если они известны, то формула:

$$\dot{I}_a = \frac{3\dot{E}}{Z_0 + Z_1 + Z_2}$$

дает возможность произвести расчет тока  $\dot{I}_a$  и всех остальных величин. Формула же  $\dot{I}_a = \frac{\dot{E}}{Z_{00} + Z}$  не дает такой возможности, так как в ней неопределенным является сопротивление  $Z$ , на величину которого влияет вращающийся ротор.

Таким образом, уже на этом простом примере мы видим достоинство метода симметричных составляющих для расчета трехфазных цепей, содержащих вращающиеся машины.

Заметим здесь, что трехфазные трансформаторы, в которых фазные обмотки расположены на трех сердечниках, соединенных ярами в общую магнитную цепь, обладают одинаковыми сопротивлениями для систем прямой и обратной последовательностей  $Z_2 = Z_1$ , но имеют сопротивление  $Z_0$  для системы нулевой последовательности, отличное от  $Z_1$  и  $Z_2$ . Действительно, суммы фазных напряжений прямой и обратной последовательностей равны нулю. Поэтому равны нулю в любой момент времени и суммы магнитных потоков, соответствующих этим напряжениям, что удовлетворяет принципу непрерывности потока в узлах магнитной цепи. Однако напряжения нулевой последовательности во всех обмотках совпадают по фазе. Поэтому совпадают по фазе во всех трех сердечниках и магнитные потоки, соответствующие этим напряжениям. В ярах эти потоки сходятся и вынуждены замыкаться через воздух от ярма к ярму. Магнитное сопротивление для потока нулевой последовательности оказывается очень большим, а следовательно, индуктивное сопротивление обмоток для нулевой последовательности получается малым.

## § 87. Мощность трехфазной цепи в общем случае несимметрии

Пусть системы фазных напряжений  $\dot{U}_a, \dot{U}_b, \dot{U}_c$  и фазных токов  $\dot{I}_a, \dot{I}_b, \dot{I}_c$  в трехфазной цепи несимметричны. Для комплексной мощности этой цепи  $\dot{P} = P - jQ$  имеем:

$$\dot{P} = \dot{P}_a + \dot{P}_b + \dot{P}_c = \dot{U}_a \dot{I}_a + \dot{U}_b \dot{I}_b + \dot{U}_c \dot{I}_c,$$

и, следовательно, для активной и реактивной мощностей всей цепи получим:

$$P = U_a I_a \cos \varphi_a + U_b I_b \cos \varphi_b + U_c I_c \cos \varphi_c;$$

$$Q = U_a I_a \sin \varphi_a + U_b I_b \sin \varphi_b + U_c I_c \sin \varphi_c,$$

где  $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c$  — углы сдвига фазных токов относительно соответствующих фазных напряжений.

Комплексную мощность  $\dot{P}$  можно выразить через симметричные составляющие системы фазных напряжений и токов.



Имеем:

$$\dot{I}_a = \dot{I}_0 + \dot{I}_1 + \dot{I}_2, \quad \dot{I}_b = \dot{I}_0 + a^2 \dot{I}_1 + a \dot{I}_2, \quad \dot{I}_c = \dot{I}_0 + a \dot{I}_1 + a^2 \dot{I}_2;$$

$$\dot{U}_a = \dot{U}_0 + \dot{U}_1 + \dot{U}_2, \quad \dot{U}_b = \dot{U}_0 + a^2 \dot{U}_1 + a \dot{U}_2, \quad \dot{U}_c = \dot{U}_0 + a \dot{U}_1 + a^2 \dot{U}_2.$$

Так как  $a^3 = 1$  и  $a^* = a^2$ , то

$$\dot{U}_b = \dot{U}_0 + a \dot{U}_1 + a^2 \dot{U}_2; \quad \dot{U}_c = \dot{U}_0 + a^2 \dot{U}_1 + a \dot{U}_2.$$

Для комплексной мощности  $\dot{P}$ , выполнив умножение, получим:

$$\dot{P} = P - jQ = 3\dot{U}_0 \dot{I}_0 + 3\dot{U}_1 \dot{I}_1 + 3\dot{U}_2 \dot{I}_2,$$

так как прочие члены произведений, образующие шесть симметричных систем ненулевой последовательности, дадут в сумме нуль.

Из последнего выражения для активной и реактивной мощностей цепи найдем:

$$P = 3U_0 I_0 \cos \varphi_0 + 3U_1 I_1 \cos \varphi_1 + 3U_2 I_2 \cos \varphi_2 = P_0 + P_1 + P_2;$$

$$Q = 3U_0 I_0 \sin \varphi_0 + 3U_1 I_1 \sin \varphi_1 + 3U_2 I_2 \sin \varphi_2 = Q_0 + Q_1 + Q_2,$$

где  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$  — разности фаз симметричных составляющих системы напряжений и соответствующих составляющих системы токов. Таким образом, как активная, так и реактивная мощности трехфазной цепи в самом общем случае несимметрии могут быть найдены как суммы соответствующих мощностей систем нулевой, прямой и обратной последовательностей напряжений и токов.

---

## ГЛАВА ВОСЬМАЯ

### НЕСИНУСОИДАЛЬНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ЭЛЕКТРОДВИЖУЩИЕ СИЛЫ, НАПРЯЖЕНИЯ И ТОКИ

#### § 88. Разложение периодических функций в ряд Фурье

В большинстве практических случаев форма кривых периодических э. д. с., напряжений и токов в той или иной мере отличается от синусоидальной. Причиной этого являются как конструктивные особенности генераторов переменного тока, так и то обстоятельство, что параметры цепей не всегда остаются строго неизменными в течение периода.

Задачи о расчете явлений в цепях переменного тока в случае отличия периодических э. д. с., напряжений и токов от синусоидальной формы решают, представляя эти э. д. с., напряжения и токи в виде конечных или бесконечных тригонометрических рядов, называемых рядами Фурье. Действительно, известно, что всякая периодическая функция, удовлетворяющая условиям Дирихле, т. е. имеющая за полный период конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов, может быть представлена в виде ряда Фурье. Периодические функции, встречающиеся в технических вопросах, условиям Дирихле всегда удовлетворяют. Ряд Фурье имеет вид:

$$F(\omega t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \psi_1) + A_2 \sin(2\omega t + \psi_2) + \\ + A_3 \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots + A_k \sin(k\omega t + \psi_k) + \dots,$$

причем член  $A_0$  называют *постоянной составляющей*, член  $A_1 \sin(\omega t + \psi_1)$ , имеющий частоту, равную частоте данной функции, называют *основной волной* или *первой гармоникой*, а все остальные члены вида  $A_k \sin(k\omega t + \psi_k)$ , частота которых в целое число раз больше частоты данной функции, носят название *высших гармоник* и отличаются друг от друга в наименовании порядковым номером  $k$ , а именно: вторая гармоника, третья гармоника и т. д. Весьма важно отметить, что, каким бы способом мы ни разлагали данную функцию в ряд Фурье, величина постоянной составляющей  $A_0$  и амплитуды гармоник  $A_1, A_2, A_3, \dots$ , а также их взаимное расположение остаются неизменными, начальные же фазы гармоник  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$  изменяются при переходе к новому началу счета времени.

Ряд Фурье можно представить в ином виде, если развернуть синусы сумм. А именно, для общего члена ряда имеем:

$$A_k \sin(k\omega t + \psi_k) = A_k \cos \psi_k \sin k\omega t + A_k \sin \psi_k \cos k\omega t$$

и далее, полагая

$$A_k \cos \psi_k = B_k; \quad A_k \sin \psi_k = C_k,$$

найдем

$$A_k \sin(k\omega t + \psi_k) = B_k \sin k\omega t + C_k \cos k\omega t$$

и, следовательно,

$$F(\omega t) = A_0 + B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + \dots + B_k \sin k\omega t + \\ + \dots + C_1 \cos \omega t + C_2 \cos 2\omega t + \dots + C_k \cos k\omega t + \dots$$

Так как коэффициенты  $B$  и  $C$  зависят от начальных фаз, то они изменяются при изменении начала счета времени. Переход от второй формы ряда Фурье к первой совершается при помощи соотношений:

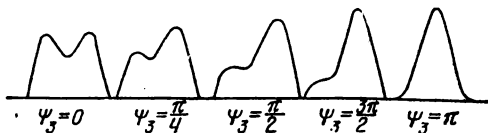


Рис. 171

$$A_k = +\sqrt{B_k^2 + C_k^2}, \\ \operatorname{tg} \psi_k = \frac{C_k}{B_k}.$$

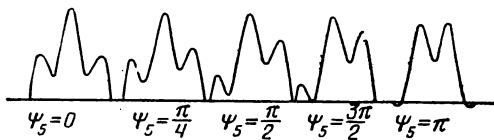


Рис. 172

На рис. 171, 172 показано, как влияют на форму кривой третья и пятая гармоники при различном сдвиге их относительно основной волны. Кривые на рис. 171 отвечают уравнению:

$$F(\omega t) = \sin \omega t + 0,4 \sin(3\omega t + \psi_3),$$

а кривые на рис. 172 — уравнению:

$$F(\omega t) = \sin \omega t + 0,4 \sin(5\omega t + \psi_5).$$

На этих рисунках изображены только положительные полуциклы результирующих кривых.

Положим для краткости  $\omega t = \alpha$ . Тогда для определения коэффициентов ряда Фурье, как известно из курса высшей математики, имеем:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha) d\alpha, \quad B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha) \sin k\alpha d\alpha,$$

$$C_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha) \cos k\alpha d\alpha.$$

Часто периодическая функция, подлежащая разложению в ряд Фурье, задается не аналитическим выражением, а в виде графика. В этих случаях прибегают к приближенным методам вычисления коэффициентов ряда. Один из простейших методов этого рода состоит в замене интегралов, определяющих коэффициенты  $B_k$  и  $C_k$ , соответствующими суммами. По этому методу период кривой делят на  $p$  равных частей, и коэффициенты  $B_k$  и  $C_k$  вычисляют из выражений:

$$B_k = 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha) \sin k\alpha d\alpha \approx \frac{2}{p} \sum_{n=1}^p F\left(n \frac{2\pi}{p}\right) \sin\left(kn \frac{2\pi}{p}\right);$$

$$C_k = 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha) \cos k\alpha d\alpha \approx \frac{2}{p} \sum_{n=1}^p F\left(n \frac{2\pi}{p}\right) \cos\left(kn \frac{2\pi}{p}\right),$$

т. е. за значения  $B_k$  и  $C_k$  принимают удвоенные средние арифметические значения произведений ординат в  $p$  последовательных точках деления на соответствующие значения  $\sin k\alpha$  и  $\cos k\alpha$ . Так как  $A_0$  является средним значением данной функции за ее полный период, то его можно определить как среднюю ординату кривой, изображающей эту функцию за ее полный период (рис. 173).

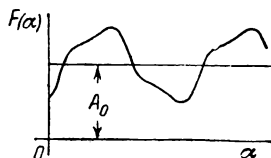


Рис. 173

Рассмотрим еще метод Чебышева в применении его к разложению кривых, в которых четные гармоники отсутствуют. Постоянная составляющая в этом случае определяется весьма просто как полусумма наибольшей и наименьшей ординат, и поэтому ею мы в дальнейшем заниматься не будем.

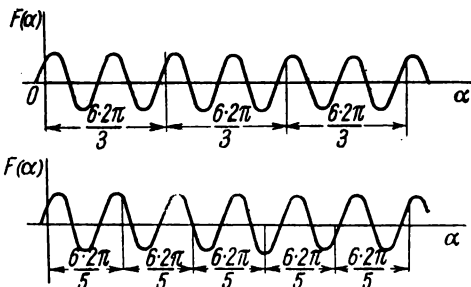


Рис. 174

Метод Чебышева основан на следующем свойстве синусоиды: если разделить  $k$  полных периодов синусоиды на  $p$  равных частей, то сумма ординат в точках деления равна нулю при условии, что  $k/p$  не равно целому числу; если же  $k/p$  равно целому числу, то все указанные ординаты равны между собою и сумма их, вообще говоря, нулю не равна (рис. 174). Это свойство синусоиды можно пояснить следующим образом. Так как все ординаты принадлежат одной

и той же синусоиде и сдвинуты друг относительно друга на расстояние  $2\pi k/p$ , то сумма их может быть получена как сумма проекций на одну и ту же ось системы  $p$  векторов равной длины, сдвинутых друг относительно друга на угол  $2\pi k/p$ . Такая система векторов является симметричной  $p$ -фазной системой и геометрическая сумма векторов, образующих ее, равна нулю, если  $k$  не делится на  $p$ , почему и сумма соответствующих ординат в этом случае равна нулю.

Если  $k$  делится на  $p$ , то мы получим симметричную  $p$ -фазную систему нулевого порядка, причем геометрическая сумма векторов системы в  $p$  раз больше каждого отдельного вектора, почему и сумма ординат в последнем случае будет в  $p$  раз больше каждой ординаты и в общем случае нулю не равна.

Примем одну из точек оси абсцисс за начало  $O$ . Тогда для ординаты  $M_1$ , соответствующей началу, на основании уравнения:

$$F(\alpha) = B_1 \sin \alpha + B_3 \sin 3\alpha + \dots + B_k \sin k\alpha + \dots \\ \dots + C_1 \cos \alpha + C_3 \cos 3\alpha + \dots + C_k \cos k\alpha + \dots$$

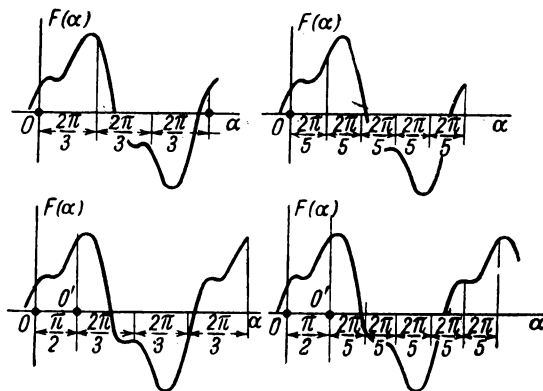


Рис. 175

получим, полагая  $\alpha = 0$ .

$$M_1 = C_1 + C_3 + C_5 + \dots + C_k + \dots$$

Разделим теперь период на три части, идя от выбранного нами начала  $O$  (рис. 175). Тогда сумма  $M_3$  трех ординат, отвечающих точкам деления, будет:

$$M_3 = 3(C_3 + C_9 + C_{15} + \dots),$$

т. е. равна утроенной сумме начальных (при  $\alpha = 0$ ) ординат гармоник, порядок которых кратен трем. Гармоники, порядок которых не кратен трем, ничего не внесут в  $M_3$ , так как сумма ординат каждой из них, взятых в точках деления, на основании приведенного выше свойства синусоидальной функции равна нулю.

Деля далее период на 5, 7, 9 и 11 и т. д. частей, мы получим зависимости:

$$M_5 = 5(C_5 + C_{15} + C_{25} + \dots),$$

$$M_7 = 7(C_7 + C_{21} + C_{35} + \dots)$$

и т. д.

Возьмем теперь точку  $O'$  (рис. 175), отстоящую от начала  $O$  на четверть периода данной кривой, и произведем аналогичные операции деления периода на 1, 3, 5, ... частей, идя от  $O'$ . Тогда получим систему уравнений:

$$N_1 = B_1 - B_3 + B_5 - B_7 + \dots,$$

$$N_3 = 3(-B_3 + B_9 - B_{15} + \dots),$$

$$N_5 = 5(+B_5 - B_{15} + B_{25} - \dots),$$

$$N_7 = 7(-B_7 + B_{21} - B_{35} + \dots)$$

и т. д., где  $N_1, N_3, N_5, \dots$  суммы ординат, получающихся при делении периода на 1, 3, 5 и т. д. частей

Для того чтобы определить коэффициенты  $B_k$  и  $C_k$  из полученных систем уравнений, необходимо ограничиться гармоникой какого-либо порядка, т. е. пренебречь наличием всех гармоник, имеющих более высокий порядок. Так, например, ограничиваясь девятой гармоникой, мы получим следующие весьма просто решаемые системы:

$$\begin{aligned} C_1 + C_3 + C_5 + C_7 + C_9 &= M_1, & B_1 - B_3 + B_5 - B_7 + B_9 &= N_1. \\ 3(C_3 + C_9) &= M_3, & 3(-B_3 + B_9) &= N_3, \\ 5C_5 &= M_5, & 5B_5 &= N_5, \\ 7C_7 &= M_7, & -7B_7 &= N_7, \\ 9C_9 &= M_9, & 9B_9 &= N_9. \end{aligned}$$

Получив  $B_k$  и  $C_k$ , найдем  $A_k = +\sqrt{B_k^2 + C_k^2}$  и  $\psi_k = \arctg \frac{C_k}{B_k}$ . При нахождении  $\psi_k$  надлежит принимать во внимание знаки при  $B_k$  и  $C_k$ , определяющие четверть, в которой лежит этот угол. Следует помнить, что, в то время как  $A_k$  не зависит от выбора начальной точки,  $B_k$  и  $C_k$  зависят от выбора этой точки.

Кроме различных графоаналитических методов определения коэффициентов ряда Фурье, для той же цели имеются особые механические приборы, называемые *гармоническими анализаторами*.

В тех случаях, когда гармоническому анализу должны быть подвергнуты кривые э. д. с., напряжения или тока, кроме указанных косвенных методов, требующих наличия графика кривой э. д. с., напряжения или тока, возможно применение непосредственных электрических методов гармонического анализа, причем некоторые из них дают точность, значительно превышающую точность косвенных методов.

В дальнейшем, рассматривая разложение функции в ряд Фурье, для краткости, мы часто будем говорить о *разложении кривой*, изображающей эту функцию в декартовой системе координат.

Будем называть кривую симметричной относительно оси абсцисс или, для краткости, просто *симметричной*, если она изображает функцию, для которой при всех значениях  $\alpha$  выполнено условие:

$$F(\alpha) = -F(\alpha + \pi) \quad \text{или} \quad F(\alpha) + F(\alpha + \pi) = 0.$$

Условие симметрии эквивалентно следующему требованию: кривая, изображающая функцию, должна быть такова, что, сдвинув одну ее полуволну вдоль оси абсцисс на половину периода, мы получим зеркальное изображение другой полуволны в оси абсцисс. На рис. 176 приведена симметричная кривая, а на рис. 177 — две несимметричные кривые.

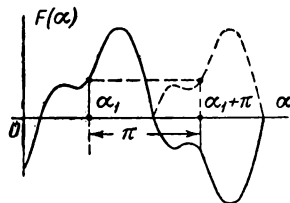


Рис. 176

Покажем, что для симметричной кривой ряд Фурье не содержит постоянной составляющей и четных гармоник. Имеем:

$$F(\alpha) = A_0 + A_1 \sin(\alpha + \psi_1) + A_2 \sin(2\alpha + \psi_2) + A_3 \sin(3\alpha + \psi_3) + \dots$$

$$\begin{aligned} F(\alpha + \pi) &= A_0 - A_1 \sin(\alpha + \psi_1) + \\ &+ A_2 \sin(2\alpha + \psi_2) - A_3 \sin(3\alpha + \psi_3) + \dots, \end{aligned}$$

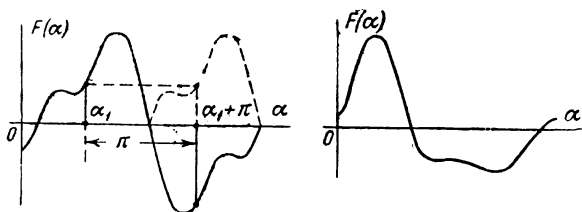


Рис. 177

и наличие симметрии приводит к следующему условию:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [F(\alpha) + F(\alpha + \pi)] &= A_0 + A_2 \sin(2\alpha + \psi_2) + \\ &+ A_4 \sin(4\alpha + \psi_4) + \dots = 0. \end{aligned}$$

Так как функция  $\frac{1}{2} [F(\alpha) + F(\alpha + \pi)]$  при всех значениях  $\alpha$  тождественно равна нулю, то из формул для определения  $A_0$ ,  $B_k$  и  $C_k$  получим, что все коэффициенты разложения этой функции в ряд Фурье равны нулю, и, следовательно,

$$A_0 = A_2 = A_4 = \dots = A_{2n} = \dots = 0.$$

Таким образом, при симметрии кривой ряд, в который разлагается соответствующая функция  $F(\alpha)$ , не содержит ни постоянной составляющей, ни четных гармоник.

К симметричным кривым принадлежит, в частности, кривая рис. 178, имеющая вид равнобокой трапеции. Разлагая эту кривую в ряд и пользуясь для определения коэффициентов  $B_k$  и  $C_k$  приведенными формулами, получим:

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \frac{4A}{\pi\beta} \left[ \sin \alpha \sin \beta + \frac{1}{9} \sin 3\alpha \sin 3\beta + \right. \\ &\left. + \dots + \frac{1}{k^2} \sin k\alpha \sin k\beta + \dots \right]. \end{aligned}$$

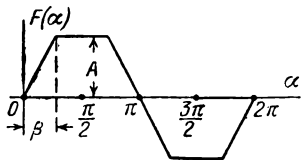


Рис. 178

В частном случае, когда  $\beta = \frac{\pi}{2}$ , равнобокая трапеция превращается в равнобедренный треугольник, и тогда мы имеем:

$$F(\alpha) = \frac{8A}{\pi^2} \left[ \sin \alpha - \frac{1}{9} \sin 3\alpha + \frac{1}{25} \sin 5\alpha - \dots \right].$$

В частном случае, когда  $\beta = 0$ , равнобокая трапеция превращается в прямоугольник, и мы имеем:

$$F(\alpha) = \frac{4A}{\pi} \left[ \sin \alpha + \frac{1}{3} \sin 3\alpha + \frac{1}{5} \sin 5\alpha + \dots \right].$$

### § 89. Действующие значения несинусоидальных электродвижущих сил, напряжений и токов

Определим зависимость между действующим значением периодической несинусоидальной э. д. с. и действующими значениями отдельных гармоник, причем постоянную составляющую будем рассматривать как гармонику нулевого порядка.

По определению действующего значения  $E$  э. д. с.  $e$  имеем:

$$E^2 = \frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt.$$

Представляя э. д. с. в виде ряда Фурье

$$e = e_0 + e_1 + e_2 + \dots + e_k + \dots$$

и возводя этот ряд в квадрат, мы видим, что  $e^2$  можно представить как сумму квадратов отдельных гармоник и сумму удвоенных произведений их. В соответствии с этим  $E^2$  можно представить в виде двух сумм интегралов, а именно:

$$E^2 = \frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt = \sum \frac{1}{T} \int_0^T e_k^2 dt + \sum \frac{1}{T} \int_0^T 2e_q e_s dt,$$

причем  $q \neq s$  и  $e_k = E_{km} \sin(k\omega t + \psi_k)$ .

Рассмотрим определенный интеграл

$$\int_0^T 2e_q e_s dt = E_{qm} E_{sm} \int_0^T 2 \sin(q\omega t + \psi_q) \sin(s\omega t + \psi_s) dt,$$

где  $q$  и  $s$  — целые положительные числа.



Имеем:

$$\begin{aligned} & \int_0^T 2 \sin(q\omega t + \psi_q) \sin(s\omega t + \psi_s) dt = \\ & = \int_0^T \cos[(q-s)\omega t + \psi_q - \psi_s] dt - \int_0^T \cos[(q+s)\omega t + \psi_q + \psi_s] dt. \end{aligned}$$

При  $q \neq s$  оба интеграла, стоящие в правой части равенства, равны нулю как интегралы синусоидальных функций, взятые за целое число периодов, а поэтому равен нулю и интеграл, стоящий в левой части равенства. Применяя этот результат к сумме интегралов от удвоенных произведений гармоник, найдем:

$$\sum \frac{1}{T} \int_0^T 2e_q e_s dt = 0$$

и

$$\begin{aligned} E^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt = \sum \frac{1}{T} \int_0^T e_k^2 dt = \\ &= E_0^2 + E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 + \dots + E_k^2 + \dots, \end{aligned}$$

т. е. квадрат действующего значения несинусоидальной э. д. с. равен сумме квадратов действующих значений отдельных гармоник или

$$E = \sqrt{E_0^2 + E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 + \dots + E_k^2 + \dots}.$$

Аналогичный результат получим, рассматривая вопрос о действующем значении несинусоидального напряжения или о действующем значении несинусоидального тока, а именно найдем:

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_k^2 + \dots}$$

и

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots + I_k^2 + \dots}.$$

## § 90. Активная мощность при наличии высших гармоник

В случае периодических несинусоидальных напряжения и тока по определению активной мощности как среднего за период значения мощности имеем:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T ui dt.$$

Подставляя вместо  $u$  и  $i$  выражения в виде рядов Фурье и перемножая эти ряды, получим:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T (u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_k + \dots) \times \\ &\quad \times (i_0 + i_1 + i_2 + \dots + i_k + \dots) dt = \\ &= \sum \frac{1}{T} \int_0^T u_k i_k dt + \sum \frac{1}{T} \int_0^T u_q i_s dt, \end{aligned}$$

причем  $q \neq s$ . Так как при  $q \neq s$ , как мы только что выяснили.

$$\int_0^T u_q i_s dt = 0, \quad \text{то} \quad \sum \frac{1}{T} \int_0^T u_q i_s dt = 0$$

и, следовательно,

$$P = \sum \frac{1}{T} \int_0^T u_k i_k dt,$$

т. е. активная мощность при несинусоидальных напряжении и токе равна сумме активных мощностей отдельных гармоник или

$$\begin{aligned} P &= P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_k + \dots = \\ &= U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + \dots + U_k I_k \cos \varphi_k + \dots \end{aligned}$$

По аналогии со случаем, когда напряжение и ток являются синусоидальными функциями времени, весьма часто и при наличии высших гармоник рассматривают отношение активной мощности  $P$  к полной мощности  $UI$ :

$$\frac{\bar{P}}{UI} = \left[ \frac{1}{T} \int_0^T ui dt \right] : \left[ \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \right] = \alpha,$$

носящее название *коэффициента мощности*. В курсах математики доказывается, что это отношение меньше единицы и лишь при пропорциональности между  $u$  и  $i$  равно единице. Последнее имеет место только в случае, когда можно предположить, что цепь обладает только активным сопротивлением, притом не зависящим от тока. Во всех остальных случаях появление высших гармоник в кривых напряжения и тока приводит к понижению коэффициента мощности и, следовательно, уже хотя бы в этом отношении является нежелательным в мощных электроэнергетических системах. Поэтому стремятся конструировать генераторы переменного тока так, чтобы кривая э. д. с. в них была по возможности близка к синусоиде. Кроме

того, стремятся по возможности к тому, чтобы приемные устройства не искажали синусоидальную форму кривой тока. Такое искажение кривой тока неизбежно возникает, как мы увидим в дальнейшем, при наличии в цепи нелинейных элементов, например, катушек с ферромагнитными сердечниками, выпрямителей и т. д. Чтобы уяснить дополнительное снижение коэффициента мощности вследствие появления высших гармоник, рассмотрим именно такой практический случай, когда напряжение генератора синусоидально, т. е. не содержит высших гармоник, а ток вследствие наличия в цепи нелинейных элементов содержит основную и высшие гармоники.

В этом случае активная мощность определяется только основной гармоникой:

$$P = U_1 I_1 \cos \varphi_1.$$

Вместе с тем имеем:

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots} > I_1 \quad \text{и} \quad U = U_1.$$

Следовательно, выражая  $P$  через  $U$  и  $I$ , получаем:

$$P = U_1 I_1 \cos \varphi_1 = UI \frac{I_1}{I} \cos \varphi_1 = UI \lambda \cos \varphi_1 = UI \alpha.$$

Таким образом, коэффициент мощности  $\alpha$  меньше  $\cos \varphi_1$ :

$$\alpha = \lambda \cos \varphi_1 < \cos \varphi_1,$$

так как  $\lambda = \frac{I_1}{I} < 1$ . Множитель  $\lambda$  тем меньше единицы, чем больше содержится гармоник в кривой тока.

### § 91. О расчете цепей с постоянными параметрами при несинусоидальных напряжениях

Определим ток  $i$  в неразветвленной цепи с постоянными параметрами  $r$ ,  $L$ ,  $C$  (рис. 179) при установившемся режиме в случае, когда напряжение  $u$  на зажимах цепи является периодической, но несинусоидальной функцией времени. Представим напряжение  $u$  в виде ряда

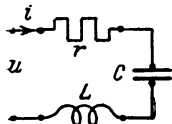


Рис. 179

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_k + \dots,$$

где  $u_0$  — постоянная составляющая, а прочие члены ряда — синусоидальные функции времени вида

$$u_k = U_{km} \sin(k\omega t + \psi_k).$$

Тогда, пользуясь принципом наложения, ток  $i$  можно найти как сумму токов, которые существовали бы в данной цепи, если бы каждая из составляющих напряжения  $u$  действовала в этой цепи в отдельности от других составляющих. Поэтому имеем:

$$i = i_0 + i_1 + i_2 + \dots + i_k + \dots,$$

где для установившегося режима

$$i_k = I_{km} \sin(k\omega t + \psi_k - \varphi_k),$$

причем для рассматриваемой цепи

$$I_{km} = \frac{U_{km}}{\sqrt{r^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)^2}}$$

и

$$\varphi_k = \arctg \frac{k\omega L - \frac{1}{k\omega C}}{r}.$$

Таким образом, при установившемся режиме ток в цепи будет так же, как и приложенное напряжение, периодической несинусоидальной функцией времени.

Определяя ток как сумму токов, вызываемых в отдельности постоянной составляющей напряжения, его основной волной и каждой из высших гармоник, следует иметь в виду, что реактивное сопротивление  $x_k = k\omega L - \frac{1}{k\omega C}$ , а следовательно, и полное сопротив-

ление  $z_k = \sqrt{r^2 + x_k^2}$  и угол сдвига  $\varphi_k = \arctg \frac{x_k}{r}$  зависят от порядка гармоники. Поэтому форма кривой тока  $i$  не будет подобна форме кривой приложенного напряжения  $u$ .

Так как действующее значение каждой из гармоник в  $\sqrt{2}$  раз меньше ее амплитуды, то отношение действующих значений одноименных гармоник напряжения и тока равно отношению их амплитуд, т. е.

$$U_k : I_k = U_{km} : I_{km} = z_k.$$

Следует иметь в виду, что в рассматриваемой нами цепи постоянная составляющая тока может отличаться от нуля только при  $C = \infty$ , т. е. когда в цепи отсутствует конденсатор.

Рассматривая любую сложную цепь с постоянными параметрами в том случае, когда действующие в ней периодические э. д. с. несинусоидальны, следует каждую из э. д. с. разложить в ряд Фурье, а затем рассчитать эту цепь одним из методов расчета сложных цепей, предположив, что в цепи действуют только те составляющие всех э. д. с., которые имеют одну и ту же частоту. Выполнив расчет по очереди для постоянных составляющих, для основных волн и для каждой из высших гармоник, можно по принципу наложения найти мгновенное значение тока в любой ветви как сумму мгновенных значений токов, вызываемых в этой ветви в отдельности постоянными составляющими э. д. с., их основными волнами и высшими гармониками каждого порядка. При этом для определения частич-

ных токов, вызываемых составляющими э. д. с. одной и той же частоты, целесообразно пользоваться символическим методом.

Для нахождения действующих значений результирующих токов и напряжений надлежит пользоваться формулами § 89.

В инженерных расчетах, стремясь упростить вычисления и довольствуясь приближенными результатами, иногда заменяют ту или иную несинусоидальную кривую синусоидальной кривой. При этом обычно замену производят так, чтобы действующие значения заменяемой кривой и заменяющей ее синусоиды были равны друг другу. При выполнении этого условия синусоиду, заменяющую данную несинусоидальную кривую, принято называть *эквивалентной синусоидой*.

Следует иметь в виду, что при наличии в цепи конденсаторов развитие высших гармоник тока может иногда существенно понизить точность таких упрощенных расчетов.

При одновременной замене и кривой напряжения, приложенного к зажимам некоторой цепи, и кривой тока в той же цепи эквивалентными синусоидами последние должны быть сдвинуты друг относительно друга на некоторый угол  $\varphi$ , чтобы мощность, вычисленная по формуле  $P = UI \cos \varphi$ , была равна мощности, расходуемой в цепи. Для этого необходимо выполнить условие:

$$\cos \varphi = P : UI = \alpha,$$

т. е. косинус угла сдвига между эквивалентными синусоидами напряжения и тока должен быть равен коэффициенту мощности.

## § 92. Влияние характера цепи с постоянными параметрами на форму кривой тока

В цепи, обладающей только активным сопротивлением, полное сопротивление одинаково для всех гармоник, и кривая тока  $i$  подобна кривой приложенного к цепи напряжения  $u$ , в предположении, что активное сопротивление не зависит от тока и от частоты.

Соблюдение такого условия необходимо в цепях вольтметров, в параллельных цепях ваттметров и, особенно, в цепях вибраторов осциллографов, предназначенных для записи кривых напряжения. В точности достичь этого условия невозможно, так как принципиально всякая цепь обладает индуктивностью и емкостью. Однако, применяя специальные способы намотки добавочных сопротивлений, в таких цепях удастся существенно снизить их индуктивность и емкость и приблизиться к требуемым условиям. Кроме того, если сечение проволоки намотки мало, то можно при не очень высоких частотах пренебречь явлением поверхностного эффекта и считать, что активное сопротивление одинаково для всех гармоник не слишком высокого порядка.

Предположим теперь, что цепь обладает только индуктивным сопротивлением и индуктивность ее равна  $L$ . Тогда полное сопро-

тивление цепи  $z_k = x_k = k\omega L$  пропорционально порядку гармоники, и мы имеем:

$$U_{1m} = \omega L I_{1m}; \quad U_{km} = k\omega L I_{km}.$$

Следовательно,

$$\frac{I_{km}}{I_{1m}} = \frac{1}{k} \frac{U_{km}}{U_{1m}},$$

т. е. отношение амплитуды гармоники порядка  $k$  к амплитуде основной волны для кривой тока в  $k$  раз меньше, чем то же отношение для кривой напряжения на зажимах цепи. Иными словами, чем выше порядок гармоники, тем менее резко она выражена в кривой тока по сравнению с кривой напряжения, откуда следует, что кривая тока в рассматриваемом случае ближе к синусоиде, чем кривая напряжения. Поэтому говорят, что индуктивное сопротивление тушит высшие гармоники и сглаживает форму кривой тока.

Если цепь состоит из конденсатора емкостью  $C$ , то  $z_k = |x_k| = \frac{1}{k\omega C}$ , т. е. полное сопротивление обратно пропорционально порядку гармоники, и мы имеем

$$I_{1m} = \omega C U_{1m}; \quad I_{km} = k\omega C U_{km}.$$

Следовательно,

$$\frac{I_{km}}{I_{1m}} = k \frac{U_{km}}{U_{1m}},$$

т. е. отношение амплитуды гармоники порядка  $k$  к амплитуде основной волны для кривой тока в  $k$  раз больше, чем то же отношение для кривой напряжения. Иначе говоря, чем выше порядок гармоники, тем более резко она выражена в кривой тока по сравнению с кривой напряжения. Поэтому кривая тока в рассматриваемом случае отличается от синусоиды больше, чем кривая напряжения, на основании чего и говорят, что емкостное сопротивление выделяет высшие гармоники и искажает форму кривой тока.

В тех случаях, когда цепь, кроме индуктивного или емкостного сопротивления, обладает активным сопротивлением, от частоты не зависящим, выводы, к которым мы пришли, в качественном отношении не изменятся (рис. 180), но количественно как сглаживающее влияние индуктивной цепи, так и искажающее влияние емкостной цепи будут выражены менее резко.

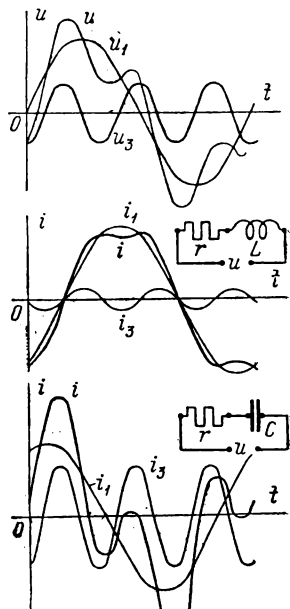


Рис. 180

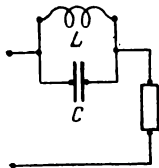
Рассмотрим несколько более сложную цепь, представленную на рис. 179. Пусть эта цепь для гармоники, порядок которой  $k = q$ , настроена в резонанс, т. е. выполнено условие:

$$q\omega L = \frac{1}{q\omega C}.$$

Тогда полное сопротивление цепи для этой гармоники

$$z_q = \sqrt{r^2 + \left(q\omega L - \frac{1}{q\omega C}\right)^2} = r$$

имеет наименьшую величину, и поэтому в кривой тока она выражена наиболее резко. При этом для гармоники, порядок которой  $k = q^2$ , абсолютная величина реактивного сопротивления та же, что и для основной волны. Действительно, при  $q\omega L = \frac{1}{q\omega C}$  имеем:



$$x_{q^2} = q^2\omega L - \frac{1}{q^2\omega C} = \frac{1}{\omega C} - \omega L = \left|\omega L - \frac{1}{\omega C}\right| = |x_1|.$$

Рис. 181

Для всех последующих гармоник ( $k > q^2$ ) реактивное сопротивление по абсолютной величине больше, а для всех предыдущих ( $k < q^2$ ) меньше, чем для основной волны. Следовательно, все гармоники, порядок которых меньше, чем  $q^2$ , в кривой тока будут выражены более резко, чем в кривой напряжения, приложенного к цепи.

В тех случаях, когда напряжение, приложенное к цепи, содержит высшие гармоники, часто возникает задача о выделении в кривой тока в приемнике тех или иных гармоник или, наоборот, о сведении в этой кривой некоторых гармоник к возможному минимуму. Эта задача обычно решается путем включения в цепь особых *фильтрующих контуров*, представляющих собой последовательное или параллельное соединение реактивной катушки и конденсатора, настроенных в резонанс для интересующей нас гармоники. Так как явление резонанса наиболее резко выражено в цепях с малым затуханием и так как желательно, чтобы мощность, теряемая в фильтрующих контурах, была мала, то эти контуры составляют из реактивных катушек и конденсаторов, имеющих возможно малые потери.

Пусть в кривой напряжения имеется гармоника порядка  $k$ , а наличие этой гармоники в кривой тока в приемнике нежелательно. Тогда в линию, ведущую к приемнику, можно включить контур из параллельно соединенных катушки и конденсатора (рис. 181), настроенных в резонанс для этой гармоники. При соблюдении условия  $k^2\omega^2 LC = 1$ , ток гармоники порядка  $k$  в приемнике будет резко ослаблен, так как сопротивление контура для этой гармоники очень

велико по сравнению с сопротивлением для основной волны и других гармоник. Такие контуры применяются в радиотехнике.

Для достижения той же цели можно параллельно с приемником включить контур из последовательно соединенных катушки и конденсатора (рис. 182), настроенных в резонанс для гармоники порядка  $k$ . Сопротивление контура для этой гармоники близко к нулю, и

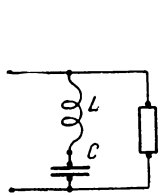


Рис. 182

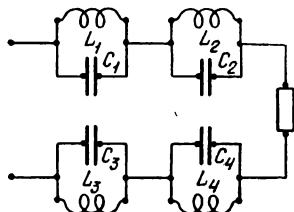


Рис. 183

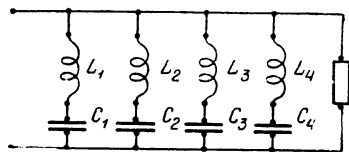


Рис. 184

если оно очень мало по сравнению с суммарным сопротивлением генератора, а также и по сравнению с сопротивлением приемника, то гармоники порядка  $k$  в кривой напряжения на зажимах приемника и в кривой тока в приемнике будут ничтожны.

При необходимости устранить в кривой тока несколько гармоник, в линию включают последовательно ряд контуров, каждый из которых настроен на одну из гармоник (рис. 183), или параллельно с приемником включают ряд соответствующим образом настроенных резонансных ветвей (рис. 184).

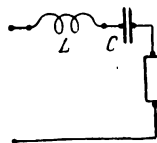


Рис. 185

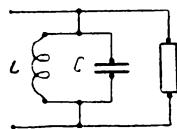


Рис. 186

Последний метод широко используется на выпрямительных подстанциях, питающих контактную сеть электрических железных дорог. Напряжение после выпрямителя содержит, как мы покажем в дальнейшем, кроме постоянной составляющей, также ряд гармоник. Чтобы не допустить эти гармоники в контактную сеть и этим исключить их вредное влияние на провода связи, после выпрямителя включают фильтрующие контуры по схеме, изображенной на рис. 184.

При желании по возможности резко выделить в кривой тока в приемнике какую-либо гармонику, в частности основную волну, также можно воспользоваться контуром из последовательно или параллельно соединенных катушки и конденсатора, которые при активном сопротивлении приемника следует настроить в резонанс для выделяемой гармоники. Но, применяя в этом случае последовательное соединение, нужно включить контур в линию (рис. 185), а применяя параллельное соединение, его следует включить параллельно с приемником (рис. 186).



Применяя схемы рис. 187, можно в кривой тока в приемнике добиться ослабления гармоник порядка  $s$  и усиления гармоник порядка  $q$ , если элементы схемы подобрать так, чтобы в контуре  $bc$  имел место резонанс токов для гармоник порядка  $s$ , а в части цепи  $ac$  — резонанс напряжения для гармоник порядка  $q$ .

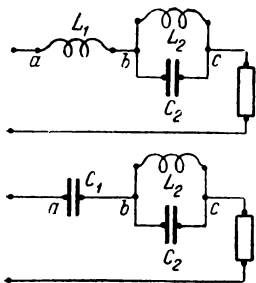


Рис. 187

### § 93. Высшие гармоники в трехфазных цепях

При наличии высших гармоник в кривых э. д. с. некоторые соотношения, установленные нами для симметричных многофазных цепей, могут оказаться нарушенными. Для пояснения этого остановимся на случае симметричной трехфазной системы. Пусть э. д. с., образующие эту систему, несинусоидальны, но одинаковы по форме и сдвинуты по

следующая относительно предыдущей на угол  $2\pi/3$ . При этих условиях можно установить следующее весьма важное положение: все одноименные гармоники, имеющиеся в отдельных фазах системы, совпадают друг с другом по фазе, если их порядок кратен трем. Действительно, кривые фазных э. д. с. в трехфазной симметричной системе сдвинуты друг относительно друга на одну треть периода основной волны или, что то же, на полный период третьей гармоники, т. е. эти последние совпадают друг с другом по фазе (рис. 188) и образуют нулевую систему. К такому же заключению при помощи аналогичного рассуждения мы приходим и по отношению к шестым, девятым и прочим гармоникам, порядок которых кратен трем ( $k = 3, 6, 9, 12, \dots$ ).

Если порядок гармоник  $k$  не делится на три, то фазы гармоник этого порядка различны в различных фазах, и угол сдвига  $\psi_k$  между ними равен углу сдвига между основными волнами, умноженному на порядок гармоник, т. е.  $\psi_k = \frac{2\pi k}{3}$ . Поэтому порядок следования фаз гармоник совпадает с порядком следования основных волн, если  $(k - 1)$  делится на три ( $k = 4, 7, 10, 13, \dots$ ), и обратен ему, если  $(k + 1)$  делится на три ( $k = 2, 5, 8, 11, \dots$ ).

Рассмотрим следствия, вытекающие из установленных нами

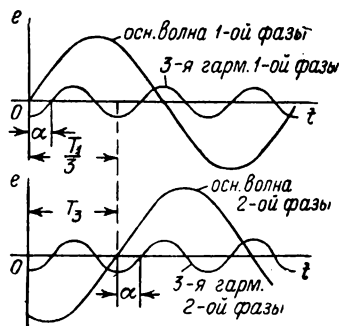


Рис. 188

положений для случаев связывания треугольником и звездой, предполагая, что нагрузка фаз одинакова.

В случае связывания обмоток генератора или трансформатора треугольником при отсутствии высших гармоник сумма э. д. с. в контуре треугольника равна нулю, если эти э. д. с. образуют симметричную систему. Однако, если кривые э. д. с. содержат высшие гармоники, то гармоники порядков, кратных трем, совпадают по фазе и дают в сумме э. д. с., не равную нулю, которая обусловит наличие тока в контуре треугольника даже при отсутствии нагрузки.

Этот ток создает в обмотках падения напряжения, в точности компенсирующие э. д. с., которые вызвали этот ток, в результате чего напряжения на зажимах обмоток не содержат гармоник порядков, кратных трем. Гармоники, порядок которых не кратен трем, образуют прямые или обратные системы и при суммировании по контуру треугольника дают нуль так же, как и основные волны.

При связывании звездой первое важное следствие относится к линейным напряжениям. А именно, так как линейное напряжение в этом случае есть разность двух фазных напряжений, то в линейных напряжениях отсутствуют гармоники, порядок которых кратен трем, так как эти гармоники, равные по величине и совпадающие по фазе, при вычитании дают разность, равную нулю. Гармоники, порядок которых не кратен трем, не совпадают по фазе и не могут взаимно компенсироваться. Величина линейного напряжения для любой из этих гармоник в  $\sqrt{3}$  раза больше величины фазного напряжения для той же гармоники. Поэтому при наличии высших гармоник в кривых фазных напряжений, образующих трехфазную симметричную систему, линейное напряжение  $U_A$  при соединении звездой превышает фазное напряжение  $U_\phi$  в число раз меньшее, чем  $\sqrt{3}$ . Действительно, предположив, что четных гармоник нет, в этом случае имеем:

$$\frac{U_A}{U_\phi} = \frac{\sqrt{3} \sqrt{U_1^2 + 0 + U_5^2 + U_7^2 + 0 + U_{11}^2 + \dots}}{\sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + U_7^2 + U_9^2 + U_{11}^2 + \dots}} < \sqrt{3},$$

где через  $U_1, U_3, U_5, \dots$  обозначены действующие значения гармоник фазного напряжения. Из сказанного следует также, что в рассматриваемом случае кривые фазного и линейного напряжений отличаются друг от друга по форме.

Таким образом, при связывании обмоток трехфазных генераторов или трансформаторов и треугольником и звездой в линейных напряжениях отсутствуют гармоники, порядок которых кратен трем.

Второе следствие, относящееся к случаю связывания звездой, касается тока в нейтральном проводе и напряжения между нейтральными точками генератора и приемника. При симметричной

нагрузке и отсутствии высших гармоник ток в нейтральном проводе равен нулю. Однако, если в кривых тока имеются высшие гармоники, то гармоники, порядок которых кратен трем, совпадут по фазе и создадут в нейтральном проводе ток, который при симметрии цепи будет в три раза больше, чем ток этих гармоник в каждой из фаз. Этот ток вызовет падение напряжения в нейтральном проводе.

При отсутствии нейтрального провода гармоники, порядок которых кратен трем, в кривых тока существовать не могут, но между нейтральными точками генератора и приемника возникает напряжение тройной частоты, в котором могут содержаться также 9-я, 15-я, 21-я, . . . гармоники. Заметим, что величина этого напряжения может достигать значений, опасных для жизни.

Из всего изложенного в настоящей главе следует, что появление высших гармоник в сетях мощных электроэнергетических систем представляет собой нежелательное явление. Оно приводит к снижению коэффициента мощности, к возможности резонанса для одной из высших гармоник и, соответственно, к появлению перенапряжений на отдельных участках сети, к нежелательному влиянию гармоник звуковой частоты на радио и на телефонную связь, к возникновению в трехфазных двигателях магнитных полей, вращающихся против направления вращения ротора (например, при  $k = 5, 11, \dots$ ) и, следовательно, вызывающих торможение ротора и добавочные потери в двигателях.

Однако отсюда не следует, что во всех без исключения электро-технических устройствах всегда необходимо стремиться к получению синусоидальных токов и напряжений. Это безусловно относится к мощным электроэнергетическим устройствам. Однако в мало-мощных устройствах автоматического управления и регулирования, а также в ряде специальных устройств оказывается как раз необходимым получить формы кривых напряжения и тока, отличные от синусоидальных, т. е. содержащие высшие гармоники. Некоторые из таких устройств будут рассмотрены в главе о нелинейных цепях переменного тока.

#### § 94. Биения колебаний

На практике используются несинусоидальные токи и напряжения, которые не могут быть представлены в виде ряда Фурье, содержащего составляющие с частотами, кратными основной частоте, и вместе с тем обладающие в известном отношении периодичностью своих изменений. Сюда относятся несинусоидальные токи и напряжения, изображаемые кривыми с *периодической огибающей*. К ним принадлежат так называемые *биения колебаний* и *модуляция колебаний*.

Рассмотрим случай биения колебаний. Пусть в некоторой цепи налагаются два синусоидальных тока  $i_1 = I_m \sin \omega_1 t$  и  $i_2 = I_m \sin \omega_2 t$ ,

имеющие одинаковые амплитуды, но разные частоты, причем частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  близки друг к другу, так что разность их значительно меньше каждой из них:

$$|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1 \quad \text{и} \quad |\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_2.$$

Результирующий действительный ток в цепи при этом равен:

$$i = i_1 + i_2 = I_m (\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t) = 2I_m \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t.$$

Так как  $\left| \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right| \ll \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ , то кривую тока  $i$  можно рассматривать как синусоиду с угловой частотой  $\left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right)$ , амплитуда которой изменяется сравнительно медленно по закону  $2I_m \left| \cos \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) \right|$ .

Так как амплитуда есть величина существенно положительная, а величина  $\cos \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right)$  меняет знак в моменты перехода ее через нуль, то это равносильно скачкообразному изменению в эти моменты времени фазы синусоидальных колебаний с частотой  $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  на угол  $\pi$ .

На рис. 189 изображены биения колебаний для случая  $\frac{\omega_1 + \omega_2}{|\omega_1 - \omega_2|} = \frac{26}{3}$ , т. е. для случая  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{29}{23}$  или  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{23}{29}$ .

Частотой биений  $f_\delta$  принято называть частоту, определяемую числом максимумов огибающей кривой в единицу времени. Соответственно величину  $T_\delta = \frac{1}{f_\delta}$  (рис. 189) называют периодом биений. Таким образом, период биений равен половине периода функции  $\cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$ .

Легко усмотреть из рисунка, что характер результирующей кривой не повторяется в двух соседних периодах биений. В рассмотренном примере характер результирующей кривой будет повторяться только через три периода функции  $\cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$ , т. е. через  $6T_\delta$ , так как в этом интервале времени укладывается целое число периодов функции  $\sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t$ , и число скачкообразных изменений ее фазы на угол  $\pi$  является четным числом 6.

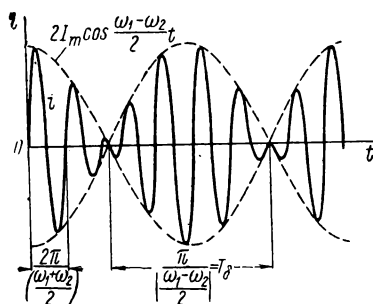


Рис. 189

Таким образом, период результирующей кривой больше периода биений. Если отношение  $\frac{\omega_1}{\omega_2}$  является иррациональным числом, то период результирующей кривой обращается в бесконечность и, следовательно, эта кривая не является периодической. Тем не менее понятие о периоде биений  $T_\delta$  сохраняет определенный смысл.

Явление биений колебаний с успехом используется для установления отклонения частоты  $\omega_1$  колебаний в одной системе от частоты  $\omega_2$  колебаний в другой системе. Измеряя частоту биений, мы получаем возможность наблюдать весьма малые отклонения  $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$  по сравнению с самими величинами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

Так как результирующая кривая  $i = f(t)$  в общем случае не является периодической, то для вычисления действующего значения тока  $i = f(t)$ , строго говоря, мы не можем пользоваться методами, установленными в § 89.

Однако, если условиться под действующим значением  $I$  понимать среднее квадратичное значение тока  $i = f(t)$  за достаточно большой промежуток времени  $\tau \gg T_\delta$ , то с большой точностью можно вычислить величину  $I$  как корень квадратный из суммы квадратов действующих значений составляющих, имеющих частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Так, в рассмотренном примере при одинаковых амплитудах  $I_m$  этих составляющих имеем:

$$I = \sqrt{\frac{1}{\tau} \int_0^\tau i^2(t) dt} \approx \sqrt{\left(\frac{I_m}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{I_m}{\sqrt{2}}\right)^2} = I_m = \frac{2I_m}{2};$$

т. е. в этом случае действующее значение тока, которое покажет обычный прибор переменного тока, равно половине максимума огибающей кривой.

## § 95. Модуляция колебаний

Для осуществления телефонной передачи при помощи колебаний высокой частоты необходимо, во-первых, превратить при помощи *микрофона* передаваемые звуковые колебания в соответствующие электрические колебания, затем воздействовать этими колебаниями звуковой частоты на колебания высокой частоты, после чего передать без проводов или по проводам видоизмененные колебания высокой частоты к месту приема, преобразовать эти последние обратно в колебания звуковой частоты и, наконец, превратить при помощи *телефона* электрические колебания звуковой частоты в исходные звуковые колебания.

Микрофон представляет собою устройство, сопротивление которого под воздействием звуковой волны изменяется с угловой частотой, равной угловой частоте  $\Omega$  этой волны. Включив микрофон в цепь, питаемую источником переменной э. д. с., угловая частота

которой  $\omega$  значительно больше  $\Omega$ , мы получим в цепи ток, который с достаточным приближением можно представить в виде:

$$i = I_m \sin \omega t = I_0 (1 + m \sin \Omega t) \sin \omega t,$$

причем  $0 < m < 1$  (рис. 190). Такой ток, амплитуда которого  $I_m = I_0 (1 + m \sin \Omega t)$  изменяется с частотой  $\Omega \ll \omega$ , называют *модулированным током*, а  $m$  называют *коэффициентом модуляции*.

Выражение для модулированного тока  $i = I_0 (1 + m \sin \Omega t) \sin \omega t$  можно представить в виде:

$$i = I_0 \sin \omega t + \frac{m}{2} I_0 \cos (\omega - \Omega) t - \frac{m}{2} I_0 \cos (\omega + \Omega) t,$$

т. е. модулированный ток можно разложить на три гармонические составляющие, частоты которых  $\omega$ ,  $\omega - \Omega$ ,  $\omega + \Omega$  при  $\Omega \ll \omega$  весьма близки друг к другу. Частоту  $\omega$  первой из этих составляющих называют *несущей частотой*, а частоты  $(\omega - \Omega)$  и  $(\omega + \Omega)$  двух других составляющих называют *боковыми частотами*. Такое разложение модулированного тока на три составляющие впервые было предложено М. В. Шулейкиным.

На практике редко включают микрофон непосредственно в цепь высокой частоты. Обычно микрофон последовательно с первичной обмоткой особого трансформатора включают в цепь источника постоянной э. д. с., а переменное напряжение  $u_1 = U_{1m} \sin \Omega t$ , получающееся при работе микрофона на зажимах вторичной обмотки трансформатора, подводят, например, совместно с напряжением высокой частоты  $u_2 = U_{2m} \sin \omega t$  к сетке трехэлектродной лампы. Тогда модуляция осуществляется вследствие нелинейного характера зависимости между анодным током  $i_a$  и сеточным напряжением  $u_c$ . Принцип осуществления модуляции с помощью нелинейных элементов будет рассмотрен в главе о нелинейных цепях переменного тока.

Отметим, что если отношение частот  $\omega$  и  $\Omega$  является иррациональным числом, то кривая модулированного тока не является периодической. Однако огибающая кривая имеет периодический характер с периодом  $\frac{2\pi}{\Omega}$ .

Рассмотренный случай носит название *амплитудной модуляции*, так как здесь с частотой  $\Omega$  изменяется амплитуда

$$I_m = I_0 (1 + m \sin \Omega t)$$

тока  $i = I_m \sin \omega t$ .

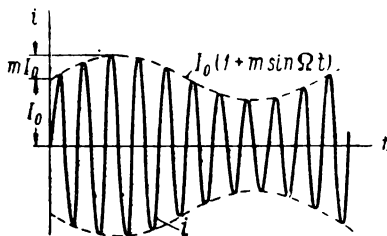


Рис. 190

Однако можно от модулирующего устройства воздействовать не только на амплитуду  $I_m$ , но также и на частоту  $\omega$  или на начальную фазу  $\psi_i$  тока  $i$ . Последнее становится ясным, если представить ток  $i$  в общем виде:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Соответственно, последние два метода модуляции носят наименования *частотной* или *фазовой* модуляции. Частотная модуляция при радиопередаче имеет большое достоинство в том, что при ней легче избавляться от мешающих влияний, вызывающих шумы в приемнике.

О действующем значении модулированного тока можно привести те же соображения, что и в случае биений. Пользуясь выражением для случая амплитудной модуляции:

$$i = I_0 \sin \omega t + \frac{m}{2} I_0 \cos(\omega - \Omega) t - \frac{m}{2} I_0 \cos(\omega + \Omega) t,$$

и выбирая  $\tau \gg \frac{2\pi}{\Omega}$ , получаем:

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{1}{\tau} \int_0^\tau i^2 dt} \approx \sqrt{\left(\frac{I_0}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{m}{2} \frac{I_0}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{m}{2} \frac{I_0}{\sqrt{2}}\right)^2} = \\ &= \frac{I_0}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2+m^2}{2}}. \end{aligned}$$

При  $m = 0$ , т. е. при отсутствии модуляции, имеем  $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ , так как при этом ток  $i$  изменяется по синусоидальному закону. При  $m = 1$ , т. е. при стопроцентной модуляции, имеем  $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \sqrt{1,5}$ .

---

---

## ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

### РЕАКТИВНЫЕ КАТУШКИ И ТРАНСФОРМАТОРЫ С СЕРДЕЧНИКАМИ ИЗ ФЕРРОМАГНИТНОГО МАТЕРИАЛА

#### § 96. Реактивные катушки с сердечниками из ферромагнитного материала

Для увеличения индуктивности реактивных катушек обмотку их располагают на замкнутом сердечнике из ферромагнитного материала, обладающего высокой магнитной проницаемостью. Обычно для устройства сердечников применяют листовую электротехническую сталь. При промышленных частотах порядка десятков герцев толщину листов берут от 0,25 до 0,5 мм, а при звуковых частотах порядка сотен и тысяч герцев применяют листы толщиной от 0,02 до 0,05 мм, для того чтобы потери на вихревые токи не превосходили допустимых значений. С той же целью в реактивных катушках, применяемых в технике связи, в последнее время сердечники часто изготовляют из спрессованных ферромагнитных порошков с непроводящим наполнителем. В электроизмерительной технике, в технике связи и в устройствах автоматики находят применение реактивные катушки с сердечниками из специальных ферромагнитных сплавов, причем сердечники обычно изготовляют из листового материала.

Индуктивность реактивных катушек с сердечниками из ферромагнитного материала не является величиной постоянной, а зависит от тока в обмотке катушки или, соответственно, от напряжения на ее зажимах, так как магнитная проницаемость ферромагнитных материалов зависит от величины магнитной индукции. Кроме того, в таких катушках необходимо считаться с наличием потерь, связанных с магнитным гистерезисом и вихревыми токами, так как оба этих физических явления сопряжены с превращением части электромагнитной энергии, подводимой к зажимам катушки, в тепло, выделяющееся в ее сердечнике.

#### § 97. Потери в сердечниках из ферромагнитного материала

Рассмотрим вопрос о потерях на вихревые токи в практически наиболее важном случае, а именно, когда плоский лист пронизывается переменным магнитным потоком в направлении, пер-



пендикулярном к поперечному сечению листа, причем поток изменяется периодически с частотой  $f$  и кривая потока симметрична. Допустим, что в каждый момент времени магнитная индукция одинакова во всех точках поперечного сечения листа. Это допущение равносильно пренебрежению размагничивающим действием вихревых токов и дает достаточное приближение, когда м. д. с. вихревых токов мала по сравнению с м. д. с. намагничивающей обмотки.

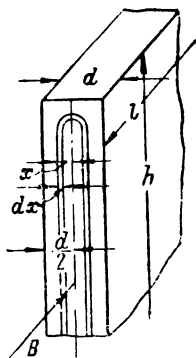


Рис. 191

Пусть тонкий плоский лист длиной  $l$ , высотой  $h$  и толщиной  $d$  пронизывается переменным магнитным потоком, направленным вдоль плоскости листа (рис. 191). Тогда в теле листа образуются вихревые токи, контуры которых расположатся в плоскостях, нормальных к вектору магнитной индукции  $B$ , т. е. в поперечных сечениях листа. В этом случае можно считать, что большие стороны контуров вихревых токов параллельны сторонам сечения листа. Выделим из тела листа полый цилиндр с высотой, равной длине  $l$  листа, и с основанием, ограниченным двумя контурами вихревых токов, большие стороны которых отстоят от большей оси сечения листа соответственно на  $x$  и  $x + dx$ . Так как  $h \gg d$ ,

то можно принять, что длина больших сторон контуров равна высоте  $h$  листа. Тогда для потока  $\Phi_x$ , пронизывающего полость цилиндра, и для э. д. с.  $E_x$ , индуктируемой этим потоком в стенке цилиндра, имеем (§ 7):

$$\Phi_x = 2xhB \quad \text{и} \quad E_x = k_\phi E_{xcp} = 4k_\phi f \Phi_{xm} = 8k_\phi f h x B_m,$$

где  $k_\phi$  — коэффициент формы кривой э. д. с., а  $B_m$  — максимальная индукция.

Мощность  $dP_\phi$ , расходуемая на выделение вихревыми токами тепла в цилиндре, можно представить в виде:

$$dP_\phi = E_x^2 dg_x,$$

где  $dg_x$  — активная проводимость выделенного цилиндра. Так как мы пренебрегли размагничивающим действием вихревых токов, т. е. пренебрегли магнитным полем этих токов по сравнению с внешним полем, то величину  $dg_x$  можно вычислить, пользуясь формулой, справедливой при постоянном токе, а именно:

$$dg_x = \gamma \frac{l dx}{2h},$$

где  $\gamma$  — удельная проводимость материала листа,  $l dx$  — сечение, сквозь которое проходит ток, и  $2h$  — длина пути тока в цилиндре.

Следовательно,

$$dP_s = E_x^2 dg_x = \frac{64k_\phi^2 f^2 h^2 x^2 B_m^2 \gamma l dx}{2h} = 32hl\gamma k_\phi^2 f^2 B_m^2 x^2 dx.$$

Мощность  $P_s$ , выделяемую вихревыми токами в виде тепла во всем листе, найдем как сумму всех элементарных мощностей, т. е. путем интегрирования последнего выражения от 0 до  $\frac{d}{2}$ :

$$P_s = 32hl\gamma k_\phi^2 f^2 B_m^2 \int_0^{\frac{d}{2}} x^2 dx = \frac{4}{3} \gamma k_\phi^2 d^2 f^2 B_m^2 V,$$

где  $V = hld$  — объем листа. Таким образом, потери на вихревые токи в плоском листе, отнесенные к его объему, пропорциональны первой степени удельной проводимости материала листа и вторым степеням частоты, максимальной индукции и толщины листа.

Относительно потерь на вихревые токи в цилиндрических стержнях, имеющих любую форму поперечного сечения, можно сделать замечание общего характера, если допустить, что магнитный поток распределен равномерно по поперечному сечению стержня. Тогда, как и в предыдущем частном случае, можно утверждать, что э. д. с., индуцируемая в любом из контуров вихревых токов, пропорциональна частоте и максимальной индукции, которые одинаковы для всех точек поперечного сечения стержня. Поэтому мощность в любом контуре вихревых токов пропорциональна квадратам частоты и максимальной индукции. На основании этого для потерь на вихревые токи во всем объеме  $V$  стержня можно написать:

$$P_s = \xi f^2 B_m^2 V,$$

причем коэффициент  $\xi$  пропорционален удельной проводимости вещества, из которого изготовлен стержень, и зависит от геометрической формы и размеров поперечного сечения стержня.

В частности, это утверждение относится к случаю сердечника из проволоки из ферромагнитного материала, оси которых расположены вдоль магнитной цепи катушки и сечение которых достаточно мало, чтобы можно было пренебречь размагничивающим действием вихревых токов.

Эта же общая формула справедлива и в случае сердечников из спрессованного ферромагнитного порошка с непроводящим наполнителем, если размеры зерен порошка столь малы, что размагничивающим действием возникающих в них вихревых токов можно пренебречь.

Кроме потерь на вихревые токи, в сердечниках из ферромагнитного материала при переменном магнитном потоке имеют место потери на гистерезис.

Как было отмечено в первой части курса, энергия  $W'_z$ , теряемая вследствие явления гистерезиса за один полный симметричный цикл перемагничивания, соответствующий одному полному периоду переменного тока, отнесенная к единице объема вещества, может быть выражена в виде:

$$W'_z = \eta B_m^n,$$

где  $\eta$  — коэффициент, характеризующий данное вещество, а  $B_m$  — максимальная индукция, достигаемая в течение цикла.

Так как при частоте переменного тока, равной  $f$ , перемагничиваемое тело претерпевает в единицу времени  $f$  полных циклов изменения магнитного состояния, то мощность  $P_z$ , расходуемая на гистерезис, может быть представлена в виде:

$$P_z = \eta f B_m^n V,$$

где  $V$  — объем тела.

То обстоятельство, что  $P_z$  пропорционально первой степени частоты, а  $P_\delta$  — второй степени частоты (при пренебрежении экранирующим действием вихревых токов), позволяет отделить потери на гистерезис от потерь на вихревые токи, если известны суммарные потери в сердечнике

$$P_{\phi ep} = P_z + P_\delta = \eta f B_m^n V + \xi f^2 B_m^2 V$$

для двух или более значений частоты, но при одном и том же значении  $B_m$ .

Разделение потерь можно произвести как аналитически, так и графически. В последнем случае строят зависимость энергии  $W_{\phi ep}$ , теряемой в сердечнике за один период, от частоты. Так как

$$W_{\phi ep} = \frac{P_{\phi ep}}{f} = \frac{P_z}{f} + \frac{P_\delta}{f} = \eta B_m^n V + \xi f B_m^2 V,$$

то зависимость  $W_{\phi ep} = F(f)$  при  $B_m = \text{const}$  изображается прямой, начальная ордината которой (рис. 192) дает величину энергии, теряемой за один период на гистерезис. Разность между ординатами прямой и ее начальной ординатой дает величину энергии, теряемой за период на вихревые токи при соответствующем значении частоты. Выражение для суммарных потерь в ферромагнитном сердечнике упрощается, если принять, что потери на гистерезис пропорциональны второй степени  $B_m$ . Тогда имеем:

$$P_{\phi ep} = (\eta f + \xi f^2) B_m^2 V.$$

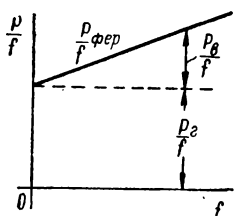


Рис. 192

### § 98. Формы кривых тока в катушке с ферромагнитным сердечником и напряжения на ее зажимах

Рассмотрим вопрос об определении кривой тока установившегося режима в реактивной катушке с сердечником из ферромагнитного материала в простейшем случае, когда можно пренебречь активным сопротивлением обмотки катушки и вихревыми токами в ее сердечнике. При этом мы воспользуемся графиком зависимости  $\Psi = F(i)$  между потокоцеплением  $\Psi$  обмотки катушки и током  $i$  в этой обмотке. Этот график при установившемся режиме имеет

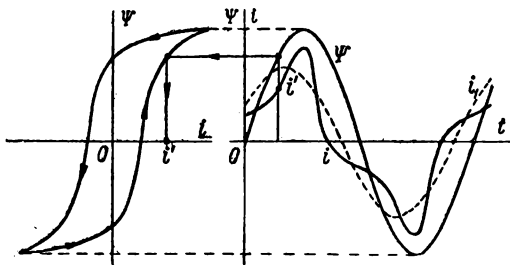


Рис. 193

форму замкнутой петли, которая подобна гистерезисной петле  $B = F(H)$  вследствие пропорциональности между  $H$  и  $i$ , а также между  $B$  и  $\Psi$ .

Пусть к зажимам катушки приложено напряжение  $u = U_m \cos \omega t$ . Тогда, при сделанных допущениях,  $u = \frac{d\Psi}{dt}$ , и при установившемся режиме  $\Psi = \Psi_m \sin \omega t$  будет синусоидальной функцией времени, причем  $\Psi_m = \frac{U_m}{\omega}$ . Расположим график  $\Psi = F(i)$  с максимальной ординатой  $\Psi_m = \frac{U_m}{\omega}$  и синусоидальную кривую потокоцепления  $\Psi = \Psi_m \sin \omega t$  так, как показано на рис. 193, и для ряда ординат последней кривой, пользуясь графиком  $\Psi = F(i)$ , определим соответствующие значения тока, после чего не представит затруднений построить по точкам искомую кривую тока.

Из рассмотрения этой кривой видно, что она несимметрична относительно оси ординат и что момент прохождения потокоцепления через нуль отстает от момента прохождения тока через нуль, в то время как максимума потокоцепления и ток достигают в один момент времени. Выделив основную волну тока, показанную на рис. 193 пунктиром, можно убедиться, что кривая потокоцепления отстает от основной волны тока на некоторый угол. Этот угол называют *гистерезисным углом*.

Анализируя форму кривых тока, получающихся при различных значениях максимальной индукции  $B_m$ , можно убедиться, что с увеличением  $B_m$  искажение кривой тока и коэффициент амплитуды этой кривой сначала возрастают, затем в некотором интервале изменения  $B_m$  остаются практически неизменными и при весьма больших значениях  $B_m$ , которые обычно не достигаются на практике, вновь должны уменьшаться. Последнее ясно, так как при весьма больших  $B_m$  при увеличении  $B_m$  величина  $\mu$ , убывая, стремится к  $\mu_0$ .

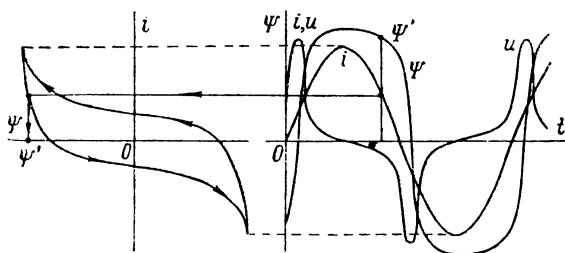


Рис. 194

В кривой тока наиболее резко выражена третья гармоника. Заметим, что действующее значение тока в обмотке катушки иногда находят, разделив на  $\sqrt{2}$  амплитуду тока, которую, в свою очередь, определяют при помощи кривой намагничивания по амплитуде потока. Так как при наличии гистерезиса коэффициент амплитуды кривой тока больше, чем  $\sqrt{2}$ , то такой способ расчета приводит к преувеличенным действующим значениям тока.

Если кривая приложенного напряжения несинусоидальна, то кривую потокосцепления можно найти путем интегрирования кривой напряжения.

Иногда встречается обратная задача, а именно требуется найти кривую напряжения на зажимах катушки с ферромагнитным сердечником, если даны кривая тока  $i$ , проходящего по ее обмотке, и график зависимости  $\Psi = F(i)$  с таким же значением  $I_m$ . Пренебрегая влиянием вихревых токов, можно для ряда ординат кривой тока определить при помощи кривой  $\Psi = F(i)$  соответствующие значения потокосцепления и дифференцируя ее, мы найдем искомую кривую напряжения. На рис. 194 приведены кривые потокосцепления и напряжения, построенные указанным способом для случая синусоидального изменения тока. При этом вследствие затупленной формы кривой потокосцепления кривая напряжения имеет весьма за-

остренную форму и искажена значительно больше, чем кривая тока в предыдущем случае.

Из приведенных кривых видно, что как кривая тока при синусоидальном напряжении, так и кривые напряжения и потока при синусоидальном токе, обладая симметрией относительно оси абсцисс, несимметричны относительно оси ординат. Однако гистерезисные петли современных электротехнических сталей настолько узки, что восходящая и нисходящая ветви их почти сливаются, и несимметрией упомянутых кривых относительно оси ординат часто можно пренебречь.

### § 99. Эквивалентные синусоиды и зависимость между потокоцеплением и током

Выясним, какую форму должна иметь кривая  $\Psi = F(i)$ , выражающая связь между потокоцеплением и током в реактивной катушке с ферромагнитным сердечником, если напряжение на зажимах катушки и ток в ней заменены эквивалентными синусоидами. В этом случае э. д. с., индуцированная в обмотке катушки, и соответствующее потокоцепление  $\Psi$  также будут синусоидальны. Обозначая напряжение, уравнивающее индуцированную э. д. с. через  $u$ , можно написать:

$$u = U_m \cos \omega t, \quad \Psi = \Psi_m \sin \omega t, \quad i = I_m \cos (\omega t - \varphi),$$

так как потокоцепление  $\Psi$  должно отставать от напряжения  $u$  на четверть периода, а ток  $i$  должен отставать от  $u$  на угол  $\varphi$ , лежащий между 0 и  $\frac{\pi}{2}$  и определяемый из равенства  $\cos \varphi = P_{\text{фер}} : UI$ , где  $P_{\text{фер}}$  — мощность, теряемая в сердечнике катушки на гистерезис и вихревые токи. Искомую зависимость  $\Psi = F(i)$  найдем, исключая время  $t$  из выражений для  $\Psi$  и  $i$ . Имеем:

$$i - I_m \sin \omega t \sin \varphi = I_m \cos \omega t \cos \varphi$$

и, следовательно,

$$i^2 - 2iI_m \sin \omega t \sin \varphi + I_m^2 \sin^2 \omega t \sin^2 \varphi = I_m^2 \cos^2 \omega t \cos^2 \varphi,$$

откуда, прибавив к обеим частям  $I_m^2 \sin^2 \omega t \cos^2 \varphi$ , получим:

$$i^2 - 2iI_m \sin \omega t \sin \varphi + I_m^2 \sin^2 \omega t = I_m^2 \cos^2 \varphi$$

и, приняв во внимание, что  $\sin \omega t = \frac{\Psi}{\Psi_m}$ , найдем:

$$i^2 - 2i\Psi \frac{I_m}{\Psi_m} \sin \varphi + \Psi^2 \frac{I_m^2}{\Psi_m^2} = I_m^2 \cos^2 \varphi.$$

Последнее уравнение, дающее связь между  $\Psi$  и  $i$ , является уравнением эллипса с центром в начале координат (рис. 195 и 196).

В катушке с сердечником из проводящего материала, не обладающего ферромагнитными свойствами при синусоидальном изменении потокосцепления  $\Psi$  ток  $i$  был бы также синусоидален. В этом случае явление гистерезиса отсутствовало бы, но в сердечнике существовали бы вихревые токи, потокосцепление отставало бы от тока на угол, лежащий между 0 и  $\frac{\pi}{2}$ , и график зависимости  $\Psi =$

$F(i)$  имел бы, как мы только что убедились, эллиптическую форму. Поэтому, когда в сердечнике одновременно имеются и вихревые токи и явление гистерезиса, то форма истинной кривой  $\Psi = F(i)$  представляет собою нечто промежуточное между эллипсом и гистерезисной петлей. Форма этой кривой изменяется с изменением частоты, приближаясь при ее уменьшении к гистерезисной петле, а при увеличении — к эллипсу, вследствие развития вихревых токов.

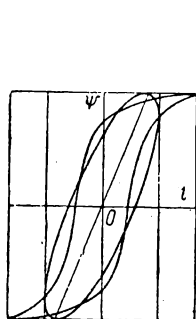


Рис. 195

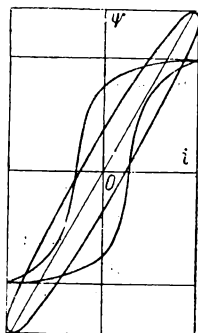


Рис. 196

Из изложенного вытекает, что замена искаженных кривых напряжения и тока соответствующими синусоидальными кривыми связана с заменой истинной кривой  $\Psi = F(i)$  эквивалентным эллипсом, площадь которого, пропорциональная энергии, теряемой в сердечнике за один период, должна быть равна площади истинной кривой  $\Psi = F(i)$ . На рис. 195 и 196 представлены эллипсы, эквивалентные гистерезисной петле, причем в первом случае предположено, что потокосцепление синусоидально, а искаженная кривая тока заменена эквивалентной синусоидой, а во втором случае, наоборот, предположено, что синусоидален ток, а искаженная кривая потокосцепления заменена эквивалентной синусоидой.

В заключение заметим, что иногда оказывается более целесообразным не прибегать к замене искаженной кривой тока или напряжения эквивалентной синусоидой, а заменять искаженную кривую выделенной из нее основной волной.

#### § 100. Векторная диаграмма и эквивалентная схема для реактивной катушки с ферромагнитным сердечником

Заменив кривую напряжения на зажимах катушки с ферромагнитным сердечником и кривую тока в обмотке этой катушки эквивалентными синусоидами, можно построить для нее векторную диаграмму.

Направим вдоль оси абсцисс (рис. 197) вектор  $\bar{\Phi}_{0m}$ , изображающий амплитуду потока  $\Phi_{0m}$ , замыкающегося по сердечнику катушки, имеющей  $\omega$  витков. Индуцированная в обмотке катушки э. д. с.  $e = -\frac{d\Psi_0}{dt}$ , где  $\Psi_0 = \omega\Phi_0$  — соответствующее потокоцепление, отстает от потока  $\Phi_0$  на угол  $\frac{\pi}{2}$ , а уравнивающее ее напряжение  $u_0 = -e$  упреждает поток  $\Phi_0$  на угол  $\frac{\pi}{2}$ . При отсутствии потерь в сердечнике вектор  $\bar{I}_p$  тока в обмотке катушки совпадал бы по направлению с вектором  $\bar{\Phi}_{0m}$  и отставал бы от вектора  $\bar{U}_0$ , изображающего напряжения  $u_0$ , на  $\frac{\pi}{2}$ . Тогда катушка обладала бы только реактивной проводимостью  $b_0$ . Для этой реактивной проводимости и соответствующей индуктивности  $L_0$  катушки имеем:

$$b_0 = \frac{I_p}{U_0} = \frac{I_{pm}}{U_{0m}} = \frac{I_{pm}}{\omega\Psi_{0m}}; \quad L_0 = \frac{1}{\omega b_0} = \frac{\Psi_{0m}}{I_{pm}}.$$

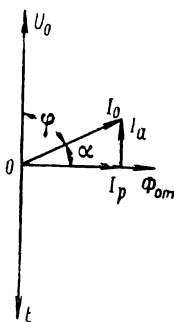


Рис. 197

При наличии потерь на гистерезис и вихревые токи ток  $I_0$  в обмотке катушки, кроме реактивной составляющей  $I_p$ , совпадающей по направлению с вектором  $\bar{\Phi}_{0m}$ , должен иметь активную составляющую  $I_a$ . Эту активную составляющую и соответствующую активную проводимость  $g_0$  можно вычислить из соотношений:

$$I_a = \frac{P_{\text{фер}}}{U_0}; \quad g_0 = \frac{I_a}{U_0} = \frac{P_{\text{фер}}}{U_0^2},$$

где  $P_{\text{фер}}$  — мощность, расходуемая на гистерезис и вихревые токи в сердечнике катушки. Угол  $\varphi$ , на который ток  $I_0$  отстает от напряжения  $U_0$ , и угол магнитного запаздывания  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$ , на который поток  $\Phi_0$  отстает от тока  $I_0$ , можно вычислить из соотношений:

$$\cos \varphi = \sin \alpha = P_{\text{фер}} : U_0 I_0.$$

Так как угол  $\alpha$  обычно мал, то  $I_0$  и  $I_p$  по величине мало отличаются друг от друга, и в выражениях для  $b_0$  и  $L_0$  можно  $I_p$  заменить на  $I_0$ , сохраняя достаточную точность.

При желании учесть активное сопротивление обмотки катушки и то обстоятельство, что некоторые линии магнитной индукции сцепляются лишь с частью витков обмотки и целиком или частично



замыкаются по воздуху, образуя *поток рассеяния*, векторную диаграмму необходимо дополнить. В этом случае приложенное напряжение  $U$ , кроме составляющей  $U_0$ , уравнивающей э. д. с.  $E$ , индуктированную в обмотке катушки потоком  $\Phi_0$ , все линии магнитной индукции которого замыкаются по сердечнику и сцепляются со всеми витками обмотки, будет иметь составляющую  $I_0 r$ , преодолевающую активное сопротивление  $r$  обмотки, и составляющую  $I_0 x_s$ , уравнивающую э. д. с., индуктируемую в обмотке потоком рассеяния. При этом (рис. 198) вектор  $\bar{I}_0 r$  должен быть параллелен вектору  $\bar{I}_0$ , а вектор  $\bar{I}_0 x_s$ , изображающий реактивное падение напряжения, должен упреждать вектор  $\bar{I}_0$  на угол  $\frac{\pi}{2}$ . При этом  $x_s = \omega S$ , где  $S = \Psi_{sm} : I_{0m}$  — индуктивность, учитывающая потокоцепление рассеяния, амплитуду которого мы обозначили  $\Psi_{sm}$ .

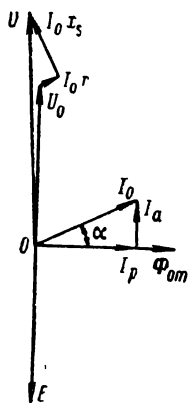


Рис. 198

Заметим, что длины векторов  $\bar{I}_0 r$  и  $\bar{I}_0 x_s$ , которые в действительности обычно составляют несколько процентов от длины вектора  $\bar{U}_0$ , на рис. 198 преувеличены.

Векторной диаграмме рис. 198 соответствует схема рис. 199, представляющая собой *схему, эквивалентную реактивной катушке с ферромагнитным сердечником*. В этой схеме активное сопротивление  $r$  учитывает потери на тепло, выделяющееся в обмотке катушки, катушка с индуктивностью  $S$  — поток рассеяния, катушка с индуктивностью  $L_0$  — поток  $\Phi_0$  и активная проводимость  $g_0$  — потери в сердечнике на гистерезис и вихревые токи. Следует иметь в виду, что параметры схемы  $L_0$  и  $g_0$  зависят от значения  $\Phi_{0m}$ , так как зависимость  $\Phi_{0m}$  от  $i$  нелинейна.

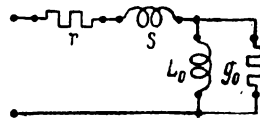


Рис. 199

## § 101. Трансформаторы со стальными сердечниками

Трансформатором, как известно, называют статическое устройство, служащее для преобразования переменных напряжений и токов и состоящее в принципе из двух обмоток, электрически друг с другом не соединенных.

В технике большую часть применяют трансформаторы, обе обмотки которых расположены на общем сердечнике из специальной трансформаторной стали. Такие трансформаторы, изобретенные П. Н. Яблочковым, принято называть *трансформаторами со стальным сердечником*. Цель, которую преследуют, применяя

стальной сердечник, состоит в уменьшении магнитного сопротивления пути, по которому замыкается магнитный поток трансформатора, сцепляющийся с обеими его обмотками. Уменьшение этого сопротивления, достигаемое вследствие высокой магнитной проницаемости трансформаторной стали, позволяет значительно уменьшить м. д. с., необходимую для установления заданного потока. Вместе с тем, уменьшая магнитное сопротивление для основного потока трансформатора, мы тем самым значительно увеличиваем

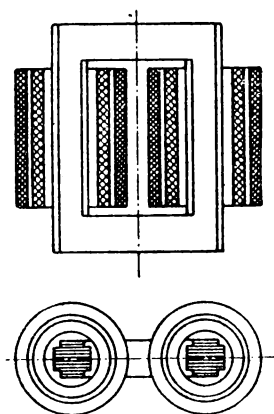


Рис. 200

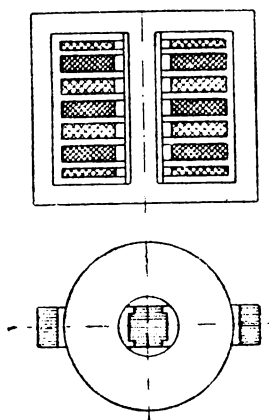


Рис. 201

коэффициент связи между обмотками и создаем благоприятные условия для передачи энергии из первичной обмотки во вторичную.

Трансформаторы, выполненные П. Н. Яблочковым, а вслед за ним и И. Ф. Усагиным, имели разомкнутый сердечник. Сейчас сердечники трансформаторов обычно делают замкнутыми. Для уменьшения потерь на вихревые токи сердечники изготовляют из листовой трансформаторной стали, причем толщину листов при частоте 50 гц берут от 0,35 до 0,5 мм. Трансформаторная сталь обычно содержит около 4% кремния, что существенно уменьшает потери на вихревые токи. Для изоляции листов друг от друга поверхность их с одной стороны оклеивают тонкой бумагой или покрывают изолирующим лаком.

По характеру устройства магнитной цепи различают два основных типа трансформаторов: *стержневые* трансформаторы (рис. 200), имеющие неразветвленную магнитную цепь, и *броневые* трансформаторы (рис. 201), имеющие разветвленную магнитную цепь. По характеру устройства обмоток различают трансформаторы с цилиндрическими обмотками (рис. 200) и с дисковыми обмотками (рис. 201), причем при цилиндрических обмотках обмотку высшего

напряжения обычно располагают снаружи. Часто для усиления изоляции обмоток и для улучшения охлаждения трансформатор погружают в бак, наполняемый маслом.

Трехфазные трансформаторы, изобретателем и первым конструктором которых был М. О. Доливо-Добровольский, ни по принципу действия, ни по характеру устройства в основном не отличаются от однофазных трансформаторов. Они осуществляются как с цилиндрическими, так и с дисковыми обмотками, и бывают как стержневого, так и броневого типа. Большею частью применяют стержневой тип, причем оси стержней располагают в одной плоскости. Соединение первичных и вторичных обмоток трехфазных трансформаторов выполняют как треугольником, так и звездой, причем способы соединения на первичной стороне и на вторичной стороне могут быть различны. Преимущество соединения звездой заключается в возможности заземления нейтральной точки обмотки. Это особенно важно в обмотках высокого напряжения, соединенных с линией передачи, так как при этом напряжение проводов линии по отношению к опоре не может быть при установившемся режиме выше фазового.

Преимущество соединения треугольником заключается в том, что при этом появляется возможность возникновения в обмотке гармоник тока, кратных трем. Как мы видели, вследствие насыщения стали сердечника при синусоидальном магнитном потоке в кривой тока должны появиться высшие гармоники, среди которых особенно выделяется третья. Если не дать возможности образоваться третьим гармоникам тока, что будет при соединении звездой при отсутствии нейтрального провода, то такие гармоники должны появиться в кривой магнитного потока и в кривой фазных напряжений, что не желательно. При наличии нейтрального провода третьи гармоники тока могут существовать, причем они замыкаются через провода линии и нейтральный провод или через землю при заземлении нейтральных точек обмоток трансформаторов на обоих концах линии. При соединении же хотя бы одной из обмоток трансформатора треугольником в ней возникают третьи, девятые и т. д. гармоники тока, в результате чего, как было пояснено в § 93, магнитный поток и напряжения на обмотках не содержат гармоник порядков, кратных трем.

## § 102. Уравнения трансформатора со стальным сердечником

Изучение трансформаторов со стальным сердечником, обладающим переменной магнитной проницаемостью, в значительной мере затрудняется невозможностью пользоваться принципом наложения и рассматривать потоки, сцепляющиеся с первичной и вторичной обмотками трансформатора, как суммы потоков самоиндукции и взаимной индукции. Поэтому при анализе работы трансформаторов со стальным сердечником исходят непосред-

ственно из результирующей картины магнитного поля. Эта картина весьма сложна и непрерывно изменяется с течением времени. Рис. 202 дает представление об этой картине для некоторого момента времени. Однако, пренебрегая деталями, ее можно заменить упрощенной эквивалентной картиной, которая дает возможность не только просто и наглядно пояснять процессы, происходящие в трансформаторах со стальным сердечником, но и рассчитывать их с точностью, вполне достаточной для практических целей.

Эквивалентная картина (рис. 203) строится в предположении, что все линии магнитной индукции, сцепляющиеся с обмотками трансформатора, можно разделить на три группы: линии магнитной индукции, замыкающиеся по сердечнику и сцепляющиеся со всеми витками обеих обмоток, определяющие *основной поток*  $\Phi_0$  трансформатора, линии магнитной индукции, сцепляющиеся только с первичной и только со вторичной обмотками, замыкающиеся целиком или главным образом по воздуху и определяющие *потoki рассеяния*  $\Phi_{1S}$  и  $\Phi_{2S}$  первичной и вторичной обмоток трансформатора. Тогда м. д. с., определяющая основной поток  $\Phi_0$  трансформатора, равна сумме м. д. с. первичной и вторичной обмоток, т. е.  $i_1 w_1 + i_2 w_2$ , где  $w_1$  и  $w_2$  — числа витков первичной и вторичной обмоток, а  $i_1$  и  $i_2$  — токи в этих обмотках. При  $i_1 w_1 + i_2 w_2 = 0$  основной поток трансформатора равен нулю, и мы имеем только потоки рассеяния. Так как линии потоков рассеяния замыкаются целиком или главным образом по воздуху, то с большой степенью точности можно считать, что потокосцепления рассеяния  $\Psi_{1S}$  и  $\Psi_{2S}$  пропорциональны соответствующим токам, т. е.

$$\Psi_{1S} = S_1 i_1 \quad \text{и} \quad \Psi_{2S} = S_2 i_2,$$

где  $S_1$  и  $S_2$  — постоянные индуктивности, учитывающие потоки рассеяния. Тогда для потокосцеплений  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  первичной и вторичной обмоток получим:

$$\Psi_1 = \Psi_{1S} + w_1 \Phi_0 = S_1 i_1 + w_1 \Phi_0;$$

$$\Psi_2 = \Psi_{2S} + w_2 \Phi_0 = S_2 i_2 + w_2 \Phi_0.$$

Обозначив напряжения на первичных и вторичных зажимах трансформатора через  $u_1$  и  $u_2$ , а сопротивления его обмоток через

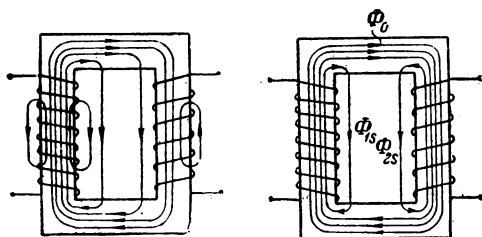


Рис. 202

Рис. 203

$r_1$  и  $r_2$ , мы получим следующие уравнения для первичной и вторичной цепей:

$$u_1 = r_1 i_1 + \frac{d\Psi_1}{dt}; \quad -\frac{d\Psi_2}{dt} = r_2 i_2 + u_2$$

или

$$u_1 = r_1 i_1 + S_1 \frac{di_1}{dt} + w_1 \frac{d\Phi_0}{dt};$$

$$-w_2 \frac{d\Phi_0}{dt} = r_2 i_2 + S_2 \frac{di_2}{dt} + u_2.$$

Из первого уравнения следует, что напряжение, приложенное к первичным зажимам, должно преодолеть активное сопротивление первичной обмотки и уравновесить э. д. с., индуцируемые в ней потоком рассеяния и основным потоком трансформатора. Из второго уравнения вытекает, что э. д. с., индуцируемая во вторичной обмотке основным потоком, преодолевает активное сопротивление вторичной обмотки, уравнивает э. д. с., индуцируемую потоком рассеяния этой обмотки, и имеет, кроме того, составляющую, равную напряжению на зажимах внешней цепи.

Одно из преимуществ изложенного метода состоит в том, что в рассмотрении явно вводится основной поток трансформатора, максимальное значение которого в трансформаторах с железным сердечником при обычных условиях работы практически остается неизменным. Этот поток действительно является основной величиной, характеризующей трансформатор. По его максимальному значению при расчетах определяют сечение магнитной цепи трансформатора, а максимальная плотность этого потока характеризует степень напряженности материала сердечника в магнитном отношении и определяет потери в последнем на гистерезис и вихревые токи. Вместе с тем максимальное значение основного потока  $\Phi_{0m}$  очень просто определяется из выражения:

$$E_1 = 4k_{\phi} f w_1 \Phi_{0m}$$

по величине э. д. с.  $E_1$ , индуцируемой потоком  $\Phi_0$  в первичной обмотке трансформатора, которая при холостом ходе весьма мало отличается от напряжения  $U_1$ , приложенного к первичным зажимам.

### § 103. Приведение обмоток трансформатора к одному числу витков

Когда отношение чисел витков обмоток  $\frac{w_1}{w_2} = c$ , которое мы назовем *коэффициентом трансформации* трансформатора, отличается от единицы, затруднительно сравнивать между собою величины, которые характеризуют процессы, происходящие в первичной и вторичной цепях трансформатора, так как э. д. с.  $e_1$  и  $e_2$ , индуцируемые

основным потоком в первичной и вторичной обмотках, не равны друг другу. Действительно, для этих э. д. с. мы имеем:

$$e_1 = -w_1 \frac{d\Phi_0}{dt}; \quad e_2 = -w_2 \frac{d\Phi_0}{dt}.$$

Для удобства сравнения упомянутых величин обмотки трансформатора «приводят» к одному числу витков. Операция «приведения» состоит в замене одной из обмоток трансформатора эквивалентной обмоткой с числом витков, равным числу витков другой обмотки.

Рассмотрим приведение вторичной обмотки к числу витков первичной обмотки. При этом все параметры приведенной обмотки и цепи, соединенной с нею, а также все величины, характеризующие процессы, происходящие в них, мы будем отличать знаком (') и называть *приведенными величинами*.

Операция приведения должна быть выполнена так, чтобы она не отразилась на режиме работы первичной цепи. Для этого необходимо и достаточно, чтобы м. д. с. вторичной обмотки в результате приведения не изменилась, т. е. должно быть соблюдено условие:

$$i'_2 w_1 = i_2 w_2 \quad \text{или} \quad i'_2 = \frac{1}{c} i_2,$$

так как тогда останется неизменным основной поток трансформатора  $\Phi_0$ , посредством которого осуществляется связь и взаимодействие между обеими цепями трансформатора.

Для э. д. с.  $e'_2$ , индуцируемой потоком  $\Phi_0$  в приведенной вторичной обмотке, имеем:

$$e'_2 = -w_1 \frac{d\Phi_0}{dt} = \frac{w_1}{w_2} \left( -w_2 \frac{d\Phi_0}{dt} \right) = c e_2,$$

и, следовательно, после приведения э. д. с.  $e_1$  и  $e'_2$ , индуцируемые основным потоком в первичной и вторичной обмотках, будут равны между собой. Весьма важно отметить, что мощность во вторичной цепи в результате приведения не изменяется, так как

$$p'_2 = e'_2 i'_2 = e_2 i_2 = p_2.$$

Для выяснения изменений, претерпеваемых параметрами вторичной обмотки при ее приведении, введем в уравнение для э. д. с. вторичной обмотки трансформатора  $i'_2$  и  $e'_2$  вместо  $i_2$  и  $e_2$ . Тогда получим:

$$e'_2 = c^2 r'_2 i'_2 + c^2 S_2 \frac{di'_2}{dt} + c u_2 = r'_2 i'_2 + S'_2 \frac{di'_2}{dt} + u'_2,$$

откуда следует, что в результате приведения к числу витков первичной обмотки активное сопротивление вторичной обмотки и индук-

тивность, учитывающая ее поток рассеяния, увеличиваются в  $c^2$  раз, а напряжение на вторичных зажимах увеличивается в  $c$  раз, т. е.  $r'_2 = c^2 r_2$ ,  $S'_2 = c^2 S_2$ ,  $u'_2 = cu_2$ . Аналогичным путем нетрудно показать, что во внешней части вторичной цепи в результате приведения все сопротивления и индуктивности увеличатся в  $c^2$  раз, а все проводимости и емкости уменьшатся в  $c^2$  раз. Так как при приведении активные и реактивные сопротивления, а также активные и реактивные проводимости изменяются в одно и то же число раз, то коэффициент мощности цепи при ее приведении остается неизменным.

М. д. с., определяющую основной поток  $\Phi_0$ , после приведения можно написать в виде:

$$i_1 w_1 + i_2 w_2 = i_1 w_1 + i'_2 w_1 = (i_1 + i'_2) w_1 = i_0 w_1,$$

где  $i_0 = i_1 + i'_2$  — так называемый *намагничивающий ток* трансформатора. Так как при постоянстве  $U_1$  основной поток трансформатора со стальным сердечником в пределах от холостого хода до нормальной нагрузки изменяется очень мало, то и м. д. с., его определяющая, а следовательно, и намагничивающий ток остаются при этом почти неизменными. При  $i'_2 = 0$ , т. е. при холостом ходе, намагничивающий ток равен току в первичной обмотке. На этом основании намагничивающий ток часто называют током холостого хода и считают его неизменным при всех режимах нагрузки, для которых с достаточной точностью можно считать неизменным  $\Phi_{0m}$ . Это соображение относится к трансформаторам, в которых потоки рассеяния малы по сравнению с основным потоком, что обычно и имеет место.

#### § 104. Схема, эквивалентная трансформатору

Из уравнений трансформатора непосредственно вытекает, что реальный трансформатор можно заменить схемой рис. 204, а, состоящей из *идеального трансформатора*, т. е. трансформатора, активные сопротивления обмоток которого равны нулю и в котором отсутствуют потоки рассеяния, и двумя реактивными катушками с активными сопротивлениями  $r_1$  и  $r_2$  и индуктивностями  $S_1$  и  $S_2$ . Далее, предположив, что вторичная обмотка приведена к числу витков первичной, можно перейти к идеальному трансформатору с равными числами витков обеих обмоток (рис. 204, б). Обе обмотки идеального приведенного трансформатора можно слить в одну обмотку (рис. 204, в), так как уравнения приведенного трансформатора

$$u_1 = r_1 i_1 + S_1 \frac{di_1}{dt} + w_1 \frac{d\Phi_0}{dt};$$

$$-\omega_1 \frac{d\Phi_0}{dt} = r'_2 i'_2 + S'_2 \frac{di'_2}{dt} + u'_2;$$

$$i_0 = i_1 + i'_2$$

справедливы и в этом последнем случае. Тогда идеальный трансформатор превратится в идеальную реактивную катушку, по сердечнику которой замыкается поток, равный основному потоку трансформатора, причем мощность, расходуемая в катушке, равна потерям в сердечнике трансформатора.

Таким образом, мы видим, что трансформатор со стальным сердечником можно заменить Т-образной схемой, элементы которой не имеют индуктивной связи друг с другом (рис. 205). Эта схема и носит наименование *схемы, эквивалентной трансформатору*. Две крайние реактивные катушки, учитывающие потери в обмотках трансформатора и потоки рассеяния, должны иметь активные сопротивления  $r_1$  и  $r'_2$  и индуктивности  $S_1$  и  $S'_2$ . При синусоидальном режиме комплексы полных сопротивлений этих катушек будут  $Z_1 = r_1 + j\omega S_1$  и  $Z'_2 = r'_2 + j\omega S'_2$ . Средняя катушка, по

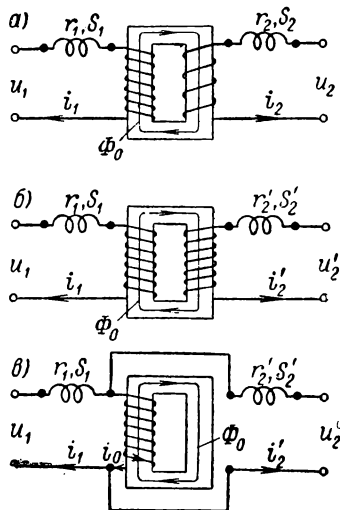


Рис. 204

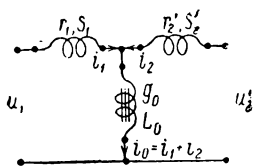


Рис. 205

которой проходит намагничивающий ток  $i_0 = i_1 + i'_2$ , учитывает основной поток трансформатора и потери  $P_{cm}$  в стали сердечника на гистерезис и вихревые токи. В соответствии с этим для индуктивности  $L_0$  и активной проводимости  $g_0$  средней катушки имеем (§ 100):

$$L_0 = \omega_1 \Phi_{0m} : I_{0m}; \quad g_0 = P_{cm} : U_0^2,$$

где  $\Phi_{0m}$  и  $I_{0m}$  — максимальные значения основного потока и намагничивающего тока, а  $U_0$  — та составляющая напряжения  $U_1$ , которая уравнивает э. д. с.  $E_1$ , индуцируемую в первичной обмотке потоком  $\Phi_0$ . Эта составляющая  $U_0$  равна напряжению на зажимах средней катушки. При синусоидальном режиме комплекс полной проводимости средней катушки будет  $Y_0 = g_0 - jb_0 = g_0 - j/\omega L_0$ . На рис. 206 эквивалентная схема представлена в развернутом виде.



Параметры элементов схемы, эквивалентной трансформатору, как мы видели, зависят только от параметров реального трансформатора, от частоты приложенного напряжения, и от того, к какому числу витков выполнено приведение. При неизменной частоте их можно считать не зависящими от режима работы трансформатора, пока  $\Phi_{0m}$  с изменением режима работы существенно не изменяется. Переход к новым значениям  $\Phi_{0m}$  связан с необходимостью пересчета параметров эквивалентной схемы, так как вследствие нелинейной зависимости  $\Phi_{0m}$  от  $I_{0m}$  величина  $\Phi_{0m}$  оказывает существенное влияние на значение  $g_0$  и  $b_0$ .

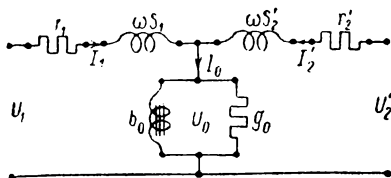


Рис. 206

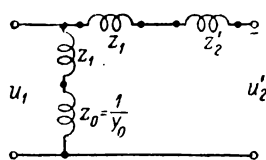


Рис. 207

Рассмотренную нами эквивалентную Т-образную схему иногда заменяют приближенной Г-образной схемой (рис. 207), не вполне отвечающей физической картине явлений, происходящих в трансформаторе, но зато приводящей к существенным упрощениям при расчете и построении диаграмм, а вместе с тем дающей обычно достаточную точность. Эта Г-образная схема по существу отличается от Т-образной схемы тем, что в ней намагничивающий ток не зависит от нагрузки и на величину вторичного тока не оказывает влияния падение напряжения, вызываемое в первичной обмотке трансформатора намагничивающим током.

### § 105. Векторная диаграмма трансформатора со стальным сердечником

Хотя непостоянство магнитной проницаемости и влечет за собою искажение формы кривых токов и э. д. с. в трансформаторах со стальным сердечником, но, прибегая к замене этих кривых эквивалентными синусоидами, можно пользоваться символическим методом и строить соответствующие векторные диаграммы. Это тем более допустимо, что обычно напряжение  $u_1$  на первичных зажимах синусоидально и вследствие малости падений напряжения в обмотках трансформатора в этом случае как основной поток трансформатора, так и индуцированные им э. д. с.  $e_1$  и  $e_2$ , а также и напряжение  $u_2$  на вторичных зажимах, можно считать синусоидальными. Токи  $i_1$  и  $i_2$  при нагрузках, близких к нормальной, и при постоянстве параметров внешней цепи также имеют форму,

весьма близкую к синусоидальной, и лишь кривая тока холостого хода существенно отличается от синусоиды.

Пользуясь символическим методом и обозначив через  $\dot{U}_0$  составляющую напряжения  $\dot{U}_1$ , уравнивающую э. д. с.  $\dot{E}_1$ , индуктируемую в первичной обмотке основным потоком, уравнения для приведенного трансформатора можно написать в следующем виде:

$$\dot{U}_1 = r_1 \dot{I}_1 + j\omega S_1 \dot{I}_1 + \dot{U}_0;$$

$$\dot{E}_2' = r_2' \dot{I}_2' + j\omega S_2' \dot{I}_2' + \dot{U}_2'; \quad \dot{I}_0 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2',$$

причем

$$\dot{U}_0 = -\dot{E}_1 = -\dot{E}_2'.$$

При построении векторной диаграммы будем все векторы ориентировать относительно вектора  $\Phi_0$ , изображающего основной поток трансформатора. Векторы  $\bar{E}_1$  и  $\bar{E}_2'$  э. д. с., индуктируемых основным потоком, равные друг другу, будут отставать от вектора  $\Phi_0$  на угол  $\frac{\pi}{2}$  (рис. 208). Вектор намагничивающего

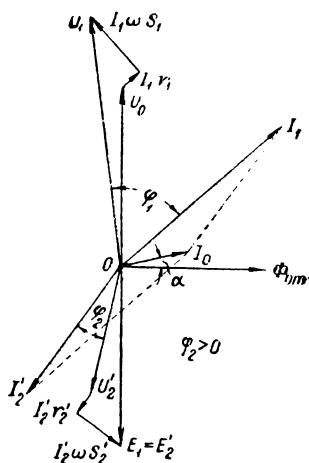


Рис. 208

тока  $\bar{I}_0 = \bar{I}_1 + \bar{I}_2'$ , величину которого можно определить, зная  $\Phi_{0m}$  и параметры магнитной цепи трансформатора, вследствие наличия потерь в стали сердечника будет упреждать вектор  $\bar{\Phi}_0$  на угол магнитного запаздывания

$$\alpha = \arcsin (P_{cm} : U_0 I_0).$$

Зная  $\dot{E}_2'$  и параметры вторичной обмотки и внешней цепи, можно найти  $\dot{I}_2'$  и построить изображающий его вектор  $\bar{I}_2'$ , который будет расположен в нижней полуплоскости, так как он не может быть сдвинут относительно  $\bar{E}_2'$  на угол, больший, чем  $\frac{\pi}{2}$ . Построив векторы  $\bar{I}_0$  и  $\bar{I}_2'$ , можно на основании равенства  $\dot{I}_1 = \dot{I}_0 - \dot{I}_2'$  построить вектор  $\bar{I}_1$  как геометрическую разность векторов  $\bar{I}_0$  и  $\bar{I}_2'$ . При этом вектор  $\bar{I}_1$  будет расположен в верхней полуплоскости.

Перейдем к построению векторов  $\bar{U}_1$  и  $\bar{U}_2$ , изображающих напряжения на первичных и вторичных зажимах трансформатора. Из уравнения для первичной цепи следует, что  $\dot{U}_1$  имеет три составляющие. При этом составляющая  $\dot{U}_0$ , уравнивающая э. д. с.

$\vec{E}_1$ , индуцируемую в первичной обмотке основным потоком, изобразится вектором  $\vec{U}_0$ , равным и прямо противоположным вектору  $\vec{E}_1$ . Составляющая  $j\omega S_1 \vec{I}_1$ , уравнивающая э. д. с., индуцируемую в первичной обмотке ее потоком рассеяния, изобразится вектором, упреждающим вектор  $\vec{I}_1$  на угол  $\frac{\pi}{2}$ , а составляющая  $r_1 \vec{I}_1$ ,

преодолевающая активное сопротивление первичной обмотки, изобразится вектором, совпадающим по направлению с вектором  $\vec{I}_1$ .

Геометрическая сумма векторов, изображающих эти три составляющие, даст вектор  $\vec{U}_1$ . Из уравнения для вторичной цепи видно, что э. д. с.  $\vec{E}'_2$  распадается также на три составляющие. При этом составляющая  $r'_2 \vec{I}'_2$ , преодолевающая активное сопротивление вторичной обмотки, изобразится вектором, совпадающим по направлению с вектором  $\vec{I}'_2$ , а составляющая  $j\omega S'_2 \vec{I}'_2$ , уравнивающая э. д. с., индуцируемую во вторичной обмотке ее потоком рассеяния, изобразится вектором, упреждающим вектор  $\vec{I}'_2$  на угол  $\frac{\pi}{2}$ . Вычитая из вектора  $\vec{E}'_2$  векторы,

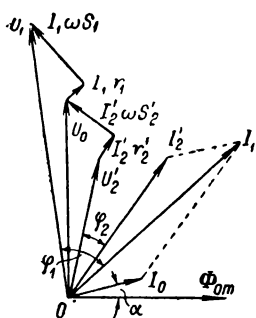


Рис. 209

получим вектор  $\vec{U}'_2$ , изображающий напряжение на вторичных зажимах.

Векторная диаграмма рис. 208 справедлива и для схемы, эквивалентной трансформатору, если в качестве положительных направлений токов  $\vec{I}_1$  и  $\vec{I}'_2$  принять направления, указанные на рис. 206. Если же положительное направление тока  $\vec{I}'_2$  изменить на обратное, то вектор  $\vec{I}'_2$  и все связанные с ним векторы повернутся на угол  $\pi$ , и векторная диаграмма приобретет большую компактность (рис. 209).

Из векторной диаграммы рис. 209 видно, что  $U_1$  и  $U'_2$ , а также  $I_1$  и  $I'_2$  не равны между собою и что отношения между ними зависят от величины и характера внешнего сопротивления, на которое замкнута вторичная обмотка. Следовательно, отношения между  $U_1$  и  $U_2$  и между  $I_2$  и  $I_1$  не равны коэффициенту трансформации и изменяются с изменением режима работы трансформатора. В то же время отношение между  $E_1$  и  $E_2$ , равное коэффициенту трансформации, остается неизменным при всех режимах.

Из схемы, эквивалентной трансформатору, а также из векторных диаграмм рис. 208 и 209 следует, что неравенство  $U_1$  и  $U'_2$  вызывается падениями напряжения в обмотках трансформатора,

а неравенство  $I_1$  и  $I_2'$  вызывается наличием намагничивающего тока.

Однако необходимо иметь в виду, что на рис. 208 и рис. 209 падения напряжения в обмотках и намагничивающий ток преувеличены. В трансформаторах со стальным сердечником падения напряжения в обмотках обычно малы по сравнению с индуктируемыми в них э. д. с. при всех режимах, далеких от короткого замыкания, а намагничивающий ток мал по сравнению с током в первичной обмотке при всех режимах, далеких от холостого хода, поэтому для трансформаторов со стальным сердечником, в отличие от трансформаторов без сердечника (§ 46), в указанных случаях можно пользоваться следующими приближенными соотношениями:

$$U_1 : U_2 \approx c \text{ и } I_2 : I_1 \approx c.$$

### § 106. Экспериментальное определение коэффициента трансформации и коэффициента полезного действия трансформатора со стальным сердечником

Определение основных характеристик трансформаторов со стальным сердечником обычно производят по данным опытов холостого хода и короткого замыкания. Опыт холостого хода должен быть произведен при разомкнутой вторичной обмотке и номинальном значении напряжения на зажимах первичной обмотки, а опыт короткого замыкания — при замкнутой накоротко вторичной обмотке и номинальном значении тока в первичной обмотке.

При анализе этих режимов необходимо иметь в виду, что в современных трансформаторах с сердечниками, изготовленными из трансформаторной стали, ток холостого хода относительно мал и в среднем составляет от 2 до 10% от номинального тока, а падение напряжения при номинальном токе также невелико и в среднем составляет от 5 до 8% от номинального напряжения, так как индуктивные падения напряжения малы вследствие относительной малости потоков рассеяния по сравнению с основным потоком трансформатора, а активные падения напряжения играют еще меньшую роль. Потери в современных трансформаторах незначительны, причем в среднем потери в стали составляют от 0,5 до 1,5%, а потери в меди от 0,5% до 3% от номинальной мощности.

Так как при опыте холостого хода ток в первичной обмотке мал, то падение напряжения в ней ничтожно и не превышает 0,5% от величины приложенного напряжения. Поэтому при холостом ходе практически  $U_{10} = E_1$  и  $U_{20} = E_2$  и, следовательно,

$$U_{10} : U_{20} = E_1 : E_2 = w_1 : w_2 = c,$$

т. е. коэффициент трансформации может быть определен по отношению напряжений при холостом ходе. Так как ток холостого хода составляет не более 10% от номинального тока, то потери  $I_{10}^2 r_1$  в первичной обмотке в этом случае составляют не более 0,5% от потерь на нагревание обмоток при номинальном токе. В то же время потери в стали сердечника при холостом ходе имеют нормальное значение, так как основной поток, а следовательно, и индукция в сердечнике определяются величиной приложенного напряжения. Поэтому мощность  $P_0$  при холостом ходе дает нам мощность  $P_{cm}$  расходуемую в сердечнике на гистерезис и вихревые токи.

При опыте короткого замыкания напряжение на зажимах первичной обмотки  $U_{1k}$ , называемое *напряжением короткого замыкания*, равно падению напряжения в трансформаторе при номинальном токе и составляет около 8% от номинального напряжения. Поэтому намагничивающий ток будет весьма мал по сравнению с токами в первичной и вторичной обмотках, и можно считать, что  $I'_{2k} = I_{1k}$ . При этом в схеме, эквивалентной трансформатору, можно пренебречь наличием средней катушки. Так как  $I'_{2k} = I_{2k} : c = I_{1k}$ , то из соотношения токов  $I_{2k}$  и  $I_{1k}$  также можно определить коэффициент трансформации.

Потери в стали сердечника, зависящие от квадрата индукции, иными словами, от квадрата напряжения  $U_0$ , в опыте короткого замыкания пренебрежимо малы по сравнению с этими же потерями при холостом ходе. В то же время потери на нагревание обмоток  $I_{1k}^2 r_1 + I_{2k}^2 r_2$  имеют нормальное значение. Поэтому мощность  $P_k$  при коротком замыкании дает мощность  $P_M$ , расходуемую на нагревание обмоток трансформатора при номинальных значениях тока в них.

Так как мощность в опыте холостого хода дает потери в сердечнике на гистерезис и вихревые токи, а мощность в опыте короткого замыкания дает потери на нагревание обмоток, то по данным этих опытов можно определить коэффициент полезного действия трансформатора  $\eta$  при номинальной нагрузке из выражения:

$$\eta = \frac{P_2}{P_2 + P_{cm} + P_M} = \frac{P_2}{P_2 + P_0 + P_k}.$$

При  $U_1 = \text{const}$  потери в стали почти не изменяются при переходе от холостого хода к нормальной нагрузке, но потери  $P_M$  в меди обмоток зависят от режима работы трансформатора, и при определении  $\eta$  для различных режимов необходимо пересчитывать  $P_M$  на тот ток, для которого определяется  $\eta$ .

### § 107. Автотрансформаторы

В тех случаях, когда коэффициент трансформации близок к единице, с экономической точки зрения оказывается выгодным упростить конструкцию трансформатора путем слияния обмотки низшего напряжения с обмоткой высшего напряжения. Такие трансформаторы, в которых обмотка низшего напряжения составляет часть обмотки высшего напряжения, называют *автотрансформаторами*. Схемы понижающего и повышающего автотрансформаторов приведены на рис. 210. Соотношение между э. д. с., индуцируемыми в обмотках трансформатора, и соответственно, приближенное отношение между первичным и вторичным напряжениями  $U_1$  и  $U_2$ , а также и токами  $I_1$  и  $I_2$  от слияния обмоток не изменяется, и при наличии замкнутого стального сердечника мы по-прежнему имеем:

$$\frac{U_1}{U_2} \approx \frac{E_1}{E_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = c; \quad \frac{I_2}{I_1} \approx \frac{\omega_1}{\omega_2} = c.$$

Выгоду слияния обмоток можно уяснить, сравнив номинальную мощность  $P_A$  автотрансформатора и номинальную мощность  $P_T$  трансформатора с тем же количеством меди и стали, который по-

лучится, если обмотку автотрансформатора разделить на две части в точке ответвления (рис. 211). Так, при  $w_1 > w_2$  имеем:

$$P_A = U_1 I_1 = U_2 I_2;$$

$$P_T = I_1 U_1 \frac{w_1 - w_2}{w_1} = U_2 (I_2 - I_1) = U_2 I_2 \frac{w_1 - w_2}{w_1},$$

откуда

$$\frac{P_A}{P_T} = \frac{w_1}{w_1 - w_2} = \frac{c}{c - 1} = 1 : \left(1 - \frac{1}{c}\right),$$

т. е. это отношение тем больше, чем ближе к единице коэффициент трансформации  $c = w_1 : w_2$  автотрансформатора. Наоборот, при

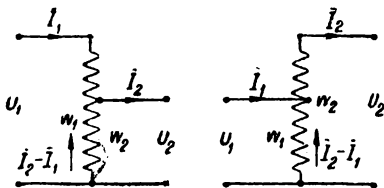


Рис. 210

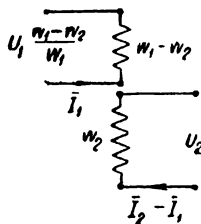


Рис. 211

коэффициентах трансформации, значительно отличающихся от единицы, преимущества автотрансформатора становятся несущественными.

### § 108. Преобразование числа фаз многофазных систем при помощи трансформаторов

Рассмотрим наиболее простые и вместе с тем практически наиболее важные схемы для преобразования числа фаз.

Весьма важным случаем является преобразование однофазной системы в двухфазную симметричную систему. Последняя система, как известно, состоит из двух равных э. д. с., сдвинутых по фазе на угол  $\pi$ . Обе системы являются системами неуравновешенными.

Возьмем однофазный трансформатор, во вторичной обмотке  $ab$  которого индуцируется э. д. с.  $E$ . Изобразим э. д. с.  $\dot{E}_{ab}$ , действующую в обмотке от точки  $a$  к точке  $b$ , вектором  $\overline{AB}$ . Тогда э. д. с.  $\dot{E}_{ba}$ , действующая в обмотке от точки  $b$  к точке  $a$ , должна быть изображена вектором  $\overline{BA}$ , равным и прямо противоположным вектору  $\overline{AB}$  (рис. 212). После этих замечаний ясно, что если взять среднюю точку  $o$  вторичной обмотки (рис. 213) и построить векторы, изображающие э. д. с.  $\dot{E}_{oa}$  и  $\dot{E}_{ob}$ , действующие в обмотке от точки  $o$

соответственно к точкам  $a$  и  $b$ , то векторная диаграмма будет состоять из двух векторов  $\overline{OA}$  и  $\overline{OB}$ , равных друг другу по величине и противоположных по направлению. Так как векторы  $\overline{OA}$  и  $\overline{OB}$ , а следовательно, и изображаемые ими э. д. с.  $E_{oa}$  и  $E_{ob}$  образуют

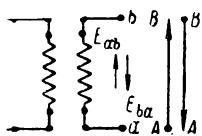


Рис. 212

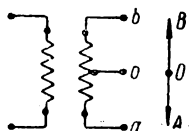


Рис. 213

симметричную двухфазную систему, то мы приходим к заключению, что для преобразования однофазной системы в симметричную двухфазную достаточно вывести среднюю точку обмотки, в которой генерируется преобразуемая э. д. с.

Применяя только что указанный способ, можно преобразовать трехфазную симметричную систему в шестифазную симметричную. При этом, желая выполнить соединение шестифазной системы звездой, достаточно вывести средние точки всех вторичных обмоток

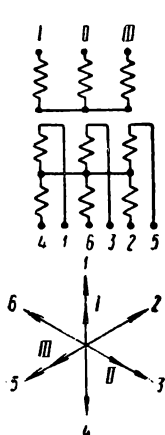


Рис. 214

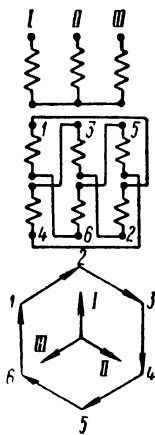


Рис. 215

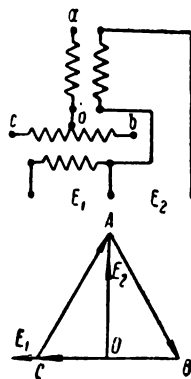


Рис. 216

трехфазного трансформатора и объединить их в одну общую нейтральную точку (рис. 214). Если же требуется выполнить соединение шестифазной системы многоугольником, то каждая из вторичных обмоток трансформатора должна быть разрезана в средней точке. Пометив концы обмоток в соответствии с векторной диаграммой рис. 215, нетрудно выполнить необходимые соединения. Способ соединения первичной обмотки трансформатора в обоих этих случаях роли не играет. К преобразованию трехфазной системы в шестифазную приходится прибегать при питании одноякорных пре-

образователей и выпрямителей, которые обычно конструируют для работы от шестифазной системы.

В некоторых случаях возникает вопрос о преобразовании симметричной трехфазной системы в несимметричную двухфазную, образуемую двумя равными э. д. с., отличающимися по фазе на угол  $\frac{\pi}{2}$ . Для этой цели часто применяют схему рис. 216, состоящую из двух однофазных трансформаторов. Пусть точки  $a, b, c$  являются зажимами источника трехфазной симметричной системы напряжений. Включим первичную обмотку первого трансформатора между зажимами  $b$  и  $c$ , а первичную обмотку второго — между зажимом  $a$  и средней точкой  $o$  первичной обмотки первого трансформатора. Тогда, как это следует из векторной диаграммы, э. д. с.  $\dot{E}_1$  и  $\dot{E}_2$ , индуцируемые во вторичных обмотках трансформаторов, будут отличаться по фазе на угол  $\frac{\pi}{2}$ . Нетрудно усмотреть, что если коэффициенты трансформации трансформаторов одинаковы, то  $E_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} E_1$ . Поэтому для получения равных по величине э. д. с.  $E_1$  и  $E_2$  коэффициент трансформации у первого трансформатора должен быть в  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  раз больше, чем у второго. Рассматриваемая схема обратима, т. е. может быть применена для преобразования несимметричной двухфазной системы, состоящей из двух равных э. д. с., отличающихся по фазе на угол  $\frac{\pi}{2}$ , в симметричную трехфазную систему.

---



---

## ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

### ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЦЕПЯХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

#### § 109. Общие принципы анализа переходных процессов

До сих пор мы рассматривали процессы в цепях с сосредоточенными параметрами при установившихся режимах работы этих цепей. Не менее важное значение имеет изучение процессов, возникающих в цепях при переходе их от одного установившегося режима к другому и называемых поэтому *переходными процессами*. При периодических или постоянных внешних э. д. с. переходные процессы возникают в цепях при их включении и отключении, а также при всяком изменении параметров цепи. Хотя эти процессы протекают очень быстро и обычно заканчиваются в течение долей секунды, но токи и напряжения в этот период времени могут иметь значения, во много раз превосходящие значения их при нормальных установившихся режимах, в результате чего может произойти повреждение или даже разрушение отдельных элементов цепи.

Переход от одного установившегося режима в цепи к другому установившемуся режиму не совершается мгновенно, так как энергия магнитных и электрических полей, связанных с цепью, различна при различных установившихся режимах, а для конечного изменения энергии полей необходимо некоторое время. Поэтому в физически существующих электрических цепях ни токи, ни напряжения на отдельных их участках не могут претерпевать мгновенных конечных изменений, и только при пренебрежении магнитным или электрическим полем на том или ином участке цепи можно в результате математического анализа прийти к заключению, что ток или напряжение на этом участке мгновенно претерпевает конечное изменение.

Так, в частности, не могут мгновенно изменяться на конечную величину токи в реактивных катушках, но теоретически возможны мгновенные конечные изменения напряжений на их зажимах, если мы пренебрегаем емкостью, которой по существу обладает всякая катушка, и наоборот, не могут мгновенно изменяться на конечную величину напряжения на обкладках конденсаторов, но теоретически возможны мгновенные конечные изменения токов

в них, если мы пренебрегаем индуктивностью, которой, по существу, обладает каждый конденсатор.

В тех случаях, когда мы имеем дело с электрическими цепями с сосредоточенными параметрами и когда, кроме того, параметры цепи, а именно сопротивления, емкости и индуктивности постоянны, математический анализ переходных процессов приводится к нахождению общих интегралов обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Известно, что общий интеграл линейного дифференциального уравнения со свободным членом представляет собою сумму частного решения этого уравнения и решения того же уравнения без свободного члена.

Физически решение уравнения без свободного члена определяет электромагнитные процессы, происходящие в цепи при отсутствии внешних источников энергии. Эти процессы, естественно, могут происходить лишь за счет того запаса энергии, который в начальный момент времени содержался в электрическом и магнитном полях, связанных с цепью. Так как в физически существующих цепях всегда происходит рассеяние энергии, то запас энергии, которым цепь обладала в начальный момент, со временем будет исчерпан, и электромагнитные процессы в цепи прекратятся. Поэтому можно утверждать, что электрические и магнитные величины — токи, напряжения, магнитные потоки и т. п., определяемые решениями линейных дифференциальных уравнений без свободного члена, с течением времени стремятся к нулю. Эти составляющие, исчезающие с течением времени, называют *преходящими* или *свободными* величинами.

В последующем нас будут главным образом интересовать случаи, когда внешние э. д. с. или постоянны, или являются периодическими функциями времени. В этих случаях частные решения дифференциальных уравнений могут быть найдены в виде постоянных величин или, соответственно, в виде периодических функций времени с тем же периодом. Так как проходящие величины по истечении некоторого промежутка времени, обычно измеряемого секундами или даже долями секунды, практически можно считать равными нулю, то при периодических или постоянных внешних э. д. с. процессы, происходящие в рассматриваемых нами цепях, по истечении этого промежутка времени устанавливаются и в дальнейшем определяются лишь указанными частными решениями соответствующих дифференциальных уравнений. Поэтому составляющие электрических и магнитных величин, определяемые этими постоянными или периодическими частными решениями, мы будем называть *установившимися* величинами.

При совместном рассмотрении величин, установившихся и проходящих, первые из них мы будем снабжать значком ('), а вторые — значком (''). Так, для тока  $i = i(t)$  во время переходного режима в цепи с постоянными параметрами мы будем писать:

$$i = i' + i'' \text{ или } i(t) = i'(t) + i''(t),$$

где  $i' = i'(t)$  — установившийся ток, определяемый частным решением дифференциального уравнения, а  $i'' = i''(t)$  — переходящий ток, определяемый решением того же уравнения без свободного члена.

Определение переходных и даже установившихся процессов весьма осложняется, если параметры цепи зависят от токов или напряжений, что имеет место при наличии в цепи каких-либо нелинейных элементов, например, электрических дуг или трансформаторов и реактивных катушек с ферромагнитными сердечниками. В этом случае вопрос приводится к интегрированию нелинейных дифференциальных уравнений, что сопряжено с большими математическими трудностями. Методам анализа процессов в нелинейных цепях будет посвящена отдельная глава.

Как известно, в общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения входят постоянные интегрирования, число которых равно порядку уравнения. Для нахождения постоянных интегрирования необходимо знать начальные условия, определяющие состояние электрической цепи в некоторый момент времени, причем число начальных условий должно быть равно числу постоянных интегрирования. Состояние электрической цепи в данный момент времени полностью определяется распределением электромагнитной энергии между отдельными элементами цепи, т. е., иными словами, величиной токов в реактивных катушках и напряжений на обкладках конденсаторов в этот момент времени. Следовательно, высший порядок уравнения, к которому можно привести систему уравнений, описывающих поведение цепи, всегда равен числу имеющихся в цепи реактивных катушек и конденсаторов, если все катушки, соединенные последовательно, считать за одну катушку, а все конденсаторы, соединенные параллельно, — за один конденсатор.

Уже указывалось, что с любой электрической цепью связаны и магнитное и электрическое поле. Однако нередко энергия одного из этих полей настолько мала по сравнению с энергией другого поля, что можно, соблюдая достаточную для практики степень точности, считать, что с цепью связано или только магнитное, или только электрическое поле. Поэтому сначала мы остановимся на рассмотрении цепей, с которыми связано только одно из этих полей, и лишь затем перейдем к цепям, с которыми связано и магнитное и электрическое поле.

### **§ 110. Переходные процессы в индуктивных цепях при установлении постоянных токов**

Рассмотрим переходные процессы в цепи, обладающей сопротивлением  $r$  и индуктивностью  $L$  (рис. 217). Ток в такой цепи определяется уравнением:

$$L \frac{di}{dt} + ri = u,$$

где  $u = u(t)$  — напряжение на зажимах цепи. Характеристическое уравнение для этого дифференциального уравнения будет:

$$L\alpha + r = 0,$$

откуда для его единственного корня имеем  $\alpha = -\frac{r}{L}$ . В соответствии с этим можно написать решение уравнения без свободного члена в виде

$$i'' = Ae^{\alpha t} = Ae^{-\frac{r}{L}t},$$

где  $e$  — основание натуральной системы логарифмов, а  $A$  — постоянная интегрирования, определяемая по начальным условиям. Для тока переходного режима получим:

$$i = i' + i'' = i' + Ae^{-\frac{r}{L}t},$$

причем установившийся ток  $i'$  может быть найден, если известен вид функции  $u(t)$ .

Пусть цепь  $(r, L)$  замыкается накоротко, что соответствует равенству нулю напряжения  $u$  на зажимах цепи (рис. 217). Для установившегося тока в этом случае имеем:

$$i' = 0$$

и, следовательно,

$$i = i' + i'' = i'' = Ae^{-\frac{r}{L}t}.$$

Положим, что до момента короткого замыкания цепи ток в ней был равен  $I$ . Так как в цепи, обладающей индуктивностью или, иными словами, электромагнитной инерцией, ток не может мгновенно измениться на конечную величину, то  $i(0) = I$ , и из последнего уравнения, полагая  $t = 0$ , имеем:

$$i(0) = I = A.$$

Определив постоянную интегрирования  $A$ , можно написать:

$$i = i'' = Ie^{-\frac{r}{L}t}.$$

Из этого выражения видно, что ток в цепи постепенно уменьшается, приближаясь к нулю по показательному закону (рис. 217), причем уменьшение тока происходит тем быстрее, чем больше отношение  $\frac{r}{L}$  или чем меньше обратная величина  $\tau = \frac{L}{r}$ , имеющая

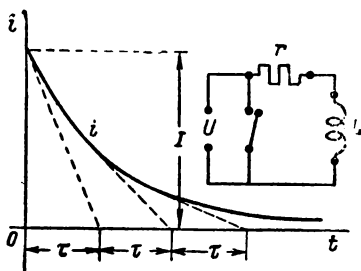


Рис. 217

размерность времени и называемая *постоянной времени цепи*. Нетрудно усмотреть, что постоянная времени равна промежутку времени, по истечении которого ток в цепи будет в  $e$  раз меньше начального значения.

Ниже для промежутков времени, кратных  $\tau$ , даны значения тока в цепи, выраженные в процентах от его начального значения.

$t$	$\tau$	$2\tau$	$3\tau$	$4\tau$	$5\tau$	$6\tau$
$i/I$	36,8%	13,5%	5,0%	1,8%	0,67%	0,25%

Так как в рассматриваемом случае

$$\frac{di}{dt} = -\frac{i}{\tau},$$

т. е.

$$\tau = -\frac{i}{\frac{di}{dt}},$$

то постоянная времени равна длине подкасательной в любой точке кривой  $i(t)$  (рис. 217).

С момента короткого замыкания цепи электромагнитные процессы в ней происходят за счет энергии, сосредоточенной в начальный момент времени в магнитном поле реактивной катушки. Эта энергия, равная  $\frac{1}{2} LI^2$ , постепенно рассеивается, превращаясь в тепло. Действительно, определяя количество тепла  $Q$ , выделившегося в цепи, получим:

$$Q = \int_0^{\infty} i^2 r dt = I^2 r \int_0^{\infty} e^{-\frac{2r}{L} t} dt = \frac{1}{2} LI^2.$$

Электромагнитные процессы в цепи прекратятся, когда запас энергии в ней станет равным нулю, т. е. теоретически при  $t = \infty$ , а практически через несколько секунд или даже долей секунды.

Постоянная времени реактивных катушек зависит от их размеров. Для геометрически подобных катушек она изменяется пропорционально квадрату их линейных размеров  $l$ . Действительно, индуктивность  $L$  геометрически подобных катушек увеличивается пропорционально квадрату чисел их витков  $w$  и первой степени их линейных размеров  $l$ :

$$L = k_1 w^2 l.$$

Последнее вытекает из размерности индуктивности:

$$[L] = [\mu] \cdot [l].$$

Эту зависимость легко усмотреть хотя бы из полученных ранее формул для индуктивностей. Например, для индуктивности катушки с сердечником в форме тороида с равномерно навитой на него обмоткой было получено выражение:

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \omega^2 h \ln \frac{r_2}{r_1},$$

где  $\omega$  — число витков обмотки,  $h$  — высота сечения сердечника,  $r_1$  и  $r_2$  — внутренний и внешний радиусы сердечника. Так как мы рассматриваем в настоящей главе только цепи с постоянными параметрами, то сердечник должен быть из неферромагнитного материала, т. е. должно быть  $\mu \approx \mu_0$ .

Сопротивление  $r$  геометрически подобных катушек увеличивается пропорционально квадрату чисел их витков и уменьшается обратно пропорционально линейным размерам  $l$  катушек. Действительно, длина проволоки таких катушек увеличивается пропорционально их числам витков  $\omega$  и линейным размерам  $l$ , сечение же проволоки убывает обратно пропорционально  $\omega$  и возрастает пропорционально  $l^2$ . Поэтому

$$r = k_2 \frac{\omega l}{l^2} = k_2 \frac{\omega^2}{l}.$$

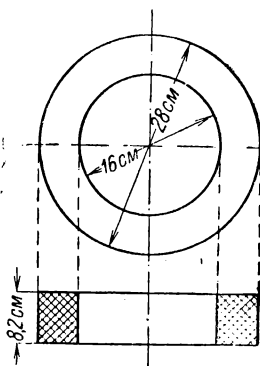


Рис. 218

Таким образом, для постоянной времени получаем:

$$\tau = \frac{L}{r} = \frac{k_1}{k_2} l^2.$$

Интересно отметить, что величина  $\tau$  для геометрически подобных катушек не зависит от числа витков  $\omega$ , если при изменении  $\omega$  коэффициент заполнения сечения обмотки медью не изменяется, т. е. не изменяется соотношение частей сечения обмотки, занятых медью проволокой и изоляцией.

Для оценки порядка величины  $\tau$  укажем, что круглая катушка без сердечника из медной проволоки, эскиз которой с указанием размеров приведен на рис. 218, весящая 17 кг, имеет:

$$L = 0,218 \text{ гн}; \quad r = 4,4 \text{ ом}$$

и

$$\tau = \frac{L}{r} = 0,0495 \text{ сек.}$$

Подобные ей катушки меньших размеров будут иметь меньшую величину  $\tau$ , катушки же больших размеров будут иметь боль-

шую величину  $\tau$ , причем  $\tau$  будет изменяться пропорционально квадрату линейных размеров, например, пропорционально квадрату диаметра  $D$  катушки.

Внесение сердечника из ферромагнитного материала значительно увеличивает постоянную времени катушки, так как увеличивается  $L$  вследствие увеличения  $\mu$ . Однако при этом цепь становится нелинейной и зависимость тока от времени, строго говоря, будет отличаться от только что полученной, так что самое понятие о постоянной времени становится условным. Если в магнитной цепи сердечника из ферромагнитного материала имеется достаточный воздушный зазор, то практически  $L$  мало зависит от тока  $i$ , и полученные в настоящем параграфе соотношения остаются справедливыми с большой точностью для таких катушек. При этом постоянная времени  $\tau$  при той же затрате меди, как, например, в вышеприведенном конкретном случае, может быть увеличена по сравнению с величиной  $\tau$  катушки без сердечника в несколько десятков раз.

Из сказанного видно, что постоянные времени больших катушек, магнитные цепи которых содержат участки из ферромагнитных материалов, могут быть весьма значительны. Например, постоянная времени обмотки возбуждения крупных гидрогенераторов может иметь значение  $\tau \approx 5$  сек.

Полученная выше зависимость постоянной времени  $\tau$  от линейных размеров  $l$  геометрически подобных катушек весьма затрудняет моделирование переходных процессов, происходящих в мощных больших устройствах, с помощью малых лабораторных моделей, если при этом не изменять масштаба времени.

Рассмотрим вопрос о включении цепи ( $r, L$ ) под постоянное напряжение  $u = U = \text{const}$  (рис. 219). Так как установившийся ток в этом случае равен  $i' = \frac{U}{r}$ , то для тока переходного режима имеем:

$$i = i' + i'' = \frac{U}{r} + Ae^{-\frac{r}{L}t}.$$

Постоянную интегрирования  $A$  определим, приняв, что до включения ток  $i$  был равен нулю. Так как в индуктивной цепи ток не может мгновенно измениться на конечную величину, то  $i(0) = 0$  и для  $t = 0$  имеем:

$$i(0) = \frac{U}{r} + A = 0$$

и, следовательно,

$$i = \frac{U}{r} - \frac{U}{r} e^{-\frac{r}{L}t} = \frac{U}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right) = \frac{U}{r} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right),$$

где  $\tau = \frac{L}{r}$  — постоянная времени цепи. Из последнего выражения видно, что в данном случае ток в цепи постепенно возрастает от нуля,

асимптотически приближаясь к своему конечному значению  $\frac{U}{r}$  (рис. 219), причем нарастание тока происходит тем быстрее, чем меньше постоянная времени  $\tau$ .

Для напряжения  $u_L$ , уравнивающего э. д. с. в катушке, при этом имеем:

$$u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{U}{r} \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = U e^{-\frac{t}{\tau}},$$

откуда видно, что это напряжение, равное  $U$  при  $t = 0$ , с течением времени убывает, асимптотически приближаясь к нулю (рис. 219).

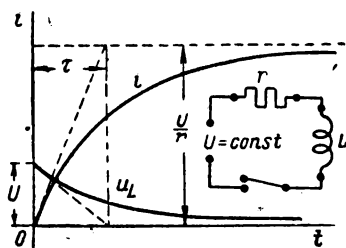


Рис. 219

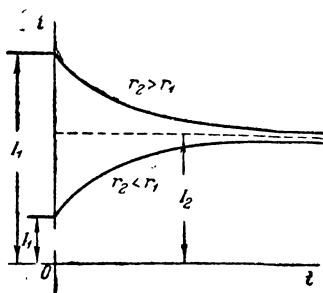


Рис. 220

Вопрос о переходном процессе в индуктивной цепи при мгновенном изменении величины сопротивления от  $r_1$  до  $r_2$  в случае, когда напряжение на зажимах цепи постоянно, т. е.  $u = U = \text{const}$ , приводится к решению только что рассмотренного уравнения, и мы имеем:

$$i = i' + i'' = \frac{U}{r_2} + A e^{-\frac{r_2}{L} t} = I_2 + A e^{-\frac{t}{\tau_2}},$$

где  $I_2 = \frac{U}{r_2}$  и  $\tau_2 = \frac{L}{r_2}$  — установившийся ток и постоянная времени цепи после изменения ее сопротивления. Пусть ток в цепи до изменения ее сопротивления был равен  $I_1$ , т. е.  $i(0) = I_1$ . Тогда, полагая  $t = 0$ , мы получим:

$$I_1 = I_2 + A,$$

и, следовательно,

$$i = I_2 + (I_1 - I_2) e^{-\frac{t}{\tau_2}} = I_2 - (I_2 - I_1) e^{-\frac{t}{\tau_2}}.$$

Соответствующие кривые  $i(t)$  для случаев  $r_2 > r_1$  и  $r_2 < r_1$  даны на рис. 220.



Математический анализ процессов отключения весьма затрудняется тем, что характер их зависит от закона изменения сопротивления выключающего устройства. Эти законы сложны, а большей частью даже не известны с необходимой степенью точности. Если предположить, что при размыкании контактов выключающего устройства сопротивление между контактами мгновенно становится равным бесконечности, то в случае неразветвленной цепи мы приходим к заключению, что напряжение между контактами будет бесконечно велико. Практически мы не получим бесконечного значения напряжения между контактами, так как при повышении напряжения между ними образуется искра или дуга.

Напряжение на зажимах выключающего устройства при отключении цепи будет тем больше, чем больше э. д. с. самоиндук-



Рис. 221

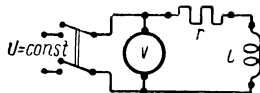


Рис. 222

ции, возникающая в цепи, т. е. чем больше индуктивность цепи и чем быстрее происходит спадание тока. Если напряжение, приложенное к зажимам цепи, постоянно, то перенапряжения, возникающие в цепи при ее отключении, можно ограничить, включая параллельно с цепью соответствующее сопротивление  $r_0$  (рис. 221). Тогда напряжение на зажимах цепи сразу после ее отключения будет лишь в  $\frac{r_0}{r}$  раз превышать приложенное напряжение. Поэтому при отключении цепей постоянного тока, обладающих большой индуктивностью, например обмоток возбуждения генераторов постоянного тока, эти цепи предварительно замыкают на малое сопротивление.

Следует иметь в виду, что если к зажимам цепи постоянного тока, обладающей большой индуктивностью, присоединен вольтметр (рис. 222), то перед отключением этой цепи необходимо разомкнуть цепь вольтметра. Иначе почти вся энергия, запасенная в магнитном поле цепи, выделится в сопротивлении вольтметра, так как последнее обычно значительно превосходит сопротивление отключаемой цепи, и вольтметр может быть сожжен.

### § 111. Включение индуктивной цепи под синусоидальное напряжение

При включении цепи ( $r$ ,  $L$ ) под синусоидальное напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$  для тока переходного режима имеем:

$$i = i' + i'' = i' + Ae^{-\frac{r}{L}t} = i' + Ae^{-\frac{t}{\tau}},$$

причем, как известно, из исследования установившегося режима,

$$i' = \frac{U_m}{z} \sin(\omega t + \psi - \varphi) = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi),$$

где  $z = \sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}$  и  $\varphi = \arctg \frac{\omega L}{r}$ . Приняв, что до включения тока в цепи не было, и, следовательно,  $i(0) = 0$ , для определения постоянной интегрирования  $A$  получим:

$$0 = I_m \sin(\psi - \varphi) + A,$$

и, следовательно,

$$i = i' + i'' = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) - I_m \sin(\psi - \varphi) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

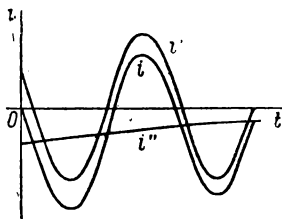


Рис. 223

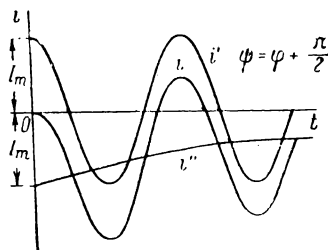


Рис. 224

Из последнего выражения видно, что во время переходного процесса на синусоидальный установившийся ток  $i' = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi)$  налагается преходящий ток

$$i'' = -I_m \sin(\psi - \varphi) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}},$$

абсолютная величина которого уменьшается по показательному закону. В результате этого наложения ток  $i$  в некоторые моменты времени превосходит амплитуду  $I_m$  установившегося тока (рис. 223). Быстрота установления режима определяется, как и в предыдущих случаях, величиной постоянной времени  $\tau = \frac{L}{r}$ . Существенно заметить, что начальное значение преходящего тока  $i''$  зависит от угла  $\psi$ , т. е. от начальной фазы напряжения и равно по величине и обратно по знаку значению установившегося тока в момент включения. Если включение происходит в момент, когда установившийся ток должен быть равен нулю, т. е. когда  $\psi = \varphi$  или  $\psi = \varphi + \pi$ , то  $i'' = 0$ , и режим тока в цепи устанавливается сразу. Наоборот, если в момент включения установившийся ток должен проходить через свое наибольшее по абсолютной величине значение, что имеет место при  $\psi = \varphi \pm \frac{\pi}{2}$ , то начальное значение преходящего тока

получает наибольшее возможное абсолютное значение, равное  $I_m$ . Отношение наибольшего значения тока во время переходного процесса к амплитуде установившегося тока зависит не только от момента включения, но и от постоянной времени цепи. Наиболее неблагоприятно обстоятельства складываются, когда включение происходит при переходе установившегося тока через максимум и когда, кроме того, постоянная времени цепи  $\tau = \frac{L}{r}$  велика по сравнению с  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  (рис. 224). Ток переходного процесса  $i = i' + i''$  достигает своего наибольшего значения в конце первого полупериода, но даже в предельном случае при  $r = 0$  он не может более чем в два раза превысить амплитуду тока установившегося режима.

### § 112. Переходные процессы в емкостных цепях при установлении постоянных напряжений

Перейдем к рассмотрению переходных процессов в цепи, состоящей из последовательно включенных участка с сопротивлением  $r$  и конденсатора емкостью  $C$  (рис. 225). Обозначив напряжение на зажимах цепи через  $u$ , а напряжение на обкладках конденсатора и величину его заряда, соответственно, через  $u_c$  и  $q$ , имеем:

$$ri + u_c = u,$$

откуда, приняв во внимание, что

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cu_c)}{dt} = C \frac{du_c}{dt},$$

получим:

$$rC \frac{du_c}{dt} + u_c = u.$$

Характеристическое уравнение последнего дифференциального уравнения будет:

$$rCa + 1 = 0,$$

откуда для единственного корня  $\alpha$  этого уравнения имеем:

$$\alpha = -\frac{1}{rC},$$

и решение уравнения без свободного члена можем написать в виде:

$$u'_c = Ae^{\alpha t} = Ae^{-\frac{t}{rC}}.$$

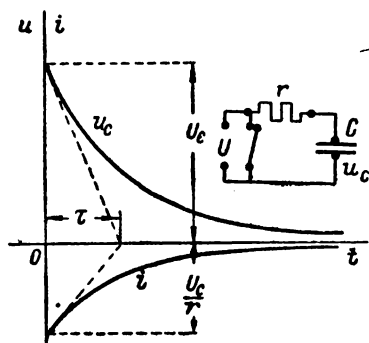


Рис. 225

Для переходного процесса получим:

$$u_C = u'_C + u''_C = u'_C + Ae^{-\frac{t}{rC}},$$

причем установившееся напряжение  $u_C$  может быть найдено, если известен вид функции  $u(t)$ . Определив закон изменения напряжения  $u_C$  на зажимах конденсатора при переходном процессе, трудно найти и ток  $i = C \frac{du_C}{dt}$  во время этого процесса:

$$i = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{du'_C}{dt} + C \frac{du''_C}{dt} = i' + i'' = i' - \frac{A}{r} e^{-\frac{t}{rC}}.$$

Постоянная интегрирования  $A$ , входящая в выражения для  $u_C$  и  $i$ , определяется по начальным условиям.

Пусть цепь ( $r$ ,  $C$ ) замыкается накоротко, что соответствует равенству нулю напряжения  $u$  (рис. 225). Для установившихся напряжения на зажимах конденсатора и тока в этом случае имеем:

$$u'_C = 0; \quad i' = 0$$

и, следовательно,

$$u_C = u'_C + u''_C = u''_C = Ae^{-\frac{t}{rC}}.$$

Пусть начальное состояние цепи задано напряжением на зажимах конденсатора  $U_C$  в момент замыкания цепи, т. е. при  $t=0$ . Тогда

$$u_C(0) = U_C = A,$$

и окончательно можно написать:

$$u_C = U_C e^{-\frac{t}{rC}}; \quad i = -\frac{U_C}{r} e^{-\frac{t}{rC}}.$$

Из последних выражений видно, что напряжение на зажимах конденсатора и абсолютное значение тока в цепи убывают по одному и тому же показательному закону, причем это убывание происходит тем быстрее, чем меньше постоянная времени цепи  $\tau = rC$  (рис. 225).

Отметим, что в рассматриваемой цепи сразу после ее замыкания ток должен мгновенно измениться от нуля до величины, равной отношению начального значения напряжения на зажимах конденсатора к сопротивлению цепи, как это следует из выражения для  $i$ . Это объясняется тем, что мы пренебрегли наличием неизбежного явления самоиндукции, положив  $L = 0$ . Однако сколь бы ни была мала индуктивность цепи, равняться нулю она не может, и в дей-

ствительности ток в цепи в начальный момент времени будет равен нулю, но затем при  $L \approx 0$ , он весьма быстро достигнет значения, мало отличающегося от величины  $\left(-\frac{U_C}{r}\right)$ , и в дальнейшем будет изменяться почти в точности по полученному нами показательному закону.

Электромагнитные процессы, имеющие место в рассматриваемой цепи с момента ее замыкания, происходят за счет энергии, сосредоточенной в начальный момент времени в электрическом поле конденсатора. Эта энергия, равная  $\frac{1}{2}CU_C^2$ , постепенно рассеивается, превращаясь в тепло. Действительно, определяя количество тепла  $Q$ , выделившегося в цепи, мы получим:

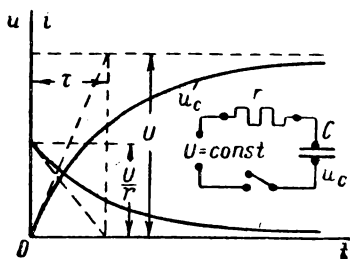


Рис. 226

$$Q = \int_0^{\infty} i^2 r dt = \frac{U_C^2}{r} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \frac{1}{2} CU_C^2.$$

Как и при коротком замыкании цепи ( $r, L$ ), электромагнитные процессы в рассматриваемом случае теоретически прекращаются при  $t = \infty$ , а практически через несколько секунд или даже через доли секунды.

Например, если конденсатор с емкостью  $C = 100 \text{ мкф}$  разряжается через сопротивление  $r = 100 \text{ ом}$ , то постоянная времени получается равной

$$\tau = 100 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 0,01 \text{ сек.}$$

Если тот же конденсатор оставить заряженным и отключенным от остальной цепи, то он будет медленно разряжаться через свое сопротивление утечки. Пусть это сопротивление равно  $r = 10^8 \text{ ом}$ . Тогда имеем:

$$\tau = 100 \cdot 10^{-6} \cdot 10^8 = 10^4 \text{ сек.} = 27,8 \text{ час.,}$$

т. е. конденсатор с такой хорошей изоляцией сохранит через сутки примерно одну треть своего начального заряда.

Рассмотрим включение цепи ( $r, C$ ) под постоянное напряжение  $u = \text{const} = U$  (рис. 226), предположив, что конденсатор не был заряжен, т. е. что  $u_C(0) = 0$ . Так как по завершении переходного процесса напряжение на зажимах конденсатора будет равно  $U$ , то

$$u_C = u'_C + u''_C = U + Ae^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Постоянную интегрирования  $A$  определим, приняв во внимание условие  $u_c(0) = 0$ , исходя из которого найдем:

$$u_c(0) = U + A = 0$$

и, следовательно,

$$u_c = U - Ue^{-\frac{r}{rC}} = U\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right),$$

где  $r = rC$  — постоянная времени цепи. Для тока в цепи имеем:

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_c}{dt} = \frac{U}{r} e^{-\frac{t}{rC}} = \frac{U}{r} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Из выражения для  $u_c$  видно, что напряжение на зажимах конденсатора и заряд его нарастают по тому же закону, что и ток в цепи ( $r, L$ ) при включении ее под постоянное напряжение. Что же касается тока  $i$  (рис. 226), то при включении цепи он сразу получает значение  $U/r$ , так как в момент  $t = 0$  напряжение на зажимах конденсатора равно нулю, и ток в цепи определяется лишь напряжением  $U$  и сопротивлением  $r$  цепи. В дальнейшем напряжение на зажимах конденсатора постепенно возрастает, и ток в цепи убывает по тому же показательному закону, что и при разряде конденсатора.

Определяя количество тепла, выделившегося в цепи во время заряда конденсатора, мы получим то же значение  $\frac{1}{2} CU^2$ , что и при разряде конденсатора, и можем поэтому сказать, что при  $u = U = \text{const}$  количество энергии, превращаемой в тепло при заряде конденсатора через сопротивление, равно энергии, запасаемой в электрическом поле конденсатора, и, следовательно, работа источника внешней э. д. с. в рассматриваемом случае равна  $CU^2$ , т. е. удвоенному значению энергии, запасаемой в электрическом поле конденсатора. Однако такое соотношение имеет место только при включении цепи ( $r, C$ ) под постоянное напряжение  $u = \text{const} = U$ . Если напряжение  $u$  на зажимах цепи увеличивать медленно, то соотношение между количеством энергии, превращаемой в тепло, и энергией, запасаемой в конденсаторе, будет более выгодным. Это важное положение мы покажем на примере, который будет рассмотрен дальше в § 117. Естественно, что при этом характер изменения тока и напряжения на конденсаторе будет определяться характером нарастания напряжения на зажимах цепи и будет отличным от только что рассмотренного при  $U = \text{const}$ .

В заключение определим переходные токи в несколько более сложной цепи, схема которой дана на рис. 227, при ее включении под постоянное напряжение  $U = \text{const}$ . Для этой цепи имеем:

$$U = r_1 i_1 + u_c, \quad r_2 i_2 = u_c, \quad i_1 = i_2 + i_c, \quad i_c = \frac{du_c}{dt}$$

и, следовательно,

$$U = r_1(i_2 + i_C) + u_C = r_1 \left( \frac{u_C}{r_2} + C \frac{du_C}{dt} \right) + u_C = \frac{r_1 + r_2}{r_2} u_C + r_1 C \frac{du_C}{dt}$$

или

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 C} u_C = \frac{U}{r_1 C}.$$

Характеристическое уравнение последнего дифференциального уравнения имеет один корень  $\alpha = -\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 C}$ , и поэтому

$$u_C = u'_C + u''_C = \frac{r_2 U}{r_1 + r_2} + A e^{-\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 C} t},$$

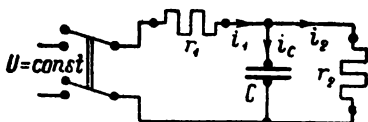


Рис. 227

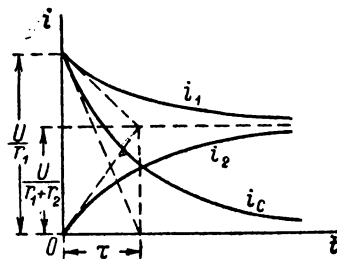


Рис. 228

так как установившееся напряжение на зажимах конденсатора  $u'_C = \frac{r_2 U}{r_1 + r_2}$ . Полагая, что перед включением цепи конденсатор не был заряжен, имеем  $u_C(0) = 0$  и, следовательно,

$$A = -\frac{r_2 U}{r_1 + r_2}$$

и

$$u_C = \frac{r_2 U}{r_1 + r_2} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right),$$

где  $\tau = \frac{r_1 r_2 C}{r_1 + r_2}$ . Получив выражение для  $u_C$ , нетрудно найти

$i_2 = \frac{u_C}{r_2}$ ,  $i_C = C \frac{du_C}{dt}$  и  $i_1 = i_2 + i_C$  (рис. 228), а именно:

$$i_2 = \frac{U}{r_1 + r_2} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right); \quad i_C = \frac{U}{r_1} e^{-\frac{t}{\tau}}; \quad i_1 = \frac{U}{r_1 + r_2} \left( 1 + \frac{r_2}{r_1} e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

### § 113. Включение емкостной цепи под синусоидальное напряжение

Рассмотрим включение цепи ( $r$ ,  $C$ ) под синусоидальное напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$ . Как в предыдущем случае, предположим, что конденсатор не был заряжен, т. е. что  $u_C(0) = 0$ .

Для напряжения  $u_C$  на зажимах конденсатора во время переходного процесса имеем:

$$u_C = u'_C + u''_C = u'_C + Ae^{-\frac{t}{\tau}} = u'_C + Ae^{-\frac{t}{\tau}},$$

причем, как известно из исследования установившегося режима,

$$i' = \frac{U_m}{z} \sin(\omega t + \psi - \varphi) = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi);$$

$$u'_C = \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t + \psi - \varphi),$$

где  $z = \sqrt{r^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$  и  $\varphi = \arctg \frac{1}{\omega Cr}$ . Следовательно,

$$u_C = -\frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t + \psi - \varphi) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Так как  $u_C(0) = 0$ , то для определения постоянной  $A$  имеем:

$$0 = -\frac{I_m}{\omega C} \cos(\psi - \varphi) + A,$$

и для  $u_C$  найдем окончательно:

$$u_C = -\frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t + \psi - \varphi) + \frac{I_m}{\omega C} \cos(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}},$$

а для тока при переходном процессе получим:

$$i = C \frac{du_C}{dt} = i' + i'' = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) - \frac{I_m}{\omega Cr} \cos(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Из выражений для  $i$  и  $u_C$  следует, что во время переходного процесса на установившиеся синусоидальные ток  $i'$  и напряжение  $u'_C$  налагаются преходящие ток  $i''$  и напряжение  $u''_C$ , абсолютная величина которых уменьшается по показательному закону. В результате ток  $i$  и напряжение  $u_C$  в некоторые моменты времени превосходят амплитуду установившегося тока  $I_m$  и, соответственно, амплитуду установившегося напряжения на обкладках конденсатора, равную  $\frac{I_m}{\omega C}$ . Быстрота установления режима, как и в предыдущих случаях, определяется величиной постоянной времени цепи  $\tau = rC$ .

Весьма существенно заметить, что начальные значения преходящего тока и преходящего напряжения на обкладках конденсатора зависят от угла  $\psi$ , т. е. от начальной фазы напряжения  $u$ ,



причем переходящее напряжение равно по величине и обратно по знаку установившемуся напряжению на обкладках конденсатора в момент включения. Если включение происходит в момент, когда установившийся ток должен иметь наибольшее по абсолютной величине значение и когда, следовательно, установившееся напряжение на обкладках конденсатора должно быть равно нулю, т. е. когда  $\psi = \varphi \pm \frac{\pi}{2}$ , то  $i'' = 0$  и  $u_C'' = 0$ , и режим в цепи устанавливается сразу. Наоборот, если в момент включения установившийся ток должен быть равен нулю и, следовательно, установившееся напряжение на обкладках конденсатора должно иметь максимальное абсолютное значение, что будет при  $\psi = \varphi$  и при  $\psi = \varphi + \pi$ , то начальные значения переходящих напряжений  $u_C''$  и тока  $i''$  получают по абсолютной величине наибольшие возможные значения, а именно:  $\frac{I_m}{\omega C} = U_{Cm}$  и  $\frac{I_m}{\omega Cr} =$

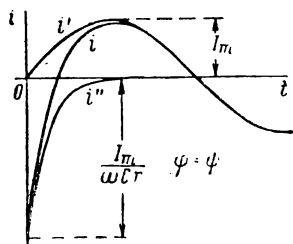


Рис. 229

$= \frac{U_{Cm}}{r}$ . В последнем случае переходящий ток может превысить амплитуду установившегося тока в число раз, равное отноше-

нию емкостного сопротивления  $\frac{1}{\omega C}$  к активному сопротивлению  $r$  цепи (рис. 229). Что же касается напряжения на обкладках конденсатора, то при самых неблагоприятных обстоятельствах его значение во время переходного процесса не может превзойти удвоенной амплитуды установившегося напряжения, так как наибольшее значение переходящего напряжения не может превысить амплитуды установившегося напряжения.

К частным случаям рассматриваемого нами включения цепи ( $r, C$ ) можно отнести случаи включения ненагруженных кабельных линий, обладающих относительно большой емкостью. В этих случаях, при включении как под постоянное, так и под синусоидальное напряжение, могут происходить начальные толчки тока, наибольшая величина которых определяется путем деления амплитуды установившегося напряжения между жилой и оболочкой кабеля на активное сопротивление кабеля. Большей частью величина таких толчков тока значительно превосходит величину тока установившегося режима, и поэтому иногда приходится включать кабельные линии через добавочные пусковые сопротивления.

#### § 114. Разряд конденсатора

Пусть заряженный конденсатор, имеющий емкость  $C$ , замыкается на цепь, обладающую сопротивлением  $r$  и индуктивностью  $L$ , причем ток  $i$  в этой цепи в начальный момент времени равен

нулю, т. е.  $i(0) = 0$ . После замыкания цепи (рис. 230) конденсатор начнет разряжаться, и в цепи возникнет электромагнитный процесс, который будет происходить за счет энергии, сосредоточенной в начальный момент времени в электрическом поле конденсатора. Этот процесс с течением времени прекратится, когда весь начальный запас энергии будет израсходован на выделение тепла, происходящее в цепи. Следовательно, в рассматриваемом случае все установившиеся величины равны нулю, и мы будем иметь дело только с переходящими величинами. Особыми значками эти переходящие величины отмечать мы не будем ввиду равенства нулю соответствующих установившихся величин.

Рассматриваемая цепь, как известно, является примером цепи, с которой связано и магнитное и электрическое поле. Для определения тока в этой цепи мы имеем уравнение:

$$L \frac{di}{dt} + ri + \frac{q}{C} = 0,$$

взяв производную по времени от обеих частей которого, получим:

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + r \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0.$$

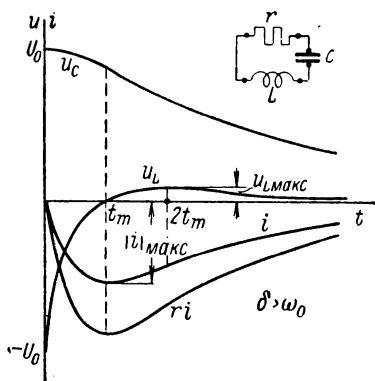


Рис. 230

Характеристическим уравнением этого дифференциального уравнения будет уравнение:

$$La^2 + ra + \frac{1}{C} = 0,$$

имеющее два корня  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , причем

$$\alpha_{1,2} = -\frac{r}{2L} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Положив  $\frac{r}{2L} = \delta$  и  $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$ , найдем:

$$\alpha_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}; \quad \alpha_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

Решение дифференциального уравнения второго порядка, которым определяется ток, должно содержать две постоянные интегрирования, для нахождения которых необходимы два начальных условия. Первым условием является предположение  $i(0) = 0$ . В качестве второго условия примем, что начальное значение напря-

жения на зажимах конденсатора  $u_C$  равно  $U_0$ , т. е. положим  $u_C(0) = \frac{q(0)}{C} = U_0$ . Это начальное условие можно привести к другому, дающему значение производной от тока по времени при  $t = 0$ , если обратить внимание, что при принятых условиях из основного дифференциального уравнения мы имеем:

$$\left[ L \frac{di}{dt} + ri \right]_{t=0} = \left[ L \frac{di}{dt} \right]_{t=0} = -\frac{q(0)}{C} = -U_0$$

и

$$\left[ \frac{di}{dt} \right]_{t=0} = -\frac{U_0}{L}.$$

Характер разряда конденсатора зависит от соотношения между параметрами цепи  $r$ ,  $L$  и  $C$  и в конечном счете определяется тем, будут ли корни характеристического уравнения вещественными или комплексными. К исследованию этих случаев и соответствующих типов разряда конденсатора мы и перейдем.

Пусть  $\delta > \omega_0$ , т. е.  $\frac{r^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$  или  $r > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ . Тогда характеристическое уравнение имеет вещественные неравные корни, и для тока  $i$  мы можем написать:

$$i = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}.$$

Приняв во внимание, что  $i(0) = 0$ , найдем:

$$0 = A_1 + A_2 \text{ или } A_2 = -A_1,$$

и, следовательно,

$$i = A_1 (e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}).$$

Так как

$$\left[ \frac{di}{dt} \right]_{t=0} = A_1 [\alpha_1 e^{\alpha_1 t} - \alpha_2 e^{\alpha_2 t}]_{t=0} = A_1 (\alpha_1 - \alpha_2) = -\frac{U_0}{L},$$

то

$$A_1 = -\frac{U_0}{(\alpha_1 - \alpha_2)L} = -\frac{U_0}{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}},$$

и окончательно для тока  $i$  имеем:

$$i = -\frac{U_0}{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}).$$

Для напряжений на катушке и конденсаторе, пользуясь последним выражением и приняв во внимание, что  $r = 2\delta L$ , найдем:

$$u_L = L \frac{di}{dt} = LA_1 (\alpha_1 e^{\alpha_1 t} - \alpha_2 e^{\alpha_2 t}) = \frac{U_0}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (\alpha_2 e^{\alpha_2 t} - \alpha_1 e^{\alpha_1 t}),$$

$$\begin{aligned} u_C = -L \frac{di}{dt} - ri &= -LA_1 (\alpha_1 e^{\alpha_1 t} - \alpha_2 e^{\alpha_2 t}) - rA_1 (e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}) = \\ &= \frac{U_0}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (\alpha_1 e^{\alpha_1 t} - \alpha_2 e^{\alpha_2 t}). \end{aligned}$$

Так как  $\alpha_1 < 0$  и  $\alpha_2 < 0$  и, кроме того,  $|\alpha_2| > |\alpha_1|$ , то при изменении  $t$  от 0 до  $\infty$  величины  $e^{\alpha_1 t}$  и  $e^{\alpha_2 t}$  убывают от 1 до 0 и притом

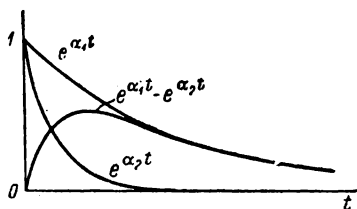


Рис. 231

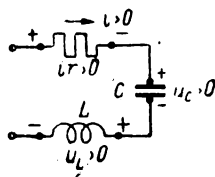


Рис. 232

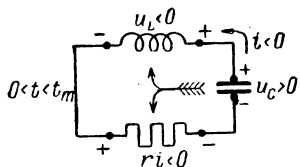
разность  $e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}$  всегда положительна (рис. 231). Следовательно, ток  $i$  не меняет своего направления, т. е. конденсатор все время разряжается. При  $U_0 > 0$  ток все время отрицателен. Такой односторонний разряд конденсатора называют аperiодическим разрядом.

Из выражения для  $u_L$  следует, что при выполнении условия  $\alpha_1 e^{\alpha_1 t} - \alpha_2 e^{\alpha_2 t} = 0$  или  $t = \left(1 \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) : (\alpha_1 - \alpha_2) = t_m$  абсолютное значение тока имеет максимум и притом единственный. Таким образом, абсолютное значение тока в цепи сначала возрастает, достигает своего наибольшего значения, а затем постепенно приближается к нулю (рис. 230). Что же касается напряжения на зажимах конденсатора  $u_C$  и напряжения на зажимах катушки самоиндукции  $u_L$ , то первое из них, сохраняя свой знак и стремясь к нулю, монотонно убывает, так как его производная во всем промежутке от  $t = 0$  до  $t = \infty$  отрицательна, а второе, имеющее при  $t = 0$  отрицательное значение ( $-U_0$ ), сначала возрастает, при  $t = t_m$ , т. е. в момент максимума абсолютного значения тока, переходит через нуль, достигает при  $t = 2t_m$  единственного максимума, а затем приближается к нулю, не изменяя более своего знака.

На рис. 232 показаны принятые ранее всюду и, в частности, при составлении уравнений в настоящем параграфе, взаимоотноше-

ния между условным положительным направлением тока и условными положительными напряжениями на конденсаторе, на катушке и участке с сопротивлением. При  $u_C > 0$  и  $i_C > 0$  конденсатор заряжается.

В рассматриваемом в настоящем параграфе случае аperiodического разряда мы получили естественно  $i < 0$  при  $u_C > 0$ . Это действительное направление тока при разряде конденсатора показано стрелкой на рис. 233. Из уравнения



$$u_C = - \left( L \frac{di}{dt} + ri \right)$$

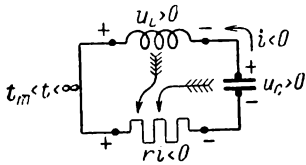


Рис. 233

следует, что напряжение на зажимах конденсатора в любой момент времени уравнивается суммой напряжения на зажимах катушки самоиндукции и напряжения на участке с сопротивлением. В первый момент времени, когда  $ri = 0$ , напряжение на зажимах конденсатора полностью уравнивается напряжением на зажимах катушки. Именно, ток начинает возрастать по абсолютной своей величине с такой скоростью, чтобы наступило такое равновесие.

В интервале времени  $0 < t < t_m$  (верхний рис. 233) напряжение  $u_C$  частично уравнивается напряжением на катушке и частично напряжением на участке с сопротивлением. На долю катушки приходится все меньшее напряжение, и соответственно, скорость нарастания тока уменьшается. В момент  $t_m$  величины  $u_C$  и  $ri$  оказываются равными и противоположными  $u_C = -ri$ , т. е. оставшееся к этому моменту времени напряжение на конденсаторе полностью уравнивается напряжением на сопротивлении. Поэтому ток дальше возрастать не может. В этот момент он достигает максимума, так как после этого момента он должен убывать вследствие того, что конденсатор продолжает разряжаться.

На верхнем рис. 233 показаны знаки напряжений на катушке и участке с сопротивлением в интервале времени  $0 < t < t_m$ , а также стрелкой с хвостовым оперением показано направление передачи энергии. Напряжение на конденсаторе и ток в нем разных знаков и, следовательно, мощность  $p_C = u_C i$  отрицательна, т. е. энергия отдается конденсатором из его электрического поля. Напряжения на катушке и на участке с сопротивлением одного знака с током и, следовательно,  $p_L = u_L i > 0$  и  $p_r = ri^2 > 0$ , т. е. энергия поступает в катушку, запасаясь в ее магнитном поле, и поглощается в виде тепла в сопротивлении.

В интервале времени  $t_m < t < \infty$  напряжение на катушке, так же как и напряжение на конденсаторе, положительно — они совместно преодолевают сопротивление цепи, что легко видеть из рассмотрения знаков напряжений, показанных на нижнем рис. 233. Теперь мощность  $p_L = u_L i$  отрицательна, и катушка, так же как и конденсатор, отдает запасенную в ней энергию. Вся эта энергия превращается в тепло, что показано стрелками с хвостовым оперением.

Представляет интерес сопоставить кривые на рис. 230 с кривыми на рис. 225, полученными в § 112 при рассмотрении разряда конденсатора на сопротивление  $r$  в предположении, что  $L = 0$ . При таком предположении в начальный момент ток скачком принимает значение, определяемое отношением начального значения напряжения на конденсаторе к сопротивлению. При  $L \neq 0$  (рис. 230) ток увеличивается постепенно от нулевого начального значения. Соответственно, скорость спадания напряжения на конденсаторе в начальный период разряда при  $L \neq 0$  получается меньше, чем при  $L = 0$ .

Рассмотрим теперь случай, когда  $\delta = \omega_0$ , т. е. когда  $r = 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$ . В этом случае характеристическое уравнение имеет вещественные равные корни  $\alpha_1 = \alpha_2 = -\delta$ , и мы можем написать:

$$i = (A_3 + A_4 t) e^{-\delta t}.$$

Приняв во внимание, что  $i(0) = 0$ , получим  $A_3 = 0$ , и, следовательно,

$$i = A_4 t e^{-\delta t}.$$

Далее, так как

$$\left[ \frac{di}{dt} \right]_{t=0} = A_4 [e^{-\delta t} - \delta t e^{-\delta t}]_{t=0} = A_4 = -\frac{U_0}{L},$$

то окончательно для тока  $i$  имеем:

$$i = -\frac{U_0}{L} t e^{-\delta t}.$$

На основании этого выражения, приняв во внимание, что  $r = 2\delta L$ , для напряжения  $u_L$  и  $u_C$  получим:

$$u_L = L \frac{di}{dt} = U_0 (\delta t - 1) e^{-\delta t};$$

$$u_C = -\left( L \frac{di}{dt} + r i \right) = U_0 (\delta t + 1) e^{-\delta t}.$$

Рассматривая выражения для  $i$ ,  $u_L$ ,  $u_C$ , мы придем к таким же заключениям, что и при  $\delta > \omega_0$ . Для момента времени, в который

абсолютное значение тока достигает максимума, а напряжение на катушке самоиндукции становится равным нулю, мы получим значение  $t = \frac{1}{\delta} = t_m$ , а для момента времени, в который  $u_L$  имеет максимальное значение, найдем  $t = 2/\delta = 2t_m$ . Таким образом, и при  $r = 2\sqrt{L/C}$  разряд конденсатора имеет аperiодический характер. При дальнейшем уменьшении  $r$ , как будет показано ниже, разряд из аperiодического переходит в колебательный, и, следовательно, случай  $r = 2\sqrt{L/C}$  является предельным случаем аperiодического разряда.

Перейдем к рассмотрению наиболее важного случая разряда конденсатора, когда  $\delta < \omega_0$ , т. е.  $r < 2\sqrt{L/C}$ . В этом случае корни характеристического уравнения будут комплексные. Вводя обозначение  $\omega_0^2 - \delta^2 = \omega'^2$ , для этих корней получим выражение:

$$\alpha_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta + j\omega';$$

$$\alpha_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta - j\omega';$$

и можем написать решение дифференциального уравнения в виде:

$$i = (A_5 \sin \omega' t + A_6 \cos \omega' t) e^{-\delta t}.$$

Из условия  $i(0) = 0$  найдем  $A_6 = 0$ , и так как тогда

$$\left[ \frac{di}{dt} \right]_{t=0} = A_5 [\omega' \cos \omega' t \cdot e^{-\delta t} - \delta \sin \omega' t \cdot e^{-\delta t}]_{t=0} = \omega' A_5 = -\frac{U_0}{L},$$

то

$$i = A_5 \sin \omega' t \cdot e^{-\delta t} = -\frac{U_0}{\omega' L} \sin \omega' t \cdot e^{-\delta t}.$$

Для напряжения на зажимах реактивной катушки  $u_L = L \frac{di}{dt}$  имеем:

$$u_L = LA_5 (\omega' \cos \omega' t - \delta \sin \omega' t) e^{-\delta t},$$

а для напряжения на обкладках конденсатора  $u_C$ , приняв во внимание, что  $r = 2\delta L$ , получим:

$$\begin{aligned} u_C &= -ri - L \frac{di}{dt} = \\ &= -rA_5 \sin \omega' t \cdot e^{-\delta t} + \delta LA_5 \sin \omega' t \cdot e^{-\delta t} - \omega' LA_5 \cos \omega' t \cdot e^{-\delta t} = \\ &= -LA_5 (\delta \sin \omega' t + \omega' \cos \omega' t) \cdot e^{-\delta t}. \end{aligned}$$

Полагая  $\delta/\omega' = \operatorname{tg} \beta$ , причем  $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$  и, следовательно,

$$\sin \beta = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + \omega'^2}} = \frac{\delta}{\omega_0};$$

$$\cos \beta = \frac{\omega'}{\sqrt{\delta^2 + \omega'^2}} = \frac{\omega'}{\omega_0},$$

$u_L$  и  $u_C$  можно привести к виду:

$$u_L = \omega_0 L A_5 \cos(\omega' t + \beta) e^{-\delta t};$$

$$u_C = -\omega_0 L A_5 \cos(\omega' t - \beta) e^{-\delta t}$$

Далее, приняв во внимание, что  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , и обозначив  $A_5 = -\frac{U_0}{\omega' L}$  через  $-I$ , получим окончательно:

$$i = -I \sin \omega' t \cdot e^{-\delta t};$$

$$u_L = -\omega_0 L I \cos(\omega' t + \beta) e^{-\delta t} = -I \sqrt{\frac{L}{C}} \sin\left(\omega' t + \frac{\pi}{2} + \beta\right) e^{-\delta t};$$

$$u_C = +\omega_0 L I \cos(\omega' t - \beta) e^{-\delta t} = -I \sqrt{\frac{L}{C}} \sin\left(\omega' t - \frac{\pi}{2} - \beta\right) e^{-\delta t},$$

где  $\sqrt{\frac{L}{C}} = \rho$  — волновое сопротивление контура ( $r, L, C$ ), с которым мы познакомились при изучении резонанса (§ 41).

Проанализируем полученное решение сначала для предельного случая сверхпроводящей цепи, когда  $r = 0$ . При  $r = 0$  имеем:

$$\delta = 0, \beta = 0; \quad \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0$$

и, следовательно,

$$i = -I \sin \omega_0 t = -\frac{U_0}{\rho} \sin \omega_0 t;$$

$$u_L = -I \rho \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = -U_0 \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right).$$

$$u_C = -I \rho \sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = -U_0 \sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Таким образом, если бы цепь не обладала сопротивлением, т. е. если бы в ней не происходило рассеяния энергии, то ток в цепи и напряжения на зажимах конденсатора и катушки самоиндукции были бы синусоидальными функциями времени, изменяющимися



с угловой частотой  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  (рис. 234). Иными словами, при  $r = 0$  мы имели бы так называемые *незатухающие колебания*, период которых равен:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{LC}.$$

Последняя формула носит наименование формулы В. Томсона, который ее впервые установил. При этом период  $T_0$ , зависящий только от параметров контура, в котором происходят колебания, называют *периодом собственных незатухающих колебаний*.

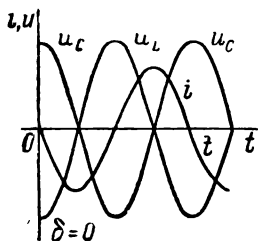


Рис. 234

Как из кривых рис. 234, так и из аналитических выражений следует, что по фазе  $u_L$  опережает ток на угол  $\pi/2$ , а  $u_C$  отстает от тока на угол  $\pi/2$  в полном соответствии с тем, что мы имели для установившегося режима в цепи ( $r, L, C$ ) при синусоидальном напряжении на ее зажимах. Следует отметить, что резонанс в цепи ( $r,$

$L, C$ ) имеет место при угловой частоте  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , т. е. в том случае, когда частота напряжения, приложенного к зажимам цепи, равна частоте собственных незатухающих колебаний этой цепи.

Энергетическая сторона процессов в рассматриваемой цепи при  $r = 0$  весьма проста. А именно, энергия, сосредоточенная в момент  $t = 0$  в электрическом поле конденсатора и равная  $\frac{1}{2}CU_0^2$ , постепенно переходит в энергию магнитного поля реактивной катушки. Этот переход заканчивается в момент  $t = \frac{T_0}{4}$ , когда  $u_C = 0$ , а ток

в цепи достигает максимума. В следующую четверть периода происходит обратный переход энергии магнитного поля в энергию электрического поля. Указанные колебания энергии между электрическим и магнитным полями при  $r = 0$  должны были бы продолжаться бесконечно без изменения величины энергии, связанной с контуром, так как предположение  $r = 0$  равносильно предположению об отсутствии в контуре каких-либо потерь энергии.

Перейдем к рассмотрению процессов, происходящих при  $0 < r < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$  и, следовательно, при  $0 < \delta < \omega_0$ . При этих условиях разряд так же как и при  $r = 0$ , имеет колебательный характер, так как ток  $i = -I \sin \omega' t \cdot e^{-\delta t}$  периодически изменяет свой знак, но в отличие от случая  $r = 0$  амплитуда колебания постепенно затухает (рис. 235), так как  $e^{-\delta t}$  при  $\delta > 0$  с течением времени стремится к нулю. Таким образом, в рассматриваемом случае мы имеем

затухающий колебательный разряд, причем угловая частота его  $\omega'$ , называемая *угловой частотой собственных затухающих колебаний*, меньше угловой частоты собственных незатухающих колебаний, а именно,  $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} < \omega_0$  и, соответственно,  $T = \frac{2\pi}{\omega'} > T_0$ .

Следует отметить, что и в этом случае при малых значениях  $\frac{\delta}{\omega_0}$  для вычисления периода можно пользоваться формулой Томсона. Так, при  $\frac{\delta}{\omega_0} = 0,1$  эта формула дает точность 0,5%.

Разница между  $\omega_0$  и  $\omega'$  возрастает по мере увеличения отношения  $\frac{\delta}{\omega_0}$ , и при  $\delta = \omega_0$  мы имеем  $\omega' = 0$ , т. е. разряд теряет колебательный характер и переходит в апериодический.

Моменты наступления минимумов и максимумов тока при затухающем колебательном разряде имеют место при  $u_L = L \frac{di}{dt} = 0$ , а именно, первые наступают при  $\omega't = (4k + 1) \frac{\pi}{2} - \beta$ , а вторые при  $\omega't = (4k + 3) \frac{\pi}{2} - \beta$ ,

в то время как прохождение тока через нуль происходит при  $\sin \omega't = 0$ , т. е. при  $\omega't = k\pi$ . Следовательно, моменты прохождения тока через минимумы и максимумы сдвинуты относительно моментов прохождения тока через нуль на промежуток времени, отличающийся от четверти периода. Это отличие будет тем меньше, чем меньше  $\frac{\delta}{\omega'}$ . В частности, первый минимум тока наступает при  $\omega't = \frac{\pi}{2} - \beta < \frac{\pi}{2}$ , т. е. при  $t < \frac{T}{4}$ .

Для суждения о быстроте затухания колебания рассмотрим отношение  $\Delta$  двух последующих амплитуд одного знака, называемое *декрементом колебания*. Для декремента колебания имеем:

$$\Delta = Ie^{-\delta t} : Ie^{-\delta(t+T)} = e^{\delta T},$$

откуда следует, что затухание колебания происходит тем быстрее, чем больше величина  $\delta = \frac{r}{2L}$ . Для характеристики быстроты затухания колебательных процессов чаще применяют не декремент ко-

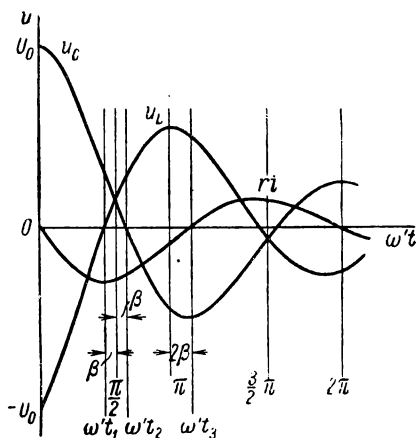


Рис. 235

лебания, а его натуральный логарифм, называемый *логарифмическим декрементом колебания*. Обозначив последний через  $\vartheta$ , имеем:

$$\vartheta = \ln \Delta = \delta T.$$

При  $\frac{\delta}{\omega_0} \approx 0$  или, что то же, при  $\omega' \approx \omega_0$ , получим:

$$\vartheta = \delta T \approx \frac{r}{2L} \cdot 2\pi \sqrt{LC} = \pi r : \sqrt{\frac{L}{C}} = \pi d,$$

где  $d = r : \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{2\vartheta}{\omega_0}$  — величина, введенная нами при рассмотрении явления резонанса и называемая *затуханием контура*.

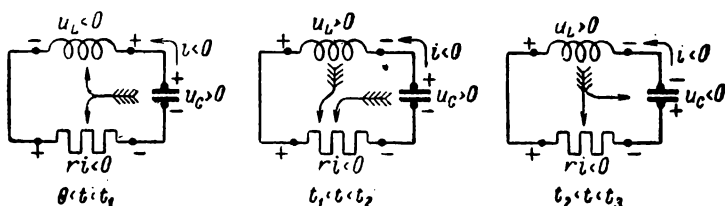


Рис. 236

Из выражений для  $u_L$  и  $u_C$ , полученных выше, видно, что  $u_L$  и  $u_C$  изменяются по законам, аналогичным закону изменения тока, т. е. что изменение их имеет характер затухающего периодического колебания, причем переходы  $u_L$  через нуль упреждают переходы тока через нуль на угол  $\frac{\pi}{2} + \beta$ , а переходы  $u_C$  через нуль отстают от переходов тока через нуль на тот же угол (рис. 235).

Энергетическая сторона процессов при  $\delta > 0$ , как и при  $\delta = 0$ , в основном состоит в колебании энергии между электрическим полем конденсатора и магнитным полем реактивной катушки, но эти колебания при  $\delta > 0$  сопровождаются рассеянием энергии.

На рис. 235 построены кривые  $ri$ ,  $u_L$  и  $u_C$  при  $\Delta = 4$ , чему соответствует  $\vartheta = \ln \Delta \approx 1,4$ ,  $\sin \beta = 0,223$  и  $\beta = 12^\circ 55'$ . На рис. 236 показаны направления тока, знаки напряжений и направления передачи энергии в различные интервалы времени в течение одного полупериода.

#### § 115. Включение цепи, обладающей индуктивностью и емкостью, под постоянное напряжение

Рассмотрим включение цепи ( $r$ ,  $L$ ,  $C$ ) под постоянное напряжение  $U = \text{const}$ . При этом предположим, что в начальный момент времени ток  $i$  в цепи и напряжение  $u_C$  на зажимах конденсатора равны нулю, т. е.  $i(0) = 0$  и  $u_C(0) = 0$ .

В рассматриваемом случае имеем:

$$L \frac{di}{dt} + ri + \frac{q}{C} = U \text{ и } L \frac{d^2i}{dt^2} + r \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0,$$

так как  $\frac{dU}{dt} = 0$ , и, следовательно, переходящий ток  $i''$  и переходящее напряжение  $u'_C = \frac{q''}{C}$  на зажимах конденсатора определяются теми же уравнениями, что и при разряде конденсатора (§ 114), а именно:

$$L \frac{d^2i''}{dt^2} + r \frac{di''}{dt} + \frac{1}{C} i'' = 0 \text{ и } u'_C = -L \frac{di''}{dt} - ri''.$$

Поэтому для  $i''$  и  $u'_C$  мы получим те же выражения, что и при разряде конденсатора, причем опять следует различать три случая:  $\delta > \omega_0$ ,  $\delta = \omega_0$  и  $\delta < \omega_0$ .

Так как при установившемся режиме ток в цепи равен нулю, т. е.  $i' = 0$ , а напряжение на зажимах конденсатора равно  $U$ , т. е.  $u'_C = U$ , то имеем:

$$i = i' + i'' = i'' \text{ и } u_C = u'_C + u''_C = U + u''_C.$$

При  $\delta > \omega_0$ , приняв во внимание, что  $i(0) = 0$ , получим:

$$i = i'' = A_1(e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t});$$

$$u_C = U + u''_C = U - L \frac{di''}{dt} - ri'' = U - LA_1(\alpha_1 e^{\alpha_1 t} - \alpha_2 e^{\alpha_2 t});$$

Так как  $u_C(0) = 0$ , то найдем:

$$A_1 = \frac{U}{(\alpha_1 - \alpha_2)L} = \frac{U}{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}$$

и, следовательно,

$$i = \frac{U}{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t});$$

$$u_C = U - \frac{U}{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (\alpha_1 e^{\alpha_1 t} - \alpha_2 e^{\alpha_2 t}).$$

Таким образом, закон изменения тока за исключением знака будет тот же, что и при разряде конденсатора, а напряжение на зажимах конденсатора, как нетрудно убедиться из исследования, аналогичного приведенному в § 114, будет монотонно возрастать, стремясь к пределу, равному  $U$  (рис. 237).

При  $\delta = \omega_0$  таким же путем получим:

$$i = \frac{U}{L} t e^{-\delta t}, \quad u_C = U - U(1 + \delta t) e^{-\delta t},$$

причем характер изменения  $i$  и  $u_C$  в этом предельном случае не будет отличаться от того, что мы имели при  $\delta > \omega_0$ .

При  $\delta < \omega_0$  процесс заряда конденсатора будет иметь колебательный характер, а именно, мы найдем:

$$i = \frac{U}{\omega' L} \sin \omega' t \cdot e^{-\delta t}; \quad u_C = U - U \frac{\omega_0}{\omega'} \cos(\omega' t - \beta) \cdot e^{-\delta t},$$

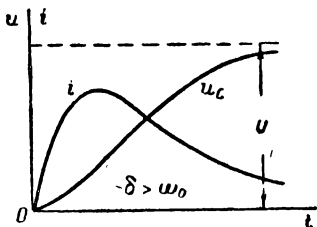


Рис. 237

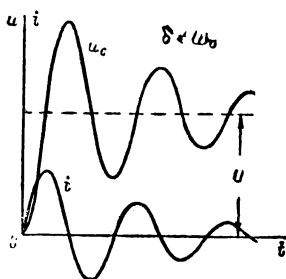


Рис. 238

где  $\beta = \arctg \frac{\delta}{\omega'}$ , причем  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ , а угловая частота колебания  $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ . При очень малом затухании, т. е. при  $\delta \ll \omega_0$  и  $\omega' \approx \omega_0$ , наибольшее значение, которое может иметь ток в цепи, будет близко к  $\frac{U}{\omega_0 L} = \frac{U}{\sqrt{L/C}}$ , а наибольшее значение, которое может иметь напряжение на зажимах конденсатора, будет близко к  $2U$  (рис. 238).

#### § 116. Включение цепи, обладающей индуктивностью и емкостью, под синусоидальное напряжение

Рассмотрим включение цепи ( $r$ ,  $L$ ,  $C$ ) под напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ . В этом случае имеем:

$$L \frac{di}{dt} + ri + \frac{q}{C} = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

Частное решение этого уравнения, дающее установившийся ток  $i'$ , будет, как известно,

$$i' = I_m \sin(\omega t + \psi_i),$$

причем

$$I_m = U_m : \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2};$$

$$\psi_i = \psi_u - \arctg \left[ \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) : r \right].$$

В соответствии с этим, для установившегося напряжения  $u'_C$  на зажимах конденсатора получим:

$$u'_C = \frac{I_m}{\omega C} \sin \left( \omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{I_m}{\omega C} \cos (\omega t + \psi_i).$$

Определение преходящего тока  $i''$  и преходящего напряжения  $u''_C$  на зажимах конденсатора приводится к решению уравнения без свободного члена, а именно:

$$L \frac{d^2 i''}{dt^2} + r \frac{di''}{dt} + \frac{1}{C} i'' = 0,$$

найденного в общем виде в § 114. Таким образом, задача нахождения тока  $i = i' + i''$  и напряжения  $u_C = u'_C + u''_C$  во время переходного процесса сводится к определению постоянных интегрирования, причем мы будем исходить из предположения, что в начальный момент времени ток в цепи и напряжение на зажимах конденсатора равны нулю, т. е.  $i(0) = 0$ ,  $u_C(0) = 0$ .

Из трех возможных случаев, а именно  $\delta > \omega_0$ ,  $\delta = \omega_0$  и  $\delta < \omega_0$ , где  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , мы остановимся на рассмотрении двух последних, так как при  $\delta > \omega_0$  ничего принципиально отличного от случая  $\delta = \omega_0$  не получается.

При  $\delta = \omega_0$  для преходящих тока и напряжения на зажимах конденсатора, приняв во внимание, что  $r = 2\delta L$ , имеем:

$$i'' = (A_3 + A_4 t) e^{-\delta t};$$

$$u''_C = -r i'' - L \frac{di''}{dt} = [-r (A_3 + A_4 t) + \delta L (A_3 + A_4 t) - L A_4] e^{-\delta t} =$$

$$= [-\delta L (A_3 + A_4 t) - L A_4] e^{-\delta t} = -L [\delta A_3 + (1 + \delta t) A_4] e^{-\delta t}.$$

Рассмотрим два случая: включение в момент прохождения установившегося тока через нуль ( $\psi_i = 0$ ) и включение в момент прохождения установившегося тока через максимальное значение ( $\psi_i = \frac{\pi}{2}$ ).

В случае  $\psi_i = 0$  найдем:

$$i = i' + i'' = I_m \sin \omega t + (A_3 + A_4 t) e^{-\delta t};$$

$$u_C = u'_C + u''_C = -\frac{I_m}{\omega C} \cos \omega t - L [\delta A_3 + (1 + \delta t) A_4] e^{-\delta t}.$$

Из условий  $i(0) = 0$  и  $u_C(0) = 0$  имеем:

$$0 = A_3; \quad 0 = -\frac{I_m}{\omega C} - L A_4; \quad A_4 = -\frac{I_m}{\omega L C} = -I_m \frac{\omega_0^2}{\omega},$$

и, следовательно,

$$i = I_m \sin \omega t - I_m \frac{\omega_0^2}{\omega} t e^{-\delta t}; \quad u_C = -\frac{I_m}{\omega C} \cos \omega t + \frac{I_m}{\omega C} (1 + \delta t) e^{-\delta t}.$$

При  $t = \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\omega_0}$  переходящий ток будет иметь наибольшее абсолютное значение, равное  $I_m \frac{\omega_0}{e\omega}$  и, следовательно, при  $\omega \ll \omega_0$

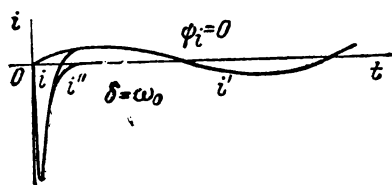


Рис. 239

во время переходного процесса получим толчок тока, значительно превосходящий амплитуду установившегося тока, если  $\psi_i \approx 0$  (рис. 239). Что касается переходящего напряжения на зажимах конденсатора, то при  $t = 0$  оно имеет наибольшее абсолютное значение, равное амплитуде  $\frac{I_m}{\omega C}$  установивше-

гося напряжения, и, следовательно, напряжение на зажимах конденсатора во время переходного процесса при принятых условиях не может превзойти удвоенной амплитуды установившегося напряжения.

Заметим, что эти выводы совпадают с выводами, полученными при рассмотрении цепи ( $r, C$ ). Действительно, при  $\omega \ll \omega_0$  мы имеем  $\omega L \ll \frac{1}{\omega C}$  и можем уподобить нашу цепь цепи ( $r, C$ ).

В случае  $\psi_i = \frac{\pi}{2}$  найдем:

$$i = i' + i'' = I_m \cos \omega t + (A_3 + A_4 t) e^{-\delta t};$$

$$u_C = u'_C + u''_C = \frac{I_m}{\omega C} \sin \omega t - L [\delta A_3 + (1 + \delta t) A_4] e^{-\delta t}.$$

Из условий  $i(0) = 0$  и  $u_C(0) = 0$  имеем:

$$0 = I_m + A_3; \quad A_3 = -I_m; \quad 0 = \delta A_3 + A_4, \quad A_4 = \delta I_m$$

и, следовательно,

$$i = I_m \cos \omega t - I_m (1 - \delta t) e^{-\delta t};$$

$$u_c = \frac{I_m}{\omega C} \sin \omega t - LI_m \delta^2 t e^{-\delta t} = \frac{I_m}{\omega C} \sin \omega t - \frac{I_m}{\omega C} \omega t \cdot e^{-\delta t},$$

если принять во внимание, что  $\delta^2 = \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ .

Преходящий ток имеет наибольшее абсолютное значение, равное  $I_m$ , при  $t = 0$ , и, следовательно, при принятых условиях ток во время переходного процесса не может превзойти удвоенной амплитуды установившегося тока. Что касается преходящего напряжения на зажимах конденсатора, то при  $t = \frac{1}{\delta}$  оно имеет наибольшее абсолютное значение, равное  $\frac{I_m}{\omega C} \cdot \frac{\omega}{e \omega_0}$ , откуда следует, что при  $\omega \gg \omega_0$  напряжение на зажимах конденсатора при переходном процессе может значительно превзойти амплитуду напряжения установившегося режима, если  $\psi_i \approx \pm \frac{\pi}{2}$  (рис. 240).

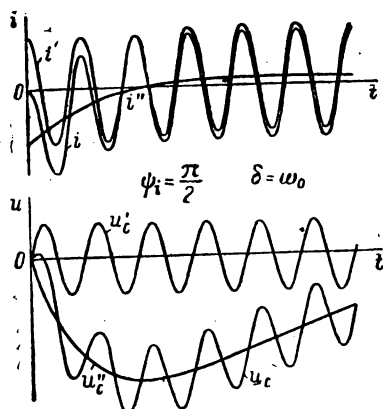


Рис. 240

Перейдем к рассмотрению случая, наиболее часто встречающегося на практике, а именно  $\delta < \omega_0$ .

Для преходящего тока имеем:

$$i'' = (A_5 \sin \omega' t + A_6 \cos \omega' t) e^{-\delta t}.$$

Положив

$$A_5 = I \cos \vartheta; \quad A_6 = I \sin \vartheta,$$

мы можем привести это выражение к виду:

$$i'' = I \sin (\omega' t + \vartheta) e^{-\delta t}.$$

Тогда для преходящего напряжения на зажимах конденсатора, приняв во внимание, что  $r = 2\delta L$ , получим:

$$\begin{aligned} u_c'' &= -r i'' - L \frac{di''}{dt} = -r I \sin (\omega' t + \vartheta) e^{-\delta t} - \\ &- \omega' L I \cos (\omega' t + \vartheta) e^{-\delta t} + \delta L I \sin (\omega' t + \vartheta) e^{-\delta t} = \\ &= -L I [\omega' \cos (\omega' t + \vartheta) + \delta \sin (\omega' t + \vartheta)] e^{-\delta t} \end{aligned}$$



и далее, полагая  $\frac{\delta}{\omega'} = \operatorname{tg} \beta$ , причем  $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ , найдем:

$$u'_C = -LI \sqrt{\omega'^2 + \delta^2} \cos(\omega't + \vartheta - \beta) e^{-\delta t} = - \\ -\omega_0 LI \cos(\omega't + \vartheta - \beta) e^{-\delta t} = -\frac{I}{\omega_0 C} \cos(\omega't + \vartheta - \beta) e^{-\delta t}.$$

Таким образом, при переходном процессе на синусоидальные установившиеся ток и напряжение на зажимах конденсатора налагаются переходящие затухающие колебания, угловая частота которых равна  $\omega'$ . Мы остановимся более подробно только на тех случаях, когда  $\delta \ll \omega'$  и, следовательно,  $\operatorname{tg} \beta = \frac{\delta}{\omega'} \approx 0$  и  $\beta \approx 0$ , так как наиболее опасные процессы могут получаться именно при этом условии. Полагая  $\beta = 0$ , получим:

$$i = i' + i'' = I_m \sin(\omega t + \psi_i) + I \sin(\omega't + \vartheta) e^{-\delta t}; \\ u_C = u'_C + u''_C = -\frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t + \psi_i) - \frac{I}{\omega_0 C} \cos(\omega't + \vartheta) e^{-\delta t}.$$

Приняв во внимание, что  $i(0) = 0$  и  $u_C(0) = 0$ , найдем:

$$0 = I_m \sin \psi_i + I \sin \vartheta; \quad 0 = -\frac{I_m}{\omega C} \cos \psi_i - \frac{I}{\omega_0 C} \cos \vartheta;$$

$$I \sin \vartheta = -I_m \sin \psi_i; \quad I \cos \vartheta = -\frac{\omega_0}{\omega} I_m \cos \psi_i.$$

откуда

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\omega}{\omega_0} \operatorname{tg} \psi_i; \\ I = -I_m \sqrt{\sin^2 \psi_i + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \cos^2 \psi_i},$$

если углы  $\vartheta$  и  $\psi_i$  взять в одной и той же четверти. Окончательно имеем:

$$i = I_m \left[ \sin(\omega t + \psi_i) - \sqrt{\sin^2 \psi_i + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \cos^2 \psi_i} \sin(\omega't + \vartheta) e^{-\delta t} \right]; \\ u_C = -\frac{I_m}{\omega C} \left[ \cos(\omega t + \psi_i) - \right. \\ \left. - \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \sin^2 \psi_i + \cos^2 \psi_i} \cos(\omega't + \vartheta) e^{-\delta t} \right].$$

Рассмотрим случай *изохронизма*, когда угловая частота  $\omega$  приложенного напряжения равна  $\omega'$ . Так как при  $\delta \ll \omega'$  мы имеем  $\omega' \approx \omega_0$ , то

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\omega}{\omega_0} \operatorname{tg} \psi_i \approx \frac{\omega}{\omega'} \operatorname{tg} \psi_i = \operatorname{tg} \psi_i \quad \text{и} \quad \vartheta \approx \psi_i$$

и, следовательно,

$$i = I_m (1 - e^{-\delta t}) \sin(\omega t + \psi_i); \quad u_C = -\frac{I_m}{\omega C} (1 - e^{-\delta t}) \cos(\omega t + \psi_i).$$

Из последних выражений видно, что  $i$  и  $u_C$  в данном случае представляют собою колебания с угловой частотой  $\omega = \omega' \approx \omega_0$ , амплитуды которых постепенно нарастают, асимптотически приближаясь к конечным значениям, равным амплитудам при установившемся режиме (рис. 241). Таким образом, если затухание мало, то при изохронизме значения  $i$  и  $u_C$  во время переходного процесса не превосходят значений, имеющих место при установившемся режиме. Однако следует иметь в виду, что при малом затухании условие изохронизма  $\omega = \omega'$  почти в точности совпадает с условием резонанса  $\omega = \omega_0$ , и значения тока в цепи и напряжения на зажимах конденсатора при установившемся режиме в этом случае сами по себе очень велики.

Если  $\omega$  близка к  $\omega'$ , но не совпадает с нею, то хотя и в этом случае  $\vartheta \approx \psi_i$ , но характер переходного процесса будет иной, чем при изохронизме. Так как затухание мало, то для выяснения характера переходного процесса можно положить  $\delta = 0$ . Тогда получим:

$$i = I_m [\sin(\omega t + \psi_i) - \sin(\omega' t + \psi_i)] = 2I_m \sin \frac{\omega - \omega'}{2} t \cos \left( \frac{\omega + \omega'}{2} t + \psi_i \right),$$

$$\begin{aligned} u_C &= -\frac{I_m}{\omega C} [\cos(\omega t + \psi_i) - \cos(\omega' t + \psi_i)] = \\ &= 2 \frac{I_m}{\omega C} \sin \frac{\omega - \omega'}{2} t \sin \left( \frac{\omega + \omega'}{2} t + \psi_i \right) \end{aligned}$$

и можем рассматривать  $i$  и  $u_C$  как синусоидальные функции времени, угловая частота которых равна  $\frac{\omega + \omega'}{2} \approx \omega \approx \omega'$  и амплитуды которых гармонически изменяются с угловой частотой, равной  $\frac{\omega - \omega'}{2}$ , т. е. будем иметь случай *биения колебаний*. Вследствие наличия затухания биения постепенно прекращаются, и режим пере-

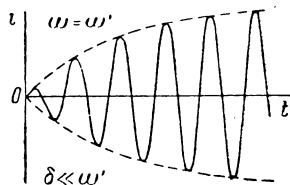


Рис. 241

ходит в установившийся (рис. 242). При этом в начальный период процесса  $i$  и  $u_C$  могут иметь значения, близкие к удвоенным амплитудам установившегося тока и напряжения, так как оба составляющих колебания, противоположных друг другу при  $t = 0$ , вскоре после этого совпадают друг с другом. Таким образом, переходные режимы в случаях, близких к изохронизму, более опасны, чем при изохронизме.

Переходя к рассмотрению случаев, когда частота напряжения, приложенного к зажимам цепи, значительно отличается от частоты собственных колебаний цепи, заметим, что в этих случаях на характер переходных процессов существенное влияние оказывает

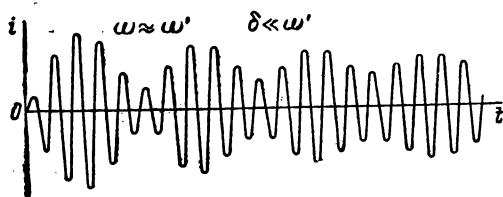


Рис. 242

начальная фаза, в то время как при  $\omega \approx \omega'$  процессы включения от нее почти не зависят. Рассмотрим два предельных случая, а именно:

$$\psi_i = 0 \text{ и } \psi_i = \frac{\pi}{2}.$$

При  $\psi_i = 0$  имеем  $\vartheta = 0$  и, следовательно,

$$i = I_m \left( \sin \omega t - \frac{\omega_0}{\omega} \sin \omega' t \cdot e^{-\delta t} \right); \quad u_C = -\frac{I_m}{\omega C} (\cos \omega t - \cos \omega' t \cdot e^{-\delta t}).$$

Из этих выражений следует, что при включении цепи в момент, когда установившийся ток равен нулю, напряжение на зажимах конденсатора не может превысить амплитуду установившегося напряжения более чем в два раза, но ток в цепи может превзойти амплитуду установившегося тока весьма значительно, а именно приблизительно в  $\frac{\omega_0}{\omega}$  раз, если  $\omega \ll \omega' \approx \omega_0$ , что большей частью и имеет место (рис. 243).

При  $\psi_i = \frac{\pi}{2}$  имеем  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  и, следовательно,

$$i = I (\cos \omega t - \cos \omega' t \cdot e^{-\delta t}); \quad u_C = \frac{I_m}{\omega C} \left( \sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega' t \cdot e^{-\delta t} \right).$$

Из этих выражений видно, что если  $\omega \ll \omega' \approx \omega_0$ , то при включении цепи в момент перехода установившегося тока через максимум

ток в цепи во время переходного процесса не может превзойти амплитуду установившегося тока более чем в два раза, а напряжение на зажимах конденсатора мало отличается от установившегося напряжения (рис. 244).

Из выражений для  $i$  и  $u_c$  при любом значении  $\psi_i$ , а также из сопоставления двух рассмотренных случаев нетрудно заключить, что при  $\omega \ll \omega_0$  во время переходного процесса перенапряжений, превышающих более чем в два раза амплитуду установившегося

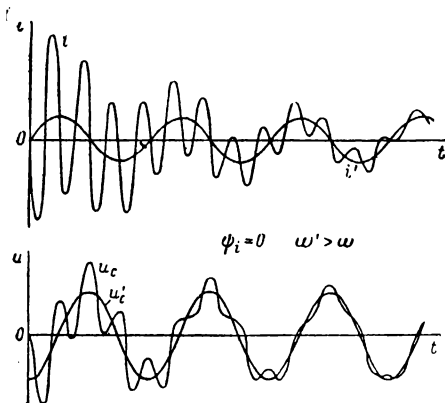


Рис. 243

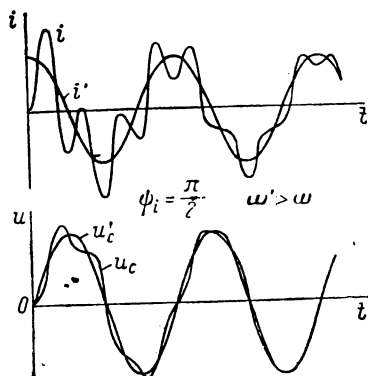


Рис. 244

напряжения, не возникает, но могут возникать сверхтоки. При этом наиболее опасен случай  $\psi_i = 0$ .

Наоборот, при  $\omega \gg \omega_0$  во время переходного процесса не будет токов, превышающих более чем в два раза амплитуду установившегося тока, но перенапряжения могут достигать значительной величины, причем наиболее неблагоприятно обстоятельства складываются, если включение происходит при  $\psi_i = \pm \frac{\pi}{2}$ , т. е. в момент, когда установившийся ток по абсолютной величине имеет наибольшее значение.

## § 117. Включение цепей под действие напряжения произвольного вида

Рассматривая вопрос о включении сколь угодно сложной цепи с постоянными параметрами под действие постоянного напряжения  $U = \text{const}$ , для тока  $i$  в этой цепи во время переходного процесса можно написать:

$$i = F(t) = U \cdot Y(t),$$

где  $Y(t)$  — функция времени и параметров цепи, не зависящая от величины напряжения  $U$ . Эту функцию времени  $Y(t)$ , имеющую

размерность проводимости, мы назовем *переходной проводимостью* цепи. Покажем, что, зная эту функцию, можно определить ток во время переходного процесса при включении рассматриваемой цепи под действие напряжения  $u(t)$ , являющегося любой функцией времени. Заметим, что если цепь включается под действие напряжения  $U = \text{const}$  в некоторый момент времени  $t = x > 0$  (рис. 245), то для тока  $i$  мы получим:

$$i = U \cdot Y(t-x).$$

Пусть цепь с переходной проводимостью  $Y(t)$  включается под действие напряжения  $u(t)$ , график которого дан на рис. 246. В пер-

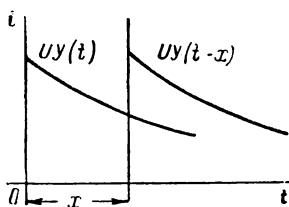


Рис. 245

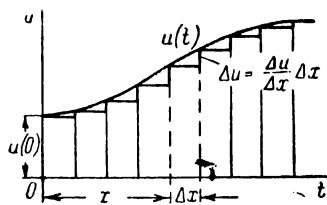


Рис. 246.

вом приближении это напряжение  $u(t)$  можно заменить напряжением, изображенным на том же рисунке ступенчатой кривой, ступеньки которой следуют друг за другом через промежутки времени, равные  $\Delta x$ . Тогда ток при переходном процессе можно найти, пользуясь принципом наложения, как сумму тока, вызываемого постоянным напряжением  $u(0)$  и равного  $u(0) \cdot Y(t)$ , и токов, вызываемых рядом постоянных напряжений, включаемых друг за другом через промежутки времени, равные  $\Delta x$ . Величина этих постоянных напряжений изображается соответствующими вертикальными отрезками, образующими ступенчатую кривую, и для величины напряжения, включаемого в момент  $x + \Delta x$ , т. е. для элементарного скачка напряжения  $\Delta u$ , мы имеем:

$$\Delta u = \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta x.$$

Поэтому приближенно для тока  $i(t)$  во время переходного процесса получим:

$$i(t) \approx u(0) Y(t) + \sum_{x=0}^{x=t} Y(t-x-\Delta x) \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta x.$$

Точное выражение для тока  $i(t)$  мы найдем, уменьшая промежутки времени  $\Delta x$  и переходя в пределе к бесконечно малым промежуткам времени  $dx$ , в результате чего получим:

$$i(t) = u(0) Y(t) + \int_{x=0}^{x=t} Y(t-x) u'(x) dx,$$

где

$$u'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du(t)}{dt_{t=x}}$$

Пользуясь этим выражением, носящим наименование интеграла Дюамеля, можно свести решение сложной задачи о включении цепи

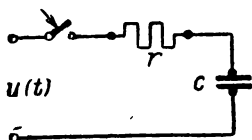


Рис. 247

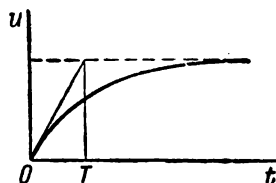


Рис. 248

под действие напряжения любого вида к более простой задаче о включении той же цепи под действие постоянного напряжения.

В виде примера рассмотрим включение изображенной на рис. 247 цепи ( $r$ ,  $C$ ) под действие напряжения  $u = U(1 - e^{-\frac{t}{T}})$ . На рис. 248 показана кривая изменения напряжения  $u$  на зажимах цепи. Постоянная  $T$  определяет скорость нарастания этого напряжения. В частности, при  $T = 0$  имеем ранее рассмотренный случай включения этой цепи под постоянное напряжение  $U = \text{const}$ .

Имеем:

$$u(0) = 0; \quad u'(t) = \frac{U}{T} e^{-\frac{t}{T}} \quad \text{и} \quad u'(x) = \frac{U}{T} e^{-\frac{x}{T}}.$$

Для данной цепи, согласно найденному в § 112 решению при рассмотрении включения ее под постоянное напряжение, переходная проводимость имеет выражение:

$$Y(t) = \frac{1}{r} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{и} \quad Y(t-x) = \frac{1}{r} e^{-\frac{t}{\tau}} e^{\frac{x}{\tau}},$$

где  $\tau = rC$  — постоянная времени цепи.

Пользуясь интегралом Дюамеля, находим:

$$\begin{aligned} i(t) &= \int_0^t \frac{1}{r} e^{-\frac{t}{\tau}} e^{\frac{x}{\tau}} \frac{U}{T} e^{-\frac{x}{T}} dx = \frac{U}{rT} e^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^t \left( e^{\frac{1}{\tau} - \frac{1}{T}} \right)^x dx = \\ &= \frac{U}{r} \frac{\tau}{T - \tau} \left( e^{-\frac{t}{T}} - e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \end{aligned}$$

Потери энергии, выделяемой в виде тепла, в сопротивлении за все время заряда конденсатора, равны:

$$Q = \int_0^{\infty} i^2 r dt = \frac{U^2}{r} \frac{\tau^2}{(T - \tau)^2} \int_0^{\infty} \left( e^{-\frac{2t}{T}} - 2e^{-\left(\frac{1}{T} + \frac{1}{\tau}\right)t} + e^{-\frac{2t}{\tau}} \right) dt =$$

$$= \frac{U^2}{r} \left( \frac{\tau}{T - \tau} \right)^2 \left( \frac{T}{2} - 2 \frac{\tau T}{\tau + T} + \frac{\tau}{2} \right) = \frac{U^2}{2r} \frac{\tau^2}{\tau + T} = \frac{U^2 C}{2} \frac{\tau}{\tau + T}.$$

Отсюда находим отношение этих потерь к энергии, запасаемой в конденсаторе:

$T/\tau$	$a$	$\eta$
0	1	0,5
1	0,5	0,67
2	0,33	0,75
4	0,20	0,833
$\infty$	0	1

$$a = \frac{Q}{\frac{CU^2}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{T}{\tau}},$$

и коэффициент полезного действия заряда конденсатора

$$\eta = \frac{CU^2/2}{CU^2/2 + Q} = \frac{1}{1 + a}.$$

В приведенной таблице даны значения величин  $a$  и  $\eta$  в функции  $T/\tau$ .

Отсюда мы видим, что  $\eta$  при включении конденсатора под постоянное напряжение получается только 50% независимо от величины  $r$ . Чем меньше  $r$ , тем быстрее совершается заряд, но вместе с тем возрастает ток заряда, так что энергия, выделяемая в сопротивлении, оказывается не зависящей от  $r$ . Однако, снижая скорость повышения приложенного напряжения, можно повысить величину  $\eta$ , и при бесконечно медленном увеличении напряжения коэффициент полезного действия получается равным 100% при любом конечном значении  $r$ .

### § 118. Понятие об операторном методе

При изучении переходных процессов мы пользовались классическим методом интегрирования линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Как впервые показал в 1862 г. М. Вашенко-Захарченко, эти уравнения могут быть проинтегрированы также символическим или *операторным методом*. Хевисайд применил этот метод в конце предыдущего столетия к расчету переходных процессов в электрических цепях. При этом Хевисайд, не ссылаясь на предыдущие математические работы в этой области, не приводил и математического обоснования метода. Существенный вклад в развитие операторного метода, а также его практических приложений в последующем был сделан рядом ученых, среди которых видное место принадлежит советским ученым:

В. С. Игнатовскому, А. М. Эфросу, А. М. Данилевскому, М. Ю. Юрьеву, М. И. Конторовичу, А. И. Лурье, К. А. Кругу и др.

Сущность операторного метода состоит в сведении дифференцирования и интегрирования данной функции — *оригинала* — к простым алгебраическим операциям над *изображением* этой функции. В этом отношении операторный метод сходен с символическим методом.

Переходя к определению изображения данной функции  $f(t)$ , мы напомним, что все функции, с которыми приходится иметь дело в технических приложениях, удовлетворяют условиям Дирихле, т. е. за любой конечный промежуток времени имеют конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов. Мы предположим, кроме того, что при  $t > 0$  модуль функции  $f(t)$  растет медленнее, чем некоторая показательная функция, т. е. что можно указать такие не зависящие от  $t$  положительные числа  $A$  и  $\alpha$ , что  $|f(t)| < Ae^{\alpha t}$ . Тогда лапласов интеграл функции

$f(t)$ , а именно  $\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$ , где  $p$  — комплексное число, вещественная часть которого больше  $\alpha$ , имеет конечное значение.

Условимся называть изображением данной функции  $f(t)$  вещественного переменного  $t$  функцию  $F(p)$  комплексного переменного  $p$ , определяемую равенством:

$$F(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt,$$

и при этом условии будем писать:

$$F(p) \doteq f(t) \text{ или } f(t) \doteq F(p).$$

Заметим, что приведенное выше изображение  $F(p)$  функции  $f(t)$  называется изображением по Карсону. Нередко рассматривают в качестве изображения функции  $f(t)$  функцию  $\Phi(p)$ , равную:

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{p} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt,$$

т. е. отличающуюся от  $F(p)$  только отсутствием перед интегралом множителя  $p$ . Этот интеграл называется интегралом Лапласа и, соответственно, такое преобразование именуют преобразованием по Лапласу. Функция  $\Phi(p)$  носит название преобразованной по Лапласу или изображением по Лапласу функции  $f(t)$ .

Каждый способ изображений имеет свои достоинства, которые будут отмечены дальше (§ 119 и § 123).

В последующем мы будем пользоваться преобразованием по Карсону.



Найдем связь между изображением  $F(p)$  функции  $f(t)$  и изображениями ее производной  $f'(t)$  и интеграла  $\int_0^t f(t)dt$ .

Для изображения производной, интегрируя по частям, получим:

$$\begin{aligned} f'(t) &\doteq p \int_0^\infty e^{-pt} f'(t) dt = p \int_0^\infty e^{-pt} df(t) = \\ &= p[e^{-pt} f(t)]_0^\infty + p^2 \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt. \end{aligned}$$

Так как при условиях, наложенных на  $f(t)$ ,  $[e^{-pt} f(t)]_{t=\infty} = 0$ , то

$$f'(t) \doteq p[F(p) - f(0)].$$

Отсюда в важном частном случае, когда  $f(0) = 0$ , для изображения производной имеем:

$$f'(t) \doteq pF(p).$$

При разыскании изображения  $\Psi(p)$  интеграла функции  $f(t)$  введем обозначения:

$$\int_0^t f(t) dt = \psi(t) \doteq \Psi(p).$$

Тогда  $\psi'(t) = f(t)$  и  $\psi(0) = 0$ , и, с одной стороны, мы имеем  $\psi'(t) = f(t) \doteq F(p)$ , а с другой стороны,  $\psi'(t) \doteq p[\Psi(p) - \psi(0)] = p\Psi(p)$ , т. е.  $p\Psi(p) = F(p)$ , и, следовательно,

$$\int_0^t f(t) dt \doteq \frac{1}{p} F(p).$$

Выведенные соотношения являются основными, и из них следует, что  $p$  можно рассматривать как *оператор*, умножая на который изображение данной функции, мы получим изображение ее производной, если  $f(0) = 0$ , и деля на который изображение данной функции, мы получим изображение ее интеграла.

Пусть не только рассматриваемая функция  $f(t)$ , но и все ее производные до  $(n-1)$ -го порядка включительно равны нулю при  $t = 0$ . Тогда для изображения производной  $n$ -го порядка найдем:

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p).$$

Если данная функция и ее производные не обращаются в нуль при  $t = 0$ , то для изображения производных имеем:

$$\begin{aligned} f'(t) &\doteq p[F(p) - f(0)], \\ f''(t) &\doteq p^2[F(p) - f(0)] - pf'(0) = p^2 \left[ F(p) - f(0) - \frac{f'(0)}{p} \right] \end{aligned}$$

и для изображения производной  $n$ -го порядка получим:

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n \left[ F(p) - f(0) - \frac{f'(0)}{p} - \frac{f''(0)}{p^2} - \dots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{p^{n-1}} \right].$$

Пусть нам известны изображения нескольких функций:

$$f_1(t) \doteq F_1(p), \quad f_2(t) \doteq F_2(p), \quad \dots,$$

$$f_k(t) \doteq F_k(p), \quad \dots, \quad f_n(t) \doteq F_n(p).$$

Тогда из основных свойств определенных интегралов имеем:

$$\sum_{k=1}^n f_k(t) \doteq \sum_{k=1}^n F_k(p),$$

т. е. изображение суммы функций равно сумме изображений слагаемых. Кроме того, из основных свойств определенных интегралов при  $A = \text{const}$  имеем:

$$Af(t) \doteq AF(p),$$

т. е. при умножении функции на постоянный коэффициент ее изображение также должно быть умножено на этот коэффициент.

### § 119. Изображения простейших функций

Найдем изображения функций, наиболее часто встречающихся при рассмотрении переходных процессов.

Пусть  $f(t) = A = \text{const}$ . Тогда

$$F(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} A dt = -A \int_0^{\infty} e^{-pt} d(-pt) = -A \left[ e^{-pt} \right]_0^{\infty} = A$$

и, следовательно,

$$A \doteq A.$$

т. е. изображением постоянной величины является эта же самая величина.

Пусть  $f(t) = e^{\alpha t}$ . Тогда

$$F(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{\alpha t} dt = \frac{p}{p - \alpha} \int_0^{\infty} e^{-(p-\alpha)t} d(p-\alpha)t = \frac{p}{p - \alpha}$$

и, следовательно,

$$e^{\alpha t} \doteq \frac{p}{p - \alpha} \quad \text{и} \quad e^{j(\omega t + \psi)} \doteq \frac{pe^{j\psi}}{p - j\omega}.$$

На основании этого результата получим:

$$\begin{aligned}
 1 - e^{-\delta t} &\doteq 1 - \frac{p}{p + \delta} = \frac{\delta}{p + \delta}; \\
 \operatorname{sh} \alpha t &= \frac{1}{2} (e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}) \doteq \frac{1}{2} \left( \frac{p}{p - \alpha} - \frac{p}{p + \alpha} \right) = \frac{\alpha p}{p^2 - \alpha^2}; \\
 \operatorname{ch} \alpha t &= \frac{1}{2} (e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}) \doteq \frac{1}{2} \left( \frac{p}{p - \alpha} + \frac{p}{p + \alpha} \right) = \frac{p^2}{p^2 - \alpha^2}; \\
 \sin \omega t &= \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \doteq \frac{1}{2j} \left( \frac{p}{p - j\omega} - \frac{p}{p + j\omega} \right) = \frac{\omega p}{p^2 + \omega^2}; \\
 \cos \omega t &= \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \doteq \frac{1}{2} \left( \frac{p}{p - j\omega} + \frac{p}{p + j\omega} \right) = \frac{p^2}{p^2 + \omega^2}; \\
 \sin(\omega t + \psi) &\doteq \frac{p^2 \sin \psi + p\omega \cos \psi}{p^2 + \omega^2}; \\
 \cos(\omega t + \psi) &\doteq \frac{p^2 \cos \psi - p\omega \sin \psi}{p^2 + \omega^2}
 \end{aligned}$$

и аналогичным путем можем найти:

$$\begin{aligned}
 \sin \omega t \cdot e^{-\delta t} &\doteq \frac{\omega p}{(p + \delta)^2 + \omega^2}; \\
 \cos \omega t \cdot e^{-\delta t} &\doteq \frac{p(p + \delta)}{(p + \delta)^2 + \omega^2}; \\
 t \cdot e^{-\delta t} &\doteq \frac{p}{(p + \delta)^2}.
 \end{aligned}$$

Заметим, что для разыскания изображений функций по их оригиналам и оригиналов по их изображениям обычно пользуются готовыми таблицами.

Приведенные формулы дают изображение  $F(p)$  по Карсону. Очевидно, изображение  $\Phi(p) = F(p)/p$  по Лапласу получается из этих формул делением их на  $p$ .

Достоинством преобразования по Карсону является то, что при нем размерность изображения совпадает с размерностью оригинала. В частности, постоянная величина  $A$  изображается через самое себя. При использовании же преобразования по Лапласу размерность изображения равна размерности изображаемой функции, умноженной на размерность времени, так как произведение  $pt$  в выражении  $e^{-pt}$  должно быть безразмерной величиной и, соответственно,  $1/p$  имеет размерность времени. В частности, постоянная величина  $A$  имеет изображение по Лапласу, равное  $A/p$ .

В силу сказанного, в последнее время находит широкое применение преобразование по Карсону, хотя часто применяется также и преобразование по Лапласу.

### § 120. Обобщение законов Ома и Кирхгофа

Рассмотрим цепь ( $r$ ,  $L$ ,  $C$ ). Пусть эта цепь включается под действие напряжения  $u = u(t)$ . Тогда имеем:

$$L \frac{di}{dt} + ri + \frac{q}{C} = u$$

или

$$L \frac{di}{dt} + ri + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0) = u,$$

так как  $q = \int_0^t i dt + q(0)$  и  $u_C(0) = \frac{1}{C} q(0)$ , причем  $q(0)$  и  $u_C(0)$  — заряд конденсатора и напряжение на его зажимах в начальный момент времени.

Переходя от  $i(t)$  и  $u(t)$  к их изображениям  $I(p)$  и  $U(p)$ , получим

$$pLI(p) - pLi(0) + rI(p) + \frac{1}{pC} I(p) + u_C(0) = U(p),$$

откуда найдем:

$$I(p) = \frac{U(p) + pLi(0) - u_C(0)}{pL + r + \frac{1}{pC}}.$$

или

$$I(p) = \frac{U(p) + pLi(0) - u_C(0)}{Z(p)}.$$

Величину, стоящую в знаменателе и обозначенную через  $Z(p)$ , мы назовем *обобщенным сопротивлением* цепи. Ее называют также *операторным сопротивлением*.

Заметим, что комплексное сопротивление рассматриваемой цепи  $Z = j\omega L + r + \frac{1}{j\omega C}$  имеет такую же структуру, как и обобщенное сопротивление  $Z(p) = pL + r + \frac{1}{pC}$ , и может быть получено из последнего путем замены  $p$  на  $j\omega$ , т. е.  $Z = Z(j\omega)$ . В частности,  $Z(0)$ , которое мы получим из  $Z(p)$ , полагая  $p = 0$ , представляет собой сопротивление цепи постоянному току.

Выражение

$$I(p) = \frac{U(p) + pLi(0) - u_C(0)}{Z(p)}$$

представляет собою закон Ома, обобщенный на случай переходного процесса. В частном случае при *нулевых начальных условиях*, т. е. при  $i(0)=0$  и  $u_C(0)=0$ , имеем:

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)}.$$

Первый закон Кирхгофа в применении к узлу цепи:

$$\sum i_k = 0,$$

для действительных токов, можно записать в операторной форме в виде:

$$\sum I_k(p) = 0.$$

Соответственно, второй закон Кирхгофа в применении к контуру цепи:

$$\sum e_k = \sum u_k,$$

где  $e_k$  — сумма э. д. с. источников энергии в  $k$ -той ветви и  $u_k$  — напряжение на  $k$ -той ветви, можно записать также в операторной форме:

$$\sum E_k(p) = \sum U_k(p).$$

Пользуясь обобщенным выражением закона Ома, вместо  $U_k(p)$  можем подставить следующее выражение:

$$U_k(p) = I_k(p) Z_k(p) - pL_k i_k(0) + u_{Ck}(0).$$

Следовательно, второй закон Кирхгофа в операторной форме имеет вид:

$$\sum E_k(p) = \sum [I_k(p) Z_k(p) - pL_k i_k(0) + u_{Ck}(0)].$$

В частном случае при нулевых начальных условиях имеем:

$$\sum E_k(p) = \sum I_k(p) Z_k(p).$$

Обратим внимание, что при нулевых начальных условиях закон Ома и второй закон Кирхгофа в операторной форме имеют вид, совпадающий с тем, который они имеют при установившемся режиме. В общем же случае должны учитываться начальные значения токов в катушках и напряжений на зажимах конденсаторов, так как от их значений зависят переходные процессы.

Заметим, что величины —  $pL_k i_k(0)$  и  $u_{Ck}(0)$  могут рассматриваться как *изображения* начальной э. д. с. самоиндукции и начального напряжения на зажимах конденсатора, так как изображения постоянных величин равны этим постоянным величинам.

Из рассмотрения двух последовательно соединенных цепей  $(r_1, L_1, C_1)$  и  $(r_2, L_2, C_2)$ , нетрудно усмотреть, что

$$Z(p) = p(L_1 + L_2) + (r_1 + r_2) + \frac{1}{p} \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = Z_1(p) + Z_2(p),$$

т. е. что обобщенное сопротивление  $Z(p)$  цепи, состоящей из двух последовательно соединенных участков, равно сумме обобщенных сопротивлений этих участков, что легко можно распространить на случай любого числа последовательно соединенных участков.

При параллельном соединении двух цепей  $(r_1, L_1, C_1)$  и  $(r_2, L_2, C_2)$ , обозначая токи в них через  $i_1$  и  $i_2$ , для тока  $i$  в неразветвленной части цепи имеем  $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$ , и так как изображение суммы равно сумме изображений, то при нулевых начальных условиях

$$I(p) = I_1(p) + I_2(p) = \frac{U(p)}{Z_1(p)} + \frac{U(p)}{Z_2(p)} = U(p) \left[ \frac{1}{Z_1(p)} + \frac{1}{Z_2(p)} \right].$$

Следовательно, обобщенное сопротивление  $Z(p)$  цепи, состоящей из двух параллельных ветвей, определяется при этих условиях из соотношения:

$$\frac{1}{Z(p)} = \frac{1}{Z_1(p)} + \frac{1}{Z_2(p)}$$

и вводя понятие обобщенной проводимости цепи  $Y(p) = \frac{1}{Z(p)}$ , имеем:

$$Y(p) = Y_1(p) + Y_2(p),$$

где  $Y_1(p) = \frac{1}{Z_1(p)}$  и  $Y_2(p) = \frac{1}{Z_2(p)}$  — обобщенные проводимости параллельных ветвей. Обобщенные проводимости называют также *операторными проводимостями*. Таким образом, обобщенная проводимость цепи, состоящей из двух ветвей, при нулевых начальных условиях, равна сумме обобщенных проводимостей этих ветвей, что легко можно распространить на случай любого числа параллельно соединенных ветвей.

Из изложенного следует, что правила вычисления обобщенных сопротивлений и обобщенных проводимостей для последовательного, параллельного и смешанного соединения при нулевых начальных условиях те же, что и для вычисления комплексов полных сопротивлений и полных проводимостей. Поэтому обобщенные сопротивления и проводимости таких цепей при этих условиях имеют тот же вид, что и соответствующие комплексы полных сопротивлений и полных проводимостей, и последние из первых можно получить путем замены  $p$  на  $j\omega$ .

Для определения тока переходного процесса  $i(t)$  следует найти изображение  $U(p)$  напряжения  $u(t)$ , под действие которого вклю-

мается рассматриваемая цепь, и определить обобщенное сопротивление цепи  $Z(p)$ . В дальнейшем при нулевых начальных условиях задача сводится к определению функции  $i(t)$  по ее изображению  $I(p) = U(p) : Z(p)$ .

Пусть, например, цепь  $(r, L)$  включается под действие постоянного напряжения  $u(t) = U = \text{const}$  и  $i(0) = 0$ . Так как в этом случае  $U(p) = U$  и  $Z(p) = pL + r$ , то имеем:

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{U}{pL + r} = \frac{U}{r} \frac{r/L}{p + r/L} = \frac{U}{r} \left[ 1 - \frac{p}{p + r/L} \right]$$

и, следовательно,

$$i(t) = \frac{U}{r} \left[ 1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right],$$

как это вытекает из найденного ранее изображения функции  $e^{at}$ .

При включении цепи  $(r, C)$  под действием напряжения  $u(t) = U = \text{const}$  при  $u_C(0) = 0$  имеем:

$$I(p) = \frac{U}{r + \frac{1}{pC}} = \frac{U}{r} \frac{p}{p + \frac{1}{rC}}.$$

Следовательно:

$$i(t) = \frac{U}{r} e^{-\frac{t}{rC}}.$$

Наконец при включении цепи  $(r, L, C)$  под действие напряжения  $u(t) = U = \text{const}$  при  $i(0) = 0$  и  $u_C(0) = 0$  получаем:

$$\begin{aligned} I(p) &= \frac{U}{r + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{U}{L} \frac{p}{p^2 + \frac{r}{L}p + \frac{1}{LC}} = \\ &= \frac{U}{L} \frac{p}{\left(p + \frac{r}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC} - \left(\frac{r}{2L}\right)^2} = \frac{U}{\omega' L} \frac{\omega' p}{(p + \delta)^2 + \omega'^2}, \end{aligned}$$

где обозначено  $\delta = \frac{r}{2L}$ ,  $\omega'^2 = \omega_0^2 - \delta^2$  и  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ .

Пользуясь результатами, полученными в § 119, где были найдены изображения некоторых функций, имеем:

$$i(t) = \frac{U}{\omega' L} \sin \omega' t \cdot e^{-\delta t},$$

что совпадает с выражением, полученным в § 115 для случая  $\delta < \omega_0$ . Если  $\delta > \omega_0$ , то  $\omega'^2 = -(\delta^2 - \omega_0^2) < 0$  и  $\omega' = j\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ .

Следовательно:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{U}{jL\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} e^{-\delta t} \sin j\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t = \\ &= \frac{U}{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} e^{-\delta t} \left( e^{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} - e^{-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} \right) = \\ &= \frac{U}{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (e^{a_1 t} - e^{a_2 t}), \end{aligned}$$

что также совпадает с полученным в § 115 выражением.

Наконец при  $\delta = \omega_0$  имеем  $\omega' = 0$ . Раскрывая неопределенность

$$\left( \frac{\sin \omega' t}{\omega'} \right)_{\omega' \rightarrow 0} = \left( \frac{t \cos \omega' t}{1} \right)_{\omega' \rightarrow 0} = t.$$

получаем для этого предельного случая

$$i(t) = \frac{U}{L} t e^{-\delta t}.$$

Преимущества операторного метода, как и преимущества символического метода, особенно резко сказываются в случае сложных цепей. При рассмотрении сложных цепей, а также при ненулевых начальных условиях, для установления связи между изображениями э. д. с. и токов необходимо составить систему уравнений на основе законов Кирхгофа. Для этой цели, в частности, можно воспользоваться методом контурных токов. При этом, составляя на основе второго закона Кирхгофа уравнение для какого-либо контура, при ненулевых начальных условиях к сумме внешних э. д. с., действующих в этом контуре  $k$ , следует добавить начальные напряжения, уравнивающие э. д. с. самоиндукции и взаимной индукции, т. е. сумму членов вида  $pL_k i_k(0)$  и  $pM_{ks} i_s(0)$ , а также взятые со знаком минус начальные напряжения на конденсаторах, т. е. сумму членов вида  $-u_{Ck}(0)$ . Решая полученную систему уравнений, можно найти изображение любого интересующего нас тока или напряжения. Для цепей с сосредоточенными параметрами эти изображения представляют собою рациональные дроби.

Следует иметь в виду, что при применении операторного метода можно пользоваться всеми способами расчета сложных цепей, рассмотренных во второй главе. Особо следует заметить, что при ненулевых начальных условиях, пользуясь принципом наложения, можно сначала решить задачу для нулевых начальных условий,



а затем на полученные результаты наложить те результаты, которые получаются только от действия одних начальных напряжений.

Из всего изложенного следует, что определение переходных токов и напряжений операторным методом сводится к нахождению изображений искомых величин и к отысканию соответствующих оригиналов. Первая из этих задач не представляет особых затруднений, в то время как при решении второй задачи иногда приходится встречаться со значительными трудностями. Существуют общие методы решения этой задачи, но во многих случаях при помощи несложных приемов удается свести изображение искомой функции к известным изображениям простейших функций, и тогда решение задачи не вызывает затруднений.

В заключение заметим, что при применении операторного метода не требуется определять, как это необходимо в изложенном в начале этой главы классическом методе, постоянных интегрирования из начальных условий, так как эти начальные условия записываются в самих исходных уравнениях в операторной форме. Но, естественно, все начальные условия и здесь должны быть полностью учтены.

### § 121. Теорема разложения

Одним из наиболее важных методов приведения изображений к простейшему виду является *теорема разложения*, к выводу которой для цепей с сосредоточенными параметрами, когда изображения представляют собою рациональные дроби, мы и перейдем.

Напишем изображение тока в виде:

$$I(p) = p \frac{G(p)}{H(p)},$$

где  $G(p)$  и  $H(p)$  — полиномы, степени которых равны, соответственно,  $m$  и  $n$ , причем  $m < n$ . Пусть  $H(p)$  не имеет кратных корней и корней, равных корням  $G(p)$ . Тогда, разлагая  $\frac{G(p)}{H(p)}$  на простейшие дроби, найдем:

$$\frac{G(p)}{H(p)} = \frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2} + \dots + \frac{A_n}{p-p_n} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p-p_k},$$

где  $p_1, p_2, \dots, p_n$  — корни  $H(p)$ . Для определения коэффициента  $A_k$  умножим обе части равенства на  $(p-p_k)$  и положим  $p = p_k$ . При этом справа мы получим  $A_k$ , а слева — неопределенность, раскрывая которую, найдем:

$$A_k = G(p_k) \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{p-p_k}{H(p)} = \frac{G(p_k)}{H'(p_k)}.$$

Следовательно,

$$I(p) = p \frac{G(p)}{H(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k p}{p - p_k} = \sum_{k=1}^n \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} \cdot \frac{p}{p - p_k},$$

и так как  $\frac{p}{p - p_k} \doteq e^{p_k t}$ , то для тока  $i(t)$  имеем:

$$i(t) = \sum_{k=1}^n \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} \cdot e^{p_k t}.$$

Полученное равенство и выражает теорему разложения, в соответствии с которой ток переходного процесса  $i(t)$  можно найти как сумму показательных функций времени, умноженных на постоянные коэффициенты, если изображение тока  $I(p)$  представляет собою рациональную дробь, удовлетворяющую указанным выше условиям. Если при этом один из корней  $H(p)$  равен нулю, то соответствующая показательная функция обращается в постоянную величину.

Решим при помощи теоремы разложения некоторые вопросы, рассмотренные нами ранее. Пусть конденсатор емкостью  $C$  замыкается на цепь  $(r, L)$ , причем  $u_C(0) = U_0$  и  $i(0) = 0$ . В этом случае

$Z(p) = pL + r + \frac{1}{pC}$ , и мы имеем:

$$I(p) = \frac{U(p) - u_C(0)}{Z(p)} = \frac{-U_0}{pL + r + \frac{1}{pC}} = \frac{-pCU_0}{p^2LC + prC + 1},$$

т. е.

$$G(p) = -CU_0 \text{ и } H(p) = p^2LC + prC + 1.$$

Рассматривая случай  $\delta > \omega_0$ , где  $\delta = \frac{r}{2L}$  и  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ , для двух корней  $H(p)$  получим:

$$p_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}; \quad p_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

Кроме того, имеем:

$$H'(p) = 2pLC + rC = 2LC(p + \delta)$$

и, следовательно,  $\frac{G(p)}{H'(p)} = \frac{-U_0}{2L(p + \delta)}$ . В соответствии с этим по теореме разложения найдем:

$$i(t) = \frac{G(p_1)}{H'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{G(p_2)}{H'(p_2)} e^{p_2 t} = -\frac{U_0}{2L \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}).$$

В случае  $\delta = \omega_0$  получаются кратные корни, и теоремой разложения воспользоваться непосредственно нельзя. Для решения задачи в этом случае обратимся к результату, полученному при  $\delta > \omega_0$ , и найдем предел, к которому он стремится, когда  $\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = x$  стремится к нулю. Тогда получим:

$$i(t) = -\frac{U_0}{2L} \lim_{\omega_0 \rightarrow \delta} \frac{e^{p_1 t} - e^{p_2 t}}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} = -\frac{U_0}{2L} e^{-\delta t} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{tx} - e^{-tx}}{x} = -\frac{U_0}{L} t e^{-\delta t}.$$

В качестве примера определения переходного тока в разветвленной цепи рассмотрим включение под постоянное напряжение  $U$  цепи, состоящей из двух участков, первый из которых обладает сопротивлением  $r_1$ , а второй представляет собою параллельное соединение конденсатора емкостью  $C$  и сопротивления  $r_2$  (рис. 227). Для этой цепи имеем:

$$Z(p) = r_1 + \left( \frac{1}{pC} r_2 \right) : \left( \frac{1}{pC} + r_2 \right) = \frac{r_1 + r_2 + pr_1 r_2 C}{1 + pr_2 C}$$

и для изображения тока  $i_1$  в неразветвленной части цепи получим:

$$I_1(p) = \frac{U}{Z(p)} = \frac{U(1 + pr_2 C)}{r_1 + r_2 + pr_1 r_2 C}.$$

Так как в этом случае  $G(p) = U(1 + pr_2 C)$ ,  $H(p) = p(r_1 + r_2 + pr_1 r_2 C)$ ,  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = -\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 C}$ ,  $H'(p) = r_1 + r_2 + 2pr_1 r_2 C$ , то по теореме разложения найдем:

$$i_1(t) = \frac{G(p_1)}{H'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{G(p_2)}{H'(p_2)} e^{p_2 t} = \frac{U}{r_1 + r_2} + \frac{U r_2}{r_1(r_1 + r_2)} e^{p_2 t},$$

после чего можно определить токи  $i_2$  и  $i_C$  в ветвях из соотношений  $i_2 r_2 = U - i_1 r_1$  и  $i_C = i_1 - i_2$ .

В заключение рассмотрим включение цепи ( $r$ ,  $L$ ) под синусоидальное напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$  при условии  $i(0) = 0$ . Изобразим напряжение  $u$  комплексом  $\dot{U}(t) = \dot{U}_m e^{j\omega t}$ , где  $\dot{U}_m = U_m e^{j\psi}$ . Тогда, приняв во внимание, что  $Z(p) = pL + r$  и  $\dot{U}_m e^{j\omega t} \doteq U(p) = \dot{U}_m \frac{p}{p - j\omega}$ , имеем:

$$\dot{I}(t) \doteq I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{p \dot{U}_m}{(p - j\omega)(pL + r)}$$

и, следовательно, в нашем случае  $G(p) = \dot{U}_m$ ,  $H(p) = (p - j\omega)(pL + r)$ ,  $p_1 = j\omega$ ,  $p_2 = -r/L$ ,  $H'(p) = 2pL + r - j\omega L$ . В соответствии с этим по теореме разложения получим:

$$\dot{I}(t) = \frac{G(p_1)}{H'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{G(p_2)}{H'(p_2)} e^{p_2 t} = \frac{\dot{U}_m}{r + j\omega L} e^{j\omega t} - \frac{\dot{U}_m}{r + j\omega L} e^{-\frac{r}{L} t}$$

и, переходя от комплексного выражения мгновенного значения тока  $\dot{I}(t)$  к  $i(t)$ , найдем:

$$i(t) = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}} \left[ \sin(\omega t + \psi - \varphi) - \sin(\psi - \varphi) \cdot e^{-\frac{r}{L} t} \right].$$

## § 122. Интеграл Фурье

Наряду с рассмотренными выше классическим и операторным методами анализа переходных процессов может быть применен метод, в котором используются выражения токов и напряжений, являющихся функциями времени, с помощью интеграла Фурье. Сущность этого метода заключается в представлении непериодических функций в виде суммы бесконечного множества синусоидальных функций с бесконечно малыми амплитудами и с частотами, имеющими все возможные значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Как будет видно из дальнейшего, такое разложение непериодических функций имеет много общего с разложением периодических несинусоидальных функций в ряд Фурье. Смысл такого разложения по сути дела тот же, что и при анализе процессов в линейных цепях, находящихся под действием периодического несинусоидального напряжения. Осуществляя такое разложение непериодического напряжения на синусоидальные составляющие, мы получаем возможность, пользуясь хорошо известными приемами расчета токов в цепи при синусоидальных напряжениях, найти токи в цепи от действия отдельных составляющих напряжения, а затем получить результирующий ток, пользуясь методом наложения. Этому вопросу посвящается настоящий и два последующих параграфа.

Представление непериодических функций времени в виде интеграла Фурье можно получить, исходя из уже известного нам разложения периодических функций в ряд Фурье. С этой целью сначала представим ряд Фурье в комплексной форме.

В § 88 было указано, что всякую периодическую функцию с периодом  $T$ , удовлетворяющую условиям Дирихле, можно представить в виде ряда Фурье с вещественными членами:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} (B_k \sin k\omega_1 t + C_k \cos k\omega_1 t).$$

Величины  $A_0$ ,  $B_k$  и  $C_k$  могут быть выражены формулами:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) dt; \quad B_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega_1 t dt;$$

$$C_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega_1 t dt,$$

причем  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$  — угловая частота первой гармоники.

Пользуясь выражениями:

$$\sin \alpha = \frac{1}{2} j(-e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) \text{ и } \cos \alpha = \frac{1}{2} (e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}),$$

можем написать:

$$B_k \sin k\omega_1 t + C_k \cos k\omega_1 t = \frac{1}{2} [(C_k - jB_k) e^{jk\omega_1 t} + (C_k + jB_k) e^{-jk\omega_1 t}].$$

Из формул для  $C_k$  и  $B_k$  имеем:

$$C_k - jB_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt,$$

$$C_k + jB_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{jk\omega_1 t} dt.$$

Следовательно:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} (B_k \sin k\omega_1 t + C_k \cos k\omega_1 t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{T} e^{jk\omega_1 t} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{T} e^{-jk\omega_1 t} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{jk\omega_1 t} dt =$$

$$= \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{T} e^{jq\omega_1 t} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-jq\omega_1 t} dt + \sum_{q=-\infty}^{q=-1} \frac{1}{T} e^{jq\omega_1 t} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-jq\omega_1 t} dt.$$

Здесь произведена замена в первой сумме  $k$  на  $q$ , а во второй сумме  $k$  на  $(-q)$  с целью получить одинаковые выражения под знаками обеих сумм. Естественно, чтобы вторая сумма при этом не изменилась, суммирование в ней необходимо произвести по значениям  $q$  от  $-\infty$  до  $-1$ , что соответствует суммированию по значениям  $k$  от  $+1$  до  $+\infty$ .

Учитывая, что

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) dt = \left[ \frac{1}{T} e^{jq\omega_1 t} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-jq\omega_1 t} dt \right]_{q=0}.$$

можем представить  $f(t)$  в виде:

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{T} \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} e^{jq\omega_1 t} \Phi(jq\omega_1), \\ \text{где} \quad \Phi(jq\omega_1) &= \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-jq\omega_1 t} dt. \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

Полученное выражение для  $f(t)$  представляет собой ряд Фурье в комплексной форме. В этом выражении каждой  $k$ -той гармонике отвечает сумма двух сопряженных членов (при  $q = +k$  и при  $q = -k$ ), равная удвоенной вещественной части каждого из этих членов:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} e^{jk\omega_1 t} \Phi(jk\omega_1) + \frac{1}{T} e^{-jk\omega_1 t} \Phi(-jk\omega_1) &= \\ &= \operatorname{Re} \left[ \frac{2}{T} \Phi(jk\omega_1) e^{jk\omega_1 t} \right]. \end{aligned}$$

Обозначив  $\Phi(jk\omega_1) = \Phi(k\omega_1) e^{j\alpha_k}$ ,  
имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[ \frac{2}{T} \Phi(jk\omega_1) e^{jk\omega_1 t} \right] &= \frac{2}{T} \Phi(k\omega_1) \cos(k\omega_1 t + \alpha_k) = \\ &= \frac{2}{T} \Phi(k\omega_1) \sin(k\omega_1 t + \psi_k), \end{aligned}$$

где  $\psi_k = \frac{\pi}{2} + \alpha_k$ .

Таким образом, величина

$$\frac{2}{T} \Phi(k\omega_1) e^{j\psi_k} = j \frac{2}{T} \Phi(k\omega_1) e^{j\alpha_k} = j \frac{2}{T} \Phi(jk\omega_1)$$

представляет собой комплексную амплитуду  $k$ -той гармоники.

Соотношения (\*) можно рассматривать как взаимно обратные преобразования, устанавливающие соответствие между  $f(t)$  и  $\Phi(jq\omega_1)$ . Функция  $\Phi(jq\omega_1)$  представляет собой дискретный спектр функции  $f(t)$ . Модули ее, умноженные на  $\frac{2}{T}$ , дают значения амплитуд гармоник, порядок которых  $k = |q|$ .

Предположим теперь, что  $f(t)$  — *непериодическая* функция. Чтобы получить ее выражение, пригодное для любого значения  $t$ , на основании вышеприведенных выражений (\*), будем рассматривать данную непериодическую функцию  $f(t)$  как периодическую с бесконечно большим периодом.

При беспредельном возрастании  $T$  разность  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$  между угловыми частотами любых двух смежных гармоник, равная угловой частоте  $\omega_1$  первой гармоники, будет стремиться к нулю. Соответственно, дискретное множество значений частот  $q\omega_1$  перейдет в непрерывно изменяющуюся частоту  $\omega$ .

Перепишав первое выражение (\*) в виде:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} e^{jq\omega_1 t} \Phi(jq\omega_1) \Delta\omega$$

и устремляя  $\Delta\omega$  к нулю, получим:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} \Phi(j\omega) d\omega, \quad (**)$$

т. е. ряд Фурье переходит при этом в *интеграл Фурье*.

При этом функция  $\Phi(j\omega)$  определится на основании второго выражения (\*) в виде:

$$\Phi(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (***)$$

Соотношение (\*\*\*) называют *прямым преобразованием Фурье*, позволяющим найти по заданной функции  $f(t)$  ей соответствующую  $\Phi(j\omega)$ .

Соотношение (\*\*) называют *обратным преобразованием Фурье*, дающим возможность по известной функции  $\Phi(j\omega)$  найти  $f(t)$ .

Следует здесь же сделать существенную оговорку, что преобразование (\*\*) имеет смысл, если интеграл в его левой части

имеет определенное конечное значение. Для этого недостаточно, чтобы  $f(t)$  удовлетворяла условиям Дирихле. В дополнение к ним является достаточным, чтобы  $f(t)$  была абсолютно интегрируема, в пределах  $-\infty$ ,  $+\infty$ , т. е. чтобы существовал интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt.$$

Это, как правило, означает, что  $f(t)$  должна стремиться к 0 при  $t \rightarrow \infty$  и при  $t \rightarrow -\infty$ .

Если рассматривать включение электрической цепи в момент  $t = 0$  под действие э. д. с.  $e(t) = f(t)$ , то имеем условие  $f(t) = 0$  при  $t < 0$ , а следовательно, соотношение (\*\*\*) принимает в этом случае вид:

$$\Phi(j\omega) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt,$$

и называется при этом *односторонним прямым преобразованием Фурье*.

Функция  $\Phi(j\omega) = \Phi(\omega) e^{j\alpha(\omega)}$  называется *спектральной характеристикой функции  $f(t)$* , так как она представляет собой непрерывный спектр функции  $f(t)$ .

Обозначения  $\Phi(\omega)$  и  $\alpha(\omega)$  показывают, что модуль  $\Phi$  и аргумент  $\alpha$  величины  $\Phi(j\omega)$  являются функциями угловой частоты  $\omega$ .

Соотношение (\*\*) показывает, что непериодическая функция, удовлетворяющая вышеуказанным условиям, может быть представлена как сумма бесконечно большого числа гармонических составляющих с бесконечно малыми амплитудами  $\frac{1}{2\pi} \Phi(\omega) d\omega$  и с частотами, занимающими весь диапазон от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Величина  $\Phi(\omega)$ , характеризующая зависимость амплитуды от частоты, называется *амплитудно-частотной характеристикой*. Величина  $\alpha(\omega)$ , характеризующая зависимость начальной фазы  $\psi = \frac{\pi}{2} + \alpha$  от частоты, называется *фазо-частотной характеристикой*.

Так как спектральная характеристика

$$\Phi(j\omega) = \frac{\frac{1}{2\pi} \Phi(\omega) e^{j\alpha(\omega)} d\omega}{d\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)}$$

представляет деленную на  $j$  комплексную амплитуду гармонической составляющей, отнесенную к единице изменения частоты  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ , то ее называют также *спектральной плотностью функции  $f(t)$* .



Замечая, что  $\Phi(j\omega)$  и  $\Phi(-j\omega)$  являются сопряженными комплексными величинами, можем написать для их модулей и фаз:

$$\Phi(\omega) = \Phi(-\omega); \quad \alpha(\omega) = -\alpha(-\omega).$$

Следовательно,  $\Phi(\omega)$  является четной функцией  $\omega$ , а  $\alpha(\omega)$  — нечетной функцией. Поэтому, представив подынтегральную величину в выражении (\*\*) в виде:

$$e^{j\omega t} \Phi(j\omega) = \Phi(\omega) \cos(\omega t + \alpha) + j\Phi(\omega) \sin(\omega t + \alpha),$$

будем иметь:

$$e^{j\omega t} \Phi(j\omega) + e^{-j\omega t} \Phi(-j\omega) = 2\Phi(\omega) \cos(\omega t + \alpha),$$

и, следовательно, выражение (\*\*) можно переписать в форме:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Phi(\omega) \cos[\omega t + \alpha(\omega)] d\omega,$$

представляющей собой *интеграл Фурье* (обратное преобразование Фурье) *в тригонометрической форме*. Последнее выражение со всей ясностью показывает, что непериодическую функцию, удовлетворяющую отмеченным выше условиям, можно рассматривать как сумму бесконечного множества гармонических составляющих с бесконечно малыми амплитудами  $\frac{1}{\pi} \Phi(\omega) d\omega$  и начальными фазами

$\psi(\omega) = \frac{\pi}{2} + \alpha(\omega)$ . То, что амплитуды в этом случае оказались в два раза больше, чем выше при рассмотрении выражения (\*\*) есть результат того, что в последнем выражении  $\omega$  изменяется от 0 до  $+\infty$ , а не от  $-\infty$  до  $+\infty$ , и соответственно гармоники с частотами  $\omega$  и  $(-\omega)$ , содержащиеся в выражении (\*\*), просуммированы в последнем выражении.

### § 123. Получение спектральных характеристик заданной функции времени

Сопоставляя прямое одностороннее преобразование Фурье:

$$\Phi(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

с преобразованием по Лапласу

$$\Phi(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt,$$

мы видим, что первое есть частный случай второго при  $p = j\omega$ . Иными словами, одностороннее преобразование Фурье получается из преобразования по Лапласу предельным переходом, когда в последнем вещественная часть комплексной переменной  $p$  стремится к нулю.

Иногда в этом усматривают преимущество преобразования по Лапласу по сравнению с преобразованием по Карсону, от которого непосредственно не получается такой переход к прямому одностороннему преобразованию Фурье. Преобразование по Карсону необходимо сначала разделить на  $p$  и затем уже осуществить этот переход.

В начале § 118 было сказано, что преобразование по Лапласу пригодно для всех функций  $f(t)$ , удовлетворяющих условиям Дирихле, хотя бы и возрастающих неограниченно по абсолютному значению с увеличением  $t$ , лишь бы могли быть указаны такие не зависящие от  $t$  положительные числа  $A$  и  $\alpha$ , что  $|f(t)| < Ae^{\alpha t}$ . В предыдущем параграфе было указано, что преобразование Фурье применимо для значительно более ограниченного класса функций. Оно, во всяком случае, применимо для функций, удовлетворяющих условиям Дирихле и абсолютно интегрируемых в пределах от 0 до  $\infty$ , которые стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .

Возможность указанного перехода от преобразования Лапласа к преобразованию по Фурье, соответственно, ограничена классом функций, для которых преобразование возможно по Фурье. Однако и это весьма ценно, так как мы можем благодаря этому не производить интегрирования для вычисления  $\Phi(j\omega)$ , а воспользовавшись готовыми таблицами для  $\Phi(p)$  [или для  $F(p) = p\Phi(p)$ ], имеющимися в справочниках, заменить в выражениях  $\Phi(p)$  величину  $p$  на  $j\omega$ .

Пусть, например, напряжение изменяется во времени по закону  $u(t) = U_0 e^{-\beta t}$ . Согласно таблице в § 119, имеем:

$$U_0 e^{-\beta t} \doteq \frac{U_0 p}{\beta + p} = F(p) = p\Phi(p),$$

и, следовательно, спектральная характеристика функции  $U_0 e^{-\beta t}$  имеет вид:

$$\Phi(j\omega) = U(j\omega) = \frac{U_0}{\beta + j\omega} = \frac{U_0}{\sqrt{\beta^2 + \omega^2}} e^{-j \arctg \frac{\omega}{\beta}},$$

т. е.

$$\Phi(\omega) = U(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{\beta^2 + \omega^2}} \quad \text{и} \quad \alpha(\omega) = \alpha_u(\omega) = -\arctg \frac{\omega}{\beta}.$$

Обозначение  $U(\omega)$  и индекс « $u$ » у  $\alpha$  означают, что эти величины относятся к напряжению. Величины, относящиеся к току, будем обозначать, соответственно,  $I(\omega)$  и  $\alpha_i(\omega)$ .

На рис. 249 изображены амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики функции  $u(t) = U_0 e^{-\delta t}$ .

Согласно той же таблице в § 119 в качестве другого примера имеем:

$$u(t) = U_0 e^{-\delta t} \sin \omega_0 t \doteq \frac{U_0 \omega_0 p}{(p + \delta)^2 + \omega_0^2} = p \Phi(p).$$

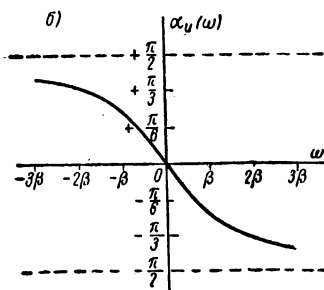
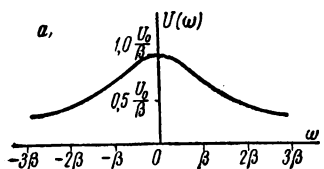


Рис. 249

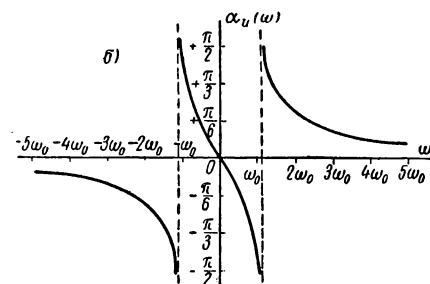
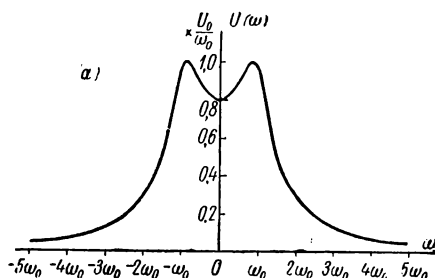


Рис. 250

Следовательно, спектральная характеристика для этой функции имеет вид:

$$\Phi(j\omega) = U(j\omega) = \frac{U_0 \omega_0}{(\delta + j\omega)^2 + \omega_0^2},$$

т. е.

$$U(\omega) = \frac{U_0 \omega_0}{V(\delta^2 + \omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2};$$

$$\alpha_u(\omega) = -\arctg \frac{2\delta\omega}{\delta^2 + \omega_0^2 - \omega^2}.$$

На рис. 250 изображены спектральные характеристики этой функции при  $\delta = 0,5 \omega_0$ .

Получим, в виде третьего примера, спектральную характеристику прямоугольного импульса напряжения (рис. 251) прямым интегри-

рованием согласно выражению (\*\*\*) . Имеем  $f(t) = u(t) = U_0$  при  $-a \leq t \leq +a$  и  $f(t) = u(t) = 0$  при  $|t| > a$ . Получаем:

$$U(j\omega) = \int_{-a}^{+a} U_0 e^{-j\omega t} dt = \frac{U_0}{-j\omega} (e^{-j\omega a} - e^{j\omega a}) = 2U_0 \frac{\sin a\omega}{\omega},$$

т. е.  $U(\omega) = 2U_0 \left| \frac{\sin a\omega}{\omega} \right|$ .

На рис. 252 приведена амплитудно-частотная характеристика этой функции.

Величина  $\alpha_u(\omega)$  изменяется скачком на  $\pi$  при каждом изменении знака величины  $\frac{\sin a\omega}{\omega}$ .

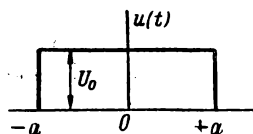


Рис. 251

Разложение непериодических э. д. с. в непрерывный спектр синусоидальных составляющих находит широкое применение в импульсной технике, в радиотехнике, в технике автоматического

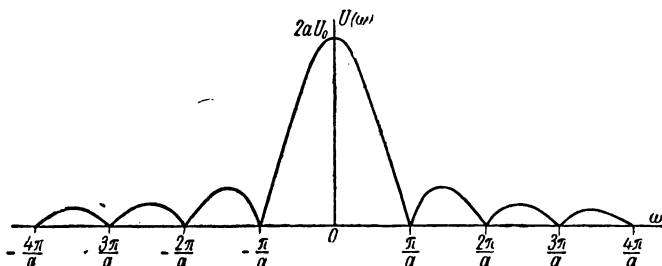


Рис. 252

регулирования, так как, располагая таким спектром и зная зависимость параметров цепи от частоты, можно определить характер воздействия такой э. д. с. на рассматриваемую цепь.

## § 124. Применение интеграла Фурье к расчету переходных процессов

Метод интеграла Фурье для расчета переходных процессов в линейных электрических цепях заключается в следующем.

Пусть цепь включается в момент  $t = 0$  под действие напряжения  $u(t)$  при нулевых начальных условиях, причем функция  $u(t)$  удовлетворяет условиям, при которых интеграл Фурье существует. Используя прямое одностороннее преобразование Фурье

$$U(j\omega) = \int_0^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt,$$

находим спектральную характеристику  $U(j\omega)$ .

Зная комплексное сопротивление цепи  $Z(j\omega)$  как функцию частоты, можем получить спектральную характеристику тока в цепи:

$$I(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{Z(j\omega)} = I(\omega) e^{j\alpha_i(\omega)},$$

причем  $Z(j\omega) = z(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = r(\omega) + jx(\omega)$ .

Искомый переходный ток находится с помощью обратного преобразования Фурье:

$$i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} I(j\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

или с помощью того же преобразования в тригонометрической форме:

$$i(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} I(\omega) \cos[\omega t + \alpha_i(\omega)] d\omega.$$

Сам по себе этот путь расчета не представляет каких-либо существенных преимуществ по сравнению с изложенным в предыдущих параграфах операторным методом и, кроме того, применимость его ограничена более узким классом функций. Правда, это ограничение в ряде важных случаев можно обойти, используя следующий прием. Например, важные случаи включения цепи под действие постоянного или синусоидального напряжений не могут быть непосредственно исследованы с помощью интеграла Фурье, так как функции  $f(t) = A = \text{const}$  и  $f(t) = A \sin(\omega t + \psi)$  не удовлетворяют

условию абсолютной интегрируемости, т. е. интеграл  $\int_0^{\infty} |f(t)| dt$ , взятый от их абсолютных значений, не существует. Однако, если эти функции умножить на  $e^{-\beta t}$ , где  $\beta > 0$ , то они становятся абсолютно интегрируемыми. Спектральные характеристики функции  $Ae^{-\beta t}$  и функции  $Ae^{-\beta t} \sin(\omega t + \psi)$  при  $\psi = 0$  даны в приведенных в предыдущем параграфе примерах. Пусть переходный процесс в цепи, в рассматриваемом случае ток в цепи, практически полностью затухает за промежуток времени  $\Delta t$ . Выберем величину  $\beta$  столь малой, чтобы  $e^{-\beta \Delta t}$  весьма мало отличалось от единицы. При этом и  $e^{-\beta t}$  весьма мало отличается от единицы на всем интервале изменения времени  $0 < t < \Delta t$ . В таком случае решение, полученное в результате умножения заданной функции  $f(t)$  на  $e^{-\beta t}$ , будет мало отличаться от искомого решения, которое получается при  $\beta \rightarrow 0$ , т. е. при  $e^{-\beta t} \rightarrow 1$ .

Существенное преимущество метода интеграла Фурье обнаруживается при нахождении тока  $i(t)$  по заданному напряжению  $u(t)$ , когда мы имеем практически осуществленную сложную линейную электрическую цепь или вообще какое-либо сложное устрой-

ство с линейными электрическими элементами и располагаем возможностью снять экспериментально зависимость входного комплексного сопротивления цепи от частоты, т. е. получить экспериментально зависимости  $z(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  или, соответственно,  $r(\omega)$  и  $x(\omega)$ .

Вычислив с помощью прямого преобразования Фурье спектральную характеристику  $U(j\omega) = U(\omega) e^{j\alpha_u(\omega)}$  заданной функции  $u(t)$  и пользуясь опытными данными для  $z(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$ , можно определить спектральную характеристику тока:

$$I(\omega) = \frac{U(\omega)}{z(\omega)}; \quad \alpha_i(\omega) = \alpha_u(\omega) - \varphi(\omega).$$

Искомый ток  $i(t)$  можно тогда определить из последнего выражения, выполняя интегрирование хотя бы тем или иным приближенным методом.

Заметим, что между вещественной и мнимой составляющими спектральной характеристики  $\Phi(j\omega)$  существует связь, а соответственно в определенных случаях существует связь и между амплитудно-частотными и фазо-частотными характеристиками. Это видно хотя бы из того, что  $\Phi(\omega) = \Phi(-\omega)$  и  $\alpha(\omega) = -\alpha(-\omega)$  и, следова-

тельно,  $\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega) \sin[\omega t + \alpha(\omega)] d\omega = 0$ , что и может рассматриваться как интегральное уравнение, выражающее связь между  $\Phi(\omega)$  и  $\alpha(\omega)$ .

Если в соответствии со сказанным существует связь между  $U(\omega)$  и  $\alpha_u(\omega)$ , а также между  $I(\omega)$  и  $\alpha_i(\omega)$ , то должна существовать связь и между  $z(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  или, соответственно, между  $r(\omega)$  и  $x(\omega)$ . Для ряда систем оказывается возможной и разработана методика определения  $\varphi(\omega)$  по  $z(\omega)$ . В таком случае достаточно снять экспериментально только характеристику  $z(\omega)$ , что значительно проще экспериментального получения характеристики  $\varphi(\omega)$ .

Так как экспериментальная зависимость  $z(j\omega)$  может быть получена только при изменении частоты от нуля до определенного значения  $\omega'$ , то необходимо быть уверенным, что мы не допускаем заметной ошибки, вычисляя  $i(t)$  по формуле обратного преобразования Фурье в этом ограниченном диапазоне вместо всего диапазона  $0 < \omega < \infty$ . Некоторой оценкой достаточности верхнего предела частоты  $\omega'$  при экспериментальном получении частотных характеристик может служить условие, чтобы модули  $y(\omega) = 1/z(\omega)$  при этой частоте  $\omega'$  приближались к нулю, при дополнительном условии, что на основе каких-либо соображений можно быть уверенным, что при дальнейшем увеличении  $\omega$  они не будут вновь возрастать.

Наконец заметим, что указанные приемы расчета переходных процессов пригодны для нулевых начальных условий. Это видно хотя бы из того, что соотношение  $I(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{z(j\omega)}$  соответствует со-

отношению  $I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)}$ , справедливому только при нулевых на-

чальных условиях (§ 120). При ненулевых начальных условиях можно воспользоваться так же, как в случае операторного метода, методом наложения, рассчитав процесс при нулевых начальных условиях и наложив на него процессы, которые получаются только от действия одних начальных напряжений на конденсаторах и токов в катушках.

### § 125. Передаточные функции

Изложенный в предыдущем параграфе метод позволяет применить его к нахождению тока  $i_2(t)$  или напряжения  $u_2(t)$  в любом (втором) участке сложной цепи, по заданному току  $i_1(t)$  или напряжению  $u_1(t)$  в другом (первом) участке цепи. Обозначив  $i_1(t)$  или  $u_1(t)$  через  $x_1(t)$ , а  $i_2(t)$  или  $u_2(t)$  через  $x_2(t)$ , введем понятие *передаточной функции*  $K(p)$  от первого ко второму участку цепи из соотношения:

$$K(p) = \frac{X_2(p)}{X_1(p)},$$

где  $X_1(p)$  и  $X_2(p)$  операторные изображения  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ . Если рассматриваемые функции удовлетворяют требованиям, при которых возможно преобразование Фурье, то, заменяя  $p$  на  $j\omega$ , получим:

$$K(j\omega) = \frac{X_2(j\omega)}{X_1(j\omega)}.$$

Если функции  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  обе являются токами или обе являются напряжениями, то передаточная функция представляет собой безразмерную величину. Такой случай мы имеем, например, если  $x_1(t) = u_1(t)$  и  $x_2(t) = u_2(t)$  суть напряжения на входе и на выходе четырехполюсника.

Если  $x_1(t) = u_1(t)$ , а  $x_2(t) = i_2(t)$ , то  $K(p)$  представляет собой обобщенную (операторную) *взаимную проводимость* между рассматриваемыми участками цепи, а  $K(j\omega)$  — ее частотную характеристику. Наоборот, если  $x_1(t) = i_1(t)$ , а  $x_2(t) = u_2(t)$ , то  $K(p)$  — обобщенное (операторное) *взаимное сопротивление* и  $K(j\omega)$  — его частотная характеристика.

Получив  $K(j\omega)$  экспериментальным путем, можно, пользуясь изложенным в предыдущем параграфе методом, рассчитать  $x_2(t)$  по заданной  $x_1(t)$ .

### § 126. Дифференцирующие и интегрирующие цепи

Весьма важной является возможность создания четырехполюсников, напряжение на выходе которых является производной или интегралом напряжения на входе. Такие четырехполюсники, получившие наименование дифференцирующих и интегрирующих цепей, находят широкое применение в измерительной технике, в системах

автоматики и в устройствах для интегрирования систем дифференциальных уравнений.

Рассмотрим простейшие дифференцирующие и интегрирующие цепи. Попутно составим для них выражения передаточных функций, в качестве конкретных примеров к материалу предыдущего параграфа.

Простейшие дифференцирующие цепи изображены на рис. 253. Будем предполагать, что сопротивление приемника на выходе цепи столь велико, что ток  $i_2$  весьма мал по сравнению с током  $i_1$ , т. е. будем полагать  $i_2 = 0$ .

Для цепи рис. 253, а в этом случае при нулевых начальных условиях имеем:

$$\begin{aligned} U_2(p) &= pLI_1(p) = \\ &= \frac{pL}{r + pL} U_1(p). \end{aligned}$$

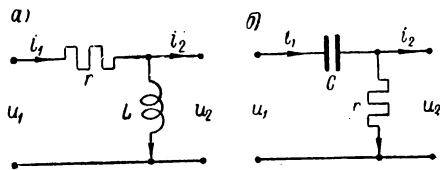


Рис. 253

Следовательно, передаточная функция рассматриваемого четырехполюсника, определяемая как отношение изображений выходного и входного напряжений, имеет вид:

$$K(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{pL}{r + pL}.$$

Если  $\frac{L}{r}$  достаточно мало по сравнению с интервалом времени, в течение которого  $u_1(t)$  заметно изменяется, то приближенно можно положить:

$$I_1(p) \approx \frac{U_1(p)}{r}; \quad U_2(p) \approx \frac{L}{r} p U_1(p); \quad K(p) \approx \frac{L}{r} p.$$

Но при нулевых начальных условиях  $pU_1(p) \doteq \frac{d}{dt} u_1(t)$ .

Следовательно,

$$u_2(t) \approx \frac{L}{r} \frac{d}{dt} u_1(t).$$

Таким образом, рассмотренная цепь осуществляет дифференцирование входного напряжения.

Для цепи рис. 253, б при нулевых начальных условиях аналогично имеем:

$$U_2(p) = rI_1(p) = \frac{r}{r + \frac{1}{pC}} U_1(p); \quad K(p) = \frac{r}{r + \frac{1}{pC}}.$$



Если  $rC$  мало по сравнению с интервалом времени заметного изменения  $u_1(t)$ , то приближенно можно принять:

$$I_1(p) \approx pCU_1(p); \quad U_2(p) \approx rCpU_1(p); \quad K(p) \approx rCp.$$

Следовательно:

$$u_2(t) \approx rC \frac{d}{dt} u_1(t),$$

т. е. такая цепь также осуществляет дифференцирование входного напряжения.

Простейшие интегрирующие цепи изображены на рис. 254. Будем также предполагать, что  $i_2$  столь мал по сравнению с  $i_1$ , что можно положить  $i_2 = 0$ .

Кроме того, начальные условия будем полагать нулевыми.

Для цепи рис. 254, а имеем:

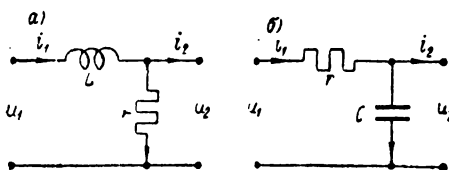


Рис. 254

$$U_2(p) = \frac{r}{r + pL} U_1(p);$$

$$K(p) = \frac{r}{r + pL},$$

а для цепи рис. 254, б имеем соответственно:

$$U_2(p) = \frac{\frac{1}{pC}}{r + \frac{1}{pC}} U_1(p); \quad K(p) = \frac{\frac{1}{pC}}{r + \frac{1}{pC}}.$$

Если для цепи рис. 254, а величина  $\frac{L}{r}$  и соответственно для цепи рис. 254, б величина  $rC$  достаточно велика по сравнению с интервалами изменения напряжения  $u_1(t)$  между его максимальными и минимальными значениями, т. е. в течение которых  $u_1(t)$  изменяется монотонно или остается постоянным, то приближенно можно положить для цепи рис. 254, а:

$$U_2(p) \approx \frac{r}{L} \frac{1}{p} U_1(p); \quad K(p) \approx \frac{r}{pL}$$

и для цепи рис. 254, б:

$$U_2(p) \approx \frac{1}{rC} \frac{1}{p} U_1(p); \quad K(p) \approx \frac{1}{prC}.$$

Но  $\frac{1}{p} U_1(p) \doteq \int_0^t u_1(t) dt$ . Следовательно, для этих двух цепей имеем

соответственно:

$$u_2(t) \approx \frac{r}{L} \int_0^t u_1(t) dt \quad \text{и} \quad u_2(t) \approx \frac{1}{rC} \int_0^t u_1(t) dt.$$

Таким образом, рассмотренные цепи осуществляют интегрирование входного напряжения.

Нетрудно видеть, что вышеуказанные условия, наложенные на соотношения между параметрами простейших дифференцирующих и интегрирующих цепей, приводят к тому, что напряжения  $u_2$  на выходе получаются значительно меньше напряжений  $u_1$  на входе. Этот недостаток можно исключить, увеличивая напряжение  $u_2$  с помощью усилителя, включаемого между выходом цепи и приемником, или применяя более сложные дифференцирующие и интегрирующие цепи, содержащие усилители и обратные связи.

Из вышеизложенного следует, что осуществление дифференцирующих и интегрирующих цепей возможно путем комбинирования участка с сопротивлением  $r$  как с катушкой индуктивности  $L$ , так и с конденсатором емкости  $C$ . На практике предпочтение отдается последнему варианту, так как конденсаторы легче осуществить с малыми потерями. В катушках же отрицательное влияние оказывает не только активное сопротивление обмотки, но и междувитковая емкость.

### § 127. Обратные связи

Пусть некоторое устройство, назовем его основным, представляющее собой четырехполюсник (рис. 255), имеет на выходных зажимах напряжение  $u_2(t)$  при напряжении на входных зажимах  $u'_1(t)$ . Его передаточная функция имеет вид:

$$K(p) = \frac{U_2(p)}{U'_1(p)}.$$

Подведем напряжение  $u_2$  на вход так называемого устройства обратной связи, которое, вообще говоря, является также некоторым четырехполюсником. Напряжение на выходе устройства обратной связи пусть будет  $u''_1(t)$  (рис. 255). Соответственно, это устройство характеризуется передаточной функцией:

$$W(p) = \frac{U''_1(p)}{U_2(p)}.$$

Введем напряжение  $u''_1$  в первичную цепь так, чтобы оно добавлялось к напряжению  $u_1$  на входе всей системы. Тогда напряжение  $u'_1$  на входе основного устройства будет равно:

$$u'_1 = u_1 + u''_1.$$

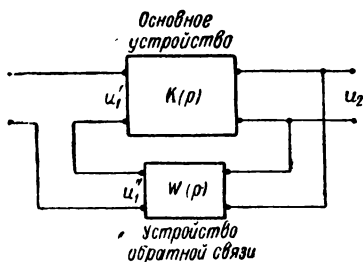


Рис. 255

Записывая это уравнение для изображений, имеем:

$$U'_1(p) = U_1(p) + U''_1(p),$$

или

$$\frac{U_2(p)}{K(p)} = U_1(p) + W(p) U_2(p),$$

откуда находим:

$$\frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{K(p)}{1 - W(p) K(p)} = K'(p).$$

Величина  $K'(p)$  является передаточной функцией всей рассматриваемой системы с учетом действия обратной связи, т. е. с учетом обратного дополнительного воздействия выходного напряжения  $u_2$  через устройство обратной связи на входные зажимы основного устройства.

Пусть, например, основное устройство представляет собой усилитель с линейной характеристикой, не изменяющий фазу напряжения и имеющий коэффициент усиления  $k$ . Он является активным четырехполюсником, так как содержит источник энергии. Напряжения  $u_2$  и  $u'_1$  связаны в этом случае простым соотношением  $u_2 = k u'_1$  и, соответственно,  $K(p) = k$ , причем  $k$  — вещественное число.

Пусть устройство обратной связи является простым делителем напряжения из активных сопротивлений (рис. 256). Тогда  $u'_1 = \beta u_2$  и, соответственно,  $W(p) = \beta$ , где  $\beta$  — вещественное число.

В этом случае имеем:

$$K'(p) = \frac{k}{1 - \beta k} = k'.$$

Величина  $k'$  является при этом коэффициентом усиления всей системы с учетом воздействия обратной связи.

Если  $\beta > 0$ , то  $k' > k$ . В этом случае напряжение обратной связи  $u'_1$  имеет ту же фазу, что и входное напряжение  $u_1$ . Обратная связь увеличивает напряжение  $u'_1$  на входе усилителя, что и приводит к увеличению коэффициента усиления  $k'$  всей системы по сравнению с коэффициентом усиления  $k$  самого усилителя.

Такая обратная связь называется *положительной*.

Если  $\beta < 0$ , что легко осуществить перекрещиванием проводов, идущих к делителю или от делителя напряжения, то  $k' < k$ , т. е. происходит уменьшение коэффициента усиления, так как при этом  $u'_1$  и  $u_1$  сдвинуты по фазе на угол  $\pi$ . Такая обратная связь называется *отрицательной*.

В общем случае, когда основное устройство и устройство обратной связи представляют собой более сложные устройства, имеющие сложные выражения для их передаточных функций  $K(p)$  и  $W(p)$ , все же можно говорить о положительной обратной связи, когда она

способствует увеличению выходного напряжения, и об отрицательной обратной связи, когда она способствует снижению этого напряжения.

В частности, при положительной обратной связи, как будет показано на примере лампового генератора (§ 156), возможно нарастание собственных колебаний системы, раз возникших вследствие какого-либо первоначального толчка. Наоборот, отрицательная обратная связь способствует подавлению таких колебаний.

Обратная связь, изображенная на рис. 255, является так называемой обратной связью по напряжению, так как дополнительное напряжение  $u_1''$  в первичной цепи определяется выходным напря-

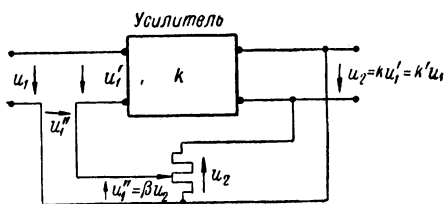


Рис. 256

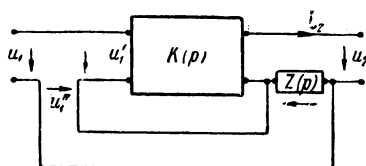


Рис. 257

жением  $u_2$ . На рис. 257 показана так называемая обратная связь по току, при которой напряжение  $u_1''$  определяется падением напряжения в участке с небольшим сопротивлением, включенном последовательно во вторичную цепь, т. е. определяется током  $i_2$  во вторичной цепи, проходящим по этому участку. Обозначим операторное сопротивление этого участка через  $Z(p)$ .

Определяя для этого случая передаточную функцию основного устройства как отношение изображений выходного тока и входного напряжения:

$$K(p) = \frac{I_2(p)}{U_1'(p)},$$

будем иметь для этого случая:

$$U_1'(p) = U_1(p) + U_1''(p) = U_1(p) + Z(p) I_2(p),$$

или

$$\frac{I_2(p)}{K(p)} = U_1(p) + Z(p) I_2(p),$$

т. е.

$$\frac{I_2(p)}{U_1(p)} = \frac{K(p)}{1 - Z(p) K(p)} = K'(p).$$

Величина  $K'(p)$  представляет собой передаточную функцию всей системы с учетом воздействия обратной связи. Заметим, что в этом случае  $K(p)$  и  $K'(p)$  имеют размерность проводимости, тогда как в случае, относящемся к рис. 255, они были безразмерны.

### § 128. Понятие о синтезе электрических цепей

Все изложенное выше относилось к анализу процессов в электрических цепях, т. е. к исследованию изменений во времени токов и напряжений в заданной электрической цепи. Однако исключительное значение имеет обратная задача — построить такую электрическую цепь, процессы в определенных участках которой будут протекать по заданному закону. Например, ставится задача найти конфигурацию и параметры электрической цепи, образующей четырехполюсник, чтобы при заданном изменении во времени напряжения на входе четырехполюсника получить вполне определенное также наперед заданное изменение во времени напряжения на выходе четырехполюсника. Иными словами, такой четырехполюсник должен изменять кривую напряжения в желательном нам направлении. Такая задача имеет важное значение, например, для формирования на выходе импульсов напряжения определенной формы. Решение подобных задач, обратных задаче анализа, носит наименование *синтеза электрических цепей*.

Пусть ставится задача создать цепь с требуемыми характеристиками из линейных элементов. Входная величина (напряжение или ток) является заданной функцией времени  $x_1(t)$ . Ее операторное изображение  $X_1(p)$ , следовательно, также известно. Задан также и требуемый закон изменения во времени выходной величины  $x_2(t)$  (напряжения или тока) и соответственно известно ее операторное изображение  $X_2(p)$ .

Таким образом, мы имеем выражение для передаточной функции  $K(p) = \frac{X_2(p)}{X_1(p)}$ , которой должна обладать создаваемая электрическая цепь, преобразующая  $x_1(t)$  в  $x_2(t)$ .

Задача, таким образом, состоит в том, чтобы по заданному операторному выражению передаточной функции  $K(p)$  цепи, или, соответственно, по заданной частотной характеристике  $K(j\omega)$  цепи построить конкретную цепь, обладающую такой характеристикой, или хотя бы характеристикой, близкой к заданной.

Общей теории синтеза электрических цепей еще нет, однако имеются исследования, в которых разработан ряд относящихся сюда важных теоретических вопросов, позволяющих получить в определенных случаях практическое решение. Естественно, наибольшей теоретической разработке поддается метод синтеза цепей из линейных элементов, т. е. из элементов, параметры которых не зависят от тока в них и от напряжения на их зажимах. Значительные работы в этой области, носящие обобщающий характер,

выполнены советскими авторами В. В. Булгаковым, В. А. Тафтом и др.

Возможности синтеза цепей существенно возрастают при использовании нелинейных элементов цепи с теми или иными характеристиками. Так, например, из уже сказанного в § 98 ясно, что для решения задачи получения пикообразного периодического напряжения на выходе цепи  $[x_2(t) = u_2(t)]$  при синусоидальном напряжении на входе цепи  $[x_1(t) = u_1(t) = U_{1m} \sin \omega t]$  проще всего собрать цепь из последовательно соединенных катушки с постоянной индуктивностью  $L$  и катушки с ферромагнитным сердечником (рис. 258). Если индуктивность катушки без сердечника взять много большей, чем индуктивность катушки с сердечником, то при синусоидальном напряжении  $u_1$  и ток в цепи будет весьма близок к синусоидальному. Если параметры цепи и амплитуду напряжения  $U_{1m}$  подобрать так, чтобы при амплитуде тока имело место значительное насыщение ферромагнитного сердечника, то, в соответствии со сказанным в § 98, напряжение на катушке с ферромагнитным сердечником, рассматриваемое как выходное напряжение  $u_2(t)$ , будет иметь пикообразную форму.

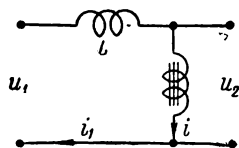


Рис. 258

Хотя этот пример является столь элементарным, что его еще нельзя рассматривать как пример синтеза цепей, понимаемого в сколько-нибудь широком смысле, однако этот простой пример показывает большие возможности, открывающиеся для построения цепей с наперед заданными свойствами путем использования нелинейных элементов.

Вопросы анализа процессов в нелинейных электрических цепях переменного тока будут рассмотрены в тринадцатой и четырнадцатой главах. На основе результатов, полученных при анализе различных нелинейных цепей, можно будет косвенно судить и о возможности использования тех или иных нелинейных элементов для синтеза электрических цепей, т. е. для построения цепей с теми или иными наперед заданными свойствами.

---

## ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ

### ОДНОРОДНЫЕ ЛИНИИ ПРИ УСТАНОВИВШЕМСЯ РЕЖИМЕ

#### § 129. Уравнения однородной линии

При рассмотрении электромагнитных процессов, которые происходят в линиях, служащих для передачи энергии, а также в телеграфных и телефонных линиях, необходимо иметь в виду, что магнитное и электрическое поля, связанные с ними, распределены вдоль всей линии и что превращение электромагнитной энергии в тепло также происходит вдоль всей линии. Такого рода электрические цепи в отличие от цепей с сосредоточенными параметрами называют *цепями с распределенными параметрами*.

Изучая линии, необходимо учитывать как сопротивление проводов линии, так и то обстоятельство, что с ними связано магнитное поле и что, следовательно, линия обладает индуктивностью. Кроме того, необходимо иметь в виду, что между проводами линии существует электрическое поле и что, следовательно, провода линии обладают емкостью друг относительно друга. Следует также принять во внимание, что вследствие несовершенства изоляции проводимость между проводами линии, вообще говоря, не равна нулю.

Рассмотрим однородную линию, т. е. линию, сопротивление и индуктивность которой, а также проводимость и емкость между проводами равномерно распределены вдоль ее длины. Обозначим сопротивление и индуктивность *на единицу длины* двухпроводной линии через  $r$  и  $L$ , а проводимость и емкость *на единицу длины* линии через  $g$  и  $C$ . В дальнейшем мы будем предполагать, что параметры линии  $r$ ,  $g$ ,  $L$ ,  $C$  постоянны.

Напряжение между проводами и ток в проводах линии в каждый момент времени различны в различных точках линии и являются поэтому функциями двух независимых переменных — времени  $t$  и расстояния  $x$  от точки линии, выбранной за начало.

Пусть в некоторый момент времени напряжение и ток на расстоянии  $x$  от начала равны, соответственно,  $u$  и  $i$  (рис. 259). Тогда в тот же момент времени напряжение и ток на расстоянии  $x + dx$  от начала будут  $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$  и  $i + \frac{\partial i}{\partial x} dx$ . Рассматривая участок линии длиной  $dx$ , мы видим, что падение напряжения на этом уча-

стке должно иметь две составляющие:  $r \, dx \, i$  преодолевающую сопротивление этого участка и  $L \, dx \, \frac{\partial i}{\partial t}$ , уравнивающую э. д. с. самоиндукции, возникающую на этом участке, т. е.

$$u - \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) = r \, dx \, i + L \, dx \, \frac{\partial i}{\partial t}$$

или

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = r i + L \frac{\partial i}{\partial t}.$$

Разность токов в начале и в конце участка  $dx$  вызывается тем, что на этом участке от провода к проводу отходят ток проводимости  $g \, dx \, u$  и ток смещения  $C \, dx \, \frac{\partial u}{\partial t}$ , т. е.

$$i - \left( i + \frac{\partial i}{\partial x} dx \right) = g \, dx \, u + C \, dx \, \frac{\partial u}{\partial t}$$

или

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = g u + C \frac{\partial u}{\partial t}.$$

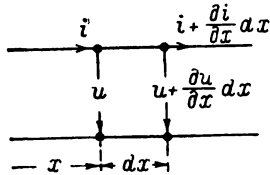


Рис. 259

Полученные нами два уравнения в частных производных:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = r i + L \frac{\partial i}{\partial t}; \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = g u + C \frac{\partial u}{\partial t}$$

и являются *уравнениями однородной линии*. Они дают возможность по заданным начальным и граничным условиям найти напряжение и ток в линии как функции  $x$  и  $t$ .

В общем случае для  $n$ -проводной линии, расположенной в воздухе над поверхностью земли, для каждого из проводов необходимо в первом уравнении учитывать также э. д. с. взаимной индукции от токов, протекающих в соседних проводах, а во втором уравнении учитывать также ток смещения между рассматриваемым проводом и всеми соседними проводами. При этом получаем систему из  $2n$  уравнений (так называемых «телеграфных уравнений»):

$$-\frac{\partial u_k}{\partial x} = r_k i_k + L_k \frac{\partial i_k}{\partial t} + \sum_{m=1}^{m=n} M_{km} \frac{\partial i_m}{\partial t};$$

$$-\frac{\partial i_k}{\partial x} = g_k u_k + C_k \frac{\partial u_k}{\partial t} + \sum_{m=1}^{m=n} C_{km} \frac{\partial (u_k - u_m)}{\partial t},$$

где  $k = 1, 2, \dots, n$  — номер провода;  $r_k$ ,  $L_k$ ,  $g_k$ ,  $C_k$  — собственные параметры  $k$ -того провода на единицу длины с учетом влияния земли;



$M_{km}$  и  $C_{km}$  — взаимная индуктивность и емкость между  $k$ -тым и  $m$ -тым проводами на единицу длины линии с учетом влияния земли.

Рассмотрение частного случая двухпроводной линии, которое будет выполнено в последующих параграфах, представляет интерес не только потому, что это наиболее простой случай, позволяющий наиболее выпукло показать основные особенности процессов в цепях с распределенными параметрами, но также и потому, что во многих случаях трехфазная линия может быть заменена ей эквивалентной однофазной двухпроводной линией. Это можно сделать при синусоидальном процессе, если все провода находятся в одинаковых условиях, т. е. если осуществлена так называемая транспозиция проводов — последовательная перестановка их местами, и если полный цикл транспозиции значительно меньше длины волны тока и напряжения в линии (§ 133). При этом для симметричных трехфазных напряжений прямой и обратной последовательностей токи в проводах также образуют симметричные системы, соответственно, прямой и обратной последовательностей. В этом случае достаточно рассматривать процесс в одной фазе, заменяя трехфазную линию эквивалентной ей однофазной двухпроводной линией. Для напряжений и токов нулевой последовательности трехпроводную трехфазную линию также можно заменить эквивалентной двухпроводной, причем обратным проводом в этом случае является провод, эквивалентный земле при трехфазной линии.

### § 130. Решение уравнений однородной линии при установившемся синусоидальном режиме

Пусть к зажимам двухпроводной линии приложено синусоидальное напряжение с угловой частотой  $\omega$ . Тогда при установившемся режиме все токи и напряжения в линии будут также синусоидальными функциями времени той же частоты. Переходя к изображению синусоидальных напряжений и токов комплексами  $\dot{U} \sqrt{2} e^{j\omega t}$  и  $\dot{I} \sqrt{2} e^{j\omega t}$ , где  $\dot{U}$  и  $\dot{I}$  — комплексные действующие значения напряжения и тока, зависящие только от  $x$ , из уравнений, полученных в § 129, найдем:

$$-\frac{d\dot{U}}{dx} = (r + j\omega L) \dot{I}; \quad -\frac{d\dot{I}}{dx} = (g + j\omega C) \dot{U}.$$

Взяв производную по  $x$  от первого из этих уравнений, получим:

$$-\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = (r + j\omega L) \frac{d\dot{I}}{dx}$$

и, подставив значение  $\frac{d\dot{I}}{dx}$ , найдем:

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = (r + j\omega L)(g + j\omega C) \dot{U}.$$

Полагая  $(r + j\omega L)(g + j\omega C) = \gamma^2$ , имеем:

$$\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} - \gamma^2 \dot{U} = 0,$$

и решение для  $\dot{U}$  можем написать в виде:

$$\dot{U} = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x},$$

где  $\gamma = \sqrt{(r + j\omega L)(g + j\omega C)}$ . Тогда для  $\dot{I}$  получим:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\frac{1}{r + j\omega L} \frac{d\dot{U}}{dx} = \frac{\gamma}{r + j\omega L} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}) = \\ &= \sqrt{\frac{g + j\omega C}{r + j\omega L}} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}), \end{aligned}$$

и, положив,

$$\sqrt{\frac{r + j\omega L}{g + j\omega C}} = Z,$$

найдем:

$$\dot{I}Z = A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}.$$

Комплексы  $\gamma = \beta + ja$  и  $Z = ze^{j\theta}$  являются основными характеристиками однородной линии и их называют, соответственно, коэффициентом распространения и характеристическим или волновым сопротивлением линии.

Определим постоянные интегрирования  $A_1$  и  $A_2$  для случаев, когда заданы напряжение и ток или в начале линии, или в ее конце. Пусть известны напряжение  $\dot{U}_1$  и ток  $\dot{I}_1$  в начале линии. Тогда, приняв начало линии за начало счета расстояний и положив  $x = 0$ , имеем:

$$\dot{U}_1 = A_1 + A_2; \quad \dot{I}_1 Z = A_1 - A_2;$$

$$A_1 = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z); \quad A_2 = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z),$$

и, следовательно,

$$\dot{U} = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z) e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z) e^{\gamma x};$$

$$\dot{I} = \frac{1}{2}\left(\dot{I}_1 + \frac{\dot{U}_1}{Z}\right) e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}\left(\dot{I}_1 - \frac{\dot{U}_1}{Z}\right) e^{\gamma x}.$$

Пусть известны напряжение  $\dot{U}_2$  и ток  $\dot{I}_2$  в конце линии. В этом случае целесообразнее вести счет расстояний от конца линии, для

чего в выведенных уравнениях достаточно заменить  $x$  на  $l - x$ , где  $l$  — длина линии. Тогда имеем:

$$\begin{aligned}\dot{U} &= A_1 e^{-\gamma l} \cdot e^{\gamma x} + A_2 e^{\gamma l} \cdot e^{-\gamma x} = A_3 e^{\gamma x} + A_4 e^{-\gamma x}; \\ \dot{I}Z &= A_1 e^{-\gamma l} \cdot e^{\gamma x} - A_2 e^{\gamma l} \cdot e^{-\gamma x} = A_3 e^{\gamma x} - A_4 e^{-\gamma x},\end{aligned}$$

если положить  $A_1 e^{-\gamma l} = A_3$  и  $A_2 e^{\gamma l} = A_4$ . Далее, полагая  $x = 0$ , получим:

$$\begin{aligned}\dot{U}_2 &= A_3 + A_4; \quad \dot{I}_2 Z = A_3 - A_4; \\ A_3 &= \frac{1}{2} (\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z); \quad A_4 = \frac{1}{2} (\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z)\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}\dot{U} &= \frac{1}{2} (\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z) e^{\gamma x} + \frac{1}{2} (\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z) e^{-\gamma x}; \\ \dot{I} &= \frac{1}{2} \left( \dot{I}_2 + \frac{\dot{U}_2}{Z} \right) e^{\gamma x} + \frac{1}{2} \left( \dot{I}_2 - \frac{\dot{U}_2}{Z} \right) e^{-\gamma x}.\end{aligned}$$

Весьма часто в выражениях для  $\dot{U}$  и  $\dot{I}$  переходят к гиперболическим функциям, приняв во внимание, что

$$\frac{1}{2} (e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}) = \operatorname{ch} \gamma x \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} (e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}) = \operatorname{sh} \gamma x.$$

Тогда при заданных  $\dot{U}_1$  и  $\dot{I}_1$  и счете расстояний от начала линии

$$\dot{U} = \dot{U}_1 \operatorname{ch} \gamma x - \dot{I}_1 Z \operatorname{sh} \gamma x; \quad \dot{I} = \dot{I}_1 \operatorname{ch} \gamma x - \frac{\dot{U}_1}{Z} \operatorname{sh} \gamma x,$$

а при заданных  $\dot{U}_2$  и  $\dot{I}_2$  и счете расстояний от конца линии

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma x + \dot{I}_2 Z \operatorname{sh} \gamma x; \quad \dot{I} = \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma x + \frac{\dot{U}_2}{Z} \operatorname{sh} \gamma x.$$

Нетрудно усмотреть сходство между этими зависимостями и соответствующими зависимостями, выведенными при рассмотрении однородных симметричных цепных схем (§ 52). Это сходство объясняется тем, что процессы в однородных линиях и в однородных цепных схемах сходны между собой, и однородную линию можно рассматривать как однородную цепную схему с бесконечно большим числом элементарных звеньев.

Однородная линия представляет собою частный случай симметричного пассивного четырехполюсника, и поэтому напряжения  $\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_2$  и токи  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$  должны подчиняться линейным зависимостям,

установленным для четырехполюсника. И действительно, из последних выражений для  $\dot{U}$  и  $\dot{I}$ , полагая,  $x = l$ , получим:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \dot{I}_2 Z \operatorname{sh} \gamma l; \quad \dot{I}_1 = \dot{U}_2 \frac{\operatorname{sh} \gamma l}{Z} + \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l,$$

откуда для постоянных четырехполюсника  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  имеем:

$$A = D = \operatorname{ch} \gamma l; \quad B = Z \operatorname{sh} \gamma l; \quad C = \frac{\operatorname{sh} \gamma l}{Z},$$

причем

$$AD - BC = \operatorname{ch}^2 \gamma l - \operatorname{sh}^2 \gamma l = 1.$$

Необходимо иметь в виду, что однородная линия, как и всякий симметричный четырехполюсник, может быть заменена Т-или П-образной симметричной схемой. Постоянные этих схем легко определяются по постоянным  $A$ ,  $B$  и  $C$ , а именно, для Т-образной схемы:

$$Z_1 = Z_2 = Z \frac{\operatorname{ch} \gamma l - 1}{\operatorname{sh} \gamma l} = Z \frac{\operatorname{sh} \gamma l}{\operatorname{ch} \gamma l + 1}; \quad Y_0 = \frac{\operatorname{sh} \gamma l}{Z}$$

и для П-образной схемы:

$$Y_1 = Y_2 = \frac{\operatorname{ch} \gamma l - 1}{Z \operatorname{sh} \gamma l} = \frac{\operatorname{sh} \gamma l}{Z (\operatorname{ch} \gamma l + 1)}; \quad Z_0 = Z \operatorname{sh} \gamma l.$$

Заметим также, что любой режим работы однородной линии, как и всякого пассивного четырехполюсника, можно получить наложением соответствующих режимов холостого хода и короткого замыкания.

### § 131. О моделировании однородной линии цепной схемой

Рассмотрение линии с распределенными параметрами как четырехполюсника и, соответственно, замена линии эквивалентной Т-образной или П-образной схемой возможны только в том случае, если мы интересуемся напряжениями и токами только в начале и в конце линии. Если же мы желаем изучать распределение напряжения и тока вдоль линии, то необходимо ее рассматривать как цепь с распределенными параметрами и пользоваться приведенными выше уравнениями, в которых  $\dot{U}$  и  $\dot{I}$  являются функциями  $x$ . Как уже было отмечено, однородную линию можно рассматривать как однородную цепную схему с бесконечно большим числом элементарных звеньев. Поэтому приближенно можно линию конечной длины заменить цепной схемой с конечным числом звеньев, обладающих конечными значениями параметров. Такая замена будет давать тем более точные результаты, чем большее число звеньев будет содержать цепная схема.

Эти соображения имеют весьма большое значение для моделирования линий. Для экспериментального изучения в лабораторных условиях процессов в длинных линиях, а также процессов в различных системах, соединенных длинными линиями, обычно линии заменяют эквивалентными им цепными схемами. Точность моделирования будет тем больше, чем большее число звеньев будет содержать цепная схема.

Одного звена, заменяющего линию, достаточно, если мы интересуемся соотношениями между напряжениями и токами только в начале и в конце линии и только при одной частоте установившегося синусоидального режима. Если же мы желаем знать связь между напряжениями и токами, хотя бы только в начале и в конце линии, но при разных частотах, например, для разных гармоник несинусоидальных токов и напряжений, то моделировать всю линию одним Т- или П-образным звеном уже недостаточно. Это следует из того, что параметры такого звена, как видно из вышеприведенных формул, сложным образом зависят от характеристик линии:  $Z$  и  $\gamma$ , которые в общем случае в свою очередь сложным образом зависят от частоты.

Моделировать линию цепной схемой с достаточным числом звеньев и подавно необходимо при изучении распределения напряжения и тока вдоль линии.

Выбор числа звеньев в модели линии зависит от тех задач, которые ставятся при исследовании. По большей части бывает достаточно взять 10—20 звеньев.

### § 132. Однородная линия, замкнутая на характеристическое сопротивление

Рассмотрим весьма важный режим работы линии, когда она замкнута на сопротивление, равное характеристическому сопротивлению  $Z = ze^{j\theta}$ . Тогда  $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z$ , и из решений, найденных в § 130, мы получим:

$$\dot{U} = \dot{U}_2 e^{\gamma x} \quad \dot{I} = \dot{I}_2 e^{\gamma x}; \quad \dot{U} : \dot{I} = \dot{U}_2 : \dot{I}_2 = Z,$$

т. е. в любой точке однородной линии, замкнутой на характеристическое сопротивление, отношение комплексных напряжения  $\dot{U}$  и тока  $\dot{I}$  равно  $Z$ , и, в частности,  $\dot{U}_1 : \dot{I}_1 = Z$ . Таким образом, характеристическое сопротивление  $Z$  линии является в то же время и ее *повторным сопротивлением* (§ 51), так как при замыкании выходных зажимов линии на сопротивление, равное  $Z$ , между входными зажимами мы имеем точно такое же сопротивление.

Так как  $\gamma = \beta + j\alpha$ , то из решений уравнений линии, выраженных через  $\dot{U}_1$  и  $\dot{I}_1$ , приняв во внимание, что  $\dot{U}_1 = \dot{I}_1 Z$ , мы получим:

$$\dot{U} = \dot{U}_1 e^{-\gamma x} = \dot{U}_1 e^{-\beta x} \cdot e^{-j\alpha x}; \quad \dot{I} = \dot{I}_1 e^{-\gamma x} = \dot{I}_1 e^{-\beta x} \cdot e^{-j\alpha x}$$

и для мощностей  $P_1$  и  $P_2$  в начале и в конце линии найдем:

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \vartheta; \quad P_2 = U_2 I_2 \cos \vartheta = U_1 e^{-\beta l} I_1 e^{-\beta l} \cos \vartheta = P_1 e^{-2\beta l},$$

где  $l$  — длина линии, а для коэффициента полезного действия  $\eta$  линии получим:

$$\eta = P_2 : P_1 = e^{-2\beta l}.$$

Так как при наличии потерь в линии  $\eta < 1$ , то, следовательно,  $\beta > 0$ , и только при пренебрежении потерями в линии, т. е. при  $\eta = 1$ , мы имеем  $\beta = 0$ . В соответствии с этим можно утверждать, что в линии с потерями, замкнутой на характеристическое сопротивление, действующие значения напряжения и тока  $U = U_1 e^{-\beta x}$  и  $I = I_1 e^{-\beta x}$  затухают от начала линии к ее концу по показательному закону с показателем, абсолютная величина которого, отнесенная к единице длины линии, равна  $\beta$ . При этом фазы напряжения и тока, зависящие от множителя  $e^{-j\alpha x}$ , равномерно изменяются вдоль линии и уменьшение их, отнесенное к единице длины линии, равно  $\alpha$ . В соответствии с этим  $\beta$  называют *коэффициентом затухания*,  $\alpha$  — *коэффициентом фазы*, а комплексное число  $\gamma = \beta + j\alpha$ , характеризующее изменение как действующих значений напряжения и тока, так и их фаз на единице длины линии, носит название *коэффициента распространения*.

### § 133. Бегущие волны

Рассмотрим выражение, полученное в § 130 для  $\dot{U}$ , причем введем обозначения:

$$\dot{U}_\varphi = \frac{1}{2} (\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z) e^{-\gamma x} = \dot{U}_{\varphi 1} e^{-\gamma x} = U_{\varphi 1} e^{j\xi} e^{-\gamma x};$$

$$\dot{U}_\psi = \frac{1}{2} (\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z) e^{\gamma x} = \dot{U}_{\psi 1} e^{\gamma x} = U_{\psi 1} e^{j\eta} e^{\gamma x}.$$

Тогда при  $\gamma = \beta + j\alpha$  имеем:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_\varphi + \dot{U}_\psi = \dot{U}_{\varphi 1} e^{-\gamma x} + \dot{U}_{\psi 1} e^{\gamma x} = \\ &= U_{\varphi 1} e^{-\beta x} e^{j(\xi - \alpha x)} + U_{\psi 1} e^{\beta x} e^{j(\eta + \alpha x)} \end{aligned}$$

и, переходя от комплекса  $\dot{U} \sqrt{2} e^{j\omega t}$  к изображаемому им напряжению  $u$ , получим:

$$\begin{aligned} u &= u_\varphi + u_\psi = \sqrt{2} U_{\varphi 1} e^{-\beta x} \sin(\omega t + \xi - \alpha x) + \\ &+ \sqrt{2} U_{\psi 1} e^{\beta x} \sin(\omega t + \eta + \alpha x). \end{aligned}$$

Таким образом,  $u$  можно рассматривать как сумму двух составляющих  $u_\varphi$  и  $u_\psi$ . Из выражения  $u_\varphi = \sqrt{2} U_{\varphi 1} e^{-\beta x} \sin(\omega t + \xi - \alpha x)$  следует, что при  $x = \text{const}$ , т. е. в данной точке линии напряжение  $u_\varphi$  является синусоидальной функцией времени. Пусть  $\beta = 0$  и  $e^{-\beta x} = 1$ . Тогда положив  $t = \text{const}$ , нетрудно убедиться, что при  $\beta = 0$  напряжение  $u_\varphi$  в данный момент времени будет распределено вдоль линии также по закону синуса. При этом длина  $\lambda$  синусоидальной волны, изображающей этот закон распределения напряжения  $u_\varphi$ , т. е. расстояние между ближайшими точками, в которых фазы на-

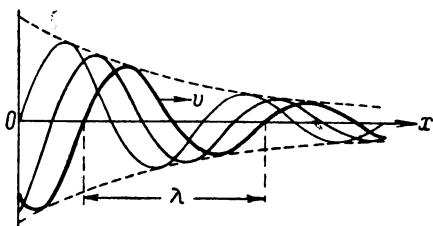


Рис. 260

пряжения  $u_\varphi$  отличаются на  $2\pi$ , равна  $\frac{2\pi}{\alpha}$ . Это синусоидальное распределение напряжения или, как говорят, *волна напряжения* перемещается вдоль линии от начала к ее концу с постоянной скоростью, равной  $v = \frac{\omega}{\alpha}$ . Действи-

тельно,  $\sin(\omega t + \xi - \alpha x)$  при  $x = x_0 + \frac{\omega}{\alpha} t$  будет величиной постоянной, и, следовательно, напряжение, существовавшее в некоторый момент времени в произвольно выбранной точке  $x$ , будет оставаться неизменным, если эта точка начнет перемещаться вдоль линии со скоростью  $v = \frac{\omega}{\alpha}$ . Так как при этой скорости остается неизменной фаза колебания, то ее называют *фазовой скоростью волны*. Такого рода волны, перемещающиеся вдоль некоторого направления, называют *бегущими волнами*. При  $\beta > 0$  наличие множителя  $e^{-\beta x}$  показывает, что амплитуда волны по мере продвижения последней вдоль линии затухает по показательному закону и что распределение напряжения вдоль линии в любой момент времени может быть изображено синусоидой, затухающей по тому же закону (рис. 260).

При помощи аналогичных рассуждений можно показать, что вторая составляющая  $u_\psi = \sqrt{2} U_{\psi 1} e^{\beta x} \sin(\omega t + \eta + \alpha x)$  представляет собою волну такой же длины  $\lambda = \frac{2\pi}{\alpha}$ , как и  $u_\varphi$ , бегущую вдоль линии со скоростью  $v = -\frac{\omega}{\alpha}$ , т. е. от конца линии к ее началу. Амплитуда этой волны, как показывает наличие множителя  $e^{\beta x}$ , возрастает по показательному закону от начала линии к ее концу или, иными словами, затухает по показательному закону по мере продвижения волны от конца линии к ее началу. Волны, бегущие от начала линии к ее концу, мы будем называть *прямыми волнами*, а волны, бегущие в обратном направлении, — *обратными волнами*.

Из выражения для комплекса  $\dot{I}$  следует, что ток  $i$  также можно рассматривать как результат наложения двух затухающих синусоидальных волн  $i_\varphi$  и  $i_\psi$ , бегущих навстречу друг другу со скоростью  $v = \frac{\omega}{\alpha}$ . Истинную картину распределения напряжения и тока в линии в данный момент времени мы получим, находя алгебраическую сумму ординат обеих волн для этого момента времени (рис. 261 и 262). Из этой картины, также имеющей волнообразный характер, следует, что в каждый момент времени как напряжения, так

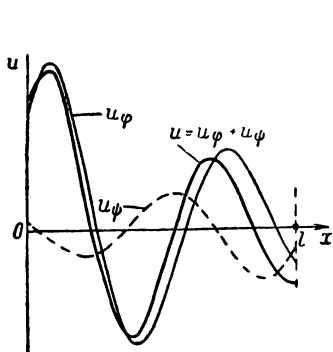


Рис. 261

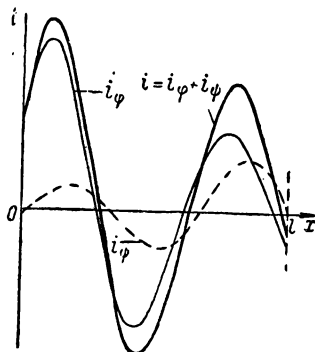


Рис. 262

и токи в различных точках линии не только отличаются по величине но могут отличаться и по знаку.

К таким же результатам мы придем, рассматривая  $\dot{U}$  и  $\dot{I}$ , выраженные через напряжение  $\dot{U}_2$  и ток  $\dot{I}_2$  в конце линии. При этом следует иметь в виду, что при счете расстояний от конца линии прямыми волнами, бегущими вперед от начала линии к ее концу, будут волны, в выражениях которых имеется множитель  $e^{\gamma x}$ , а обратные волны, бегущие назад от конца линии к ее началу, будут в своих выражениях иметь множитель  $e^{-\gamma x}$ .

Из выражений для  $\dot{U}$  и  $\dot{I}$  как через  $\dot{U}_1$  и  $\dot{I}_1$ , так и через  $\dot{U}_2$  и  $\dot{I}_2$ , следует, что для прямых волн напряжения и тока отношение комплексных амплитуд этих волн

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z) \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\dot{I}_1 + \frac{\dot{U}_1}{Z}\right)$$

или

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z) \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\dot{I}_2 + \frac{\dot{U}_2}{Z}\right)$$

равно характеристическому сопротивлению линии  $Z$ , а для обратных волн соответствующее отношение равно  $(-Z)$ . Так как  $Z$  за-



висит только от параметров линии и частоты приложенного напряжения, то эти отношения амплитуд не зависят от сопротивления приемника  $Z_{np} = \dot{U}_2 : \dot{I}_2$ , на которое замкнута линия, хотя сами амплитуды зависят от  $Z_{np}$ .

Рассматривая обратные волны как результат отражения прямых волн от конца линии, первые из них называют *отраженными*, а вторые — *падающими* и вводят понятие о *коэффициенте отражения*, определяя последний как отношение комплексных амплитуд отраженной и падающей волн в конце линии. Тогда для коэффициентов отражения волны напряжения  $q_u$  и волны тока  $q_i$  из выражений для  $\dot{U}$  и  $\dot{I}$  через  $\dot{U}_2$  и  $\dot{I}_2$  имеем:

$$q_u = \frac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z}{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z} = \frac{Z_{np} - Z}{Z_{np} + Z}; \quad q_i = \frac{\dot{I}_2 Z - \dot{U}_2}{\dot{I}_2 Z + \dot{U}_2} = \frac{Z - Z_{np}}{Z + Z_{np}},$$

т. е.  $q_u = -q_i$ . Из выражений для  $q_u$  и  $q_i$  видно, что при  $Z_{np} = Z$  отраженные волны отсутствуют. Это по сути дела и было показано в § 132. В устройствах связи всегда стремятся к устранению отраженных волн или, как говорят, к *согласованию* между собой отдельных частей этих устройств, так как условия отсутствия отраженных волн практически весьма близки к условиям, при которых приемник получает от генератора наибольшую мощность. Для согласования сопротивлений генератора и линии или приемника и линии генератор и приемник можно включать в линию через трансформаторы с соответствующими коэффициентами трансформации.

### § 134. Характеристики однородной линии

Основными характеристиками однородной линии являются ее характеристическое или волновое сопротивление  $Z$  и коэффициент распространения  $\gamma$ . Для характеристического сопротивления имеем:

$$Z = ze^{j\vartheta} = \sqrt{\frac{r + j\omega L}{g + j\omega C}},$$

откуда

$$ze^{2j\vartheta} = \frac{r + j\omega L}{g + j\omega C}; \quad z = \sqrt[4]{\frac{r^2 + \omega^2 L^2}{g^2 + \omega^2 C^2}}; \quad \vartheta = \frac{1}{2} \arctg \frac{\omega L g - \omega C r}{rg + \omega^2 LC}.$$

При увеличении частоты  $\vartheta$  стремится к нулю, а  $z$  — к  $\sqrt{L/C}$ . Обычно  $r$  и  $g$  малы по сравнению с  $\omega L$  и  $\omega C$ , и приближенно можно полагать  $z = \sqrt{L/C}$  и  $\vartheta = 0$ . У воздушных линий  $z \approx 300 - 400$  ом, у кабельных линий, служащих для передачи энергии,  $z$  значительно меньше, а именно  $z \approx 50$  ом, так как у них вследствие большей диэлектрической проницаемости среды между проводами линии и большей близости их друг к другу емкость на единицу длины линии зна-

чительно больше, а индуктивность на единицу длины линии несколько меньше, чем у воздушных линий.

Для коэффициента распространения  $\gamma$ , для квадрата модуля  $\gamma$  и для  $\gamma^2$  имеем:

$$\gamma = \beta + j\alpha = \sqrt{(r + j\omega L)(g + j\omega C)};$$

$$|\gamma|^2 = \beta^2 + \alpha^2 = \sqrt{(r^2 + \omega^2 L^2)(g^2 + \omega^2 C^2)};$$

$$\gamma^2 = \beta^2 - \alpha^2 + 2j\beta\alpha = (rg - \omega^2 LC) + j(g\omega L + r\omega C),$$

откуда

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \omega^2 LC - rg + \sqrt{(r^2 + \omega^2 L^2)(g^2 + \omega^2 C^2)} \right]};$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ rg - \omega^2 LC + \sqrt{(r^2 + \omega^2 L^2)(g^2 + \omega^2 C^2)} \right]}.$$

Из этих выражений видно, что  $\alpha$  монотонно возрастает с увеличением  $L$  и  $C$ , а  $\beta$  монотонно возрастает с увеличением  $r$  и  $g$ . Исследуя изменение  $\alpha^2$  в функции от  $r$  и  $g$  и изменение  $\beta^2$  в функции от  $L$  и  $C$ , нетрудно установить, что  $\alpha$  и  $\beta$  имеют минимум при одном и том же условии, а именно при  $rC = gL$ , причем

$$\alpha_{\min} = \omega \sqrt{LC} \quad \text{и} \quad \beta_{\min} = \sqrt{rg}.$$

Коэффициент фазы определяет длину волны  $\lambda = \frac{2\pi}{\alpha}$ , и для фазовой скорости последней мы имеем  $v = \frac{\omega}{\alpha}$ . В случае  $rC = gL$  эта скорость имеет максимальное значение  $v_{\max} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  и равна скорости распространения электромагнитных волн в диэлектрике, окружающем провода линии (ч. III). То же значение скорости  $v$  мы получим, положив в первом приближении  $r = 0$  и  $g = 0$ .

Для воздушных линий фазовая скорость волн равна скорости света в воздухе, т. е.  $v \approx 3 \cdot 10^8$  м/сек. Для кабельных линий эта скорость меньше, так как диэлектрическая проницаемость изоляции кабеля в несколько раз превосходит диэлектрическую проницаемость воздуха. Поэтому длина волны для воздушных линий при  $f = 50$  гц будет  $\lambda = \frac{v}{f} = 6 \cdot 10^8$  м = 6000 км, и, следовательно, длина современных воздушных линий, служащих для передачи энергии, значительно меньше длины волны. В телефонии применяют более высокие частоты, а уже при  $f = 800$  гц длина волны для воздушной линии будет только 375 км, т. е. в телефонной линии может уложиться и несколько длин волн.

### § 135. Неискажающая линия

То обстоятельство, что  $\beta$  и  $v$  являются функциями частоты, вызывает искажение речи в длинных телефонных линиях и искажение сигналов в длинных телеграфных линиях, так как в этих случаях ток всегда содержит высшие гармоники. При продвижении волны тока вдоль линии изменяется соотношение между амплитудами гармоник, так как коэффициенты затухания для них различны. Кроме того, форма волны тока претерпевает изменение вследствие того, что гармоники имеют различные фазовые скорости. Однако в частном случае, когда  $rC = gL$ , мы имели:

$$\beta = \sqrt{rg}; \quad \alpha = \omega \sqrt{LC};$$

$$v = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

т. е. и  $\beta$  и  $v$  не зависят от частоты. Следовательно, при  $rC = gL$  причины указанных искажений исчезают, и поэтому такого рода линии называют *неискажающими*. Кроме того, при  $rC = gL$  получается минимальное значение  $\beta$ , что также улучшает телефонную и телеграфную передачу.

Из выражений для модуля  $z$  и аргумента  $\vartheta$  характеристического сопротивления  $Z$  при  $rC = gL$  имеем:

$$z = \sqrt{\frac{L}{C}}; \quad \vartheta = 0,$$

т. е. у неискажающей линии  $Z$  является вещественным числом. Поэтому в любой точке неискажающей линии, замкнутой на ее характеристическое сопротивление, ток и напряжение совпадают по фазе. При этом на любом отрезке линии энергия магнитного поля и энергия электрического поля в каждый момент времени равны

друг другу, так как  $z = \sqrt{\frac{L}{C}}$ , и, следовательно,

$$\frac{1}{2} Li^2 : \frac{1}{2} Cu^2 = \frac{L}{C} : z^2 = 1.$$

Таким образом, однородная линия, замкнутая в конце на характеристическое сопротивление, воспринимается на входных зажимах как активное сопротивление. В этом отношении данный случай имеет общее со случаем резонанса в цепях с сосредоточенными параметрами, когда также ток и напряжение на входных зажимах совпадают по фазе.

Как уже указывалось, для устранения отраженных волн, являющихся одной из причин искажения передачи, линии связи обычно

замыкают на сопротивление, равное характеристическому. Существенно заметить, что при замыкании неискажающей линии на ее характеристическое сопротивление коэффициент полезного действия линии имеет наибольшее возможное значение, равное  $e^{-2\beta l}$ .

Обычно в линиях  $gL < rC$ . Поэтому в линиях связи искусственно увеличивают индуктивность, включая в линию через определенные расстояния особые реактивные катушки или применяя кабели, проводящие жилы которых обмотаны тонкой лентой из материала с высокой магнитной проницаемостью.

### § 136. Однородная линия при различных режимах работы

Рассмотрим режимы холостого хода и короткого замыкания линии, причем счет расстояний будем вести от конца линии. При холостом ходе  $Z_{np} = \infty$ ,  $\dot{I}_2 = 0$ ,  $q_u = 1$ ,  $q_i = -1$ , и, следовательно,

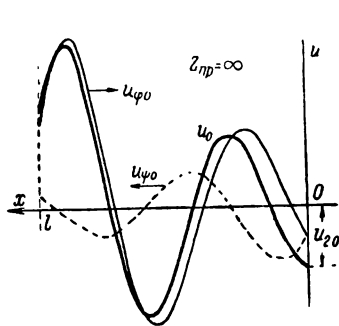


Рис. 263

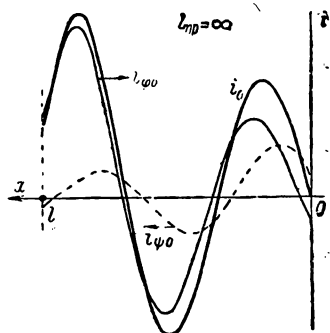


Рис. 264

волна напряжения отражается без перемены знака, а волна тока — с переменной знака, в соответствии с чем имеем:

$$\dot{U}_0 = \frac{1}{2} \dot{U}_{20} e^{\gamma x} + \frac{1}{2} \dot{U}_{20} e^{-\gamma x} = \dot{U}_{20} \operatorname{ch} \gamma x;$$

$$\dot{I}_0 = \frac{\dot{U}_{20}}{2Z} e^{\gamma x} - \frac{\dot{U}_{20}}{2Z} e^{-\gamma x} = \frac{\dot{U}_{20}}{Z} \operatorname{sh} \gamma x,$$

откуда для сопротивления линии при холостом ходе найдем:

$$Z_0 = \dot{U}_{10} : \dot{I}_{10} = Z : \operatorname{th} \gamma l.$$

На рис. 263 и 264 приведены для некоторого момента времени прямые, обратные и результирующие волны напряжения и тока при  $Z_{np} = \infty$ .

Характер распределения напряжения и тока вдоль линии хорошо иллюстрируется кривыми распределения квадратов их дейст-

вующих значений. Для квадратов модулей комплексных  $\operatorname{ch} \gamma x$  и  $\operatorname{sh} \gamma x$  имеем:

$$|\operatorname{ch} \gamma x|^2 = |\operatorname{ch}^2(\beta x + j\alpha x)| = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2\beta x + \cos 2\alpha x);$$

$$|\operatorname{sh} \gamma x|^2 = |\operatorname{sh}^2(\beta x + j\alpha x)| = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2\beta x - \cos 2\alpha x),$$

и, следовательно,

$$U_0^2 = \frac{1}{2} U_{20}^2 (\operatorname{ch} 2\beta x + \cos 2\alpha x); \quad I_0^2 = \frac{U_{20}^2}{2Z^2} (\operatorname{ch} 2\beta x - \cos 2\alpha x),$$

где  $z$  — модуль комплекса  $Z$ .

Кривые  $\operatorname{ch} 2\beta x$  и  $\cos 2\alpha x$ , а также их сумма, характеризующая распределение  $U_0^2$ , и их разность, характеризующая распределение

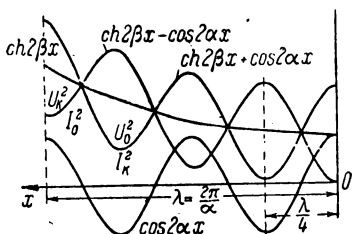


Рис. 265

$I_0^2$ , приведены на рис. 265. Из этих кривых видно, что максимумы и минимумы как  $U_0$ , так и  $I_0$  чередуются приблизительно через четверть длины волны, причем максимумы  $U_0$  сдвинуты относительно максимумов  $I_0$  также почти на четверть длины волны. Из этих же кривых следует, что в линиях, длина которых не превышает четверти длины волны, при холостом ходе действующее значение тока убывает, а действующее значение напря-

жения, наоборот, возрастает в направлении от начала линии к ее концу.

При коротком замыкании  $Z_{np} = 0$ ,  $\dot{U}_2 = 0$ ,  $q_u = -1$ ,  $q_l = 1$ , и, следовательно, волна напряжения отражается с переменной знака, а волна тока без перемены знака, в соответствии с чем имеем:

$$U_k = \frac{1}{2} I_{2k} Z e^{\gamma x} - \frac{1}{2} I_{2k} Z e^{-\gamma x} = I_{2k} Z \operatorname{sh} \gamma x;$$

$$I_k = \frac{1}{2} I_{2k} e^{\gamma x} + \frac{1}{2} I_{2k} e^{-\gamma x} = I_{2k} \operatorname{ch} \gamma x,$$

откуда для сопротивления линии при коротком замыкании найдем:

$$Z_k = U_{1k} : I_{1k} = Z \operatorname{th} \gamma l.$$

На рис. 266 и 267 приведены для некоторого момента времени прямые, обратные и результирующие волны напряжения и тока при  $Z_{np} = 0$ .

Для квадратов действующих значений  $U_k$  и  $I_k$ , аналогично предыдущему, найдем:

$$U_k^2 = \frac{1}{2} I_{2k}^2 z^2 (\operatorname{ch} 2\beta x - \cos 2\alpha x); \quad I_k^2 = \frac{1}{2} I_{2k}^2 (\operatorname{ch} 2\beta x + \cos 2\alpha x).$$

Следовательно, при коротком замыкании распределение  $U_k^2$  и  $I_k^2$  вдоль линии характеризуется, соответственно, кривыми  $(\operatorname{ch} 2\beta x - \cos 2\alpha x)$  и  $(\operatorname{ch} 2\beta x + \cos 2\alpha x)$ , приведенными на рис. 265.

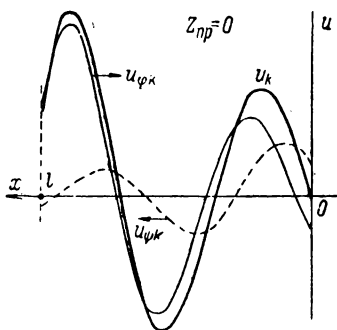


Рис. 266

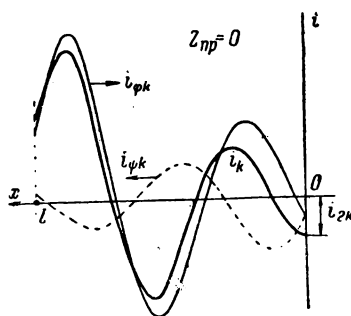


Рис. 267

Заметим, что, определив из опытов холостого хода и короткого замыкания  $Z_0 = Z : \operatorname{th} \gamma l$  и  $Z_k = Z \operatorname{th} \gamma l$ , можно вычислить  $Z$  и  $\gamma l$ , а именно, имеем:

$$Z = \sqrt{Z_0 Z_k} \quad \text{и} \quad \operatorname{th} \gamma l = \sqrt{Z_k / Z_0}.$$

Любой рабочий режим линии при замыкании ее на сопротивление  $Z_{np}$  может быть получен наложением соответствующих режимов холостого хода и короткого замыкания.

Выражения для  $\dot{U}$  и  $\dot{I}$  в общем случае можно привести к виду:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_2 \left( \operatorname{ch} \gamma x + \frac{Z}{Z_{np}} \operatorname{sh} \gamma x \right) = \\ &= \dot{U}_2 \frac{\operatorname{ch} (\gamma x + \sigma)}{\operatorname{ch} \sigma}; \end{aligned}$$

$$\dot{I} = \dot{I}_2 \left( \operatorname{ch} \gamma x + \frac{Z_{np}}{Z} \operatorname{sh} \gamma x \right) = \dot{I}_2 \frac{\operatorname{sh} (\gamma x + \sigma)}{\operatorname{sh} \sigma},$$

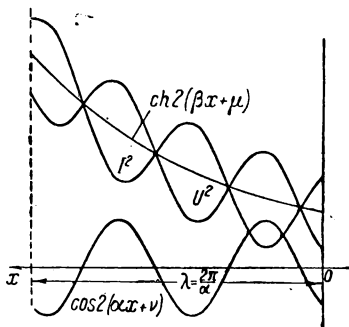


Рис. 268

если положить  $Z : Z_{np} = \operatorname{th} \sigma = \operatorname{th} (\mu + j\nu)$ , и, следовательно,  $U^2$  и  $I^2$  пропорциональны соответственно  $[\operatorname{ch} 2(\beta x + \mu) + \cos 2(\alpha x + \nu)]$  и  $[\operatorname{ch} 2(\beta x + \mu) - \cos 2(\alpha x + \nu)]$ , где  $\mu$  и  $\nu$  зависят от соотношения между  $Z_{np}$  и  $Z$ . Поэтому кривые  $U^2 = F_1(x)$  и  $I^2 = F_2(x)$  в этом случае (рис. 268) сходны с кривыми при  $Z_{np} = \infty$  и  $Z_{np} = 0$ . Основное отличие состоит в том, что в конце линии и  $U_2 \neq 0$ , и  $I_2 \neq 0$ .

### § 137. Линия без потерь

В ряде случаев, в особенности при высоких частотах, когда  $\omega L \gg r$  и  $\omega C \gg g$ , можно пренебречь наличием потерь в линии и положить  $r = 0$  и  $g = 0$ . Тогда  $\beta = 0$ ,  $\gamma = j\alpha$ ,  $\alpha = \omega \sqrt{LC}$ ,  $Z = z = \sqrt{L/C}$  и многие соотношения, полученные ранее, упрощаются.

В случае холостого хода линии, когда  $Z_{np} = \infty$  и  $I_2 = 0$ , при счете расстояний от конца линии имеем:

$$\dot{U} = \frac{1}{2} (\dot{U}_2 e^{j\alpha x} + \dot{U}_2 e^{-j\alpha x}) = \dot{U}_2 \cos \alpha x;$$

$$\dot{I} = \frac{1}{2z} (\dot{U}_2 e^{j\alpha x} - \dot{U}_2 e^{-j\alpha x}) = j \frac{\dot{U}_2}{z} \sin \alpha x.$$

Из этих выражений видно, что в рассматриваемом случае в результате наложения двух незатухающих бегущих волн с одинаковыми амплитудами получаются *стоячие волны*. Действительно,  $\cos \alpha x$  при  $x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, \dots$  обращается в  $\pm 1$ , а  $\sin \alpha x$  — в нуль, и в соответствующих точках линии мы имеем пучности напряжения и узлы тока. При  $x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \dots$  мы получаем узлы напряжения и пучности тока (рис. 269), так как тогда  $\cos \alpha x$  обращается в нуль, а  $\sin \alpha x$  — в  $\pm 1$ . Для входного сопротивления линии при холостом ходе  $Z_0$ , обозначая длину линии через  $l$ , получим:

$$Z_0 = \dot{U}_{10} : \dot{I}_{10} = -jz \operatorname{ctg} \alpha l = jx_l,$$

где  $x_l$  — соответствующее реактивное сопротивление, т. е. в этом случае входное сопротивление линии при  $0 < l < \frac{\lambda}{4}$  имеет емкостный характер, при  $\frac{\lambda}{4} < l < \frac{\lambda}{2}$  имеет индуктивный характер и т. д. (рис. 269). При  $l = \frac{\lambda}{4}, l = \frac{3\lambda}{4}, \dots$  входное сопротивление разомкнутой линии равно нулю, что соответствует резонансу напряжений, а при  $l = \frac{\lambda}{2}, l = \lambda, \dots$  оно равно бесконечности, что соответствует резонансу токов.

В случае короткого замыкания линии, когда  $Z_{np} = 0$  и  $U_2 = 0$ , имеем:

$$\dot{U} = \frac{1}{2} (\dot{I}_2 z e^{j\alpha x} - \dot{I}_2 z e^{-j\alpha x}) = j \dot{I}_2 z \sin \alpha x;$$

$$\dot{I} = \frac{1}{2} (\dot{I}_2 e^{j\alpha x} + \dot{I}_2 e^{-j\alpha x}) = \dot{I}_2 \cos \alpha x,$$

откуда видно, что и в этом случае мы имеем наложение двух незатухающих бегущих волн с одинаковыми амплитудами, в результате чего получаются стоячие волны. Все отличие от предыдущего случая состоит в том, что в конце линии будет узел напряжения и пучность тока (рис. 270). Для входного сопротивления короткозамкнутой линии  $Z_k$  имеем:

$$Z_k = \dot{U}_{1k} : \dot{I}_{1k} = jz \operatorname{tg} \alpha l = jx_l,$$

где  $x_l$  — соответствующее реактивное сопротивление, т. е. в этом случае входное сопротивление линии при  $0 < l < \frac{\lambda}{2}$  имеет индук-

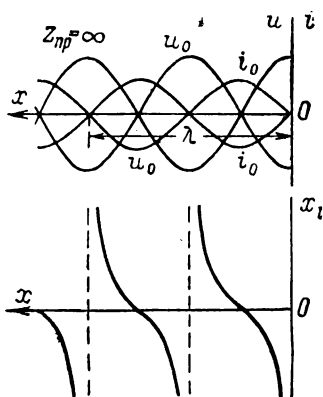


Рис. 269

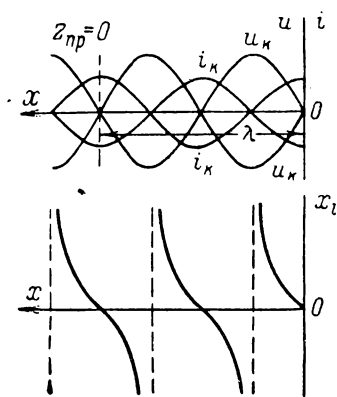


Рис. 270

тивный характер, при  $\frac{\lambda}{4} < l < \frac{\lambda}{2}$  имеет емкостный характер и т. д. (рис. 270). При  $l = \frac{\lambda}{2}$ ,  $l = \lambda \dots$  входное сопротивление короткозамкнутой линии равно нулю, что соответствует резонансу напряжений, а при  $l = \frac{\lambda}{4}$ ,  $l = \frac{3\lambda}{4} \dots$  оно равно бесконечности, что соответствует резонансу токов.

При очень высоких частотах короткозамкнутая линия, длина которой равна четверти длины волны, применяется в качестве колебательного контура, имеющего вследствие относительно малых потерь весьма малое затухание. Такая линия практически обладает чрезвычайно большим входным сопротивлением, и это дает возможность использовать ее при малых длинах волн также для изоляции высокочастотных линий (рис. 271) вместо изоляторов, применение которых в этих случаях влечет за собою большие потери.



При реактивной нагрузке линии, когда  $Z_{np} = jx_{np}$ , имеем:

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \left( \cos \alpha x + \frac{z}{x_{np}} \sin \alpha x \right) = \dot{U}_2 \frac{\sin(\alpha x + \sigma)}{\sin \sigma};$$

$$\dot{I} = \dot{I}_2 \left( \cos \alpha x - \frac{x_{np}}{z} \sin \alpha x \right) = \dot{I}_2 \frac{\cos(\alpha x + \sigma)}{\cos \sigma},$$

если положить  $\frac{x_{np}}{z} = \operatorname{tg} \sigma$ . Таким образом, и в данном случае получаются стоячие волны, но в конце линии при этом не будет ни пучности, ни узла (рис. 272). Для входного сопротивления линии, замкнутой на реактивное сопротивление, имеем:

$$Z_x = \dot{U}_{1x} : \dot{I}_{1x} = jx_{np} \frac{\operatorname{tg}(\alpha l + \sigma)}{\operatorname{tg} \sigma} =$$

$$= jz \operatorname{tg}(\alpha l + \sigma) = jx_p,$$

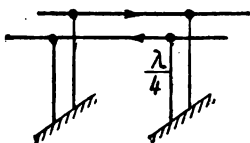


Рис. 271

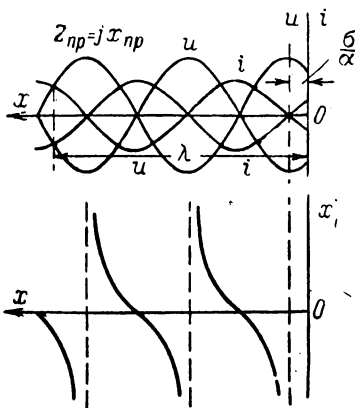


Рис. 272

т. е. зависимость входного сопротивления линии от ее длины имеет такой же характер (рис. 272), как и в двух предыдущих случаях, причем для  $l = \frac{\lambda}{4}$  и  $l = \frac{\lambda}{2}$  найдем, соответственно,  $Z_x = -\frac{z^2}{jx_{np}}$  и

$$Z_x = jx_{np}. \text{ При } x_{np} = z \operatorname{ctg} \alpha l, \text{ когда } \sigma = \pm \frac{\pi}{4} - \alpha l, Z_x = \pm \infty,$$

и тогда линия эквивалентна короткозамкнутой линии, длина которой равна четверти длины волны, а при  $x_{np} = -z \operatorname{tg} \alpha l$ , когда  $\sigma = -\alpha l$ ,  $Z_x = 0$ , и, следовательно, в этом случае линия эквивалентна разомкнутой линии, длина которой равна четверти длины волны.

Таким образом, в зависимости от частоты приложенного напряжения, длины линии и оконечного сопротивления, линия без потерь, замкнутая на реактивное сопротивление, представляет собою индуктивное или емкостное сопротивление, причем эквивалентная индуктивность или емкость может иметь все значения в пределах от нуля до бесконечности. Возможность осуществить при помощи соответствующим образом подобранной линии индуктивное или емкостное сопротивление той или иной величины имеет важное практическое значение при высоких частотах.

Итак, во всех трех рассмотренных случаях работы линии без потерь в ней получаются стоячие волны. При этом пучности напряжения и тока, а также узлы напряжения и тока сдвинуты друг относительно друга на четверть длины волны. Напряжение и ток в каждой точке линии отличаются по фазе на четверть периода, и напряжение достигает максимального значения, когда ток во всей линии равен нулю, а ток достигает максимального значения, когда напряжение во всей линии равно нулю.

Так как в любой момент времени в узлах напряжения  $u = 0$ , а в узлах тока  $i = 0$ , то в этих точках линии мощность всегда равна нулю, и энергия через эти точки не передается. Однако на каждом участке линии, ограниченном узлами напряжения и тока, происходит передача энергии вдоль линии, связанная с колебаниями энергии между электрическим и магнитным полями на этом участке.

Все три случая образования стоячих волн в линии, рассмотренные нами, характеризуются отсутствием расхода энергии как в линии, так и в приемнике. При наличии расхода энергии или в линии, или в приемнике, в линии неизбежно должны существовать бегущие волны напряжения и тока, с которыми только и может быть связан процесс передачи энергии вдоль всей линии.

В заключение остановимся вкратце на рассмотрении линии без потерь, имеющей длину, равную четверти длины волны, и замкнутой на активное сопротивление  $r_{np}$ . В этом случае

$$\operatorname{ch} \gamma l = \cos \alpha l = \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0,$$

а

$$\operatorname{sh} \gamma l = j \sin \alpha l = j \sin \frac{\pi}{2} = j$$

и мы имеем:

$$\dot{U}_1 = j \dot{U}_2 \frac{z}{r_{np}}; \quad \dot{I}_1 = j \dot{I}_2 \frac{r_{np}}{z},$$

т. е. такую линию можно рассматривать как идеальный трансформатор с коэффициентом трансформации, равным  $\frac{z}{r_{np}}$ . Это весьма важное свойство дает возможность использовать линию, длина которой равна четверти длины волны, для согласования приемника с генератором или одной линии с другой линией. Так как входное сопротивление  $Z_{ax}$  рассматриваемой линии равно:

$$Z_{ax} = \dot{U}_1 : \dot{I}_1 = \frac{z^2}{r_{np}},$$

то для согласования генератора и приемника, имеющих активные сопротивления  $r_z$  и  $r_{np}$ , или двух линий с такими же характеристическими сопротивлениями достаточно включить между ними линию, имеющую длину, равную четверти длины волны, и обладающую характеристическим сопротивлением  $z = \sqrt{r_z r_{np}}$ .

## ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ

### ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ОДНОРОДНЫХ ЛИНИЯХ

#### § 138. Общее решение уравнений однородной неискажающей линии

Для выяснения наиболее характерных особенностей переходных режимов в однородных линиях найдем общее решение уравнений однородной линии:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = ri + L \frac{\partial i}{\partial t}; \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = gu + C \frac{\partial u}{\partial t}$$

для частного случая неискажающей линии, когда  $rC = gL$ .

Положим  $\frac{r}{L} = \frac{g}{C} = \delta$  и введем вместо  $u$  и  $i$  новые функции  $u_1$  и  $i_1$ , связанные с  $u$  и  $i$  соотношениями:

$$u = u_1 e^{-\delta t}; \quad i = i_1 e^{-\delta t}.$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} e^{-\delta t}; & \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u_1}{\partial t} e^{-\delta t} - \delta u_1 e^{-\delta t}; \\ \frac{\partial i}{\partial x} &= \frac{\partial i_1}{\partial x} e^{-\delta t}; & \frac{\partial i}{\partial t} &= \frac{\partial i_1}{\partial t} e^{-\delta t} - \delta i_1 e^{-\delta t}. \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения производных в основные уравнения линии и сокращая на  $e^{-\delta t}$ , приведем их к виду:

$$-\frac{\partial u_1}{\partial x} = L \frac{\partial i_1}{\partial t}; \quad -\frac{\partial i_1}{\partial x} = C \frac{\partial u_1}{\partial t}$$

и, взяв производную от первого по  $x$ , а от второго по  $t$ , получим:

$$-\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = L \frac{\partial^2 i_1}{\partial x \partial t}; \quad -\frac{\partial^2 i_1}{\partial x \partial t} = C \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}.$$

Отсюда найдем:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

и, положив  $CL = \frac{1}{v^2}$ , придем к волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}.$$

Введем вместо  $x$  и  $t$  новые переменные, а именно:

$$\xi = x - vt; \quad \eta = x + vt.$$

Тогда, приняв во внимание, что

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = -v; \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = v;$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial u_1}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = -v \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + v \frac{\partial u_1}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} - 2v^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial \eta} + v^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2},$$

и подставив найденные значения вторых производных в волновое уравнение, найдем:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right) = 0.$$

Отсюда, интегрируя, получим:

$$\frac{\partial u_1}{\partial \eta} = \vartheta(\eta) \quad \text{и} \quad u_1 = \int \vartheta(\eta) d\eta + \varphi(\xi) = \psi(\eta) + \varphi(\xi),$$

если положить  $\int \vartheta(\eta) d\eta = \psi(\eta)$ .

Возвращаясь к переменным  $x$  и  $t$ , можем написать:

$$u_1 = \varphi(x - vt) + \psi(x + vt)$$

и, следовательно, для напряжения  $u$  между проводами линии имеем:

$$u = [\varphi(x - vt) + \psi(x + vt)] e^{-\lambda t}.$$

Для нахождения  $i_1$  подставим в уравнение  $-\frac{\partial i_1}{\partial x} = C \frac{\partial u_1}{\partial t}$  только что найденное выражение для  $u_1$ . Тогда получим:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial i_1}{\partial x} &= C \frac{\partial [\varphi(\xi) + \psi(\eta)]}{\partial t} = C \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right] = \\ &= Cv \left[ -\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right] = -\sqrt{\frac{C}{L}} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right], \end{aligned}$$

так как

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta},$$

и, проинтегрировав, найдем:

$$i_1 = \sqrt{\frac{C}{L}} [\varphi(x-vt) - \psi(x+vt) + f(t)],$$

потому что постоянная интегрирования не зависит от  $x$ , но может зависеть от  $t$ . Для определения  $f(t)$  подставим найденные для  $u_1$  и  $i_1$  значения в уравнение  $-\frac{\partial u_1}{\partial x} = L \frac{\partial i_1}{\partial t}$  и тогда получим  $\frac{df(t)}{dt} = 0$ . Следовательно,  $f(t) = A = \text{const}$ . Однако можно положить  $A = 0$ , так как при  $A \neq 0$  мы могли бы ввести вместо  $\varphi$  и  $\psi$  функции  $\varphi_1 = \varphi + \frac{A}{2}$  и  $\psi_1 = \psi - \frac{A}{2}$ , после чего получились бы выражения для  $u_1$  и  $i_1$ , в которые постоянная  $A$  не входит явно. Поэтому можем написать:

$$i_1 = \sqrt{\frac{C}{L}} [\varphi(x-vt) - \psi(x+vt)]$$

и, следовательно, для тока  $i$  в линии получим:

$$i = [\varphi(x-vt) - \psi(x+vt)] e^{-\delta t} : \sqrt{\frac{L}{C}},$$

где  $\sqrt{\frac{L}{C}}$  представляет собою, как известно из предыдущего, волновое сопротивление неискажающей линии.

Полученные нами выражения для напряжения  $u$  и тока  $i$  можно привести к иному виду, приняв во внимание, что

$$\delta^2 = \frac{r}{L} \frac{g}{C} = \beta^2 v^2 \quad \text{и} \quad \delta t = \beta vt,$$

где  $\beta = \sqrt{rg}$  — коэффициент затухания неискажающей линии (§ 135), и что, следовательно,

$$e^{-\delta t} = e^{-\beta vt} = e^{\beta(x-vt)} e^{-\beta x} = e^{-\beta(x+vt)} e^{\beta x}.$$

На основании последних равенств выражения для  $u$  и  $i$  можно представить в виде:

$$u = \varphi(x-vt) e^{-\beta x} + \psi(x+vt) e^{\beta x};$$

$$i = [\varphi(x-vt) e^{-\beta x} - \psi(x+vt) e^{\beta x}] : \sqrt{\frac{L}{C}},$$

причем следует иметь в виду, что функции  $\varphi$  и  $\psi$  в этих выражениях отличаются от  $\varphi$  и  $\psi$  в предыдущих выражениях для напряжения и тока, соответственно, множителями  $e^{\beta(x-vt)}$  и  $e^{-\beta(x+vt)}$ .

## § 139. Волны в неискажающей линии

Рассмотрим только что полученные нами выражения для напряжения и тока линии. При этом для простоты сначала допустим, что потери в линии пренебрежимо малы, т. е. положим

$$r=0 \text{ и } g=0. \text{ Тогда } \delta=0, \beta=0, e^{-\delta t}=1,$$

а также

$$e^{\beta(x-vt)} = e^{-\beta(x+vt)} = e^{-\beta x} = e^{\beta x} = 1,$$

и для линии без потерь мы получим:

$$u = \varphi(x-vt) + \psi(x+vt);$$

$$i = \left[ \varphi(x-vt) : \sqrt{\frac{L}{C}} \right] + \left[ \psi(x+vt) : \left( -\sqrt{\frac{L}{C}} \right) \right].$$

Пусть в частном случае  $\psi(x+vt) = 0$  и  $u = \varphi(x-vt)$ . Тогда, положив в последнем равенстве  $t = 0$ , мы найдем распределение напряжения вдоль линии в начальный момент времени. Возьмем некоторую произвольную точку  $x$  и предположим, что она перемещается вдоль линии со скоростью  $v$ , т. е. что ее положение определяется координатой  $x = x_0 + vt$ . Тогда напряжение в этой движущейся точке  $u = \varphi(x_0 + vt - vt) = \varphi(x_0)$  не будет зависеть от времени. Так как это заключение справедливо для любой точки, движущейся вдоль линии со скоростью  $v$ , то, следовательно, при  $u = \varphi(x-vt)$  начальное распределение напряжения  $u$  перемещается вдоль линии со скоростью  $v$ . Иными словами при  $u = \varphi(x-vt)$  вдоль линии распространяется со скоростью  $v$  прямая волна напряжения, бегущая вперед и не претерпевающая изменения формы. Аналогично функция  $u = \psi(x+vt)$  определяет обратную волну напряжения, распространяющуюся вдоль линии также без изменения формы со скоростью  $(-v)$  или, что то же, распространяющуюся со скоростью  $v$  в отрицательном направлении счета расстояний, т. е. бегущую назад.

Таким образом, при отсутствии потерь в линии напряжение, а также и ток в ней могут быть представлены как суммы двух волн, распространяющихся вдоль линии без изменения формы со скоростью  $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  в противоположных направлениях. При этом в любой точке линии отношение напряжения и тока для прямой волны равно  $\sqrt{L/C}$ , т. е. волновому сопротивлению линии, зависящему только от параметров линии, а для обратной волны это отношение равно  $(-\sqrt{L/C})$ . При рассмотрении установившихся процессов уже указывалось, что скорость распространения волн в неискажающей однородной линии  $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  для воздушных линий равна скорости света в воздухе.

Наличие в выражениях для  $u$  и  $i$  множителя  $e^{-\beta t}$  или, соответственно, в другом их выражении множителей  $e^{-\beta x}$  и  $e^{\beta x}$ , причем  $\beta = \sqrt{rg}$ , показывает, что обе волны, по мере продвижения их вдоль линии, затухают по показательному закону. Причиной затухания волн является постепенное превращение начального запаса энергии электрического и магнитного полей, связанных с линией, в тепло, выделяющееся в проводах, так как  $r \neq 0$ , а также и в среде, окружающей провода, так как  $g \neq 0$ .

В дальнейшем мы будем предполагать, что волны при движении их вдоль линии не затухают. Затухание волн вследствие потерь в линии при необходимости может быть учтено, по крайней мере, для неискажающей линии, так как нами установлено, что в этом случае волны затухают по показательному закону с показателем  $\beta x = \sqrt{rg}x$ .

При наличии только одних прямых или только одних обратных волн для энергии магнитного и электрического полей на элементе линии  $dx$ , приняв во внимание, что  $\frac{u^2}{i^2} = \frac{L}{C}$ , найдем:

$$dW_m = \frac{1}{2} i^2 L dx = \frac{1}{2} u^2 C dx = dW_e.$$

Отсюда следует, что в каждом из этих случаев энергии магнитного и электрического полей на элементе длины линии, а следовательно, и во всей линии, равны друг другу, и для суммы энергий этих полей на элементе линии получим:

$$dW = dW_m + dW_e = i^2 L dx = u^2 C dx = ui \sqrt{LC} dx$$

и для соответствующей мощности найдем:

$$p = ui = i^2 \sqrt{\frac{L}{C}} = u^2 \sqrt{\frac{C}{L}},$$

откуда следует, что при данном значении напряжения эта мощность тем больше, чем меньше волновое сопротивление линии.

#### § 140. О происхождении и характере волн в линиях

Возникновение волн в линиях обычно связано или с атмосферными разрядами, или с переключениями, т. е. с включением и выключением или самих линий, или устройств, связанных с ними.

Пусть в линии на некотором ее протяжении индуктирован заряд вследствие нахождения над этой частью линии заряженного облака. Если облако, индуктировавшее заряд, разрядится, то этот заряд освободится, и тогда напряжение вдоль линии будет распределено пропорционально заряду, приходящемуся на каждый элемент длины линии. В результате освобождения индуктированного заряда вдоль

линии начнут распространяться волны напряжения и тока. Пусть распределение напряжения вдоль линии в начальный момент времени задано функцией  $f_0(x)$  (рис. 273, а). Волновое сопротивление линии, являющееся в нашем случае вещественным числом, равным  $L/C$ , обозначим через  $z$ . Тогда, приняв во внимание, что ток в начальный момент времени равен нулю, имеем:

$$u_0 = u_{\varphi 0} + u_{\psi 0} = f_0(x);$$

$$i_0 = i_{\varphi 0} + i_{\psi 0} = (u_{\varphi 0} - u_{\psi 0}) : z = 0$$

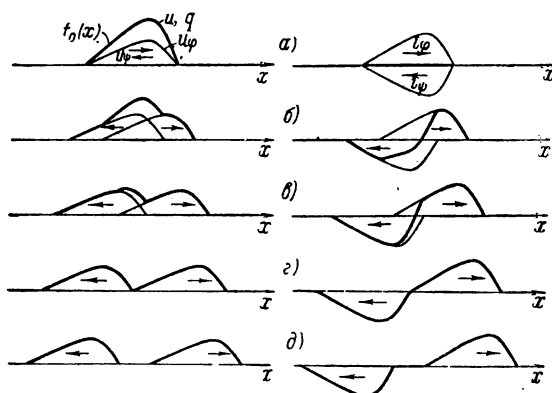


Рис. 273

и, следовательно,

$$u_{\varphi 0} = u_{\psi 0} = \frac{1}{2} f_0(x).$$

Таким образом, в начальный момент времени напряжение представляет собою сумму двух равных волн, одинаковых по форме и имеющих один и тот же знак, а ток — сумму двух волн, одинаковых по форме, но имеющих противоположные знаки.

С момента освобождения индуктированного заряда эти волны напряжения, а также и волны тока распространяются по линии в противоположных направлениях, причем скорости всех этих волн по абсолютной величине равны между собою. На рис. 273 представлено движение волн напряжения и тока в первые моменты времени после освобождения индуктированного заряда в предположении, что они не затухают.

При изучении явлений, связанных с переключениями, в тех случаях, когда длина линии мала по сравнению с длиной волны, мы будем предполагать, что внешние э. д. с. постоянны. Это предположение допустимо; так как рассматриваемые явления протекают настолько быстро, что в случае синусоидальной э. д. с., имеющей



частоту порядка десятков герцев, величина этой э. д. с. за время пробега волны вдоль всей линии может измениться лишь весьма незначительно. Кроме того, мы будем считать, что процессы переключения осуществляются мгновенно. В соответствии с этими предположениями в дальнейшем мы примем, что волны напряжения и тока, идущие от источника внешней э. д. с., имеют прямоугольную форму.

#### § 141. Преломление и отражение волн в месте сопряжения двух однородных линий

Пусть волна  $\varphi_1$ , бегущая от источника э. д. с. по однородной линии, имеющей волновое сопротивление  $z_1$ , достигла конца этой линии, в котором последняя соединена с другой однородной линией, имеющей волновое сопротивление  $z_2$ . Обозначив напряжение и ток в первой линии через  $u_1$  и  $i_1$ , а во второй—через  $u_2$  и  $i_2$ , в месте сопряжения обеих линий имеем  $u_1 = u_2$  и  $i_1 = i_2$ . Предположим, что во второй линии до прихода волны из первой линии напряжения не было. Тогда непосредственно после прихода волны к месту сопряжения линий во второй линии может возникнуть лишь волна  $\varphi_2$ , бегущая в том же направлении, что и волна  $\varphi_1$ , и называемая *преломленной* волной, в то время как в первой линии, кроме волны  $\varphi_1$ , называемой *падающей* волной, при  $z_2 \neq z_1$  обязательно возникнет волна  $\psi_1$ , бегущая в обратном направлении и называемая *отраженной* волной, так как иначе не могут быть удовлетворены условия равенства напряжений или токов в месте сопряжения линий. Поэтому, отмечая индексами  $\varphi_1$ ,  $\psi_1$  и  $\varphi_2$ , соответственно, падающие, отраженные и преломленные волны, в месте сопряжения линий имеем:

$$u_1 = u_{\varphi_1} + u_{\psi_1} = u_{\varphi_2} = u_2;$$

$$i_1 = (u_{\varphi_1} - u_{\psi_1}) : z_1 = u_{\varphi_2} : z_2 = i_2,$$

откуда

$$u_{\varphi_2} = \frac{2z_2}{z_2 + z_1} u_{\varphi_1}; \quad u_{\psi_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} u_{\varphi_1};$$

$$i_{\varphi_2} = \frac{2z_1}{z_1 + z_2} i_{\varphi_1}; \quad i_{\psi_1} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} i_{\varphi_1}.$$

Из этих отношений следует, что в данном случае преломленные и отраженные волны имеют ту же форму, что и падающие волны. Отношения  $(u_{\varphi_2} : u_{\varphi_1})$  и  $(i_{\varphi_2} : i_{\varphi_1})$  можно рассматривать как коэффициенты преломления, а отношения  $(u_{\psi_1} : u_{\varphi_1}) = q_u$  и  $(i_{\psi_1} : i_{\varphi_1}) = q_i$  — как коэффициенты отражения.

Из выражений, полученных для преломленных и отраженных волн, следует, что преломленные волны напряжения и тока имеют тот же знак, что и падающие, а из отраженных волн одна сохраняет знак падающей волны, а другая имеет обратный знак.

При  $z_2 > z_1$ , что, например, имеет место при переходе волны из кабельной линии в воздушную, преломленная волна напряжения больше падающей, а преломленная волна тока меньше падающей. Что касается отраженных волн, то волна напряжения отражается без перемены знака, а волна тока — с переменной знака, причем по абсолютной величине обе эти волны меньше соответствующих падающих волн. При этом вследствие наложения отраженных волн на падающие ток в первой линии уменьшается, а напряжение возрастает, но не более чем в два раза. На рис. 274 показаны падающие, преломленные и отраженные волны при  $z_2 > z_1$ . Заметим, что даже

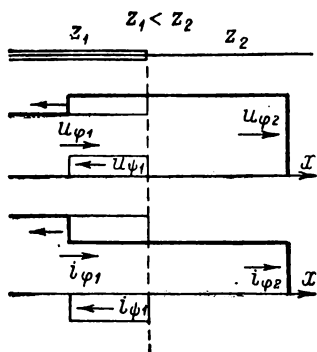


Рис. 274

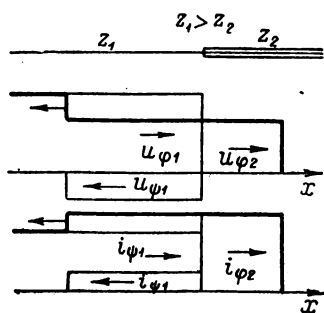


Рис. 275

при очень больших значениях  $z_2$  преломленная волна напряжения не может превысить падающую волну более чем в два раза.

При  $z_2 < z_1$  преломленная волна напряжения меньше падающей, а преломленная волна тока больше падающей. В этом случае при отражении знак изменяется для волны напряжения, а абсолютные величины обеих отраженных волн опять будут меньше, чем величины соответствующих падающих волн. Вследствие наложения отраженных волн на волны падающие напряжение в первой линии уменьшится, а ток возрастет, но не более чем в два раза (рис. 275). Заметим, что даже при очень больших значениях  $z_2$  преломленная волна тока не может превысить падающую волну более чем в два раза.

Рассматривая мощность  $p$  в месте сопряжения линий, имеем:

$$p = u_1 i_1 = u_2 i_2$$

или

$$(u_{\varphi 1} + u_{\psi 1}) \frac{u_{\varphi 1} - u_{\psi 1}}{z_1} = \frac{u_{\varphi 1}^2}{z_1} - \frac{u_{\psi 1}^2}{z_1} = \frac{u_{\varphi 2}^2}{z_2}$$

и, следовательно,

$$\frac{u_{\varphi 1}^2}{z_1} = \frac{u_{\psi 1}^2}{z_1} + \frac{u_{\varphi 2}^2}{z_2}$$

или

$$P_{\varphi 1} = P_{\psi 1} + P_{\varphi 2},$$

где  $P_{\varphi 1}$ ,  $P_{\psi 1}$ ,  $P_{\varphi 2}$  — мощности падающих отраженных и преломленных волн. Отсюда следует, что часть мощности падающих волн, равная мощности преломленных волн, переходит во вторую линию, а остальная часть, равная мощности отраженных волн, возвращается обратно в первую линию.

Из изложенного следует, что при переходе волны напряжения из линии с меньшим волновым сопротивлением в линию с большим волновым сопротивлением напряжение увеличивается и в пределе может удвоиться. Поэтому напряжение возрастает при переходе волны из кабельной линии в воздушную и из линий передачи в обмотки трансформаторов, которые представляют собою цепи, обладающие значительным волновым сопротивлением, превосходящим волновое сопротивление воздушных линий.

Волны, возникающие в линиях, распространяются с конечной скоростью и могут поэтому вызывать значительные перенапряжения между соседними точками цепи, в одну из которых волна напряжения уже пришла. Эти перенапряжения тем больше, чем круче фронт волны, и наиболее значительны при отвесном фронте волны. В связи с этим первые витки обмоток трансформаторов в соответствующих случаях выполняют со значительно усиленной изоляцией.

#### § 142. Отражение волн от конца линии

Пусть бегущие волны напряжения и тока достигли конца однородной линии, имеющей волновое сопротивление  $z$  и замкнутой на сколь угодно сложную цепь с сосредоточенными параметрами. В результате отражения падающих волн  $\varphi$  от конца линии возникнут отраженные волны  $\psi$ , и для напряжения  $u$  и тока  $i$  в конце линии или, иными словами, для напряжения на зажимах оконечной цепи и тока в ней мы получим:

$$u = u_{\varphi} + u_{\psi}, \quad i = i_{\varphi} + i_{\psi} = (u_{\varphi} - u_{\psi}) : z, \quad zi = u_{\varphi} - u_{\psi},$$

откуда

$$2u_{\varphi} = zi + u.$$

Из этой простой зависимости следует, что ток  $i$  можно найти как ток, возникающий в эквивалентной схеме, включаемой под напряжение  $2u_{\varphi}$  и состоящей из активного сопротивления, равного волновому сопротивлению  $z$  линии, и последовательно соединенной с ним оконечной цепи.

Определив ток  $i$  по заданным  $u_{\varphi}$ ,  $z$  и параметрам оконечной цепи, мы можем найти отраженные волны напряжения и тока из соотношений:

$$u_{\psi} = u_{\varphi} - zi; \quad i_{\psi} = -\frac{u_{\psi}}{z}.$$

Рассмотрим, пользуясь этим способом, отражение волн от простейших оконечных цепей в предположении, что э. д. с. источника падающих волн постоянна.

Пусть однородная линия с волновым сопротивлением  $z$  замкнута на сопротивление  $r_0$ . Тогда эквивалентная схема состоит из последовательно соединенных сопротивлений  $z$  и  $r_0$ , и мы имеем:

$$i = \frac{2u_\varphi}{z + r_0}; \quad u_\psi = u_\varphi - zi = \frac{r_0 - z}{r_0 + z} u_\varphi; \quad i_\psi = -\frac{u_\psi}{z} = \frac{z - r_0}{z + r_0} i_\varphi.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае мы получили такие же соотношения между отраженными и падающими волнами, как и в случае отражения волн в месте сопряжения двух линий с той лишь разницей, что вместо волнового сопротивления второй линии вошло сопротивление  $r_0$ , на которое замкнута линия.

При этом для мощности  $p = ui$  в конце линии имеем:

$$p = ui = (u_\varphi + u_\psi) \frac{u_\varphi - u_\psi}{z} = \frac{u_\varphi^2}{z} - \frac{u_\psi^2}{z} = p_\varphi - p_\psi,$$

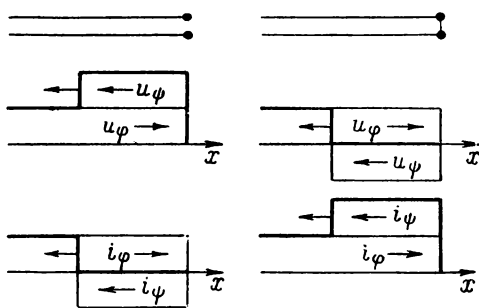


Рис. 276

т. е. эта мощность, поглощаемая приемником, равна разности мощностей падающих и отраженных волн. Если сопротивление  $r_0$  равно волновому сопротивлению линии  $z$ , то отраженных волн не возникает, и вся мощность падающих волн поглощается приемником.

Из полученных выражений можно установить соотношение между падающими и отраженными волнами в случае отражения волн от конца разомкнутой или короткозамкнутой линии. При разомкнутой линии, полагая  $r_0 = \infty$ , в конце линии имеем:

$$u_\psi = u_\varphi; \quad i_\psi = -i_\varphi,$$

а при короткозамкнутой линии, полагая  $r_0 = 0$ , в конце линии получим:

$$u_\psi = -u_\varphi; \quad i_\psi = i_\varphi,$$

т. е. в этих случаях отраженные волны имеют ту же величину, что и падающие, причем при разомкнутой линии с переменной знака отражается волна тока, а при короткозамкнутой линии с переменной знака отражается волна напряжения (рис. 276). Таким образом, в результате наложения отраженных волн на падающие в разомкнутой линии напряжение на ее конце возрастает в два раза, а в

короткозамкнутой линии ток в ее конце возрастает также в два раза, что можно получить из исследования отражения волн в месте сопряжения двух линий, полагая, соответственно, или  $z_2 = \infty$ , или  $z_2 = 0$ .

Это можно пояснить следующим образом. И при холостом ходе и при коротком замыкании падающие волны с присущей им энергией полностью отражаются от конца линии, так как в конце линии энергия не потребляется. Поэтому в той части линии, до которой дошли отраженные волны, энергия в два раза больше энергии падающих волн и, следовательно, в четыре раза больше энергии магнитного поля падающей волны тока, а также в четыре раза больше энергии электрического поля падающей волны напряжения, так как эти энергии равны друг другу.

При холостом ходе линии ток в ее конце должен равняться нулю. Поэтому, когда падающая волна тока придет к концу линии, то возникнет равная ей по величине и противоположная по знаку отраженная волна тока, и ток в конце линии упадет до нуля, а энергия магнитных полей, связанных с падающей и отраженной волнами тока, перейдет в энергию электрического поля. Увеличение в конце линии энергии электрического поля в четыре раза повлечет за собой возрастание напряжения в конце линии в два раза. Это повышение напряжения, связанное с переходом энергии магнитного поля в энергию электрического поля, будет распространяться от конца линии к ее началу.

При коротком замыкании линии напряжение в ее конце должно равняться нулю. Поэтому, когда падающая волна напряжения придет к концу линии, то возникнет равная ей по величине и противоположная по знаку отраженная волна напряжения, и напряжение в конце линии упадет до нуля, а энергия электрических полей, связанных с падающей и отраженной волнами напряжения, перейдет в энергию магнитного поля. Увеличение в конце линии энергии магнитного поля в четыре раза повлечет за собой возрастание тока в конце линии в два раза. Такое возрастание тока, связанное с переходом энергии электрического поля в энергию магнитного поля, будет распространяться от конца линии к ее началу.

Рассмотрим отражение волн в случае, когда конец однородной линии замкнут на цепь  $(r_0, L_0)$ . Тогда эквивалентная схема состоит из последовательно соединенных сопротивления  $(z + r_0)$  и индуктивности  $L_0$ , и при  $u_\varphi = \text{const}$  для тока  $i$  мы получим (§ 110):

$$i = \frac{2u_\varphi}{z + r_0} \left[ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right],$$

где  $\tau = \frac{L_0}{z + r_0}$ , и для  $u_\psi$  и  $i_\psi$  найдем:

$$u_\psi = \left[ \frac{r_0 - z}{r_0 + z} + \frac{2z}{r_0 + z} e^{-\frac{t}{\tau}} \right] u_\varphi; \quad i_\psi = \left[ \frac{z - r_0}{z + r_0} - \frac{2z}{z + r_0} e^{-\frac{t}{\tau}} \right] i_\varphi.$$

Из этих выражений, положив  $t = 0$ , нетрудно усмотреть, что в первый момент отражение от цепи  $(r_0, L_0)$  происходит так же, как и от разомкнутого конца линии. Полагая  $t = \infty$ , мы видим, что с течением времени напряжение и ток приближаются к значениям, которые мы имели для линии, замкнутой на сопротивление  $r_0$ . На

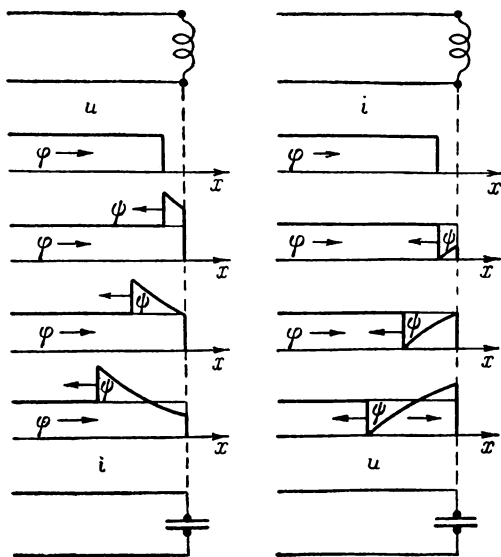


Рис. 277

рис. 277 показаны падающие и отраженные волны для частного случая  $r_0 = 0$ , когда мы имеем:

$$u_{\psi} = \left[ -1 + 2e^{-\frac{z}{L_0}t} \right] u_{\varphi}; \quad i_{\psi} = \left[ 1 - 2e^{-\frac{z}{L_0}t} \right] i_{\varphi}.$$

Рассмотрим случай, когда волны отражаются от конца линии, замкнутой на цепь  $(r_0, C_0)$ . Тогда эквивалентная схема состоит из последовательно соединенных сопротивления  $(z + r_0)$  и конденсатора емкостью  $C_0$ , и при  $u_{\varphi} = \text{const}$  для тока  $i$  мы имеем (§ 112):

$$i = \frac{2u_{\varphi}}{z + r_0} e^{-\frac{t}{\tau}},$$

где  $\tau = (z + r_0) C_0$ , и для  $u_{\psi}$  и  $i_{\psi}$  найдем:

$$u_{\psi} = \left[ 1 - \frac{2z}{z + r_0} e^{-\frac{t}{\tau}} \right] u_{\varphi}; \quad i_{\psi} = \left[ -1 + \frac{2z}{z + r_0} e^{-\frac{t}{\tau}} \right] i_{\varphi}.$$

Из этих выражений, положив  $t = 0$ , видим, что в первый момент времени отражение от цепи  $(r_0, C_0)$ , происходит так же, как в линии, замкнутой на сопротивление  $r_0$ . Полагая  $t = \infty$ , нетрудно убедиться, что с течением времени напряжение и ток приближаются к значениям, которые мы имели для случая разомкнутой линии. На рис. 277 показаны падающие и отраженные волны для частного случая  $r_0 = 0$ , когда мы имеем:

$$u_{\psi} = \left[ 1 - 2e^{-\frac{t}{zC_0}} \right] u_{\varphi}; \quad i_{\psi} = \left[ -1 + 2e^{-\frac{t}{zC_0}} \right] i_{\varphi}.$$

Так как до прихода отраженных волн к началу любой однородной линии напряжение на ее входных зажимах равно произведению из тока в начале линии на ее волновое сопротивление, то изложенный способ определения отраженных волн пригоден и в тех случаях, когда к оконечной цепи с сосредоточенными параметрами присоединены те или иные однородные линии. При этом, составляя соответствующую эквивалентную схему, каждую из линий, непосредственно присоединенных к оконечной цепи, следует заменить активным сопротивлением, равным ее волновому сопротивлению, независимо от того, что находится в конце этой линии. Необходимо, однако, иметь в виду, что составленная таким образом эквивалентная схема дает возможность производить расчеты лишь до момента прихода отраженных волн к началу хотя бы одной из линий, учтенных в этой схеме.

### § 143. Процесс включения однородной линии

Рассмотрим процесс включения под синусоидальное напряжение однородной линии в предположении, что длина линии мала по сравнению с длиной волны. Тогда, как было указано выше, можно пренебречь затуханием волн в начальной стадии процесса включения, а также ограничиться рассмотрением включения линии под действие постоянного напряжения, равного мгновенному значению напряжения в начале линии в момент включения. Пусть, кроме того, внутреннее сопротивление генератора пренебрежимо мало, иными словами, мощность генератора весьма велика. При этом предположении волны напряжения и тока будут отражаться от генератора так, как они отражаются от короткозамкнутого конца линии.

Рассмотрим случай, когда включаемая линия разомкнута на приемном конце, и предположим, что до момента включения напряжение и ток по всей длине линии равны нулю. После включения от генератора вдоль линии начнут распространяться волны напряжения и тока, и когда они дойдут до конца линии, напряжение вдоль линии будет равно напряжению генератора, а ток — напряжению генератора, деленному на волновое сопротивление линии. Дойдя

до разомкнутого конца линии, эти волны отразятся, причем волна напряжения не изменит знака, а волна тока изменит знак. При движении к генератору отраженная волна напряжения, налагаясь на падающую волну, повышает напряжение в линии до удвоенного напряжения генератора, а отраженная волна тока уменьшает ток в линии до нуля. В тот момент, когда эти волны дойдут до генератора, ток по всей длине линии будет равен нулю, и вся линия будет заряжена до напряжения,

равного удвоенному напряжению генератора. Волны, отразившиеся от разомкнутого конца, у генератора претерпят новое отражение, при котором волна напряжения изменит знак, а волна тока сохранит знак, так что получится отрицательная волна напряжения и отрицательная волна тока, идущие от генератора к концу линии. Отрицательная волна напряжения при движении к концу линии понижает напряжение в линии до напряжения, равного напряжению генератора, и одновременно в линии возникает ток, противо-

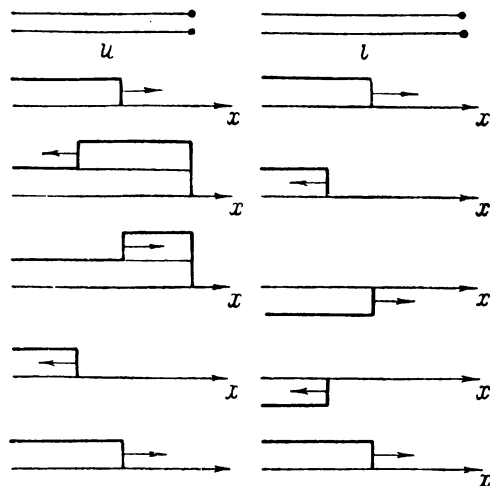


Рис. 278

положный по направлению первоначальному току. Дойдя до конца линии, отрицательные волны напряжения и тока претерпят третье отражение, в результате которого к генератору пойдет отрицательная волна напряжения, снижающая напряжение в линии до нуля, и положительная волна тока, уменьшающая ток в линии до нуля. Когда эти волны дойдут до генератора, линия будет полностью разряжена, и напряжение и ток по всей длине линии будут равны нулю. Этим и завершится полный цикл процессов, который при сделанных нами предположениях будет периодически повторяться. Отдельные характерные фазы рассмотренного цикла процессов представлены на рис. 278.

Полный цикл процесса движения и отражения волн в рассмотренном случае совершается в промежуток времени.

$$T = \frac{4l}{v} = 4l\sqrt{LC},$$

где  $l$  — длина линии, а  $v$  — скорость распространения волн в ней. Этот промежуток времени  $T$  называют *периодом собственных колебаний линии*. Если бы индуктивность и емкость линии были сосредоточены, то период  $T_0$  собственных колебаний такого контура



из катушки с индуктивностью  $Ll$  и конденсатора емкостью  $Cl$  был бы:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{Ll \cdot Cl} = 2\pi l \sqrt{LC},$$

т. е. в  $\pi/2$  раза больше, чем  $T$ .

Наличие потерь в линии ведет к тому, что волны напряжения и тока постепенно затухают, а величины напряжения и тока приближаются к тем значениям, которые они должны иметь при уста-

новившемся режиме холостого хода.

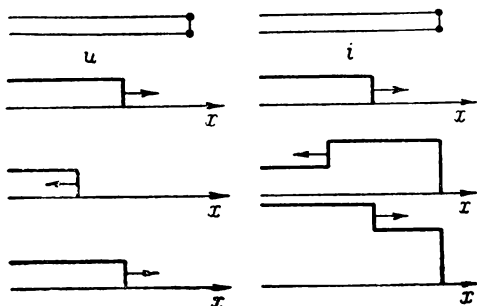


Рис. 279

В случае включения линии, конец которой замкнут накоротко, волна напряжения, распространяющаяся от генератора, отражается от конца линии с переменной знака, а волна тока — без перемены знака. Отраженная волна напряжения, налагаясь на падающую волну, понижает напряжение в линии до нуля, а в результате наложения

отраженной волны тока ток в линии удваивается. Когда отраженные волны дойдут до генератора, то напряжение во всей линии будет равно нулю, а ток — удвоенному первоначальному току. Так как при всех последующих отражениях и от генератора и от короткозамкнутого конца линии волна напряжения отражается с переменной знака, то напряжение в линии изменяется между нулем и напряжением генератора. Отражение волны тока и от генератора и от короткозамкнутого конца линии каждый раз происходит без перемены знака. Поэтому ток в линии после каждого отражения возрастает на величину первоначального тока (рис. 279).

Наличие потерь в линии вызывает затухание волн и ограничивает нарастание тока. По мере затухания волн напряжение и ток приближаются к тем значениям, которые они должны иметь при установившемся режиме короткого замыкания.

Если длина линии сравнима с длиной волны, то за время каждого пробега волны вдоль линии напряжение на зажимах генератора в начале линии успевает заметно измениться. При рассмотрении процессов в линии это изменение должно быть принято во внимание.

#### § 144. Прохождение волн при наличии реактивного сопротивления в месте сопряжения однородных линий

Пусть между двумя однородными линиями с волновыми сопротивлениями  $z_1$  и  $z_2$  включена последовательно реактивная катушка с индуктивностью  $L_0$ . Тогда, пренебрегая емкостью

между витками обмотки катушки, в месте сопряжения линий имеем:

$$i_1 = i_2; \quad u_1 = L_0 \frac{di_2}{dt} + u_2$$

и в случае перехода волн напряжения и тока из первой линии во вторую можем написать:

$$\frac{u_{\varphi 1} - u_{\psi 1}}{z_1} = \frac{u_{\varphi 2}}{z_2}; \quad u_{\varphi 1} + u_{\psi 1} = \frac{L_0}{z_2} \frac{du_{\varphi 2}}{dt} + u_{\varphi 2},$$

откуда

$$2u_{\varphi 1} = \frac{L_0}{z_2} \frac{du_{\varphi 2}}{dt} + \frac{z_2 + z_1}{z_2} u_{\varphi 2}.$$

При прямоугольной форме падающей волны имеем  $u_{\varphi 1} = \text{const}$  и, следовательно,

$$u_{\varphi 2} = \frac{2z_2}{z_2 + z_1} \left[ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right] u_{\varphi 1}; \quad i_{\varphi 2} = \frac{2z_1}{z_1 + z_2} \left[ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right] i_{\varphi 1},$$

где  $\tau = L_0 : (z_1 + z_2)$ , и тогда для  $u_{\psi 1}$  и  $i_{\psi 1}$  найдем:

$$u_{\psi 1} = \left[ \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} + \frac{2z_1}{z_2 + z_1} e^{-\frac{t}{\tau}} \right] u_{\varphi 1};$$

$$i_{\psi 1} = \left[ \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} - \frac{2z_1}{z_1 + z_2} e^{-\frac{t}{\tau}} \right] i_{\varphi 1}.$$

Из полученных выражений видно, что в рассматриваемом случае преломленные волны  $u_{\varphi 2}$  и  $i_{\varphi 2}$  нарастают постепенно от значений, равных нулю при  $t = 0$ , до значений, которые мы имели в случае отсутствия реактивной катушки. Что же касается отраженных волн  $u_{\psi 1}$  и  $i_{\psi 1}$ , то в первый момент они имеют такие же значения, как при отражении от разомкнутого конца линии, а затем постепенно приближаются к значениям, которые мы имели при отсутствии катушки. Таким образом, в результате включения реактивной катушки фронт преломленных волн приобретает пологий характер даже при отвесном фронте падающих волн. Быстрота нарастания напряжения и тока во второй линии тем меньше, чем больше постоянная времени  $\tau = L_0 : (z_1 + z_2)$ , т. е. тем меньше, чем больше индуктивность катушки. Сглаживание фронта преломленных волн в данном случае объясняется тем, что энергия падающей волны частично переходит в энергию магнитного поля, связанного с реактивной катушкой. Применяя реактивные катушки для сглаживания фронта преломленных волн, следует иметь в виду, что в результате наложения отраженной волны на падающую волну напряжение в первой линии в первые моменты времени удваивается.

На рис. 280 показаны падающие, преломленные и отраженные волны для частного случая  $z_1 = z_2$ , когда мы имеем:

$$u_{\varphi 2} = \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right] u_{\varphi 1}; \quad i_{\varphi 2} = \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right] i_{\varphi 1};$$

$$u_{\psi 1} = e^{-\frac{t}{\tau}} u_{\varphi 1}; \quad i_{\psi 1} = -e^{-\frac{t}{\tau}} i_{\varphi 1},$$

где  $\tau = L_0 : 2z_1 = L_0 : 2z_2$ .

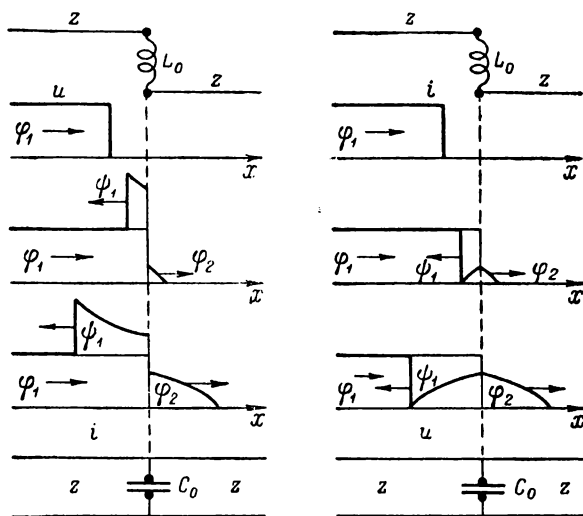


Рис. 280

Пусть в месте сопряжения линий включено ответвление, содержащее конденсатор, емкость которого равна  $C$ . Тогда в месте сопряжения линий имеем:

$$u_1 = u_2; \quad i = C_0 \frac{du_2}{dt} + i_2$$

и в случае перехода волн напряжения и тока из первой линии во вторую можем написать:

$$u_{\varphi 1} + u_{\psi 1} = u_{\varphi 2}; \quad \frac{u_{\varphi 1} - u_{\psi 1}}{z_1} = C_0 \frac{du_{\varphi 2}}{dt} + \frac{u_{\varphi 2}}{z_2}$$

и, следовательно,

$$2u_{\varphi 1} = z_1 C_0 \frac{du_{\varphi 2}}{dt} + \frac{z_2 + z_1}{z_2} u_{\varphi 2}.$$

При прямоугольной форме падающей волны  $u_{\varphi 1} = \text{const}$ , и мы получим:

$$u_{\varphi 2} = \frac{2z_2}{z_2 + z_1} \left[ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right] u_{\varphi 1}; \quad i_{\varphi 2} = \frac{2z_1}{z_1 + z_2} \left[ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right] i_{\varphi 1},$$

где  $\tau = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} C_0$ , и тогда для  $u_{\varphi 1}$  и  $i_{\varphi 1}$  найдем:

$$u_{\varphi 1} = \left[ \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} - \frac{2z_2}{z_2 + z_1} e^{-\frac{t}{\tau}} \right] u_{\varphi 1}; \quad i_{\varphi 1} = \left[ \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} + \frac{2z_2}{z_1 + z_2} e^{-\frac{t}{\tau}} \right] i_{\varphi 1}.$$

Выражения, полученные для  $u_{\varphi 2}$  и  $i_{\varphi 2}$ , аналогичны выражениям, полученным в предыдущем случае, и в соответствии с этим преломленные волны нарастают постепенно от нуля до тех значений, которые они имеют при отсутствии ответвления. При этом быстрота нарастания их, определяемая постоянной времени  $\tau = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} C_0$ , тем меньше, чем больше емкость конденсатора  $C_0$ . Что касается отраженных волн  $u_{\varphi 1}$  и  $i_{\varphi 1}$ , то в первый момент времени они имеют такие же значения, как при отражении от короткозамкнутого конца линии, а затем постепенно приближаются к значениям, которые мы имели при отсутствии ответвления.

Таким образом, в результате наличия емкостного ответвления фронт преломленных волн, как и в предыдущем случае, приобретает пологий характер даже при отвесном фронте падающих волн. Сглаживание фронта преломленных волн в данном случае объясняется тем, что энергия падающей волны частично переходит в энергию электрического поля конденсатора.

При применении емкостного ответвления для сглаживания фронта преломленных волн отраженная волна напряжения в первый момент времени равна по величине и противоположна по знаку падающей волне, и напряжение в первой линии в момент прихода волны к месту сопряжения линий падает до нуля, а затем постепенно нарастает. На рис. 280 показаны падающие, преломленные и отраженные волны для частного случая  $z_1 = z_2$ , когда мы имеем:

$$u_{\varphi 2} = \left[ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right] u_{\varphi 1}; \quad i_{\varphi 2} = \left[ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right] i_{\varphi 1};$$

$$u_{\varphi 1} = -e^{-\frac{t}{\tau}} u_{\varphi 1}; \quad i_{\varphi 1} = e^{-\frac{t}{\tau}} i_{\varphi 1},$$

где  $\tau = \frac{z_1 C_0}{2} = \frac{z_2 C_0}{2}$ .

### § 145. Прохождение волн при наличии активного сопротивления в месте сопряжения однородных линий

Пусть между двумя однородными линиями с волновыми сопротивлениями  $z_1$  и  $z_2$  включено последовательно с ними активное сопротивление  $r_0$ . Тогда в месте сопряжения линий имеем:

$$i_1 = i_2; \quad u_1 = r_0 i_2 + u_2$$

и в случае перехода волны  $u_{\varphi 1}$  из первой линии во вторую можем написать:

$$\frac{u_{\varphi 1} - u_{\varphi 1}}{z_1} = \frac{u_{\varphi 2}}{z_2}; \quad u_{\varphi 1} + u_{\varphi 1} = \frac{r_0}{z_2} u_{\varphi 2} + u_{\varphi 2}$$

и, следовательно,

$$u_{\varphi 2} = \frac{2z_2}{z_2 + z_1 + r_0} u_{\varphi 1}; \quad u_{\varphi 1} = \frac{z_2 - z_1 + r_0}{z_2 + z_1 + r_0} u_{\varphi 1}.$$

Из этих выражений видно, что наличие сопротивления  $r_0$  уменьшает преломленную волну напряжения, и что даже при большом значении  $z_2$ , увеличивая  $r_0$ , ее можно довести до сколь угодно малой величины. Отраженная волна  $u_{\varphi 1}$ , при  $z_2 > z_1$ , с увеличением  $r_0$  возрастает, но не может превзойти величину  $u_{\varphi 1}$ .

Мощность, выделяющаяся в сопротивлении  $r_0$ , равна  $p = r_0 i_2^2 = \frac{r_0}{z_2^2} u_{\varphi 2}^2$ , в то время как мощность падающей волны  $p_{\varphi 1} = \frac{u_{\varphi 1}^2}{z_1}$ .

Для отношения этих мощностей имеем:

$$\frac{p}{p_{\varphi 1}} = \frac{r_0 z_1}{z_2^2} \frac{u_{\varphi 2}^2}{u_{\varphi 1}^2} = \frac{4r_0 z_1}{(z_2 + z_1 + r_0)^2},$$

причем при  $r_0 = z_2 + z_1$  это отношение достигает максимума, равного  $\frac{z_1}{z_1 + z_2}$ . Таким образом, значительная часть мощности падающей волны может быть поглощена сопротивлением  $r_0$  лишь при  $z_1 \gg z_2$ , т. е. когда преломленная волна напряжения мала по сравнению с падающей. Однако при любом соотношении между  $z_1$  и  $z_2$ , взяв  $r_0 = z_1 + z_2$ , мы получим  $u_{\varphi 2} = \frac{z_2}{z_1 + z_2} u_{\varphi 1}$ , и тогда преломленная волна напряжения будет в два раза меньше, чем при отсутствии сопротивления  $r_0$  (рис. 281).

Для того чтобы перенапряжения, возникшие на одном участке линии, не распространялись по всей ее длине, между отдельными участками линии включают активные сопротивления, уменьшающие, как мы только что видели, величину волн напряжения при их

прохождении из одного участка в другой. Так как для эффективного действия эти сопротивления должны иметь величину порядка 500—600 ом, то параллельно с ними включают реактивные катушки, имеющие незначительное сопротивление для тока нормальной частоты, но оказывающие в первые моменты значительное сопротивление волнам.

Пусть теперь в месте сопряжения линий включено ответвление, имеющее только активное сопротивление  $r_0$ . Тогда в этом месте

$$u_1 = u_2; \quad i_1 = \frac{u_2}{r_0} + i_2,$$

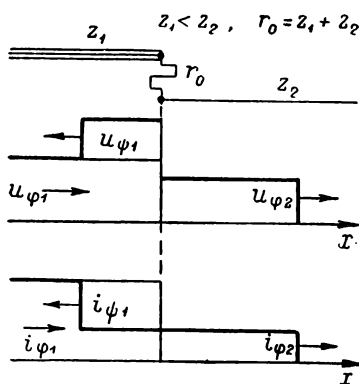


Рис. 281

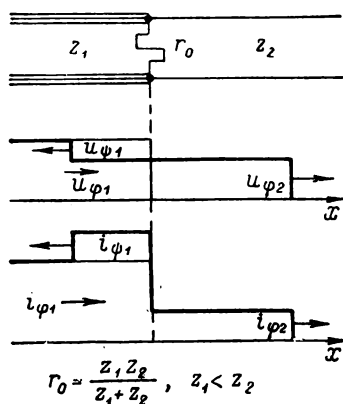


Рис. 282

и в случае перехода волны  $u_{\varphi 1}$  из первой линии во вторую можем написать:

$$u_{\varphi 1} + u_{\psi 1} = u_{\varphi 2}; \quad \frac{u_{\varphi 1} - u_{\psi 1}}{z_1} = \frac{u_{\varphi 2}}{r_0} + \frac{u_{\varphi 2}}{z_2}$$

и, следовательно,

$$u_{\varphi 2} = \frac{2z_2}{z_2 + z_1 + \frac{z_2 z_1}{r_0}} u_{\varphi 1}; \quad u_{\psi 1} = \frac{z_2 - z_1 - \frac{z_2 z_1}{r_0}}{z_2 + z_1 + \frac{z_2 z_1}{r_0}} u_{\varphi 1}.$$

Из этих выражений вытекает, что наличие активного ответвления уменьшает преломленную волну напряжения, причем, уменьшая  $r_0$ , ее можно довести до сколь угодно малой величины. Отраженная волна  $u_{\psi 1}$  с уменьшением  $r_0$  возрастает по абсолютной величине, но не может превзойти величину  $u_{\varphi 1}$ .

Мощность, выделяемая в ответвлении, равна  $p = \frac{u_{\varphi 2}^2}{r_0}$ , в то время как мощность падающей волны  $p_{\varphi 1} = \frac{u_{\varphi 1}^2}{z_1}$ . Для отношения этих мощностей имеем:

$$\frac{p}{p_{\varphi 1}} = \frac{z_1}{r_0} \frac{u_{\varphi 2}^2}{u_{\varphi 1}^2} = \frac{4z_1 z_2^2}{r_0 \left( z_1 + z_2 + \frac{z_1 z_2}{r_0} \right)^2},$$

причем при  $r_0 = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2}$  это отношение достигает максимума, равного  $\frac{z_2}{z_1 + z_2}$ . Таким образом, в рассматриваемом случае при  $z_1 \ll z_2$ , когда преломленная волна напряжения значительно превосходит падающую, большая часть мощности последней поглощается в активном ответвлении. При этом, взяв  $r_0 = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2}$ , мы получим  $u_{\varphi 2} = \frac{z_2}{z_1 + z_2} u_{\varphi 1}$ , и тогда при любом соотношении между  $z_1$  и  $z_2$  преломленная волна напряжения будет в два раза меньше, чем при отсутствии ответвления (рис. 282).

Во избежание прохождения через ответвление сколь-нибудь значительного тока при нормальной работе линии последовательно с сопротивлением  $r_0$  включают конденсатор, не оказывающий существенного сопротивления прохождению через него волн, но имеющий достаточно большое сопротивление для тока нормальной частоты.

В заключение отметим, что для анализа переходных процессов в линиях с распределенными параметрами можно воспользоваться операторным методом. В случае применения операторного метода к анализу переходных процессов в цепях с сосредоточенными параметрами, как мы видели, обыкновенные дифференциальные уравнения для оригиналов переходят в алгебраические уравнения для их изображений. Соответственно, применение этого метода к исследованию процессов в линиях с распределенными параметрами приводит к замене дифференциальных уравнений в частных производных для действительных токов и напряжений обыкновенными дифференциальными уравнениями для их операторных изображений.

---

## ГЛАВА ТРИНАДЦАТАЯ

### НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА ПРИ УСТАНОВИВШЕМСЯ РЕЖИМЕ

#### § 146. Нелинейные электрические цепи переменного тока, их параметры и свойства и методы их исследования

Нелинейными электрическими цепями являются цепи, параметры которых зависят от тока и напряжения. Как отмечалось в § 4, строго говоря, все электрические цепи являются нелинейными. Однако во многих практических случаях эта нелинейность столь слабо выражена, что при анализе процессов в цепи ею можно пренебречь. Это дает возможность развить теорию линейных электрических цепей переменного тока, изложенную в предыдущих главах, и с успехом применять ее для расчета многих электротехнических устройств.

Однако существуют элементы цепи, нелинейность характеристик которых выражена весьма резко. Цепи, содержащие такие элементы, именуемые нелинейными цепями, обладают рядом новых свойств, которые отсутствуют для линейных цепей. Уже при исследовании нелинейных цепей постоянного тока мы отметили некоторые такие свойства, дающие возможность осуществить стабилизаторы напряжения или тока, а также возможность создать мостовые схемы с нелинейными элементами, в которых равновесие моста имеет место только при одном значении приложенного к мосту напряжения и которые могут быть использованы, как указатели этого напряжения.

Особые свойства нелинейных цепей становятся еще более многообразными при переменных токах и переменных напряжениях в цепи. Во-первых, самые процессы в таких цепях при переменном токе существенно усложняются. Во-вторых, в цепях переменного тока могут быть использованы не только сопротивления с нелинейной характеристикой, но также индуктивные катушки и конденсаторы, обладающие нелинейными характеристиками.

Использование несимметричных нелинейных элементов, обладающих при одном направлении тока малым сопротивлением и при другом направлении тока большим сопротивлением, например кенотронов, ртутных и полупроводниковых твердых вентилях, газотронов, дает возможность осуществить выпрямление переменного тока, т. е. преобразование переменного тока в ток постоянный.



Исключительное значение имеет возможность создания управляемых нелинейных элементов, например трехэлектродных электронных ламп, тиратронов с управляющей сеткой, трехэлектродных полупроводниковых приборов и т. п., имеющих, кроме двух главных электродов, между которыми проходит основной ток, еще дополнительный управляющий электрод. Используя такие нелинейные элементы, мы получаем возможность осуществить преобразование постоянного тока в ток переменный, усиление переменного тока, преобразование частоты переменного тока.

Наличие в цепи переменного тока нелинейного элемента приводит к тому, что при синусоидальном напряжении на зажимах цепи ток в ней при установившемся режиме изменяется по периодическому, но несинусоидальному закону. И наоборот, при синусоидальном токе в цепи напряжение на ее зажимах оказывается несинусоидальным. Это мы видели уже на примере катушки с сердечником из ферромагнитного материала. Это свойство нелинейных цепей переменного тока позволяет осуществить преобразование частоты переменного тока.

Своеобразные явления возникают в цепи переменного тока, содержащей конденсаторы и индуктивные катушки с нелинейными характеристиками, называемые иногда явлениями феррорезонанса.

Весьма важным обстоятельством, как мы увидим дальше, является возможность неустойчивых состояний в нелинейных цепях, которые при соответствующих условиях приводят к возбуждению незатухающих колебаний в этих цепях. Устойчивость возникающих в цепи периодических процессов, т. е. ограничение амплитуды колебаний, в свою очередь определяется нелинейностью характеристик элементов, входящих в состав цепи. Важными примерами таких колебательных систем являются ламповые генераторы, а также генераторы релаксационных колебаний.

В следующих параграфах мы рассмотрим основные явления в нелинейных электрических цепях переменного тока и наиболее важные случаи их практического использования.

Теоретическое исследование процессов в нелинейных электрических цепях переменного тока оказывается много сложнее исследования процессов в линейных цепях. Процессы в нелинейных цепях переменного тока описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, которые составляются на основе первого и второго законов Кирхгофа.

Общего метода решения таких уравнений не существует.

Для аналитического решения этих уравнений необходимо выделить аналитически характеристики всех нелинейных элементов цепи. При этом по большей части оказывается, что можно выбрать различные аналитические выражения, приближенно изображающие характеристики элементов. От удачного выбора приближенных аналитических выражений характеристик зависит возможность аналитического решения задачи.

Для анализа процессов в нелинейных цепях переменного тока с успехом может быть использован графический или графоаналитический метод. Эти методы могут дать более точный результат, так как при них используются действительные характеристики нелинейных элементов, заданные графически в виде кривых. Однако эти методы не дают возможности получить общих связей, позволяющих анализировать изменение характера процессов в цепи при изменении параметров цепи.

Большое значение имеют приближенные методы, дающие возможность получить решения для тех или иных конкретных устройств с нелинейными элементами.

Метод нахождения периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений и метод решения задач об устойчивости движения разработаны А. М. Ляпуновым в его классическом труде «Общая задача об устойчивости движения». Ведущая роль в развитии теории нелинейных систем принадлежит советским ученым Л. И. Мандельштаму, Н. Д. Папалекси, А. А. Андронову, Н. М. Крылову, Н. Н. Боголюбову. Многими советскими учеными разработаны методы анализа процессов в тех или иных конкретных нелинейных электрических цепях.

### § 147. Нелинейные сопротивления в цепи переменного тока

Нелинейными элементами, обладающими зависящим от тока в элементе сопротивлением, в цепи переменного тока являются те же элементы, которые были рассмотрены в первой части при исследовании нелинейных цепей постоянного тока. К ним относятся: лампы накаливания, термисторы, тиритовые элементы, бареттеры, лампы с тлеющим разрядом, электрическая дуга, ртутные вентили, кенотроны, газотроны, полупроводниковые вентили и т. д.

Статические характеристики этих элементов были рассмотрены в первой части. При переменном токе мы имеем дело с их динамическими характеристиками, которые приближаются к статическим при достаточно низких частотах.

Отметим особенности, которые проявляются при использовании некоторых из вышеуказанных элементов в цепи переменного тока и отражаются на их динамических характеристиках.

Для некоторых элементов при переменном токе зависимость  $u = F(i)$  при увеличении тока не совпадает с зависимостью  $u = F(i)$  при уменьшении тока. Так, на рис. 283 изображена характеристика электрической дуги между одинаковыми электродами при периодическом переменном токе.

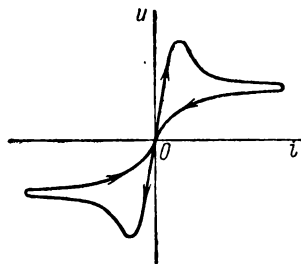


Рис. 283

Напряжение  $u$  между электродами при возрастающем токе больше напряжения при убывающем токе, так как при увеличении тока процесс идет от менее ионизированного состояния и от меньших температур, чем при убывании тока.

Характеристики таких элементов зависят от частоты переменного тока.

Другой характерной особенностью некоторых нелинейных элементов при переменном токе является значительная их *инерционность*, которая приводит к невозможности быстрого изменения их сопротивления. Такими *инерционными* нелинейными элементами являются, например, лампы накаливания, обладающие значительной тепловой инерцией. При изменении тока в лампе с достаточно большой частотой, например с промышленной частотой  $f = 50$  гц, температура нити лампы практически не изменяется в течение периода, а соответственно сопротивление лампы остается практически неизменным в течение периода. Поэтому лампа при неизменном действующем значении периодического переменного тока по отношению к мгновенным значениям тока оказывается линейным элементом. Форма кривой тока в лампе повторяет форму кривой напряжения на ней, в частности, при синусоидальном напряжении и ток в лампе оказывается синусоидальным. Однако при изменении действующего значения переменного тока  $I$  в лампе температура нити накала и ее сопротивление изменяются и, соответственно, характеристика лампы  $U = F(I)$ , связывающая действующие значения тока и напряжения, оказывается нелинейной.

В отличие от инерционных элементов мы располагаем нелинейными элементами, которые при не слишком высоких частотах могут рассматриваться как *безынерционные*. К ним относятся прежде всего электронные лампы, так как инерция электронов, образующих в них ток, весьма мала. Такие элементы являются нелинейными как в отношении действующих значений, так и в отношении мгновенных значений тока и напряжения. При периодических процессах кривые тока и напряжения в них имеют различные формы, например при синусоидальном напряжении ток оказывается несинусоидальным и, наоборот, при синусоидальном токе напряжение несинусоидально. По этой причине нелинейная характеристика  $U = F(I)$ , связывающая действующие значения тока и напряжения, в таких элементах зависит от формы кривых мгновенных значений тока и напряжения.

Рассматривая связь между мгновенными значениями переменного тока и переменного напряжения в таких элементах, естественно пользоваться *динамическими* сопротивлением и проводимостью:

$$r_d = \frac{du}{di} \quad \text{и} \quad g_d = \frac{di}{du},$$

причем  $r_d$  и  $g_d$  являются функциями тока  $i$  и, соответственно, напряжения  $u$ .

Рассматривая же связь между действующими значениями тока и напряжения, можно использовать величины эквивалентных активного сопротивления и активной проводимости элемента, равные:

$$r_s = \frac{U}{I} \quad \text{и} \quad g_s = \frac{I}{U},$$

поскольку в рассматриваемых элементах мы пренебрегаем их индуктивностью и емкостью.

По виду характеристики, как было отмечено в первой части, мы различаем элементы *симметричные*, характеристика которых симметрична относительно начала координат, и *несимметричные*, а также различаем элементы с *возрастающими* характеристиками, для которых  $r_\partial > 0$  и с характеристиками, имеющими *падающие* участки, на которых  $r_\partial < 0$ .

Наличие падающих участков характеристик для нелинейных элементов электрической цепи может приводить к неустойчивым режимам в цепи. Ввиду практической важности вопроса об устойчивости режимов в нелинейных электрических цепях мы рассмотрим его в следующем параграфе на простейшем примере цепи, содержащей участок с нелинейным сопротивлением, имеющий падающую характеристику, в случае питания этой цепи от источника постоянного напряжения. В § 156 мы качественно рассмотрим более сложный вопрос об устойчивости периодических колебательных процессов в цепи с нелинейным элементом при наличии обратной связи на примере лампового генератора.

#### § 148. Устойчивость режима в нелинейной электрической цепи, питаемой от источника постоянного напряжения

Рассмотрим цепь, в которую последовательно включены участок с постоянным сопротивлением  $r$ , индуктивная катушка с индуктивностью  $L$  и электрическая дуга (рис. 284).

Пусть цепь находится под действием постоянного напряжения  $u_0$ . Электрическая дуга обладает падающей характеристикой  $u = F(i)$ , изображенной на рис. 285. Уравнение цепи имеет вид:

$$u_0 = ri + L \frac{di}{dt} + u.$$

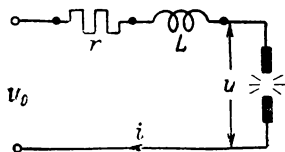


Рис. 284

При равновесии в цепи ток не должен изменяться, т. е. должно быть  $\frac{di}{dt} = 0$ . Условимся снабжать все величины при равновесии индексом «р». На рис. 285 нанесена также прямая  $u_0 - ri$ . Равновесие имеет место при пересечении этой прямой с характеристикой

дуги, т. е. в точках  $A$  и  $B$ . Выясним, какое из этих состояний равновесия будет устойчивым, а какое неустойчивым.

При равновесии имеем:

$$u_0 = r i_p + u_p. \quad (*)$$

Пусть в некоторый момент времени, который мы примем за начальный ( $t = 0$ ), по какой-либо причине ток получил малое отклонение  $\eta_0$  от положения равновесия. В следующие моменты времени это отклонение начнет изменяться, т. е. будет функцией времени. Обозначим его через  $\eta$ . При этом ток будет равен:

$$i = i_p + \eta.$$

Напряжение  $u$  на дуге можно выразить через его значение  $u_p$  при равновесии и через  $\eta$ , разлагая  $u = F(i_p + \eta)$  в ряд по степеням  $\eta$ . Отбрасывая в первом приближении члены с  $\eta$  во второй и более высоких степенях, получаем:

$$u = u_p + \Delta u = u_p + \left( \frac{du}{di} \right)_{i=i_p} \cdot \eta = u_p + r_\partial \eta,$$

где  $r_\partial = \left( \frac{du}{di} \right)_{i=i_p}$  есть динамическое сопротивление участка с электрической дугой при  $i = i_p$ .

Учитывая еще, что  $\frac{di}{dt} = \frac{d\eta}{dt}$ , и подставляя выражения для  $i$ ,  $\frac{di}{dt}$  и  $u$  в основное уравнение цепи, находим:

$$u_0 = r i_p + r \eta + L \frac{d\eta}{dt} + u_p + r_\partial \eta.$$

Вычитая отсюда уравнение (\*) равновесия, получаем уравнение для приращения тока  $\eta$ :

$$L \frac{d\eta}{dt} + (r + r_\partial) \eta = 0.$$

Это уравнение оказалось *линейным*, поскольку мы ограничились первым приближением, т. е. ограничились первым членом в разложении  $\Delta u$  по степеням  $\eta$ . Его характеристическое уравнение

$$L\lambda + (r + r_\partial) = 0$$

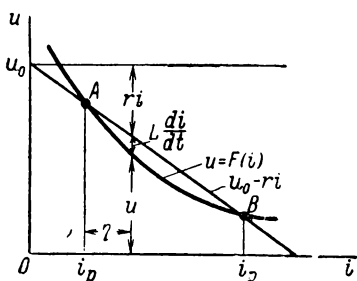


Рис. 285

имеет единственный корень

$$\alpha = -\frac{r+r_{\partial}}{L},$$

и решение для  $\eta$  с учетом начального его значения имеет вид:

$$\eta = \eta_0 e^{-\frac{r+r_{\partial}}{L}t}.$$

Если  $\alpha < 0$ , т. е. если  $(r+r_{\partial}) > 0$ , то  $\eta \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , т. е. ток  $i$  возвращается к его значению  $i_p$  при равновесии.

Наоборот, при  $\alpha > 0$ , т. е. при  $(r+r_{\partial}) < 0$ , имеем  $\eta \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ , т. е. величина  $i$  удаляется от ее значения  $i_p$  при равновесии.

Так как вследствие падающей характеристики дуги  $r_{\partial} = \frac{du}{di} < 0$ , то условие  $(r+r_{\partial}) > 0$  означает, что наклон прямой  $u_0 - ri$  больше наклона кривой  $u = F(i)$ , что имеет место в точке  $B$ . Эта точка является точкой *устойчивого* равновесия.

Условие  $(r+r_{\partial}) < 0$  означает, что наклон прямой  $u_0 - ri$  меньше наклона кривой  $u = F(i)$ , что имеет место в точке  $A$ . Эта точка является точкой *неустойчивого* равновесия. Малейшее отклонение от нее ведет либо к переходу в точку  $B$ , либо к погасанию дуги.

Таким образом, устойчивое состояние соответствует *отрицательному* корню характеристического уравнения, относящегося к линейному в первом приближении уравнению для отклонения  $\eta$ . Можно сказать также, что устойчивое состояние данной цепи характеризуется тем, что динамическое сопротивление  $(r+r_{\partial})$  всей цепи положительно.

Рассмотрим теперь цепь, изображенную на рис. 286, где н. э. — участок с нелинейным сопротивлением, имеющий падающую характеристику, типа характеристики, показанной на рис. 285. Для нее имеем уравнения:

$$u_0 = i_1 r + u; \quad i_1 = i + i_c = i + C \frac{du}{dt}.$$

Следовательно,

$$u_0 = ir + rC \frac{du}{dt} + u. \quad (**)$$

При равновесии  $u = u_p = \text{const}$  и  $\frac{du}{dt} = 0$ , т. е.

$$u_0 = i_p r + u_p. \quad (***)$$

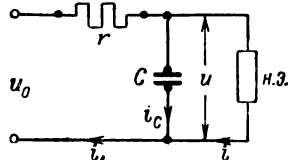


Рис. 286

Пусть напряжение  $u$  получает вследствие какой-либо причины в момент  $t = 0$  малое приращение  $\eta_0$ . Далее это приращение  $\eta$  изменяется во времени. Имеем:

$$u = u_p + \eta \quad \text{и} \quad \frac{du}{dt} = \frac{d\eta}{dt}.$$

Ток  $i$  есть функция напряжения  $u$ , определяемая характеристикой участка с нелинейным сопротивлением, т. е.  $i = \psi(u)$ . Разлагая  $i = \psi(u_p + \eta)$  по степеням  $\eta$  и отбрасывая в первом приближении все члены с  $\eta$  в степени выше первой, получаем:

$$i = i_p + \left( \frac{di}{du} \right)_{u=u_p} \cdot \eta = i_p + g_\partial \eta,$$

где  $g_\partial = \left( \frac{di}{du} \right)_{u=u_p}$  — динамическая проводимость участка с нелинейным сопротивлением при  $u = u_p$ .

Подставляя в основное уравнение (\*\*) цепи величины  $i$ ,  $\frac{du}{dt}$  и  $u$  и вычитая из него уравнение равновесия (\*\*\*), получаем в этом первом приближении линейное уравнение для  $\eta$ :

$$rC \frac{d\eta}{dt} + (g_\partial r + 1) \eta = 0$$

или

$$C \frac{d\eta}{dt} + (g_\partial + g) \eta = 0,$$

где  $g = \frac{1}{r}$ .

Характеристическое уравнение его:

$$C\alpha + (g + g_\partial) = 0$$

имеет единственный корень

$$\alpha = - \frac{g + g_\partial}{C},$$

и решение для  $\eta$  имеет вид:

$$\eta = \eta_0 e^{-\frac{g + g_\partial}{C} t}.$$

При  $\alpha < 0$ , т. е. при  $(g + g_\partial) > 0$ , отклонение стремится к нулю при возрастании времени. При этом имеем устойчивое состояние.

Наоборот, при  $\alpha > 0$ , т. е. при  $(g + g_\partial) < 0$ , имеем  $\eta \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ , т. е. неустойчивое состояние.

Нетрудно убедиться, что точкой устойчивого равновесия теперь является точка  $A$  (рис. 287). Для этой точки  $(r + r_{\partial}) < 0$  и, следовательно,  $\frac{r + r_{\partial}}{rr_{\partial}} > 0$ , так как  $r_{\partial} < 0$ . Таким образом, для точки  $A$  удовлетворяется условие устойчивого равновесия  $\frac{r + r_{\partial}}{rr_{\partial}} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_{\partial}} = (g + g_{\partial}) > 0$ .

Точка  $B$  теперь является точкой неустойчивого равновесия. Таким образом, устойчивое состояние и в этом случае соответствует отрицательному корню характеристического уравнения, относящегося к линейному в первом приближении уравнению для отклонения  $\eta$ . Можно сказать также, что устойчивое состояние данной цепи характеризуется тем, что сумма динамических проводимостей  $(g + g_{\partial})$  положительна.

Мы можем теперь сделать некоторые общие выводы из рассмотренных примеров. Критерий устойчивости получился общим в отношении требования отрицательности корня характеристического уравнения, относящегося к линейному в первом приближении уравнению для малого отклонения от положения равновесия. Вместе с тем точки устойчивого равновесия в двух рассмотренных примерах получились различными. Последнее свидетельствует, что при исследовании вопроса об устойчивости режима электрической цепи необходимо учитывать емкости и индуктивности цепи. Если в цепи нет явно включенных индуктивной катушки и конденсатора, то все равно цепь обладает индуктивностью, а также между отдельными участками цепи существует емкость. Вопрос о том, которая из точек  $A$  или  $B$  будет точкой устойчивого равновесия, имеет тот или иной ответ в зависимости от характера распределения в цепи индуктивности, емкости и сопротивления и их величин. При этом совершенно обязательно учитывать и малые индуктивности и емкости, которыми обладают участки с нелинейными сопротивлениями. Так, например, в случае схемы рис. 284 индуктивность электрической дуги может считаться учтенной в индуктивности  $L$  катушки. Однако в схеме рис. 286, если нелинейный элемент (н. э.) представляет собой электрическую дугу, обладающую не только сопротивлением, но и индуктивностью, эта индуктивность должна быть учтена особо. При этом легко убедиться, решая для этого случая уравнение второго порядка, что точкой устойчивого равновесия будет точка  $B$ , а не точка  $A$ , как было получено во втором примере. Точка  $A$  будет точкой устойчивого равновесия для случая схемы рис. 286 в том

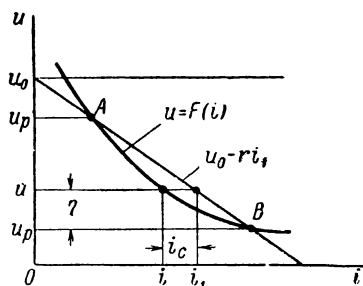


Рис. 287



случае, если нелинейный элемент (*н. э.*), обладающий нелинейным сопротивлением, имеет характер емкости, которую в этом случае можно считать учтенной в емкости  $C$  конденсатора, приключенного к нему параллельно.

В зависимости от характера распределения индуктивностей, емкостей и сопротивлений мы сможем действительную цепь с распределенными параметрами приближенно заменить той или иной эквивалентной цепью с сосредоточенными параметрами, и от конфигурации эквивалентной цепи, а также от соотношения ее параметров будет зависеть положение точки устойчивого равновесия.

#### **§ 149. Общие соображения об устойчивости режима в сложных нелинейных электрических цепях, питаемых от источников постоянного напряжения**

В общем случае сложной цепи, включенной под действие постоянного напряжения и содержащей нелинейные сопротивления с падающими участками характеристик, а также содержащей в отдельных ветвях индуктивные катушки, конденсаторы и сопротивления с постоянными параметрами, для анализа устойчивости значений постоянных токов, которые являются частными решениями уравнений, описывающих систему, необходимо пользоваться тем же методом, который был применен при рассмотрении приведенных в предыдущем параграфе примеров.

Составив по законам Кирхгофа систему уравнений для рассматриваемой цепи и решив ее, например с помощью методов, изложенных в первой части, находим значения постоянных токов в цепи, отвечающие состоянию равновесия, и динамические сопротивления нелинейных элементов при этих значениях токов. Если все эти сопротивления положительны, то соответствующее равновесие устойчиво. Если же хотя бы одно динамическое сопротивление отрицательно, то надлежит исследовать вопрос об устойчивости соответствующего состояния.

Давая малое приращение  $\eta$  току в одном из нелинейных элементов, находим, пользуясь системой уравнений цепи и найденными значениями динамических сопротивлений, приращения всех других токов и напряжений. При этом считаем, что динамические сопротивления нелинейных элементов остаются постоянными при малых отклонениях от рассматриваемого положения равновесия. Это соответствует тому первому приближению, которое было сделано в рассмотренных выше примерах при отбрасывании членов с  $\eta$  в степенях, больших чем первая. По сути дела, применяя такой метод, мы линеаризируем характеристики нелинейных элементов вблизи точек равновесия.

Имея систему уравнений с получившими приращения токами и систему уравнений при равновесии и вычитая вторую из первой, получаем систему *линейных* при указанном первом приближении

уравнений для приращений токов или напряжений. Решая эту систему относительно приращений  $\eta$  отдельных токов, получим, вообще говоря, линейные уравнения  $n$ -го порядка.

Характеристические уравнения, соответствующие им, имеют  $n$  корней  $\alpha_k$ , и решения при отсутствии кратных корней имеют вид:

$$\eta = \sum_{k=1}^{k=n} \eta_{10k} e^{\alpha_k t}.$$

Корни  $\alpha_k$  могут быть все вещественны или могут иметь в своем составе также пары сопряженных комплексных корней. В последнем случае происходят колебательные процессы.

С интересующей нас точки зрения важно следующее: если *вещественные части всех корней характеристических уравнений отрицательны*, то  $\eta \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , процесс оказывается затухающим и рассматриваемое состояние равновесия *устойчиво*.

Если *хоть один корень имеет положительную вещественную часть*, то  $\eta$  нарастает с увеличением  $t$  и состояние равновесия *неустойчиво*.

А. М. Ляпунов доказал, что указанное первое приближение, приводящее к *линейности* уравнений для малых отклонений  $\eta$  от положения равновесия, вполне достаточно, чтобы по отмеченным критериям судить об устойчивости состояния. Особым является случай нулевых значений вещественной части корней, когда надо учитывать члены с  $\eta$  в более высокой степени, чем первая.

Если бы система уравнений оставалась линейной при любых сколь угодно больших  $\eta$ , то в случае неустойчивого состояния раз возникшее  $\eta$  выросло бы до бесконечности. В действительности замена участков характеристик нелинейных элементов вблизи точек равновесия отрезками прямых допустима только при малых отклонениях  $\eta$  от положения равновесия. *При больших  $\eta$  надо учитывать нелинейность* характеристик. Это может привести к ограничению получающихся отклонений, т. е. к переходу системы в новые устойчивые состояния. Так, в первом из рассмотренных в предыдущем параграфе примеров положительное отклонение тока от точки *A* неустойчивого равновесия переводит систему в точку *B* устойчивого равновесия, причем это связано именно с нелинейностью характеристики  $i = F(i)$ .

Особенный интерес такие соображения имеют в отношении колебательных систем. Здесь выход системы из состояния неустойчивого равновесия приводит к возникновению колебаний с нарастающей амплитудой. Однако вследствие нелинейности характеристик элементов цепи нарастание амплитуды колебаний может оказаться ограниченным и наступает *устойчивый периодический* процесс. Такой процесс называют *автоколебательным*, так как цепь питается от источника постоянного напряжения и колебания возникают

внутри самой цепи вследствие ее особых свойств. Теория устойчивости периодических движений детально разработана А. М. Ляпуновым. Мы в дальнейшем рассмотрим качественно этот вопрос на примерах лампового генератора и генератора релаксационных колебаний.

### § 150. Выпрямление переменных токов

Для выпрямления переменного тока, т. е. для получения постоянной составляющей в кривой тока при отсутствии постоянной составляющей в кривой внешней э. д. с., необходимо ввести в цепь

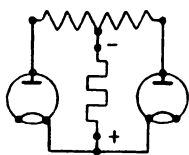


Рис. 288

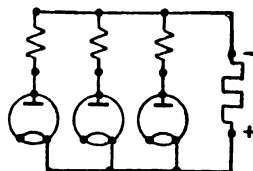


Рис. 289

нелинейное сопротивление и притом несимметричное, т. е. имеющее различные значения при различных направлениях напряжения на его зажимах. В современной технике весьма часто прибегают к вы-

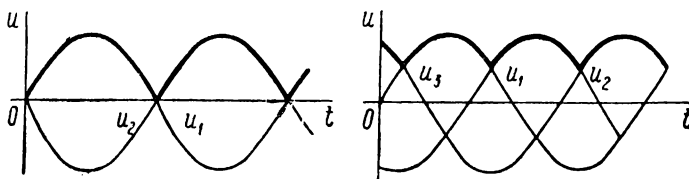


Рис. 290

прямлению переменных токов, применяя для этой цели ртутные вентили, кенотроны, а также полупроводниковые вентили, так как все они при одном направлении приложенного напряжения обладают сопротивлением, во много раз меньшим их сопротивлением при обратном направлении напряжения.

На рис. 288 и 289 даны схемы двухфазного и трехфазного кенотронных выпрямителей, причем показаны только вторичные обмотки питающих трансформаторов. Эти схемы, предложенные в 1901 г. В. Ф. Миткевичем, получили весьма широкое распространение.

Имея в виду, что кенотроны пропускают ток только тогда, когда электрическое поле внутри кенотрона направлено от анода к катоду, можно убедиться, что в этих схемах в каждый момент времени ток проходит только через кенотрон, присоединенный к фазе, напряжение которой имеет в этот момент времени наибольшее положитель-

ное значение. Поэтому кривые выпрямленного напряжения, показанные на рис. 290 жирными линиями, огибают положительные полуволны кривых напряжения отдельных фаз вторичной обмотки трансформатора, если пренебречь падением напряжения внутри кенотрона. При этом ток в приемнике направлен от общей точки катодов всех кенотронов к нейтральной точке вторичной обмотки трансформатора. Из рассмотрения кривых следует, что задача выпрямления будет решена тем лучше, чем больше число фаз выпрямляемой многофазной системы. Обозначив через  $U_{2m}$  и  $U_2$  максимальное и действующее значения напряжения одной фазы вторичной обмотки трансформатора и через  $U$  и  $U_{cp}$  действующее и

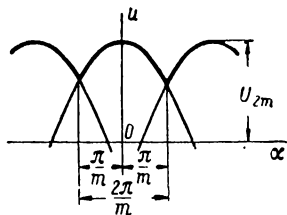


Рис. 291

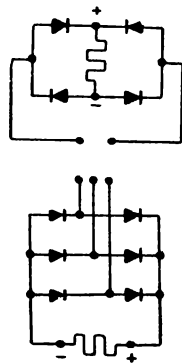


Рис. 292

среднее значения выпрямленного напряжения, для  $m$ -фазного выпрямителя, полагая  $\omega t = \alpha$ , получим (рис. 291).

$$U_{cp} = \frac{m}{2\pi} \int_{-\pi/m}^{+\pi/m} U_{2m} \cos \alpha \, d\alpha = \frac{m}{\pi} U_{2m} \sin \frac{\pi}{m};$$

$$U^2 = \frac{m}{2\pi} \int_{-\pi/m}^{+\pi/m} U_{2m}^2 \cos^2 \alpha \, d\alpha = U_{2m}^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{m}{4\pi} \sin \frac{2\pi}{m} \right),$$

откуда при  $m = 3$  найдем:

$$U_{cp} \approx 0,83 U_{2m} \approx 1,17 U_2 \quad \text{и} \quad U \approx 1,02 U_{cp}.$$

Из этого соотношения видно, что среднее и действующее значения выпрямленного напряжения уже для трехфазных выпрямителей мало отличаются друг от друга.

Кроме приведенных выше простых схем, для выпрямления применяют и иные по характеру схемы, в частности мостовые схемы, не требующие наличия нейтральной точки выпрямляемой системы напряжений. На рис. 292 даны однофазная и трехфазная мостовые схемы, причем по характеру кривой выпрямленного напряжения первая схема эквивалентна простой двухфазной, а вторая — простой шестифазной схеме.

### § 151. Управляемые нелинейные элементы. Ионный прибор с управляющим электродом

Ряд особых весьма ценных явлений в электрических цепях может быть получен при использовании управляемых нелинейных элементов. В настоящем параграфе мы рассмотрим один из весьма распространенных прибора этого типа — ионный прибор с управляющим электродом. В следующих параграфах будут рассмотрены два других, получивших широкое распространение прибора — трех-

электродная электронная лампа и полупроводниковый триод.

Ионный прибор с управляющим электродом выполняется или с жидким катодом, как ртутный вентиль, или с накаливаемым катодом, как газотрон. Отметим, что часто он носит название *тиратрон*. Управляющий электрод обычно

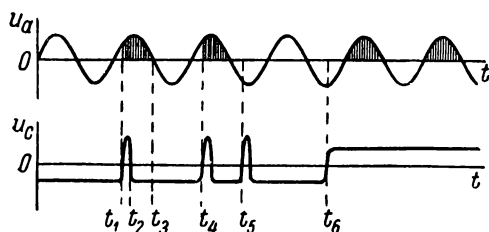


Рис. 293

выполняется в виде сетки той или иной конструкции, расположенной между катодом и анодом.

Сетка в ионном приборе не обладает полным управлением. С помощью отрицательного напряжения между сеткой и катодом, при котором потенциал сетки отрицателен по отношению к потенциалу катода, можно не допустить возникновения разряда между катодом и анодом, но невозможно прекратить уже возникший разряд. Действие сетки в таком приборе поясняется рис. 293. До момента времени  $t_1$  напряжение на сетке  $u_c$  было отрицательным и разряд между катодом и анодом не образовывался, хотя в отдельные интервалы времени напряжение  $u_a$  между анодом и катодом было положительно. Электрическое поле сетки компенсировало поле анода. В момент времени  $t_1$  подается на сетку импульс положительного напряжения. Так как при этом напряжение на аноде положительно, то между катодом и анодом возникает ионный разряд в форме электрической дуги. Однако изменение знака  $u_c$  на отрицательный в момент  $t_2$  при положительном аноде не приводит к погасанию дуги, так как положительные ионы, имеющиеся в большом количестве в пространстве, окружающем сетку, привлекаются к ней и нейтрализуют действие ее отрицательного заряда. Дуга гаснет в момент  $t_3$  изменения знака напряжения  $u_a$  между анодом и катодом. Дуга загорается вновь в момент  $t_4$  при подаче положительного напряжения на сетку при положительном напряжении  $u_a$ . Подача на сетку положительного импульса напряжения в момент  $t_5$ , когда напряжение на аноде отрицательно, к образованию дуги не приводит. Если

в момент  $t_6$  снять отрицательное напряжение на сетке и заменить его постоянным положительным, то дуга будет беспрепятственно гореть при положительных значениях анодного напряжения так же, как это происходит в неуправляемом вентиле.

Хотя управляющее действие сетки в ионных приборах ограничено, но и такое действие сетки, как будет показано, дает возможность осуществить регулирование напряжения выпрямительных установок, а также разрешить при помощи ионных приборов значительно более сложную и важную задачу преобразования переменного тока в постоянный.

## § 152. Управляемые нелинейные элементы. Трехэлектродная электронная лампа

В отличие от ионных приборов в трехэлектродных электронных лампах сетка обладает полным управлением. Ток в цепи анода  $i_a$  в такой электронной лампе (рис. 294) определяется совместным действием анодного  $u_a$  и сеточного  $u_c$  напряжений. Током на сетку  $i_c$  обычно можно прене-

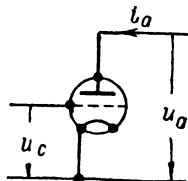


Рис. 294

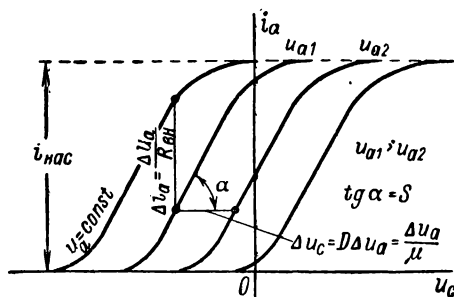


Рис. 295

бречь. При отрицательном сеточном напряжении сеточный ток равен нулю. Обычно совместное действие анодного и сеточного напряжений рассматривают как действие эквивалентного сеточного напряжения  $u_{ca} = u_c + Du_a$ , представляющего собою линейную функцию  $u_c$  и  $u_a$  и называемого *управляющим напряжением*. Коэффициент  $D$ , называемый *проницаемостью* лампы, представляет собою постоянную величину, определяемую конфигурацией электродов, т. е. конструкцией лампы. Проницаемость  $D$  является одним из основных параметров лампы. Так как сетка расположена к катоду значительно ближе, чем анод, то степень влияния анодного напряжения на ток в лампе существенно меньше, чем степень влияния сеточного напряжения, и поэтому  $D$  значительно меньше единицы.

При анализе работы трехэлектродной лампы обычно пользуются *анодно-сеточными* характеристиками  $i_a = F(u_c)$ , дающими зависимость анодного тока  $i_a$  от сеточного напряжения  $u_c$  при постоянном значении анодного напряжения  $u_a$ . Эти характеристики (рис. 295),

изогнутые в начальной части, имеют значительные прямолинейные параллельные друг другу участки, заканчивающиеся переходом к току насыщения  $i_{нас}$ . При этом, чем больше анодное напряжение, для которого дана характеристика, тем больше она сдвинута влево от оси ординат.

При  $i_a = \text{const}$  имеем  $u_c + Du_a = \text{const}$  и  $du_c + D du_a = 0$ . Следовательно,

$$D = - \left( \frac{du_c}{du_a} \right)_{i_a = \text{const}},$$

т. е. проницаемость есть предел отношения уменьшения сеточного напряжения к компенсирующему его увеличению анодного напряжения и приближенно  $D \approx - \frac{\Delta u_c}{\Delta u_a}$ . Отсюда, в частности, следует,

что сдвиг прямолинейных участков характеристик вдоль оси абсцисс пропорционален разности соответствующих анодных напряжений  $\Delta u_a = u_{a1} - u_{a2}$ . Наряду с проницаемостью часто вводят в рассмотрение обратную ей величину — коэффициент усиления

$\mu = \frac{1}{D} = - \left( \frac{du_a}{du_c} \right)_{i_a = \text{const}}$ , который равен пределу отношения умень-

шения анодного напряжения к компенсирующему его увеличению сеточного напряжения и который показывает, во сколько раз влияние изменения сеточного напряжения больше, чем влияние изменения анодного напряжения.

К основным параметрам трехэлектродной лампы, кроме проницаемости, относятся *крутизна*  $S$  характеристики  $i_a = F(u_c)$  и *внутреннее сопротивление*  $R_{вн}$ . Под крутизной характеристики пони-

мают величину  $S$ , определяемую из соотношения  $S = \left( \frac{di_a}{du_c} \right)_{u_a = \text{const}}$ ,

т. е. крутизна характеристики есть предел отношения приращения анодного тока к приращению сеточного напряжения при неизменном анодном напряжении, и приближенно  $S \approx \frac{\Delta i_a}{\Delta u_c}$ . Из этого опре-

деления следует, что  $S$  равно тангенсу угла наклона к оси напряжений касательной к характеристике в данной ее точке. На прямолинейном участке характеристики крутизна постоянна и равна тангенсу угла наклона этого участка к оси напряжений. Крутизна показывает, какое влияние на изменение анодного тока оказывает изменение сеточного напряжения, т. е. дает представление об управляющем действии сетки.

Под внутренним сопротивлением лампы понимают величину  $R_{вн}$ , определяемую из соотношения  $R_{вн} = \left( \frac{du_a}{di_a} \right)_{u_c = \text{const}}$  и дающую пред-

ставление о том, какое изменение анодного напряжения необходимо для данного изменения анодного тока при неизменном сеточном напряжении.

Так как  $i_a$  является функцией  $u_a$  и  $u_c$ , то в общем случае при изменении обоих напряжений  $u_a$  и  $u_c$  приращение тока  $i_a$  будет равно:

$$di_a = \frac{\partial i_a}{\partial u_a} du_a + \frac{\partial i_a}{\partial u_c} du_c = \left( \frac{di_a}{du_a} \right)_{u_c = \text{const}} du_a + \left( \frac{di_a}{du_c} \right)_{u_c = \text{const}} du_c = \frac{1}{R_{ан}} du_a + S du_c. \quad (*)$$

Полагая  $i_a = \text{const}$ , т. е.  $di_a = 0$ , и замечая, что  $-\left( \frac{du_c}{du_a} \right)_{i_a = \text{const}} = D$ , получаем связь между основными параметрами лампы, а именно:

$$SR_{ан} D = SR_{ан} \frac{1}{\mu} = 1.$$

Уравнение (\*) теперь можно записать в виде:

$$di_a = SD du_a + S du_c = S d(u_c + Du_a) = S du_{ca}.$$

Отсюда мы видим, что анодный ток является функцией управляющего напряжения. Эта функция имеет вид, изображенный на рис. 296. Следует заметить, что эта зависимость справедлива при не слишком малых величинах  $Du_a$  по сравнению с  $u_c$ , когда током на сетку  $i_c$  можно пренебречь по сравнению с анодным током.

Так как изменение  $\Delta u_c$  сеточного напряжения (при  $u_a = \text{const}$ ) вызывает такое же изменение  $\Delta i_a$  анодного тока, как в  $\mu = \frac{1}{D}$  раз большее изменение  $\Delta u_a$  анодного напряжения (при  $u_c = \text{const}$ ), то трехэлектродные электронные лампы широко используют в качестве усилителей. Весьма важное применение таких ламп в качестве генератора колебаний будет рассмотрено в § 156.

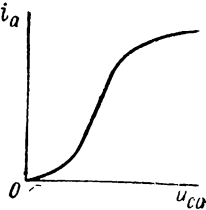


Рис. 296

### § 153. Управляемые нелинейные элементы. Полупроводниковые триоды

Совершенно новые возможности в области создания усилителей переменных токов, генераторов колебаний и различных автоматических измерительных и счетно-решающих систем открылись с осуществлением полупроводниковых управляемых элементов — так называемых полупроводниковых триодов или транзисторов.

Рассмотрим принцип действия плоскостных германиевых триодов. На рис. 297 схематически изображен такой триод, в котором



две области германия типа  $p$  разделены тонким слоем германия типа  $n$ . С помощью электродов в виде металлических пластин, называемых *эмиттером*, *базой* и *коллектором*, эти три области могут быть соединены с внешней электрической цепью. В таком триоде имеется два перехода между полупроводниками различного типа:  $p - n$  переход от эмиттерной области к области базы и  $n - p$  переход от области базы к области коллектора. Если электроды не присоединены к внешней цепи, то вдоль триода в районе этих переходов устанавливается распределение электрического потен-

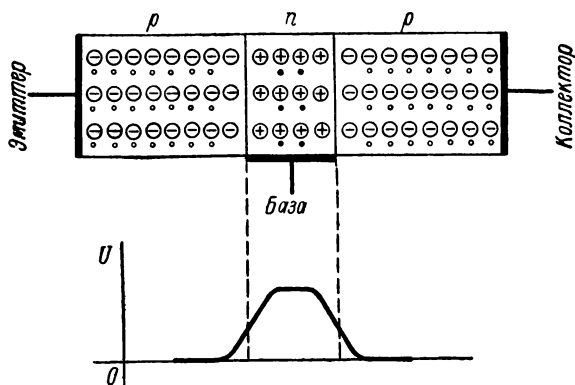


Рис. 297

циала, показанное внизу на рис. 297. Как было разъяснено при рассмотрении принципа действия полупроводникового диода в первой части, такое распределение потенциала является результатом появления около поверхностей раздела германия различного типа объемных зарядов. В германии типа  $p$  этот объемный заряд обусловлен отрицательными зарядами закрепленных в решетке кристалла ионов акцепторной примеси, а в германии типа  $n$  — положительными зарядами закрепленных в решетке ионов донорной примеси (на рис. 297 эти ионы показаны большими кружками с соответствующими знаками в них). Электрическое поле, созданное этими объемными зарядами, препятствует диффузии дырок (маленькие белые кружки) из области  $p$  в область  $n$  и свободных электронов (маленькие черные кружки) в противоположном направлении.

Присоединим к триоду внешнюю цепь, как показано на рис. 298. Напряжение  $U_b$  батареи, включенной между базой и эмиттером, снижает потенциальный барьер в  $p - n$  переходе от эмиттерной области к области базы, так как эта батарея включена в прямом (способствующем прохождению прямого тока) направлении. Напряжение же  $U_k$  батареи, включенной между базой и коллектором, увеличивает потенциальный барьер в  $n - p$  переходе от обла-

сти базы к области коллектора, так как эта батарея включена в обратном (запирающем) направлении. Распределение потенциала, которое при этом устанавливается в районе переходов вдоль триода, показано внизу на рис. 298. Снижение потенциального барьера между эмиттерной областью и областью базы вызывает движение дырок из области эмиттера в область базы (в область  $n$ ). Ввиду весьма малой толщины слоя  $n$  германия (порядка сотых миллиметра) почти все дырки, прошедшие в этот слой из области эмиттера, продрейфуют через всю толщину слоя до следующего  $n$ — $p$  перехода и свободно пройдут через этот переход в область коллектора, так как электрическое поле в этом переходе не препятствует, а наоборот, способствует движению дырок слева направо. Этому движению дырок способствует и напряжение батареи, включенной между базой и коллектором.

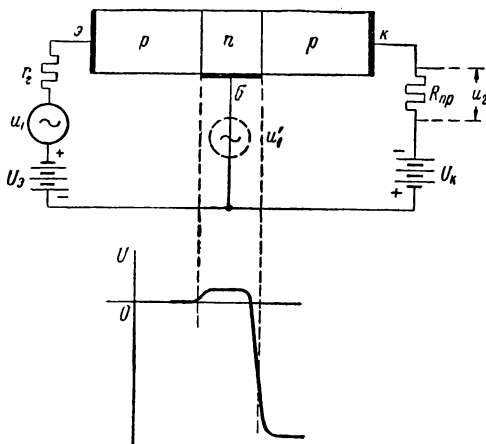


Рис. 298

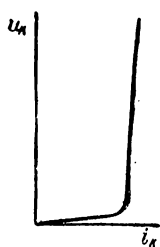


Рис. 299

Все же будет иметь место рекомбинация в слое  $n$  некоторого количества дырок со свободными электронами этого слоя, что приведет к небольшому снижению тока в коллекторе по сравнению с током в эмиттере вследствие ответвления небольшой части тока эмиттера в базу. Кроме того, должен иметь место электронный ток из области базы в область эмиттера, но при правильном конструировании триода этот ток значительно меньше тока, обусловленного движением дырок. Этот электронный ток создает дополнительную составляющую тока через базу и, соответственно, несколько увеличивает ток в эмиттере.

Существенное значение имеет характер зависимости тока в коллекторе от напряжения в цепи коллектора при заданном токе эмиттера. При увеличении напряжения сначала ток в коллекторе быстро возрастает (рис. 299), а затем наступает как бы истощение носителей тока в области коллектора, так как поступление их из эмиттера через  $p$ — $n$  и  $n$ — $p$  переходы ограничено током эмиттера, зависящим от величины потенциального барьера между эмиттером и базой (рис. 298). Соответственно, несмотря на значительное возрастание напряжения в цепи коллектора ток в коллекторе возрастает весьма

медленно и, следовательно, сопротивление области коллектора резко возрастает, достигая весьма большой величины. Обычно напряжение  $U_k$  батареи в цепи коллектора принимается достаточно большим, порядка нескольких десятков вольт и соответственно сопротивление области коллектора достигает сотен тысяч и даже нескольких миллионов ом. Такой же порядок имеет и сопротивление приемника  $R_{np}$  во внешней цепи коллектора. Так как величина потенциального барьера между эмиттером и базой имеет порядок одного вольта и сопротивление области эмиттера по сравнению с сопротивлением области коллектора незначительно, то в цепи эмиттера требуется незначительное напряжение  $U_e$  батареи.

Предположим теперь, что в цепи эмиттера действует источник переменного напряжения  $U_1$  с малой амплитудой и с внутренним сопротивлением  $r_e$ , малым по сравнению с сопротивлением области коллектора (рис. 298). Это напряжение изменяет величину потенциального барьера между областью эмиттера и областью базы и сильно влияет на величину тока, проходящего из эмиттера через область базы в цепь коллектора. Так как ток в цепи коллектора лишь немного меньше тока в цепи эмиттера, а сопротивление в цепи коллектора весьма велико, то на зажимах приемника возникает переменное напряжение  $u_2$ , значительно превышающее напряжение  $u_1$ . Таким образом, триод работает как усилитель напряжения. Коэффициент усиления напряжения  $\alpha_u = u_2/u_1$  получается порядка десятков. Коэффициент же усиления тока согласно вышеизложенному получается несколько меньше единицы, т. е.  $\alpha_i = i_2/i_1 < 1$ , причем  $i_2$  и  $i_1$  — переменные составляющие токов в цепях коллектора и эмиттера. Соответственно, коэффициент усиления мощности  $\alpha_p = \alpha_u \alpha_i$  несколько меньше  $\alpha_u$ .

Большее усиление мощности можно получить, если включить источник первичного переменного напряжения  $u'_1$  в цепь базы, как это показано пунктиром на рис. 298. Очевидно, этот источник будет также эффективно изменять величину потенциального барьера между областью эмиттера и областью базы и сильно влиять на величину тока в цепи коллектора, так что коэффициент усиления напряжения  $\alpha_u$  получается также большим. Но так как ток в цепи базы весьма мал по сравнению с током в цепи коллектора, то значительным получается и коэффициент усиления тока  $\alpha_i$ , а соответственно и коэффициент усиления мощности  $\alpha_p = \alpha_u \alpha_i$  оказывается при этом больше, чем в случае включения первичного источника напряжения  $u_1$  в цепь эмиттера.

#### § 154. Полупроводниковый триод как элемент электрической цепи

На рис. 300 приведено условное обозначение полупроводникового триода с  $p-n-p$  переходами. Здесь: э — эмиттер, б — база, к — коллектор. В случае  $n-p-n$  переходов стрелка у эмиттера

направляется в противоположном направлении. На рис. 301, а, б, в изображены три возможные схемы включения триода: а — с общей для входных и выходных зажимов базой, б — с общим эмиттером и в — с общим коллектором. Во всех случаях один из входных зажимов соединен с базой и во всех случаях один из выходных зажимов соединен с коллектором. Выше было указано, что высокий коэффициент усиления мощности получается в случае схемы рис. 301, б, так как при этом происходит значительное усиление как тока, так и напряжения. Поэтому рассмотрим именно эту схему и выберем положительные направления токов и напряжений, как указано на рис. 301, б. Выбрав в качестве независимых переменных токи  $i_\sigma = i_1$  и  $i_\kappa = i_2$ , можем выразить через них входное напряжение  $u_1$  и выходное на-

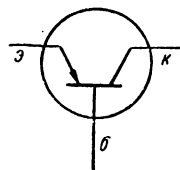


Рис. 300

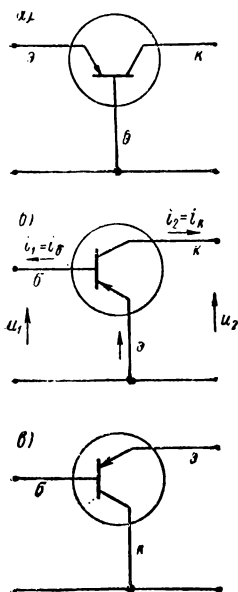


Рис. 301

пряжение  $u_2$  в виду:

$$u_1 = F_1(i_1, i_2); \quad u_2 = F_2(i_1, i_2).$$

Эти зависимости могут быть изображены графически в виде двух семейств характеристик, например в виде двух семейств (рис. 302):  $u_1 = F_1(i_1)$  при различных неизменных значениях  $i_2$  и  $u_2 = F_2(i_2)$  при различных неизменных значениях  $i_1$ . Они могут быть названы соответственно семейством статических входных характеристик и семейством статических выходных характеристик. Слово «статические» означает, что каждая точка характеристик снимается при постоянных токе и напряжении.

Если задать постоянные напряжения  $U_1$  и  $U_2$  от батарей во входной и выходной цепях, то установятся им соответствующие постоянные токи  $I_1$  и  $I_2$ . Этим определяются рабочие точки на характеристиках на рис. 302. Предположим теперь, что в первичной цепи в дополнение к  $U_1$  подается небольшое по сравнению с ним напряжение  $\Delta u_1$ . Оно вызовет соответствующие приращения  $\Delta i_1$  и  $\Delta i_2$  токов на входе и на выходе и  $\Delta u_2$  напряжения на выходе. Из уравнений

$$u_1 = F_1(i_1, i_2) \quad \text{и} \quad u_2 = F_2(i_1, i_2)$$

имеем:

$$\Delta u_1 = \frac{\partial u_1}{\partial i_1} \Delta i_1 + \frac{\partial u_1}{\partial i_2} \Delta i_2;$$

$$\Delta u_2 = \frac{\partial u_2}{\partial i_1} \Delta i_1 + \frac{\partial u_2}{\partial i_2} \Delta i_2.$$

Если  $\Delta u_1$ ,  $\Delta u_2$ ,  $\Delta i_1$  и  $\Delta i_2$  малы по сравнению с  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $I_1$ ,  $I_2$ , то частные производные, входящие в эти уравнения и имеющие размерность сопротивления, можно считать постоянными величинами, зависящими только от выбранных рабочих точек на характеристиках. Если, кроме того,  $\Delta u_1$ ,  $\Delta u_2$ ,  $\Delta i_1$  и  $\Delta i_2$  — синусоидальные функции времени, то, изображая их комплексами, последние уравнения можно написать в виде:

$$\dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2; \quad \dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2,$$

что является одной из форм уравнений четырехполюсника (§ 57). Однако в отличие от пассивного четырехполюсника для полупро-

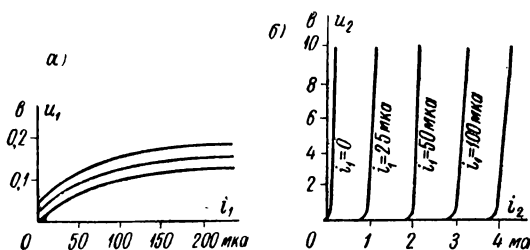


Рис. 302

водникового триода  $Z_{12} \neq Z_{21}$ , что и определяет действие триода как усилителя. Сопротивления  $Z_{11}$ ,  $Z_{12}$ ,  $Z_{21}$  и  $Z_{22}$  вообще являются комплексными, так как, помимо активного сопротивления внутри триода между его отдельными элементами существует емкость и, кроме того, процесс диффузии носителей тока обладает инерцией. При низких частотах можно считать эти сопротивления активными, т. е. полагать  $Z_{11} = r_{11}$ ,  $Z_{12} = r_{12}$ ,  $Z_{21} = r_{21}$  и  $Z_{22} = r_{22}$ . Если нагрузка на выходе представляет собой также активное сопротивление, то токи  $I_1$  и  $I_2$  могут быть только в фазе или в противофазе, и, следовательно, уравнения можно записать для мгновенных значений переменных составляющих напряжений и токов в виде:

$$u_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2; \quad u_2 = r_{21}i_1 + r_{22}i_2.$$

Сопротивления  $r_{11}$  и  $r_{22}$  представляют собою динамические входное и выходное сопротивления триода и определяются по тангенсам наклонов касательных к характеристикам на рис. 302 около рабочих точек.

Эти уравнения можно переписать следующим образом:

Учитывая, что  $r_{21} \neq r_{12}$ , запишем первый член в правой части последнего уравнения в виде:

$$r_{21}i_1 = r_{12}i_1 + (r_{21} - r_{12})i_1 = r_{12}i_1 - r_m i_1 = r_{12}i_1 - e,$$

где обозначено:  $r_m = r_{12} - r_{21}$  и  $e = r_m i_1$ . При этом уравнения четырехполюсника, эквивалентного полупроводниковому триоду при низких частотах и небольших амплитудах переменных составляющих токов, приобретают вид:

$$\begin{aligned} u_1 &= r_{11} i_1 + r_{12} i_2; \\ u_2 &= r_{12} i_1 + r_{22} i_2 - e. \end{aligned}$$

В соответствии с изложенным в § 58, эти уравнения являются уравнениями активного четырехполюсника, причем э. д. с.  $e$  во вторичной цепи пропорциональна первичному току. Наличие этой э. д. с. и определяет усиление тока и напряжения. В соответствии с последними уравнениями можно составить схему, эквивалентную такому четырехполюснику. Выбирая Т-образную схему, получаем ее в виде, изображенном на рис. 303, причем  $r_{11} - r_{12} = r_6$  — сопротивление базы,  $r_{12} = r_9$  — сопротивление эмиттера и  $r_{22} - r_{12} = r_d$  — сопротивление в цепи коллектора.

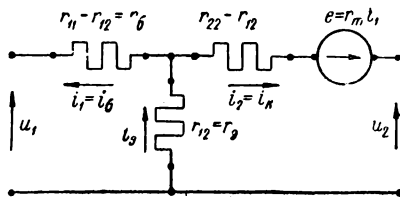


Рис. 303

Характерными величинами этих сопротивлений являются:

$$r_9 = 25 \text{ ом}; \quad r_6 = 500 \text{ ом}; \quad r_d = 40\,000 \text{ ом}; \quad r_m = 2 \cdot 10^6 \text{ ом}.$$

Соответственно:

$$r_{12} = 25 \text{ ом}; \quad r_{11} = 525 \text{ ом}; \quad r_{22} = 40\,025 \text{ ом}.$$

При сопротивлении нагрузки во вторичной цепи  $r_{np} = 2000 \text{ ом}$  из второго уравнения находим:

$$u_2 = r_{np} i_2 = 2000 i_2 = 25 i_1 + 40\,025 i_2 - 2 \cdot 10^6 i_1,$$

откуда получаем коэффициент усиления тока:  $i_2/i_1 \approx 53$ .

Выражая в первом и во втором уравнениях  $i_2$  и  $e$  через  $i_1$ , находим коэффициент усиления напряжения:  $u_2/u_1 \approx 65$ .

Представив полупроводниковый триод в виде эквивалентной схемы (рис. 303) и вводя эту схему в качестве элемента в схему сложной цепи, в которую входит триод, мы получаем возможность производить расчет этой сложной цепи.

Следует отметить, что при больших амплитудах переменных составляющих токов и напряжений в триоде уже нельзя не считаться с нелинейностью его характеристик (рис. 302). При высоких частотах необходимо считаться с тем, что сопротивления эквивалентной схемы комплексные, и это значительно усложняет расчет.

### § 155. Регулирование выпрямителей и преобразование постоянного тока в переменный с помощью управляемых ионных приборов

С помощью управляемых ионных приборов можно осуществить регулирование процесса выпрямления переменного тока, а также преобразование постоянного тока в переменный, называемое *инвертированием*. Устройство для преобразования переменного тока в постоянный называют *выпрямителем*, а устройство для обратного преобразования — *инвертором*.

Рассмотрим процессы, происходящие при таких преобразованиях, на примере наиболее широко используемой для этой цели трехфазной мостовой

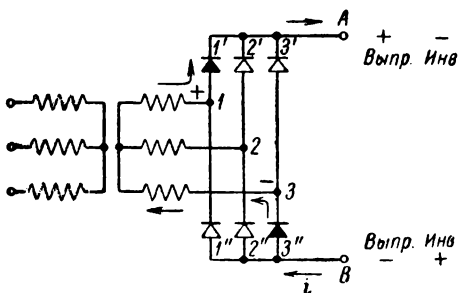


Рис. 304

схемы (рис. 304) с управляемыми ионными вентилями. Напряжение от вторичных обмоток трансформатора, образующее трехфазную систему, подается к зажимам 1, 2, 3 мостовой схемы.

Так как вентили проводят ток только в одном направлении — на рис. 304 снизу вверх, — то ток от того или иного зажима 1, 2 или 3 трансформатора может идти только вверх через верхние вентили к зажиму А через цепь, подключенную к зажимам А и В, и от зажима В возвращается через нижние вентили к тому или иному зажиму трансформатора.

Поэтому в цепи, подключенной к зажимам А и В, ток течет всегда в одном направлении, т. е. происходит выпрямление тока.

Напряжение же между зажимами А и В может иметь различные знаки. Если зажим А положителен, а зажим В отрицателен, что отмечено на рис. 304 первой парой знаков, то энергия передается слева направо от преобразователя к приемнику, подключенному к зажимам АВ (не показанному на рисунке). Это соответствует режиму выпрямления, т. е. преобразованию переменного тока в постоянный.

Если зажим А отрицателен, а зажим В положителен (вторая пара знаков на рис. 304), то энергия передается в обратном направлении, т. е. справа налево, от источника энергии, подключенного справа к зажимам АВ (не показанного на рисунке), к преобразователю. Это соответствует режиму инвертирования.

На рис. 305 изображены синусоиды линейных напряжений  $u_{12}$ ,  $u_{23}$  и  $u_{31}$  между зажимами 1 и 2, 2 и 3, 3 и 1 (на рис. 305 они помечены парами цифр 12, 23, 31). Эти напряжения положительны, когда потенциал зажима, соответствующий первому индексу, положителен по отношению к потенциалу зажима, соответствующему второму индексу.

Здесь же нанесены синусоиды линейных напряжений  $u_{21} = -u_{12}$ ,  $u_{32} = -u_{23}$  и  $u_{13} = -u_{31}$ , т. е. напряжений между теми же зажимами, но взятых с другим знаком.

Если отсутствует сеточное управление, то в каждый момент времени должна гореть пара вентилях (один из верхней группы, другой из нижней группы), подключенных к зажимам трансформатора, напряжение между которыми в данный момент наибольшее. Так, например, в интервале  $t_1 < t < t_2$ , когда напряжение  $u_{13}$  превышает остальные напряжения, должны гореть вентили 1' из верхней группы и 3'' из нижней группы, что отмечено на рис. 304 тем, что эти вентили залиты черной краской. Вслед за моментом  $t_2$  напряжение  $u_{23}$  становится больше напряжения  $u_{13}$ , и, следова-

тельно, ток должен перейти от вентиля  $1'$  к вентилю  $2'$  верхней группы. Вентиль  $1'$  должен погаснуть, а вентиль  $2'$  зажечься. Однако это не происходит мгновенно, так как обмотки трансформатора и обмотки приключенного к его первичным зажимам генератора переменного тока обладают индуктивностью. Поэтому переход тока с одного вентиля на другой будет происходить в течение некоторого промежутка времени  $\frac{\gamma}{\omega}$ , соответствующего углу  $\gamma$  (рис. 305), называемому *углом коммутации*. Пока горят два верхних вентиля  $1'$  и  $2'$  и один нижний  $3''$ , напряжение на выходе между точками А и В, если

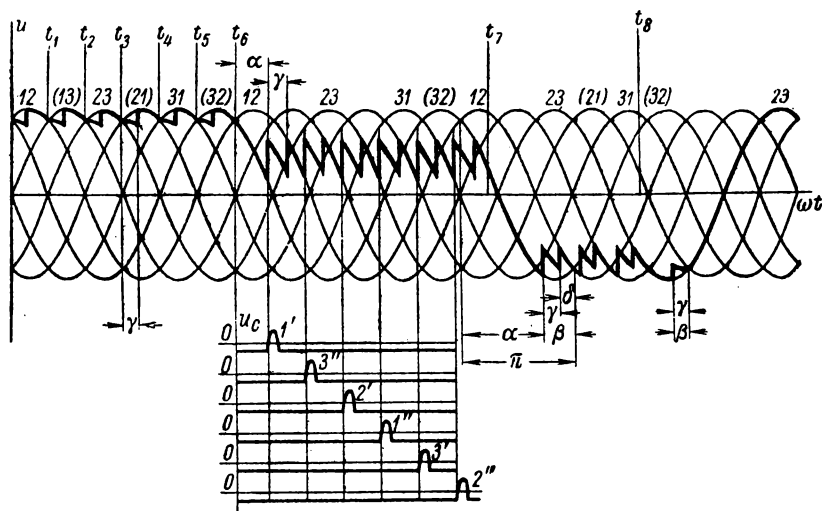


Рис. 305

препенебрю падением напряжения в вентилях, равно среднему значению из напряжений  $u_{13}$  и  $u_{23}$ , т. е.  $u_{AB} = \frac{u_{13} + u_{23}}{2}$ . Когда коммутация закончится,

т. е. вентиль  $1'$  погаснет и в верхней группе останется гореть только вентиль  $2'$ , напряжение  $u_{AB}$  станет равным  $u_{23}$ . Так будет до момента  $t_3$ , когда начнется коммутация тока с вентиля  $3''$  на вентиль  $1''$  в нижней группе. Она закончится также через угол  $\gamma$  от момента  $t_3$ . Затем в момент  $t_4$  начнется коммутация с вентиля  $2'$  на вентиль  $3'$  в верхней группе, в момент  $t_5$  — с вентиля  $1''$  на вентиль  $2''$  в нижней группе и в момент  $t_6$  она должна начаться с вентиля  $3'$  на вентиль  $1'$  в верхней группе.

Так процесс продолжался бы, если бы выпрямитель оставался неуправляемым. Жирная линия на рис. 305 изображает кривую напряжения  $u_{AB}$  на выходе. До момента  $t_6$  она изображает кривую выпрямленного напряжения неуправляемого выпрямителя.

Включим в промежутке между  $t_5$  и  $t_6$  сеточное управление, т. е. сообщим сеткам всех вентилях отрицательный потенциал по отношению к катодам, и будем подавать на сетки положительные импульсы напряжения, превышающие отрицательное напряжение на них. Импульсы будем подавать в порядке зажигания вентилях ( $1'$ ,  $3''$ ,  $2'$ ,  $1''$ ,  $3'$ ,  $2''$ ) через интервалы времени, соответствующие фазовому углу  $\frac{\pi}{6}$  (нижняя часть рисунка).



При отсутствии управления в момент времени  $t_6$  должна была начаться коммутация тока с вентиля 3' на вентиль 1'. Однако, если мы сдвинем все импульсы вправо от этого момента на угол  $\alpha$ , то в момент  $t_6$  вентиль 1' зажегся не сможет, так как напряжение на его сетке отрицательно, и, следовательно, будет продолжать гореть вентиль 3'. В момент времени  $t_6 + \frac{\alpha}{\omega}$  подается положительный импульс на сетку вентиля 1' и он зажигается, так как его потенциал выше потенциала горящего вентиля 3' верхней группы. В течение интервала времени  $\frac{\gamma}{\omega}$  происходит коммутация тока на вентиль 1', после чего горят вентили 1' и 2'' до момента подачи положительного импульса на сетку вентиля 3'', когда начинается коммутация тока в нижней группе с вентиля 2'' на вентиль 3'', и т. д.

Легко усмотреть, что среднее значение выпрямленного напряжения при этом получается меньше, чем при отсутствии регулирования. Чем больше угол  $\alpha$ , тем меньше среднее значение выпрямленного напряжения. Поэтому угол  $\alpha$  называют *углом регулирования*.

Предположим, что в момент времени  $t_7$  положительные импульсы на сетке сдвинуты еще более вправо и угол  $\alpha$  стал больше  $\frac{\pi}{2}$ , так что зажигание

следующего вентиля происходит уже при напряжении другого знака. Вследствие этого и напряжение  $u_{AB}$  меняет свой знак. Преобразователь переходит в *инверторный* режим. Этот режим возможен, если к зажимам А и В справа от них присоединен другой источник энергии постоянного тока, например другая такая же схема, работающая в выпрямительном режиме.

Момент подачи положительного импульса при этом принято отсчитывать не от точки пересечения положительных значений напряжений  $u_{32}$  и  $u_{12}$ , т. е. не с помощью угла  $\alpha$ , а от точки пересечения следующих за этим отрицательных значений тех же напряжений, т. е. с помощью угла  $\beta$ . Угол  $\beta$  называют *углом опережения зажигания* инвертора. Очевидно,  $\beta = \pi - \alpha$ .

При заданном среднем значении выпрямленного тока чем меньше  $\beta$ , тем больше  $u_{AB}$ , что легко усмотреть из рис. 305.

Угол  $\delta = \beta - \gamma$  называют *углом безопасности* работы инвертора. Он должен быть больше нуля и именно больше угла  $\delta_0$ , достаточного, чтобы к моменту очередного пересечения кривых напряжения успела закончиться деионизация пространства в только что погасшем вентиле.

Пусть в момент  $t_8$  угол  $\beta$  уменьшился настолько, что наступило соотношение  $\beta - \gamma < \delta_0$ . Это значит, что к моменту пересечения кривых напряжений  $u_{23}$  и  $u_{21}$  погасающий вентиль 3'' или еще не погаснет, или во всяком случае не успеет закончиться в нем деионизация после погасания. Так как после момента пересечения этих кривых  $u_{23}$  становится больше  $u_{21}$ , то ток снова перейдет с вентиля 1' обратно на вентиль 3'' и пара вентилях 2' и 3'' будет продолжать гореть, что приведет к изменению знака напряжения на зажимах АВ.

Так как напряжение источника энергии, приключенного слева от этих зажимов, не изменило своего знака, то произойдет эффект короткого замыкания. Этот аварийный процесс называют *опрокидыванием* инвертора. Отсюда видно, что чрезвычайно важно удерживать угол  $\beta$  достаточным, чтобы соблюдалось неравенство  $\delta > \delta_0$ .

Описанные устройства находят широкое применение в электротехнике. Они имеют особое значение для осуществления мощных электрических передач энергии на большие расстояния постоянного тока высокого напряжения, так как ионные вентили могут быть построены на большой ток и большое напряжение. Коэффициент полезного действия таких преобразователей весьма высок, так как падение напряжения в ионных вентилях мало. На рис. 306 дана принципиальная схема передачи постоянного тока.

При весьма длинных и мощных линиях передача энергии постоянного тока высокого напряжения имеет большие технико-экономические преимуще-

щества по сравнению с передачей энергии переменного тока. При передаче энергии постоянного тока не требуется синхронной работы генераторов переменного тока, находящихся на различных концах линии передачи, отсутствуют индуктивное падение в линии и токи смещения между проводами линии, требуется меньше проводов в линии, облегчается изоляция проводов, так как действующее значение постоянного напряжения не отличается от максимального, как это имеет место при переменном токе, облегчаются опоры для проводов линии, сеточное управление дает возможность легко осуществить регулирование передачи и т. д.

Уже в 1919 г. изобретатель трехфазной системы передачи переменного тока М. О. Доливо-Добровольский указывал, что проблема передачи энергии на весьма большие расстояния должна быть решена с использованием посто-

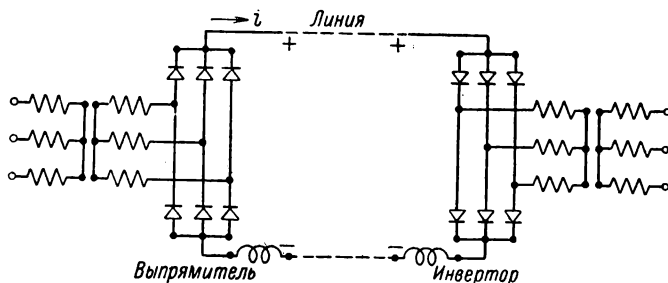


Рис. 306

янного тока. Для СССР эта проблема имеет исключительно большое значение в связи с задачей использования огромных энергетических ресурсов Сибири. В разработке этой проблемы в СССР имеются значительные успехи, в частности весьма глубоко разработана теория электромагнитных процессов в системе передачи энергии постоянного тока.

В каждом интервале времени горения определенных групп клапанов цепь можно рассматривать как линейную. Для нахождения токов необходимо найти полные интегралы системы линейных уравнений, описывающих процессы в этой цепи. При этом начальные условия в каждом последующем интервале должны соответствовать значениям токов и напряжений в конце предыдущего интервала.

## § 156. Ламповый генератор

Как мы видели в § 114, ток в колебательном контуре, предоставленном самому себе, затухает. Однако, подводя к контуру энергию извне, колебания в нем можно поддерживать, т. е. можно получить генератор незатухающих колебаний. Такая возможность с наибольшей простотой осуществляется при помощи электронной лампы с тремя электродами. Рассмотрим одну из простейших схем лампового генератора, представленную на рис. 307. В анодную цепь этой схемы, питаемую источником постоянного напряжения  $U_0 = \text{const}$ , включен колебательный контур, состоящий из конденсатора  $C$  и катушки с индуктивностью  $L$  и сопротивлением  $r$ . Этот контур при помощи катушки связи  $L_c$  индуктивно связан с цепью

сетки, взаимная индуктивность катушек  $L$  и  $L_c$  равна  $M$ . Поэтому изменения анодного тока  $i_a$ , управляемого напряжением  $u_{ca} = u_c + Du_a$  (§ 152), в свою очередь воздействуют на это управляющее напряжение, т. е. в рассматриваемой схеме имеется *обратная связь* между управляемой и управляющей цепями.

При замыкании цепи генератора конденсатор  $C$  зарядится, и на зажимах контура появится напряжение  $u$ . Вслед за этим начнется разряд конденсатора с частотой, равной собственной частоте контура. При этом ток  $i$  в катушке  $L$  будет отставать по фазе на угол  $\frac{\pi}{2}$  от напряжения  $u$ , и в цепи сетки индуцируется напряжение

$$u_c = -M \frac{di}{dt}, \text{ которое при встречном вклю-}$$

чении катушек  $L_c$  и  $L$ , т. е. при  $M < 0$ , совпадает по фазе с  $u$ . Поэтому и изменения анодного тока, вызываемые напряжением  $u_c$ , совпадут по фазе с  $u$  и вызовут на зажимах колебательного контура напряжение, также совпадающее по фазе с начальным изменением напряжения  $u$ , так как колебательный контур при резонансе представляет собой активное сопротивление.

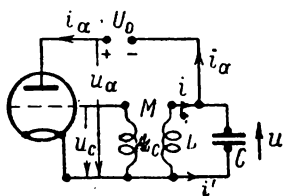


Рис. 307

Таким образом, при  $M < 0$  обратная связь содействует поддержанию колебаний в контуре. Такая обратная связь, как было отмечено в § 127, называется положительной. При  $M > 0$  напряжение, возникающее на зажимах контура вследствие наличия обратной связи, противоположно по фазе начальным изменениям напряжения  $u$ , и колебания, возникшие в контуре, будут подавляться. Такая обратная связь называется отрицательной. Однако для поддержания колебаний в контуре недостаточно своевременно подводить к нему энергию, но необходимо еще, чтобы эта энергия, поступающая от источника постоянного напряжения, имеющегося в анодной цепи, покрывала полностью все потери в контуре. Выведем соответствующее этому требованию соотношение между параметрами элементов схемы лампового генератора, предполагая, что он работает на прямолинейной части характеристики и что, следовательно, крутизна  $S = \text{const}$ .

Связь между приращениями анодного тока и управляющего напряжения имеет вид (§ 152):

$$di_a = S d(u_c + Du_a).$$

Интегрируя при  $S = \text{const}$ , получаем:

$$i_a = S(u_c + Du_a) + I_0,$$

что является уравнением прямой, совпадающей с прямолинейным участком характеристики (рис. 308), причем  $I_0 < 0$ .

Имеем следующую совокупность уравнений:

$$\begin{aligned} i_a &= S(u_c + Du_a) + I_0 = i + i'; \\ u &= ri + L \frac{di}{dt}; \quad i' = C \frac{du}{dt} = Cr \frac{di}{dt} + CL \frac{d^2 i}{dt^2}; \\ u_c &= -M \frac{di}{dt}; \quad u_a = U_0 - ri - L \frac{di}{dt}. \end{aligned}$$

Следовательно:

$$S \left( -M \frac{di}{dt} + DU_0 - Dri - DL \frac{di}{dt} \right) + I_0 = i + Cr \frac{di}{dt} + CL \frac{d^2 i}{dt^2}.$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{SM + SDL + rC}{LC} \frac{di}{dt} + \frac{1 + SDr}{LC} i &= \\ &= \frac{I_0 + SDU_0}{LC}. \end{aligned}$$

Свободный член уравнения определяет постоянную составляющую тока  $i = i_0 = i_{a0}$ , которой равен ток при отсутствии колебаний, а именно:

$$i_0 = i_{a0} = \frac{I_0 + SDU_0}{1 + SDr} \approx I_0 + SDU_0,$$

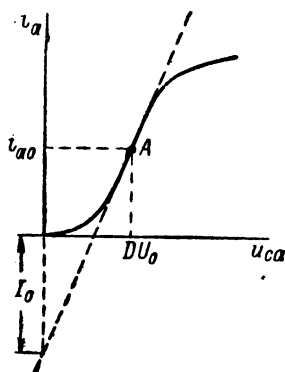


Рис. 308

так как обычно  $\frac{1}{SD} = R_{\text{вн}} \gg r$ , где  $R_{\text{вн}}$  — внутреннее сопротивление лампы (§ 152) и, следовательно,  $SDr \ll 1$ .

Колебательная составляющая  $i_{\sim}$  тока  $i = i_0 + i_{\sim}$  определяется из уравнения без свободного члена. Полагая

$$\frac{SM + SDL + rC}{LC} = 2\delta; \quad \frac{1 + rSD}{LC} = \omega_0^2;$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2},$$

уравнение для  $i_{\sim}$  приведем к виду:

$$\frac{d^2 i_{\sim}}{dt^2} + 2\delta \frac{di_{\sim}}{dt} + \omega_0^2 i_{\sim} = 0.$$

Его характеристическое уравнение

$$\alpha^2 + 2\delta\alpha + \omega_0^2 = 0$$

имеет корни

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

При  $\delta=0$ , т. е. при  $M = -\frac{rC + SDL}{S}$ , энергия, поступающая в контур от источника постоянного напряжения, будет в точности покрывать потери в контуре, и в нем будут происходить синусоидальные колебания с постоянной амплитудой и угловой частотой:

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 + rSD} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 + \frac{r}{R_{\text{ан}}}} \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Однако такой режим колебаний был бы неустойчив, так как при малейшем изменении  $\delta$  в ту или иную сторону колебания стали бы или нарастать, или затухать.

Обычно берут обратную связь несколько большую, чем из условия  $\delta = 0$ , а именно принимают:

$$M < -\frac{rC + SDL}{S},$$

т. е.

$$|M| > \frac{rC + SDL}{S}.$$

При этом показатель затухания оказывается отрицательным, и раз возникшие колебания около точки  $A$  характеристики (рис. 308) должны возрасти. Этот вывод получается в полном соответствии с общим заключением в § 149 об устойчивости и неустойчивости состояния около точки равновесия, так как при этом вещественная часть корней характеристического уравнения положительна ( $\delta > 0$ ). Эти колебания нарастали бы беспредельно, если бы прямолинейная часть характеристики простиралась в обе стороны до бесконечности (пунктирные линии на рис. 308).

В действительности характеристика лампы *нелинейна*, и это имеет решающее значение для установления устойчивых колебаний с вполне определенной амплитудой. Что это будет в действительности так, вытекает из простых физических соображений. Возрастание колебательной составляющей тока от точки  $A$  по характеристике вверх ограничено током насыщения лампы, а вниз — невозможностью изменения направления результирующего тока через лампу.

### § 157. Модуляция и детектирование колебаний с помощью нелинейных элементов

В § 95 были рассмотрены модулированные колебания и было отмечено, что обычно для получения таких колебаний включают микрофон в цепь источника постоянной э. д. с. последовательно с обмоткой особого трансформатора. Переменное напряжение  $u_1 = U_{1m} \sin \Omega t$ , где  $\Omega$  — звуковая частота, получающееся при работе

микрофона на зажимах вторичной обмотки трансформатора, подводят совместно с напряжением высокой частоты  $u_2 = U_{2m} \sin \omega t$  к сетке трехэлектродной лампы. При этом работают на нелинейной части характеристики лампы, и модуляция осуществляется именно вследствие этой нелинейности.

Пусть  $i_a$  и  $u_c$  связаны нелинейной зависимостью

$$i_a = a + bu_c + cu_c^2$$

и пусть  $u_c = U_{1m} \sin \Omega t + U_{2m} \sin \omega t$ . Подставим это значение  $u_c$  в выражение для  $i_a$  и заменим квадраты синусов через косинусы двойных углов. Тогда мы увидим, что в анодном токе, кроме постоянной составляющей и составляющих с частотами  $\Omega$ ,  $2\Omega$ ,  $2\omega$ , имеются составляющие  $bU_{2m} \sin \omega t$  и  $2cU_{1m}U_{2m} \sin \Omega t \sin \omega t$ , которые и образуют модулированный ток. Действительно, полагая  $bU_{2m} = I_0$  и  $2cU_{1m}U_{2m} = mI_0$ , мы получим:

$$\begin{aligned} bU_{2m} \sin \omega t + 2cU_{1m}U_{2m} \sin \Omega t \sin \omega t &= I_0 (1 + m \sin \Omega t) \sin \omega t = \\ &= I_0 \sin \omega t + \frac{m}{2} I_0 \cos (\omega - \Omega) t - \frac{m}{2} I_0 \cos (\omega + \Omega) t = i, \end{aligned}$$

что и является выражением для модулированного тока (§ 95). Здесь  $m$  — глубина модуляции,  $\omega$  — несущая частота,  $(\omega - \Omega)$  и  $(\omega + \Omega)$  — боковые частоты.

Вводя в анодную цепь контур, настроенный на несущую частоту  $\omega$  и выделяющий лишь эту частоту и близкие к ней частоты, лежащие в диапазоне от  $(\omega - \Omega)$  и до  $(\omega + \Omega)$ , в этом контуре выделяют модулированный ток, отсеивая все прочие переменные составляющие анодного тока.

В приемном устройстве необходимо выделить вновь колебания со звуковой частотой  $\Omega$ . При этом существенно заметить, что модулированные колебания не имеют составляющей, частота которой равна модулирующей частоте  $\Omega$ , и поэтому интересные нас в конечном счете колебания этой частоты не могут быть выделены из модулированных колебаний при помощи линейных резонансных устройств. Выделение колебаний частоты  $\Omega$  из модулированных колебаний — *детектирование колебаний* — осуществляют при помощи так называемых *детекторов*, представляющих собою нелинейные сопротивления. В качестве детекторов применяют электронные лампы и полупроводниковые диоды и триоды.

Пусть нелинейное сопротивление  $D$ , применяемое для детектирования колебаний, характеризуется связью между током  $i$  и напряжением  $u$ , которую можно представить в виде:

$$i = a + bu + cu^2.$$

На рис. 309 показана цепь, в которой осуществляется детектирование. В эту цепь включены детектор  $D$  и телефон  $T$ , к зажимам которого приключен конденсатор  $C$ . Емкость этого конденсатора должна быть подобрана так, чтобы он не представлял сколь-нибудь значительного сопротивления при частоте  $\omega$ , но при частоте  $\Omega$  имел сопротивление, значительно превышающее сопротивление телефона. Тогда в этой цепи токи высокой частоты будут замыкаться через конденсатор, а токи звуковой частоты  $\Omega$  будут замыкаться через телефон. Пусть в цепи действует модулированное напряжение  $u = U_0(1 + m \sin \Omega t) \sin \omega t$ . Подставляя это значение  $u$  в выражение для  $i$ , убедимся, что линейная часть зависимости  $i = F(u)$ , а именно  $a + bu$ , даст лишь постоянную составляющую и составляющие высокой частоты порядка  $\omega$ . Исследуя квадратичный член  $cu^2$ , мы после замены квадратов синусов через косинусы двойных углов найдем, что, кроме постоянной составляющей и составляющих

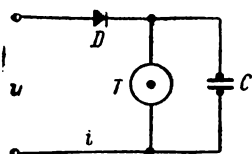


Рис. 309

высокой частоты, он содержит составляющие низкой частоты, а именно:

$$cU_0^2 m \sin \Omega t \quad \text{и} \quad cU_0^2 \frac{m^2}{4} \sin 2\Omega t.$$

Первая из этих составляющих представляет собой интересующие нас колебания звуковой частоты, которыми была модулирована высокая частота. Эта составляющая и дает полезный эффект в телефоне. Вторая составляющая, имеющая частоту  $2\Omega$ , искажает передачу. Для уменьшения этого искажающего влияния второй гармоники следует для глубины модуляции  $m$  выбирать достаточно малое значение. Обычно берут  $m = 0,3 \div 0,4$ .

Телефонную передачу можно осуществить и в том случае, когда одна из боковых частот будет отфильтрована в передающем устройстве. Пусть модулирующее напряжение будет  $u = U_0 \sin \omega t + \frac{m}{2} U_0 \cos(\omega - \Omega)t$ . Тогда при детекторе с характеристикой  $i = a + bu + cu^2$  мы получим из квадратичного члена  $cu^2$  только одну составляющую низкой частоты, а именно  $cU_0^2 \frac{m}{2} \sin \Omega t$ , и искажающее влияние второй гармоники будет устранено. Более того, можно осуществить передачу только одной боковой частотой и перед детектированием наложить на нее в месте приема несущую частоту от особого местного генератора малой мощности, называемого *гетеродином*.

При более детальном рассмотрении модуляции и детектирования колебаний следует иметь в виду, что при передаче речи или музыки несущая частота модулируется не одной звуковой частотой, а группой звуковых частот, лежащих в некотором диапазоне от 0

до  $\Omega$ . При этом в модулированных колебаниях, кроме несущей частоты, будут присутствовать частоты, лежащие в пределах от  $(\omega - \Omega)$  до  $(\omega + \Omega)$ .

### § 158. Релаксационные колебания

Рассмотрим процесс заряда конденсатора через сопротивление  $r_1$  от источника постоянного напряжения  $U_0 = \text{const}$  в случае, когда параллельно с конденсатором включена неоновая лампа  $Ne$ , представляющая собой участок с нелинейным сопротивлением, характеристика которого  $u_2 = F(i_2)$  приведена на рис. 310. При обозначениях рис. 311 имеем:

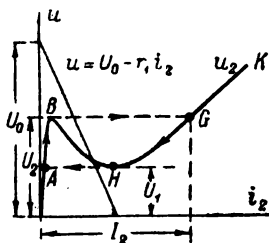


Рис. 310

$$U_0 = r_1 i + u_2, \quad i = i_2 + i_C$$

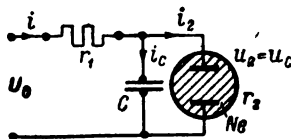


Рис. 311

или

$$U_0 - r_1 i_2 = u_2 + r_1 i_C = u_2 + r_1 C \frac{du_C}{dt}.$$

Из рассмотрения подобной цепи, приведенного в § 148, следует, что, если прямая  $u = U_0 - r_1 i_2$  пересекает характеристику неоновой лампы только в одной точке, лежащей на падающем участке этой характеристики (рис. 310), то заданным условиям соответствует только один и притом неустойчивый режим работы цепи, так как неоновая лампа представляет собой элемент с нелинейным сопротивлением с внутренней емкостью. В этом случае после включения цепи начнется заряд конденсатора и напряжение на его зажимах будет возрастать по закону:

$$u_C = u_2 = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right),$$

где  $\tau_1 = r_1 C$ , так как ток  $i_2$  будет пренебрежимо мал. Когда напряжение  $u_2$  достигнет значения  $U_2$  (точка B), то ток  $i_2$  резко возрастет до значения  $I_2$  (точка G), последует быстрый разряд конденсатора через лампу, сопровождаемый ее вспышкой, который закончится, когда напряжение  $u_2$  упадет до значения  $U_1$  (точка H), после чего ток  $i_2$  резко уменьшится (точка A) и конденсатор снова начнет заряжаться (от точки A к точке B). Этот процесс заряда и разряда конденсатора будет автоматически повторяться, и, следовательно,



при указанных условиях мы получим в цепи периодический колебательный процесс, получивший наименование релаксационных колебаний. Соответствующие кривые  $u_c = u_2$ ,  $i_c$  и  $i_2$  приведены на рис. 312.

Период  $T$  рассмотренных нами релаксационных колебаний можно найти как сумму времени  $t_1$  заряда конденсатора от напряжения  $U_1$  до напряжения  $U_2$  и времени  $t_2$  его разряда до напряжения  $U_1$ . При заряде конденсатора для напряжения  $u_2$  на его зажимах имеем:

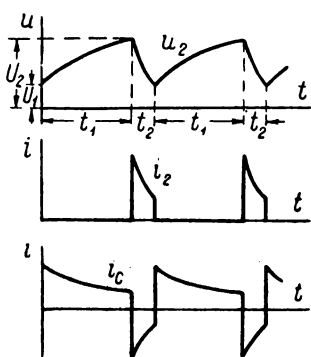


Рис. 312

$$u_2 = U_0 + Ae^{-\frac{t}{\tau_1}} = U_0 + Ae^{-\frac{t}{r_1 C}},$$

и так как в начальный момент  $u_2(0) = U_1$ , а  $u_2(t_1) = U_2$ , то

$$U_1 = U_0 + A \text{ и } u_2 = U_0 - (U_0 - U_1)e^{-\frac{t}{\tau_1}},$$

откуда

$$U_2 = U_0 - (U_0 - U_1)e^{-\frac{t_1}{\tau_1}}$$

и

$$t_1 = \tau_1 \ln \frac{U_0 - U_1}{U_0 - U_2}.$$

При разряде конденсатора  $u_2 = U_2 e^{-\frac{t-t_1}{\tau_2}}$ , где  $\tau_2 = r_2 C$ , если допустить, что при разряде сопротивление  $r_2$  неоновой лампы можно считать постоянной величиной, соответствующей среднему значению этого сопротивления на участке  $HG$ . Так как при  $t = t_1 + t_2$  имеем  $u_2 = U_1$ , то

$$U_1 = U_2 e^{-\frac{t_2}{\tau_2}} \text{ и } t_2 = \tau_2 \ln \frac{U_2}{U_1}.$$

Следовательно, для периода  $T$  имеем:

$$T = t_1 + t_2 = \tau_1 \ln \frac{U_0 - U_1}{U_0 - U_2} + \tau_2 \ln \frac{U_2}{U_1} = r_1 C \ln \frac{U_0 - U_1}{U_0 - U_2} + r_2 C \ln \frac{U_2}{U_1},$$

и период  $T$  пропорционален емкости конденсатора.

Если соотношения между  $U_0$  и  $r_1$  таковы, что прямая  $u = U_0 - r_1 i_2$  пересекает характеристику неоновой лампы на ее восходящем участке  $HGK$ , то колебаний в цепи не возникает, а устанавливается устойчивый режим (§ 148), при котором неоновая лампа горит ровным светом.

Интересно отметить, что релаксационные колебания возникают в цепи, содержащей только емкость и сопротивление и не содержащей индуктивности. Для их возникновения существенно необходимо наличие нелинейного элемента, имеющего падающий участок характеристики.

Релаксационные колебания с успехом могут быть использованы, например, для осуществления линейной развертки луча катодного осциллографа. Действительно, восходящие ветви кривой  $u_2 = F(t)$  на рис. 312 можно получить весьма близкими к прямолинейным, если они представляют только начальную часть кривой заряда конденсатора. Это будет иметь место, если  $U_0$  взять достаточно большим, чтобы было

$$\frac{t_1}{\tau_1} = \ln \frac{U_0 - U_1}{U_0 - U_2} \ll 1.$$

Релаксационные колебания можно получить также с другими схемами.

### § 159. Индуктивные и ёмкостные нелинейные элементы в цепи переменного тока

К индуктивным нелинейным элементам электрических цепей относятся все устройства, в которых магнитный поток, сцепляющийся с электрическим током, замыкается хотя бы частично по

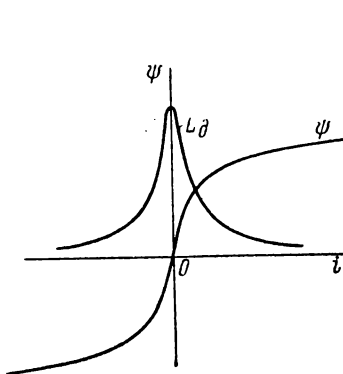


Рис. 313

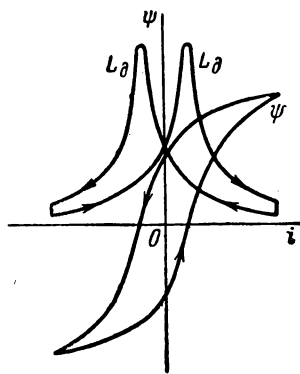


Рис. 314

ферромагнитным материалам. Нелинейность таких элементов является следствием зависимости магнитной проницаемости ферромагнитных материалов от магнитной индукции. Простейшим элементом такого рода является реактивная катушка с сердечником из ферромагнитного материала, представляющая собою индуктивное симметричное нелинейное сопротивление.

На рис. 313 изображена кривая, выражающая связь между мгновенными значениями потокосцепления  $\Psi$  и тока  $i$  в такой катушке при пренебрежении явлением гистерезиса, а также дана кривая динамической индуктивности  $L_d = \frac{d\Psi}{di}$ . На рис. 314 те же кривые приведены с учетом расхождения восходящей и нисходящей ветвей петли гистерезиса. Заметим, что вследствие появления вих-

ревых токов в сердечнике связь между результирующим потоко-сцеплением  $\Psi$  и током в обмотке при переменном токе видоизменяется и отстает от петли, изображенной на рис. 314. Под влиянием вихревых токов углы петли закругляются (рис. 315), и чем больше их влияние, тем ближе кривая  $\Psi = F(i)$  при периодическом токе к эллипсу. Часто, рассматривая катушку с ферромагнитным сердечником при периодическом токе, интересуются связью между действующими значениями напряжения  $U$  на зажимах катушки и тока  $I$  в ней. Эту зависимость мы будем называть *характеристикой катушки*. Из вида характеристики (рис. 316) следует, что в начальной части ее  $U$  и  $I$  приблизительно пропорциональны друг другу, но в дальнейшем  $U$  растет значительно медленнее, чем  $I$ . Этот из-

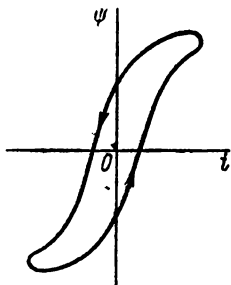


Рис. 315

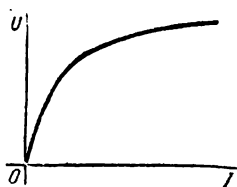


Рис. 316

гиб характеристики объясняется уменьшением магнитной проницаемости сердечника при высоких индукциях и соответствующим уменьшением среднего за период значения индуктивности катушки. Вид характеристики катушки зависит от условий, при которых она была получена. Так, характеристика, полученная при синусоидальном напряжении, отличается от характеристики, полученной при синусоидальном токе. Однако общий характер зависимости между приложенным напряжением и током от этих обстоятельств не изменяется.

Наложив на сердечник катушки дополнительную обмотку, питаемую постоянным током, мы получим несимметричный нелинейный индуктивный элемент, так как при одном направлении тока в основной обмотке м. д. с. обеих обмоток будут суммироваться, а при другом — вычитаться.

Емкостными нелинейными элементами являются конденсаторы, диэлектриком в которых служат *сегнетозлектрики* (ч. I). Зависимость между зарядом  $q$  на обкладках таких конденсаторов и напряжением  $u$  между обкладками нелинейна и сходна с зависимостью  $\Psi = F(i)$  в катушках с ферромагнитными сердечниками. При переменном периодическом напряжении наблюдается явление гистерезиса. Динамическая емкость  $C_d = \frac{dq}{du}$  таких конденсаторов, так же как и статическая, является функцией напряжения.

### § 160. Нелинейные электрические цепи, содержащие реактивные катушки с ферромагнитными сердечниками и конденсаторы

В электрических цепях, содержащих реактивные катушки с ферромагнитными сердечниками и конденсаторы, наблюдаются особые явления, связанные с нелинейными свойствами этих цепей.

Впервые исследование таких цепей было выполнено П. Л. Калантаровым, которым был также предложен метод графического расчета этих цепей. Ниже приводится рассмотрение явлений в таких цепях на простейших примерах последовательного и параллельного соединения катушки с ферромагнитным сердечником и конденсатора.

Пусть дана цепь, состоящая из последовательно соединенных реактивной катушки с ферромагнитным сердечником и конденсатора емкостью  $C$  (рис. 317). Предположим, что в цепи отсутствуют потери, и пренебрежем наличием высших гармоник. При указанных условиях напряжение  $U_L$  на зажимах катушки и напряжение  $U_C$  на зажимах конденсатора по фазе прямо противоположны друг другу, и напряжение  $U$  на зажимах цепи равно абсолютному значению их разности  $U = |U_L - U_C|$ , причем возможен как случай преобладания  $U_L$  над  $U_C$ , так и случай преобладания  $U_C$  над  $U_L$ .

Представляя напряжения  $U_L$  и  $U_C$  в виде функций тока  $I$ , причем  $U_L = F(I)$  изобразится характеристикой реактивной катушки, а  $U_C = \frac{I}{\omega C}$  — прямой, проходящей через начало координат, имеем:

$$U = |U_L - U_C| = \left| F(I) - \frac{I}{\omega C} \right|.$$

График разности  $U_L - U_C$  найдем, вычитая из ординат кривой  $U_L = F(I)$  соответствующие ординаты прямой  $U_C = I/\omega C$  (рис. 317). Ток при заданном значении напряжения  $U$  определим, находя точки пересечения кривой  $|U_L - U_C|$  с прямой, проходящей параллельно оси абсцисс на расстоянии  $U$  от нее. Как видно из рис. 317, таких точек может быть три, откуда следует, что при одном и том же напряжении на зажимах цепи в ней могут, вообще говоря, устанавливаться три различных режима тока. Такая неопределенность совершенно не свойственная цепям с постоянными параметрами,

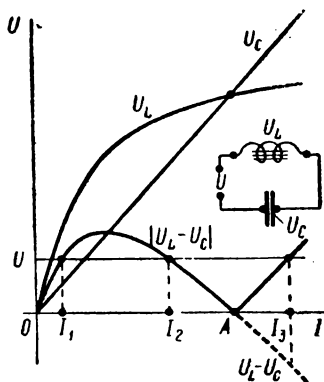


Рис. 317

не может иметь места и в рассматриваемой цепи, если характеристика катушки не пересекается с характеристикой конденсатора. Но и при пересечении характеристик неопределенность имеет место лишь в ограниченной области напряжений. А именно, если приложенное напряжение  $U$  меньше того значения, при котором прямая  $U$  касается кривой  $|U_L - U_C|$ , то мы имеем три точки пересечения кривой  $|U_L - U_C|$  с прямой  $U$ , причем две первые точки, считая от начала координат, соответствуют преобладанию в цепи реакции самоиндукции, а третья — преобладанию реакции емкости. Если приложенное напряжение превосходит указанный предел, то кривая  $|U_L - U_C|$  пересекается с прямой  $U$  только в одной точке,

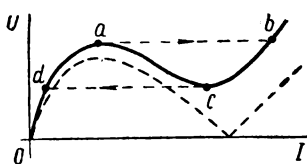


Рис. 318

и следовательно, в цепи возможен лишь один вполне определенный режим тока. Кривая  $|U_L - U_C|$  дает связь между действующими значениями тока в цепи и напряжения на ее зажимах, т. е. является характеристикой всей рассматриваемой цепи. Особая точка  $A$  этой характеристики, лежащая на оси абсцисс, является точкой резонанса, так как в этой точке напряжения  $U_L$  и  $U_C$  взаимно компенсируются. Отсюда следует, что, в отличие от цепей с постоянными параметрами, резонанса в рассматриваемой цепи можно достичь изменением величины приложенного напряжения. Это объясняется тем, что индуктивность катушки с ферромагнитным сердечником зависит от величины тока и, следовательно, изменяется при изменении напряжения на зажимах всей цепи. Это явление называют явлением феррорезонанса. В данном случае мы имеем дело с феррорезонансом в последовательной цепи.

Вследствие наличия в цепи потерь и высших гармоник, которыми мы пренебрегли, фактическая характеристика цепи приобретает вид, показанный на рис. 318 сплошной линией. Вид этой кривой показывает, что, постепенно повышая напряжение, мы дойдем до точки  $a$  характеристики, а далее произойдет срыв из точки  $a$  в точку  $b$ , сопровождающийся резким увеличением тока. При дальнейшем повышении напряжения увеличение тока происходит плавно. При понижении напряжения ток плавно уменьшается до достижения точки  $c$  характеристики, в которой происходит срыв в точку  $d$ , сопровождающийся резким уменьшением тока. Эти срывы сопровождаются изменением знака угла сдвига в цепи.

При постоянстве напряжения  $U$  на зажимах цепи падающая часть  $ac$  характеристики является областью неустойчивых режимов. Действительно, пусть при  $U = \text{const}$  режиму работы цепи отвечает некоторая точка на падающей части характеристики. Тогда всякое случайное увеличение тока приведет к уменьшению падения напряжения в цепи и, следовательно, к дальнейшему возрастанию

тока. Наоборот, всякое случайное уменьшение тока приведет к увеличению падения напряжения в цепи и, следовательно, к дальнейшему уменьшению тока. В обоих случаях изменение величины тока будет продолжаться до тех пор, пока ток не достигнет значения, определяемого соответствующей точкой пересечения прямой  $U = \text{const}$  с одной из поднимающихся частей характеристики. В любой из этих точек режим будет устойчив, так как случайное увеличение тока приведет к увеличению падения напряжения, и ток должен будет уменьшиться, а случайное уменьшение тока приведет к уменьшению падения напряжения, и ток должен будет увеличиться. Включив последовательно с цепью достаточно большое дополнительное линейное сопротивление, можно получить устойчивую работу цепи и на падающем участке ее характеристики.

Рассматривая параллельное соединение катушки с ферромагнитным сердечником и конденсатора (рис. 319), пренебрежем, как и в предыдущем случае, потерями в цепи и наличием высших гармоник. Тогда ток  $I_L$  в реактивной катушке и ток  $I_C$  в конденсаторе по фазе будут противоположны друг другу, а ток  $I$  в неразветвленной части цепи будет равен абсолютному значению их разности  $I = |I_L - I_C|$ , причем возможен как случай преобладания  $I_L$  над  $I_C$ , так и случай преобладания  $I_C$  над  $I_L$ .

Представляя токи  $I_L$  и  $I_C$  как функции напряжения на зажимах цепи, причем  $I_L = F(U)$  изобразится характеристикой реактивной катушки, а  $I_C = \omega CU$  — прямой, проходящей через начало координат, имеем:

$$I = |I_L - I_C| = |F(U) - \omega CU|.$$

График разности  $I_L - I_C = F(U) - \omega CU$  найдем, вычитая из абсцисс кривой  $I_L = F(U)$  соответствующие абсциссы прямой  $I_C = \omega CU$  (рис. 319). Напряжение, при котором ток во внешней цепи равен заданному значению  $I$ , мы определим, находя точки пересечения кривой  $|I_L - I_C|$  с прямой, проходящей параллельно оси ординат на расстоянии  $I$  от нее. Как видно из рис. 319, таких точек может быть три, откуда следует, что один и тот же ток в цепи может, вообще говоря, установиться при трех различных значениях напряжения на ее зажимах. Эта особенность рассматриваемой цепи исчезает, если характеристика катушки не пересекается с характеристикой конденсатора. Но и при пересечении характеристик мно-

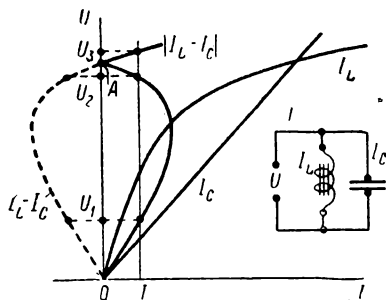


Рис. 319

гозначность зависимости напряжения от тока имеет место лишь в ограниченной области значений тока. А именно, если ток  $I$  в неразветвленной части цепи меньше того значения, при котором прямая  $I$  касается кривой  $|I_L - I_C|$ , то мы имеем три точки пересечения кривой  $|I_L - I_C|$  с прямой  $I$ ; причем две первые точки, считая от начала координат, соответствуют преобладанию в цепи реакций емкости, а третья — преобладанию реакции самоиндукции. Если ток  $I$  превосходит указанный предел, то кривая  $|I_L - I_C|$  пересекается с прямой  $I$  только в одной точке, и, следовательно, этот ток может существовать в цепи лишь при одном вполне определенном значении напряжения на зажимах цепи.

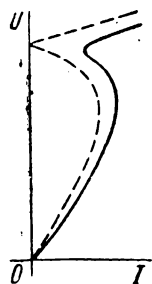


Рис. 320

Кривая  $|I_L - I_C|$  является характеристикой рассматриваемой цепи. Особая точка  $A$  этой характеристики, лежащая на оси ординат, является точкой резонанса, так как в этой точке токи  $I_L$  и  $I_C$  взаимно компенсируются. Отсюда следует, что при параллельном соединении конденсатора и реактивной катушки с ферромагнитным сердечником, в отличие от цепей с постоянными параметрами, резонанса можно достичь изменением величины приложенного напряжения.

Это явление также относится к явлению *феррорезонанса*, причем в рассматриваемом случае мы имеем дело с феррорезонансом в параллельной цепи.

Вследствие наличия в цепи потерь и высших гармоник, которыми мы пренебрегли, фактическая характеристика цепи приобретает вид, показанный на рис. 320 сплошной линией. Из вида этой кривой следует, что при постепенном увеличении тока в цепи, а также и при уменьшении его будут происходить срывы, аналогичные срывам при последовательном соединении и также сопровождающиеся изменением знака угла сдвига в цепи. Однако для получения этих срывов на опыте необходимо иметь устройство, в котором регулируется ток, а не напряжение. Практически это можно осуществить если цепь, изображенную на рис. 319, приключить не непосредственно к источнику изменяющегося напряжения, а через большое линейное сопротивление  $r$ , значительно превосходящее сопротивление контура из параллельно соединенных катушки с ферромагнитным сердечником и конденсатора. В таком случае ток  $I$  будет определяться сопротивлением  $r$  и при его изменении будут происходить скачки напряжения на зажимах этого контура.

Если же контур из параллельно соединенных катушки с ферромагнитным сердечником и конденсатора присоединен непосредственно к источнику напряжения с малым внутренним сопротивлением, то при изменении  $U$  может быть получена на опыте вся кривая (рис. 320) без скачков.

Применяя рассмотренные нами способы построения характе-

ристик для последовательного и параллельного соединения катушки с ферромагнитным сердечником и конденсатора, можно построить характеристики более сложных нелинейных цепей, представляющих собою смешанное соединение реактивных элементов.

Покажем, каким образом при построении характеристики цепи, состоящей из последовательно соединенных катушки с ферромагнитным сердечником и конденсатора, можно учесть активное сопротивление  $r$  этой цепи. Обозначим приложенное к цепи напряжение через  $U$ , а его активную составляющую и абсолютное значение реактивной составляющей через  $U_a = Ir$  и  $|U_p| = |U_L - U_C|$ . Зависимость  $|U_p|$  от  $I$ , т. е. характеристику цепи при пренебрежении ее активным сопротивлением, будем предполагать известной. Для дальнейших операций удобнее применять зависимость  $|U_p|$  не непосредственно от тока, а от пропорциональной току величины  $U_a = Ir$ , причем масштабы по обеим осям координат должны быть одинаковы.

Итак, имеем:

$$|U_p| = F(U_a); \quad U_a^2 + U_p^2 = U^2.$$

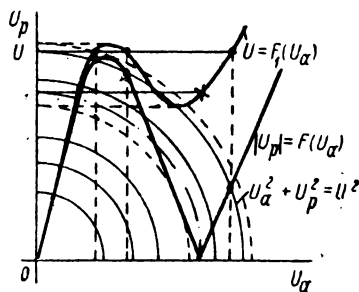


Рис. 321

Первое из этих уравнений показывает, что  $|U_p|$  и  $U_a$  связаны криволинейной зависимостью, подобной характеристике цепи для случая  $r = 0$ , а из второго уравнения следует, что, кроме того, между  $|U_p|$  и  $U_a$  существует связь, определяемая окружностью, проведенной из начала координат радиусом, равным напряжению  $U$  на зажимах цепи. Оба эти условия для  $|U_p|$  и  $U_a$  выполняются в точках пересечения окружности радиуса  $U$  с кривой  $|U_p| = F(U_a)$ , причем число таких точек равно числу режимов тока, возможных в цепи при данном значении  $U$  (рис. 321). Проведем из точки пересечения окружности  $U$  с осью ординат прямую, параллельную оси абсцисс, и снесем на нее значения  $U_a$ , соответствующие данному значению  $U$ . Проделав эту операцию для ряда окружностей, отвечающих различным значениям  $U$ , и соединив найденные точки плавной кривой, мы построим зависимость  $U = F_1(U_a)$ , которая в то же время, в силу прямой пропорциональности между  $U_a$  и  $I$ , даст зависимость между  $U$  и  $I$ , т. е. искомую характеристику цепи с учетом ее активного сопротивления.

На рис. 321 показана найденная таким методом характеристика цепи, причем пунктиром нанесены окружности  $U$ , касающиеся кривой  $|U_p| = F(U_a)$  и ограничивающие область напряжений, в ко-



торой одному значению напряжения могут отвечать три различных режима тока. Окружность  $U$ , отвечающая резонансу, выделена особо, а точка резонанса отмечена на характеристике крестом.

### 161. Ферромагнитные стабилизаторы напряжения

Особенности цепей, содержащих катушки с ферромагнитными сердечниками и конденсаторы, используют для устройства *ферромагнитных стабилизаторов напряжения*, служащих для поддержания постоянства напряжения на зажимах приемника при изменении

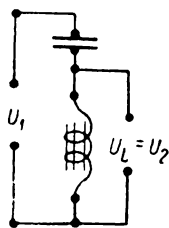


Рис. 322

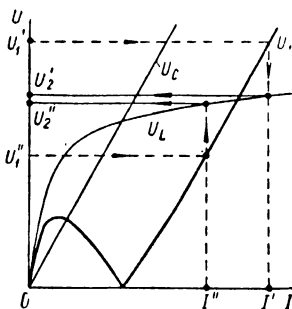


Рис. 323

напряжения питающей сети. Основная часть всех стабилизаторов состоит из двух последовательно соединенных сопротивлений — линейного и нелинейного.

Рассмотрим простейший стабилизатор (рис. 322), состоящий из последовательно соединенных между собой конденсатора  $C$  и катушки  $L$  с ферромагнитным сердечником, при холостом ходе. Напряжение  $U_1$  сети подводят к зажимам этой цепи, а зажимы катушки являются выходными зажимами стабилизатора, и, следовательно, выходное напряжение стабилизатора  $U_2$  равно напряжению  $U_L$  на зажимах катушки.

Зная емкость  $C$  конденсатора и характеристику  $U_L = F_2(I)$  катушки, можно построить (рис. 323) зависимость  $U_1 = |U_L - U_C| = F_1(I)$ , где  $U_C$  — напряжение на зажимах конденсатора. Предположим, что напряжение сети изменилось от  $U'_1$  до  $U''_1$ . Тогда, пользуясь кривыми  $U_1 = F_1(I)$  и  $U_2 = U_L = F_2(I)$ , можно найти соответствующие значения выходного напряжения  $U'_2$  и  $U''_2$ . При этом значениям  $U'_1$  и  $U''_1$  отвечает ток  $I'$ , а значениям  $U'_1$  и  $U''_2$  — ток  $I''$  в цепи стабилизатора. Из рис. 323 видно, что значительное изменение напряжения  $\Delta U_1 = U'_1 - U''_1$  сети влечет за собою сравнительно малое изменение выходного напряжения  $\Delta U_2 = U'_2 - U''_2$ .

Определив для ряда значений  $U_1$  соответствующие значения  $U_2$ , можно построить зависимость  $U_2 = F(U_1)$ , из которой видно (рис. 324), что рассматриваемая схема может стабилизировать напряжение только при напряжениях сети, превышающих критическое напряжение  $U_{кр}$ . Из рис. 324 ясно, что стабилизатор будет

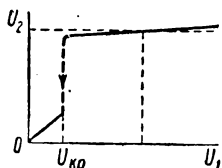


Рис. 324

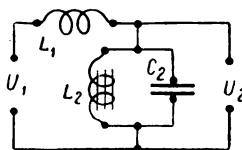


Рис. 325

тем лучше, чем более пологой является конечная часть характеристики катушки.

На практике часто применяют стабилизатор, основная часть схемы которого дана на рис. 325. В этой схеме линейным сопротивлением является катушка  $L_1$  с ненасыщенным ферромагнитным сердечником, а нелинейным — цепь, состоящая из параллельно соеди-

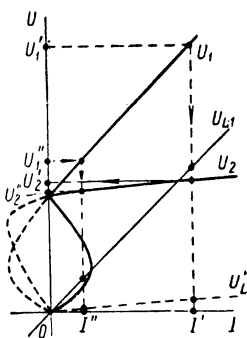


Рис. 326

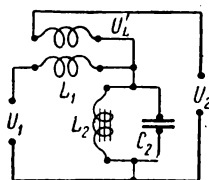


Рис. 327

ненных конденсатора  $C_2$  и катушки  $L_2$  с насыщенным ферромагнитным сердечником. Соответствующие характеристики  $U_{L1} = F(I)$  катушки  $L_1$ ,  $U_2 = F_2(I)$  — разветвленной части схемы и  $U_1 = F_1(I)$  — всей схемы приведены на рис. 326.

Дальнейшего улучшения этой схемы можно достичь, вычитая из напряжения на контуре  $L_2, C_2$  напряжение  $U'_{L1}$ , являющееся частью напряжения  $U_{L1}$  на зажимах катушки  $L_1$ . Это можно выполнить, наложив на сердечник катушки  $L_1$  дополнительную обмотку с соответствующим числом витков и включив ее так, как показано на рис. 327. Таким путем можно получить почти полную стабилизацию напряжения. Заметим, что присоединение нагрузки к стабилизатору ухудшает его характеристику, делая ее менее пологой. Следует

иметь в виду, что номинальная мощность элементов стабилизатора значительно превосходит допустимую мощность нагрузки. К недостаткам обычных ферромагнитных стабилизаторов относится также зависимость выходного напряжения от частоты. Уменьшение этой зависимости возможно путем дополнительного усложнения схемы стабилизаторов.

### § 162. Ферромагнитный резонансный умножитель частоты

Ферромагнитный резонансный умножитель частоты (рис. 328) отличается простотой принципа действия. Основным элементом его схемы является катушка  $L$  с ферромагнитным сердечником.

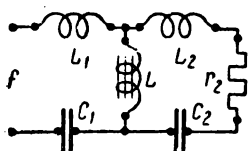


Рис. 328

При значительном насыщении сердечника этой катушки и синусоидальном токе в ее обмотке напряжение на зажимах катушки содержит резко выраженные нечетные гармоники всех порядков. Настраивая первичный контур ( $L_1$ ,  $C_1$ ,  $L$ ) в резонанс для частоты  $f$  приложенного напряжения, добиваются, с одной стороны, наиболее выгодных условий работы генератора, а с другой стороны, значительного искажения кривой напряжения на зажимах катушки  $L$ . При соединении к зажимам катушки  $L$  цепь ( $L_2$ ,  $C_2$ ,  $r_2$ ), можно выделить во вторичном контуре любую гармонику, настроив его в резонанс для этой гармоники. На практике при помощи ферромагнитных резонансных умножителей достигается умножение частоты в несколько десятков раз.

### § 163. Ферромагнитный утритель частоты

Рассмотрим ферромагнитный утритель частоты, состоящий из трех одинаковых однофазных трансформаторов с ферромагнитными сердечниками, первичные обмотки которых соединены звездой, а вторичные — открытым треугольником (рис. 329). Пусть линейные напряжения питающей сети синусоидальны и образуют симметричную трехфазную систему. Рассмотрим режим холостого хода утрителя и покажем, что поток в каждом из трансформаторов при заданных условиях не может быть синусоидальной функцией времени.

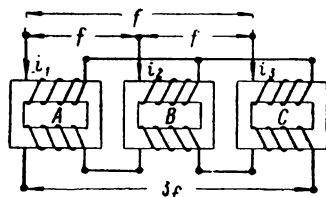


Рис. 329

Действительно, при синусоидальном изменении потока ток в каждой из первичных обмоток был бы несинусоидален и содержал бы в числе прочих гармоник и гармоники, порядок которых кратен трем, что в данном случае невозможно вследствие соединения первичных обмоток звездой и вытекающей отсюда зависимости  $i_1 + i_2 + i_3 = 0$ .

Таким образом, потоки в сердечниках трансформаторов будут не-синусоидальны. При этом кривые этих потоков и кривые индуктируемых ими э. д. с. могут содержать лишь гармоники, порядок которых кратен трем.

В самом деле, линейные напряжения сети по нашему предположению синусоидальны, а так как они равны разностям фазных э. д. с., индуктируемых в первичных обмотках, то эти последние э. д. с. могут иметь лишь гармоники, порядок которых кратен трем, ибо гармоники прочих порядков не могут взаимно компенсироваться при вычитании фазных э. д. с., как не совпадающие друг с другом по фазе. Поэтому и кривые э. д. с., индуктируемых во вторичных обмотках, могут, кроме основной волны, содержать лишь гармоники, порядок которых кратен трем, а именно — третью, девятую, пятнадцатую и т. д. Четных гармоник эти кривые не имеют, так как нет причин, нарушающих симметрию кривых потока. Напряжение на зажимах вторичной цепи равно, как это следует из схемы соединений, сумме э. д. с., индуктируемых во вторичных обмотках. При суммировании этих э. д. с. основные волны их, равные по величине и сдвинутые на одну треть периода друг относительно друга, в сумме дадут нуль. Что же касается гармоник, то все гармоники одного порядка совпадут по фазе, так как их порядок кратен трем, и амплитуда каждой из этих гармоник на зажимах цепи будет в три раза больше, чем в кривой э. д. с., индуктируемой в каждой из вторичных обмоток. При этом роль основной волны в напряжении на зажимах вторичной цепи играет третья гармоника э. д. с., а девятая, пятнадцатая и прочие по отношению к третьей гармонике играют роль третьей, пятой и прочих нечетных гармоник. Таким образом, частота напряжения на зажимах вторичной цепи утроителя будет в три раза больше, чем частота  $f$  питающей сети. Наличие нагрузки существенных изменений в характер работы утроителя не вносит.

На рис. 330 приведены кривые потоков  $\Phi_A$ ,  $\Phi_B$ ,  $\Phi_C$  в сердечниках трансформаторов, причем показана основная волна  $\Phi_{A1}$  кривой потока в первом трансформаторе и сумма гармоник этой кривой, а также дана кривая напряжения  $u$  на вторичных зажимах утроителя, которая, как видно, мало отличается от синусоиды.

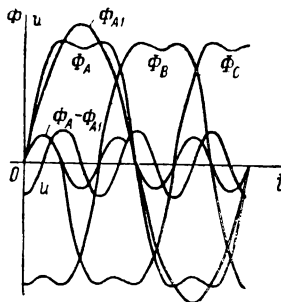


Рис. 330

## § 164. Ферромагнитный удвоитель частоты

Рассмотрим ферромагнитный удвоитель частоты, состоящий из двух одинаковых однофазных трансформаторов с ферромагнитными сердечниками. Первичная цепь удвоителя состоит из сое-

динных последовательно первичных обмоток трансформаторов (рис. 331). Вторичные обмотки трансформаторов, также соединенные последовательно, образуют вторичную цепь удвоителя. Кроме этих обмоток, на каждый сердечник наложено еще по одной обмотке.

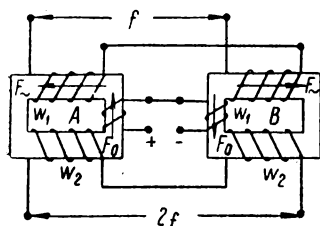


Рис. 331

Эти обмотки соединены последовательно и приключены к источнику постоянной э. д. с. Обмотки трансформаторов намотаны таким образом, что если переменная м. д. с.  $F_{\sim}$  первичной обмотки первого трансформатора и постоянная м. д. с.  $F_0$  намагничивают его сердечник в одном направлении, то в тот же момент времени во втором трансформаторе  $F_{\sim}$  и  $F_0$  стремятся намагнитить сердечник в противоположных направлениях.

Пусть первичная цепь удвоителя присоединена к источнику синусоидального напряжения, имеющего частоту  $f$ . Рассмотрим ра-

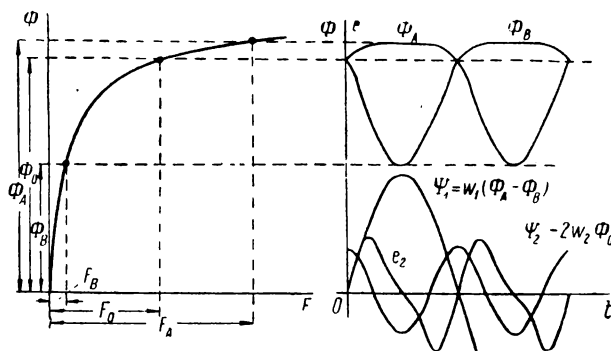


Рис. 332

боту удвоителя при холостом ходе. Для суммарных м. д. с.  $F_A$  и  $F_B$  первого и второго трансформаторов имеем:

$$F_A = F_0 + F_{\sim}; \quad F_B = F_0 - F_{\sim}.$$

Условимся считать направление  $F_0$  за направление положительных м. д. с. Тогда в течение того полупериода, когда м. д. с.  $F_{\sim}$  в первом трансформаторе положительна,  $F_A > F_0$  и  $F_B < F_0$ . При максимальном значении  $F_{\sim}$  и значениях, близких к нему, поток  $\Phi_A$  в сердечнике первого трансформатора вследствие насыщения сердечника будет лишь незначительно превышать поток  $\Phi_0$ , соответствующий м. д. с.  $F_0$ , а поток  $\Phi_B$  в сердечнике второго трансформатора

тора в те же моменты времени будет значительно меньше, чем  $\Phi_0$  (рис. 332). Поэтому в рассматриваемый полупериод кривая  $\Phi_A$  имеет почти плоскую форму, а в кривой  $\Phi_B$  имеется углубление. В следующий полупериод направление  $F_{\sim}$  изменится, и кривая  $\Phi_A$  будет иметь углубление, а кривая  $\Phi_B$  будет иметь почти плоскую форму.

Из изложенного следует, что кривые потоков  $\Phi_A$  и  $\Phi_B$  несимметричны и содержат поэтому четные гармоники. Так как эти кривые сдвинуты друг относительно друга на полупериод, то имеем:

$$\Phi_B(\omega t) = \Phi_A(\omega t + \pi)$$

и, подставляя  $\Phi_A$  и  $\Phi_B$  в виде рядов Фурье, получим:

$$\Phi_A = \Phi'_0 + \Phi_1 \sin(\omega t + \psi_1) + \Phi_2 \sin(2\omega t + \psi_2) + \Phi_3 \sin(3\omega t + \psi_3) + \\ + \Phi_4 \sin(4\omega t + \psi_4) + \dots$$

$$\Phi_B = \Phi'_0 - \Phi_1 \sin(\omega t + \psi_1) + \Phi_2 \sin(2\omega t + \psi_2) - \Phi_3 \sin(3\omega t + \psi_3) + \\ + \Phi_4 \sin(4\omega t + \psi_4) - \dots$$

Обозначим потокосцепления первичных обмоток первого и второго трансформаторов, соответственно, через  $\Psi_{1A} = \omega_1 \Phi_A$  и  $\Psi_{1B} = \omega_1 \Phi_B$ , а потокосцепления вторичных обмоток через  $\Psi_{2A} = \omega_2 \Phi_A$  и  $\Psi_{2B} = \omega_2 \Phi_B$ . Тогда потокосцепление  $\Psi_1$  со всей первичной цепью удвоителя, состоящей из первичных обмоток, включенных навстречу друг другу, равно разности потокосцеплений  $\Psi_{1A}$  и  $\Psi_{1B}$ , а потокосцепление  $\Psi_2$  со вторичной цепью удвоителя, состоящей из вторичных обмоток, включенных согласно, равно сумме потокосцеплений  $\Psi_{2A}$  и  $\Psi_{2B}$ , т. е. имеем:

$$\Psi_1 = \omega_1 (\Phi_A - \Phi_B) = 2\omega_1 [\Phi_1 \sin(\omega t + \psi_1) + \Phi_3 \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots]$$

$$\Psi_2 = \omega_2 (\Phi_A + \Phi_B) = 2\omega_2 [\Phi'_0 + \Phi_2 \sin(2\omega t + \psi_2) + \\ + \Phi_4 \sin(4\omega t + \psi_4) + \dots].$$

При этом  $\Phi_3 = \Phi_5 = \Phi_7 = 0$ , так как напряжение на зажимах первичной цепи по условию синусоидально. Что касается э. д. с., индуцируемой во вторичной цепи удвоителя, то из выражения для  $\Psi_2$  следует, что частота основной волны этой э. д. с. будет в два раза больше частоты напряжения, приложенного к зажимам первичной цепи. На рис. 332 показаны кривые потоков  $\Phi_A$  и  $\Phi_B$ , кривая потокосцепления  $\Psi_1$  с первичной цепью удвоителя, кривая переменной составляющей ( $\Psi_2 - 2\omega_2 \Phi'_0$ ) потокосцепления  $\Psi_2$  с его вторичной цепью и кривая э. д. с.  $e_2$ , индуцируемой в ней.

### § 165. Ферромагнитный усилитель мощности

В ряде случаев желательно управлять интенсивностью процесса в одной цепи путем изменения интенсивности процесса в другой цепи. Такое управление представляет интерес, когда интенсивность процесса в управляемой — рабочей — цепи значительно превосходит интенсивность процесса в управляющей цепи.

Когда рабочая цепь питается переменным током, а управление осуществляется при помощи постоянного тока, в качестве управляющего устройства можно воспользоваться катушкой с ферромагнитным сердечником, имеющей две обмотки, одна из которых вклю-

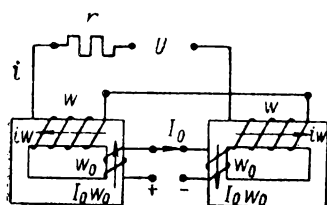


Рис. 333

чается в рабочую цепь последовательно с приемником, а вторая — в управляющую цепь, питаемую постоянным током. При изменении тока в управляющей цепи будет изменяться степень насыщения сердечника катушки, а следовательно, и ее сопротивление переменному току в рабочей цепи. При неизменном напряжении на зажимах рабочей цепи изменение сопротивления катушки повлечет за собой изменение тока и мощности, отдаваемой приемнику. Так как при надлежащей конструкции сердечника и обмоток катушки возможно осуществить управление мощностью в рабочей цепи при значительно меньшей мощности в управляющей цепи, то описанное устройство получило наименование *ферромагнитного усилителя мощности*.

Как указано выше (§ 159), катушка с ферромагнитным сердечником при наличии в управляющей цепи постоянного тока  $I_0$  по отношению к переменному току  $i$  является несимметричным нелинейным элементом. Поэтому кривая тока  $i$  в рабочей цепи будет содержать четные гармоники. Для устранения четных гармоник в этой кривой ферромагнитный усилитель составляют из двух одинаковых катушек, рабочие обмотки которых включают последовательно (рис. 333) или параллельно, а управляющие обмотки соединяют таким образом, что когда в сердечнике одной катушки м. д. с. обеих обмоток направлены одинаково, в сердечнике другой катушки эти м. д. с. направлены навстречу друг другу. Тогда несимметрия ферромагнитного усилителя будет устранена, и четных гармоник в кривой рабочего тока не возникнет. Кроме того, при указанном включении обмоток катушек э. д. с., индуцируемые в управляющих обмотках потоками, связанными с током в рабочей цепи, взаимно компенсируются, так как они направлены друг против друга. Схема рис. 333 отличается от схемы описанного нами в предыдущем параграфе ферромагнитного удвоителя частоты только отсутствием вторичных обмоток переменного тока, и поэтому основные электро-

магнитные процессы в таком ферромагнитном усилителе и в упомянутом удвоителе частоты одинаковы.

Основной зависимостью, определяющей свойства усилителя мощности, является зависимость между мощностью  $P$ , отдаваемой приемнику, и мощностью  $P_0$ , затрачиваемой в управляющей цепи. Так как  $P = I^2 r$ , а  $P_0 = I_0^2 r_0$ , где  $r$  — сопротивление приемника, а  $r_0$  — сопротивление управляющей цепи, то для определения этой зависимости достаточно найти зависимость между  $I$  и  $I_0$ .

Изобразим в прямоугольных координатах семейство характеристик магнитного усилителя, дающих связь между напряжением  $U_L$  на зажимах рабочей обмотки усилителя и током  $I$  в этой обмотке при различных значениях тока  $I_0$  в управляющей обмотке. При этом для упрощения дальнейших построений по оси абсцисс будем откладывать величину  $I$ , пропорциональную току  $I$  и равную напряжению на зажимах приемника (рис. 334). Верхняя характеристика соответствует  $I_0 = 0$ , а последующие характеристики по мере увеличения тока  $I_0$  располагаются все ниже, так как с возрастанием тока  $I_0$

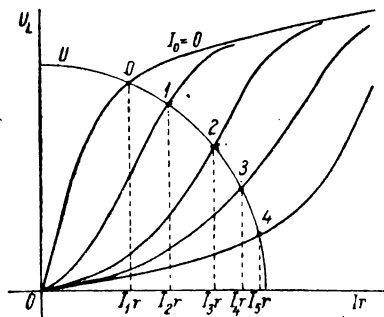


Рис. 334

увеличивается степень насыщения сердечников, что влечет за собой уменьшение средней за период магнитной проницаемости, а следовательно, и уменьшение индуктивности обмоток усилителя. При больших значениях тока  $I$  все эти характеристики приближаются к характеристике, соответствующей  $I_0 = 0$ , так как с возрастанием переменной м. д. с. рабочей обмотки влияние постоянной м. д. с. управляющей обмотки сказывается все меньше и меньше.

Полагая, что напряжение  $U_L$  на зажимах усилителя можно рассматривать как реактивное напряжение, и пренебрегая высшими гармониками, имеем:

$$U_L^2 + (Ir)^2 = U^2,$$

где  $U$  — напряжение на зажимах цепи переменного тока. Это уравнение представляет собою окружность с центром в начале координат и с радиусом, равным  $U$ . Точки пересечения этой окружности с семейством характеристик  $U_L = F(Ir)$  дают возможность найти при заданном напряжении  $U$  зависимость тока  $I$  от  $I_0$ , а затем и зависимость  $P$  от  $P_0$ .

Ферромагнитный усилитель можно использовать и в тех случаях, когда управление осуществляется переменным током, частота которого значительно меньше частоты тока в рабочей цепи. В частности, одно из первых применений ферромагнитного усилителя за-



ключалось в использовании его для модуляции колебаний, создаваемых машиной высокой частоты.

То обстоятельство, что переменный ток  $I$  в рабочей цепи усилителя зависит от подмагничивающего постоянного тока  $I_0$ , в последнее время используют для измерения больших постоянных токов, подбирая параметры схемы рис. 333 таким образом, чтобы токи  $I$  и  $I_0$  были пропорциональны друг другу и чтобы некоторые колебания величины напряжения и частоты в сети переменного тока не влияли на отношение этих токов.

### § 166. Конденсаторы с нелинейной характеристикой в цепи переменного тока

Конденсаторы с сегнетоэлектриками, имеющие нелинейную характеристику  $q = F(u)$ , так же как и реактивные катушки с ферромагнитными сердечниками могут быть использованы для осуществления цепей переменного тока с особыми свойствами.

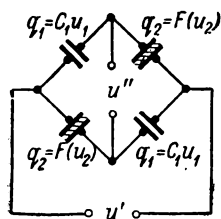


Рис. 335

Рассмотрим в виде примера мостовую схему (рис. 335), в которой в двух плечах включены одинаковые конденсаторы с постоянной емкостью  $C_1$ , т. е. имеющие одинаковые линейные характеристики  $q_1 = C_1 u_1$ , а в двух других плечах включены конденсаторы с одинаковыми нелинейными характеристиками  $q_2 = F(u_2)$ .

Если к одной из диагоналей моста подвести синусоидальное напряжение  $u' = U'_m \sin \omega t$ , то ток в плечах моста будет содержать нечетные высшие гармоники и, соответственно, нечетные высшие гармоники будут содержаться в кривых напряжений  $u_1$  и  $u_2$ . Будем иметь:

$$u_1 = U'_{1m} \sin(\omega t + \psi'_1) + U'_{3m} \sin(3\omega t + \psi'_3) + U'_{5m} \sin(5\omega t + \psi'_5) + \dots$$

$$u_2 = U''_{1m} \sin(\omega t + \psi''_1) - U''_{3m} \sin(3\omega t + \psi''_3) - U''_{5m} \sin(5\omega t + \psi''_5) - \dots$$

Все высшие гармоники в кривой  $u_1$  должны быть равны и противоположны соответствующим высшим гармоникам в кривой  $u_2$ , так как сумма  $u_1 + u_2 = u' = U'_m \sin \omega t$  не содержит высших гармоник.

При изменении амплитуды  $U'_m$  приложенного напряжения изменяется ток в конденсаторах, а следовательно, изменяется соотношение между первыми гармониками напряжений  $u_1$  и  $u_2$ , так как только один из последовательно включенных конденсаторов обладает нелинейной характеристикой. При этом изменяются также и величины высших гармонических. При надлежащем подборе параметров конденсаторов можно добиться того, чтобы при некотором значении  $U'_m$  величины  $U'_{1m} \sin(\omega t + \psi'_1)$  и  $U''_{1m} \sin(\omega t + \psi''_1)$  были практически равны друг другу. Точное их равенство не удастся

получить из-за наличия углов  $\psi'_1$  и  $\psi''_1$ , которые появляются вследствие наличия потерь в конденсаторе с сегнетоэлектриками. Эти углы можно компенсировать, включив в другие плечи моста последова-

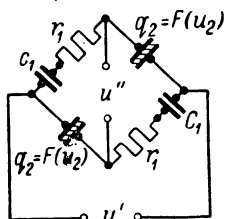


Рис. 336

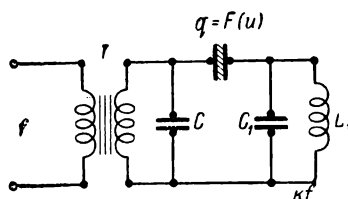


Рис. 337

тельно с конденсаторами  $C_1$  сопротивления  $r_1$  (рис. 336). Добившись равенства первых гармоник напряжений  $u_1$  и  $u_2$  получаем во второй диагонали моста напряжение  $u''$ , содержащее только высшие гармоники:

$$u'' = u_1 - u_2 = 2U_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + 2U_{5m} \sin(5\omega t + \psi_5) + \dots,$$

причем третья гармоника резко выделяется из всех остальных. Таким образом, рассмотренное простое устройство может служить утроителем частоты.

Можно осуществить схемы для выделения гармоник высокого порядка. Например, с помощью изображенной на рис. 337 схемы представляется возможным выделить в контуре  $L_1 C_1$  гармоники порядка  $k = 21$  с достаточной амплитудой, настраивая этот контур в резонанс с этой гармоникой. Конденсатор  $C$  служит в этой схеме для того, чтобы дать путь высшим гармоникам, помимо обмотки трансформатора  $T$ . Нелинейный конденсатор в опытах, произведенных с такой схемой, имел в качестве диэлектрика титанат бария.

Схема на рис. 336 в некотором диапазоне изменения напряжения  $U'$  работает как стабилизатор напряжения — действующее значение напряжения  $U''$  на выходе при этом мало изменяется при значительном изменении напряжения  $U'$  на входе.

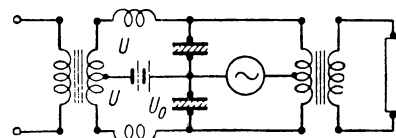
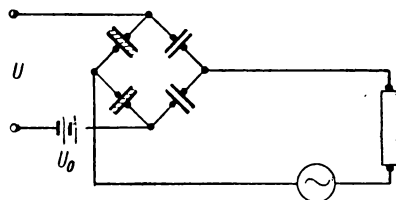
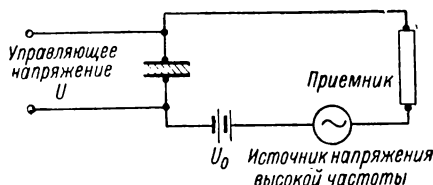


Рис. 338

Можно осуществить усилитель с конденсаторами из сегнетоэлектриков наподобие ферромагнитным усилителям мощности. Если приложить к конденсатору медленно изменяющееся напряжение  $u_0$ , то для дополнительного переменного напряжения высокой частоты динамическая емкость и, соответственно, емкостное сопротивление конденсатора будет зависеть от величины  $u_0$ . Изменяя  $u_0$  с низкой частотой, можно влиять на процессы в цепи высокой частоты, вызывая в ней значительное изменение мощности при весьма малой затрате энергии в цепи низкой частоты. Практически величина  $u_0$  складывается из постоянного напряжения  $U_0$  и управляющего напряжения  $U$  сравнительно низкой, например звуковой, частоты.

Энергия в цепи высокой частоты вырабатывается включенным в эту цепь источником переменного напряжения высокой частоты, например, ламповым генератором. На рис. 338 приведены три простые схемы включения диэлектрических усилителей с конденсаторами, обладающими нелинейными характеристиками. В качестве диэлектрика в таких конденсаторах могут быть использованы титанат бария, а также некоторые сочетания титанатов стронция и бария и цирконатов бария со свинцом. В зависимости от состава диэлектрика получается различная зависимость диэлектрической проницаемости от температуры. Диэлектрический усилитель обладает рядом достоинств: большой прочностью, высоким коэффициентом усиления, малыми размерами, высоким входным сопротивлением, отсутствием необходимости затрачивать время на разогрев, так как в нем нет нитей накала, имеющих в ламповых усилителях. К недостаткам его относится нестабильность коэффициента усиления при изменении температуры, что требует осуществления специальной компенсации, значительные потери, необходимость для питания источника высокой частоты.

---

---

## ГЛАВА ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ

### ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

#### § 167. Методы расчета переходных процессов в нелинейных электрических цепях

Расчет переходных процессов в нелинейных электрических цепях связан со значительными трудностями, так как процессы в этих цепях описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. Практически приходится прибегать или к *графическим методам* решения или к тем или иным *приближенным аналитическим методам*.

Среди последних отметим прежде всего *метод приближенного аналитического выражения характеристик нелинейных элементов* цепи и интегрирования уравнений цепи, в которые вводятся принятые аналитические выражения характеристик. Успех здесь в значительной мере зависит от удачного выбора формул для приближенного аналитического выражения характеристик.

Если невозможно подобрать простое аналитическое выражение для всей характеристики, то можно ее разделить на участки, для которых удастся подобрать простые аналитические выражения, в частности, можно заменить всю характеристику ломаной линией, состоящей из отрезков прямых. Последний прием можно назвать *методом кусочно-линейного выражения характеристик нелинейных элементов*. При использовании этого метода изменения токов и напряжений в пределах каждого прямолинейного участка характеристик описываются линейными уравнениями. Значения токов в индуктивных ветвях и напряжений на конденсаторах в начале каждого последующего участка должны быть равны их значениям в конце предыдущего участка. Отсюда определяются постоянные интегрирования.

Наиболее общим, но и наиболее трудоемким является *метод последовательных интервалов*. Согласно этому методу весь интервал времени, в течение которого рассматривается переходный процесс, разбивается на достаточно малые равные друг другу интервалы времени  $\Delta t$ . Соответственно, дифференциалы всех величин в уравнениях заменяются конечными приращениями этих величин за промежуток времени  $\Delta t$ . Получив значение в конце какого-либо интервала времени одной из двух величин, связанных между собой

нелинейной зависимостью, находят вторую из этих величин, пользуясь заданной графически нелинейной характеристикой. Эти значения величин принимаются как начальные в следующем интервале времени.

Для численного решения нелинейных уравнений, описывающих процессы в нелинейных электрических цепях, в последнее время широко применяют счетно-решающие машины, собранные из электрических или электромеханических элементов.

В следующих параграфах показано применение некоторых графических и аналитических методов расчета нелинейных электрических цепей на простейших примерах.

### § 168. Замыкание накоротко катушки с ферромагнитным сердечником

Рассмотрим случай замыкания накоротко катушки с ферромагнитным сердечником (рис. 339). Проведем рассмотрение сначала *методом графического интегрирования*. Этот метод ценен

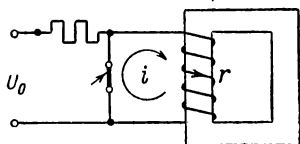


Рис. 339

тем, что при нем используется действительная характеристика катушки без замены ее какой-либо другой близкой к ней характеристикой. В этом отношении метод графического интегрирования является наиболее точным. Однако, в противоположность аналитическому методу, основанному на аналитическом выражении характеристики, он не дает

общих связей, позволяющих судить о том, как изменяется процесс при изменении того или иного параметра. С некоторой неточностью, присущей всяким графическим построениям, в данном случае приходится мириться, так как и при аналитических методах решения нелинейных задач получаются только приближенные результаты вследствие необходимости при использовании аналитических методов принимать те или иные допущения.

Кроме того, отметим, что, исследуя переходные процессы в катушке с ферромагнитным сердечником любым методом, мы не будем учитывать вихревых токов в сердечнике.

Уравнение, описывающее процесс короткого замыкания катушки, имеет вид:

$$\frac{d\Psi}{dt} + ri = 0,$$

где  $\Psi = F(i)$  — потокосцепление с обмоткой катушки, нелинейно зависящее от тока  $i$ ;  $r$  — сопротивление обмотки.

Имеем:

$$dt = -\frac{d\Psi}{ri},$$

откуда

$$t = - \int_{\Psi_0}^{\Psi} \frac{d\Psi}{ri} = \int_{\Psi}^{\Psi_0} \frac{d\Psi}{ri},$$

причем  $\Psi_0$  — значение потокосцепления в момент замыкания катушки  $t = 0$ .

На рис. 340 изображены кривые намагничивания конкретной катушки (рис. 341) с замкнутым сердечником из листовой трансфор-

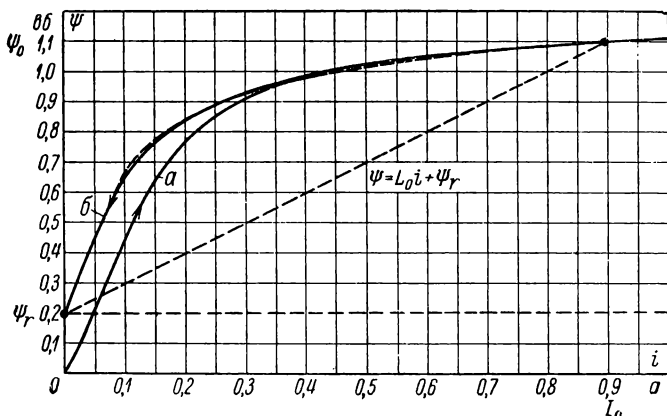


Рис. 340

маторной стали. Кривая *a* представляет собой первоначальную кривую намагничивания, кривая *б* — нисходящую ветвь при убывании потокосцепления от  $\Psi_0$  до остаточного значения  $\Psi_r = 0,2$  вб. Пусть  $\Psi_0 = 1,1$  вб, чему соответствует ток  $I_0 = 0,9$  а. Сопротивление обмотки рассматриваемой катушки равно  $r = 8,5$  ом.

Пользуясь кривой *б* на рис. 340, строим изображенную на рис. 342 кривую  $\frac{1}{ri} = \varphi(\Psi)$ , располагая которой легко можно найти зависимость  $\Psi$  от  $t$ . Действительно, согласно последнему выражению, время  $t$  от момента замыкания, в течение которого потокосцепление изменяется от  $\Psi_0$  до  $\Psi$ , определяется заштрихованной на рис. 342 площадью.

На рис. 343 построена полученная таким образом кривая  $\Psi(t)$  для рассматриваемой катушки, а также кривая  $i(t)$ . Для построения последней значения  $i$  находятся по кривой *б* рис. 340 соответственно каждому значению  $\Psi$ . Здесь же для сравнения изображены пунктиром кривые  $\Psi(t)$  и  $i(t)$ , которые имели бы место при постоянной индуктивности  $L_0 = \frac{\Psi_0 - \Psi_r}{I_0} = \frac{1,1 - 0,2}{0,9} = 1$  гн, т. е. если бы по-

токосцепление убывало от  $\Psi_0$  до  $\Psi_r$  в зависимости от тока  $i$  по линейному закону  $\Psi - \Psi_r = L_0 i$ , чему соответствует пунктирная прямая на рис. 340. Уравнения пунктирных кривых на рис. 343 имеют вид:  $i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau_0}}$ ,  $\Psi = (\Psi_0 - \Psi_r) e^{-\frac{t}{\tau_0}} + \Psi_r$ , где  $\tau_0 = \frac{L_0}{r} = \frac{1}{8,5} = 0,118$  сек. На рис. 343 обозначено:  $\Psi_0 - \Psi_r = \psi_0$ .

Интересно обратить внимание, что вследствие нелинейности связи  $\Psi = F(i)$ , изображенной на рис. 340 (кривая б), ток вначале

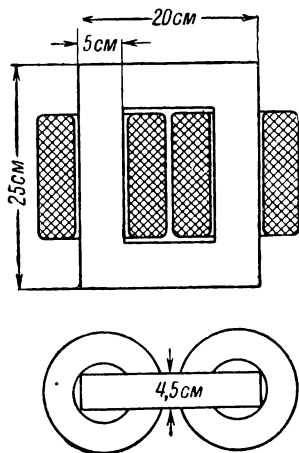


Рис. 341

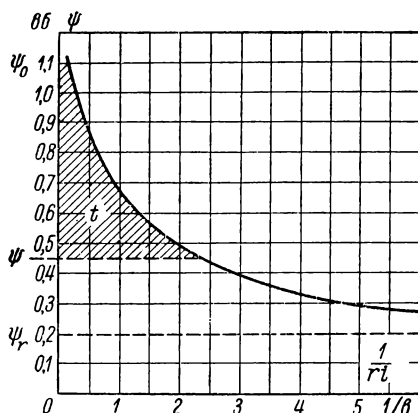


Рис. 342

уменьшается быстрее, а поток медленнее, чем при линейной зависимости между ними. Это можно пояснить следующим образом. Основное уравнение можно записать в виде:

$$L_0 \frac{di}{dt} + ri = 0,$$

где  $L_0 = \frac{d\Psi}{di} = \varphi(i)$  — динамическая индуктивность. Так как в начальный момент  $L_0 < L_0$  (рис. 340), то ток согласно последнему уравнению вначале падает быстрее, чем при  $L = L_0 = \text{const}$ . Так как в те же моменты времени  $t$  ток  $i$  оказывается меньшим, то меньшей получается и э. д. с.  $-\frac{d\Psi}{dt} = ri$ , т. е. потокосцепление убывает медленнее, чем при  $L = L_0 = \text{const}$ . Из основного уравнения имеем:

$$d\Psi = -ri dt = -r dq, \quad \Delta\Psi = -r \Delta q,$$

где  $\Delta\Psi$  — убыль потокосцепления;  $\Delta q$  — электрический заряд, перенесенный сквозь поперечное сечение цепи за промежуток вре-

мени от 0 до  $t$ . Величина  $\Delta q$  определяется площадью, заштрихованной на рис. 343; она меньше, чем при  $L = L_0 = \text{const}$ . Соответственно меньше получается и  $\Delta\Psi$ .

Так как величина  $q = \int_0^{\infty} i dt = \frac{\Psi_0 - \Psi_r}{r}$  в обоих случаях должна быть одной и той же, то кривая  $i(t)$  пересекается в некоторый момент времени с экспонентной  $I_0 e^{-\frac{t}{\tau_0}}$ . Замедление спада тока при больших значениях  $t$  связано с большой динамической индуктивностью на крутой части кривой намагничивания.

Исследуем теперь эту же задачу, выразив приближенно кривую намагничивания (кривую б на рис. 340) аналитически в виде:

$$i = a'(\Psi - \Psi_r) + b'(\Psi - \Psi_r)^{n+1}. \quad (*)$$

Для краткости записи обозначим:

$$\Psi - \Psi_r = \psi; \quad \Psi_0 - \Psi_r = \psi_0; \quad \frac{\Psi - \Psi_r}{\Psi_0 - \Psi_r} = \frac{\psi}{\psi_0} = x.$$

При этом уравнение кривой, замещающей кривую намагничивания, запишется в виде:

$$i = ax + bx^{n+1}, \quad (**)$$

где  $a = a'\psi_0$  и  $b = b'\psi_0^{n+1}$  измеряются в амперах. Сделав еще подстановку  $x = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} y$ , приведем уравнение к виду:

$$i = a \sqrt[n]{\frac{a}{b}} y + a \sqrt[n]{\frac{a}{b}} y^{n+1} = Ay(1 + y^n), \quad \text{где } A = a \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Дифференциальное уравнение

$$\frac{d\Psi}{dt} + ri = 0,$$

описывающее процесс в цепи, соответственно принимает вид:

$$\frac{d\Psi}{dt} + rAy(1 + y^n) = 0,$$

или, так как  $\psi = x\psi_0 = \psi_0 \sqrt[n]{\frac{a}{b}} y = \psi_0 \frac{A}{a} y$ , то имеем:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{ar}{\psi_0} y(1 + y^n) = 0,$$

откуда

$$-\frac{dy}{y(1 + y^n)} = \frac{ar}{\psi_0} dt. \quad (***)$$



Это уравнение легко интегрируется, так как

$$-\int \frac{dy}{y(1+y^n)} = \frac{1}{n} \ln(1+y^{-n}) + C,$$

что легко проверить дифференцированием.

При изменении времени от 0 до  $t$  потокоцепление изменяется от  $\Psi_0$  до  $\Psi$ . Соответственно,  $x$  изменяется от 1 до  $x = \frac{\psi}{\psi_0} = \frac{\Psi - \Psi_r}{\Psi_0 - \Psi_r}$ ,

а  $y$  изменяется от  $\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$  до  $\sqrt[n]{\frac{b}{a}} x$ .

Интегрируя в этих пределах уравнение (\*\*), получаем:

$$\frac{1}{n} \left| \ln(1+y^{-n}) \right|_{\sqrt[n]{\frac{b}{a}}}^{\sqrt[n]{\frac{b}{a}} \frac{\psi}{\psi_0}} = \frac{ar}{\psi_0} t,$$

или

$$\ln \left\{ \frac{1 + \frac{a}{b} \left( \frac{\psi}{\psi_0} \right)^{-n}}{1 + \frac{a}{b}} \right\} = n \frac{ar}{\psi_0} t.$$

Следовательно:

$$\frac{a}{b} \left( \frac{\psi}{\psi_0} \right)^{-n} = \left( 1 + \frac{a}{b} \right) e^{\frac{nar}{\psi_0} t} - 1$$

и окончательно

$$\psi = \frac{\psi_0}{\sqrt[n]{\left( 1 + \frac{b}{a} \right) e^{\frac{nar}{\psi_0} t} - \frac{b}{a}}} . \quad (****)$$

Зависимость  $\Psi = F(i)$  для рассматриваемой катушки (кривая  $b$  на рис. 340) хорошо удовлетворяется, если положить в уравнении (\*):  $n = 6$ ,  $a' = 0,21 \text{ а/вб}$  и  $b' = 1,45 \text{ а/вб}^7$ , т. е. если выразить кривую  $b$  на рис. 340 уравнением:

$$i = 0,21\psi + 1,45\psi^7.$$

Кривая замещения, соответствующая этому уравнению, изображена на рис. 340 пунктиром. При этих числовых значениях коэффициентов имеем:

$$\psi_0 = \Psi_0 - \Psi_r = 0,9 \text{ вб}; \quad \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \psi_0^n = \frac{1,45}{0,21} \cdot 0,9^6 = 3,67;$$

$$\frac{nar}{\psi_0} = na'r = 6 \cdot 0,21 \cdot 8,5 = 10,7 \frac{1}{\text{сек}}.$$

Искомое решение имеет вид:

$$\psi = \frac{0,9}{\sqrt[6]{4,67e^{10,7t} - 3,67}} \text{ вб.}$$

На рис. 343 нанесены на кривой  $\Psi(t)$  кружками точки, вычисленные по этому уравнению. Точки отлично ложатся на кривую  $\Psi(t)$ , вычисленную графически, что объясняется хорошим совпадением кривой, выражаемой уравнением  $i = 0,21\psi + 1,45\psi^7$  с действительной нисходящей кривой намагничивания  $\Psi = F(i)$ , т. е. удачным подбором аналитического выражения последней.

Достоинство аналитического метода заключается в том, что найденное общее выражение (\*\*\*\*) для потокосцепления  $\psi = \Psi - \Psi_r$  дает возможность рассмотреть влияние на ход кривой  $\Psi(t)$  различных параметров:  $b$ ,  $a$ ,  $n$ ,  $r$ ,  $\Psi_0$ ,  $\Psi_r$ .

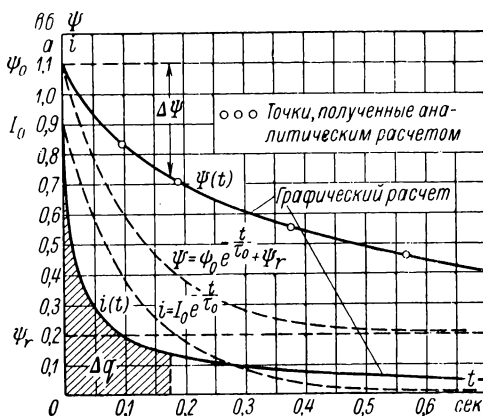


Рис. 343

## § 169. Включение катушки с ферромагнитным сердечником под действие постоянного напряжения

Исследуем процесс включения катушки с ферромагнитным сердечником под действие постоянного напряжения  $U_0$  (рис. 344)

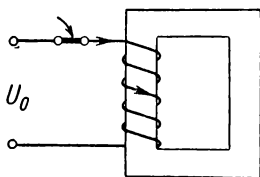


Рис. 344

Общий метод проиллюстрируем на примере той же конкретной катушки, которая рассматривалась в предыдущем параграфе. Предположим, что перед включением сердечник был размагничен. В таком случае связь  $\Psi = F(i)$  будет характеризоваться первоначальной кривой намагничивания (кривая  $a$  на рис. 340).

Расчет произведем сначала методом графического интегрирования, а затем методом последовательных интервалов. Влиянием вихревых токов в сердечнике пренебрежем.

Дифференциальное уравнение теперь имеет вид:

$$\frac{d\Psi}{dt} + ri = U_0,$$

откуда имеем:

$$\int_0^{\Psi} \frac{d\Psi}{U_0 - ri} = \int_0^t dt = t.$$

Пользуясь известной зависимостью  $\Psi = F(i)$  (кривая  $a$  на рис. 340), строим кривую  $\Psi = \varphi\left(\frac{1}{U_0 - ri}\right)$ . Заштрихованная на рис. 345 площадь дает в соответствующем масштабе время  $t$ , в те-

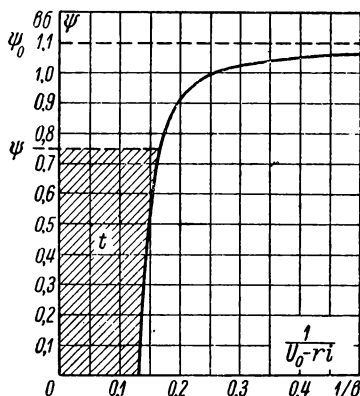


Рис. 345

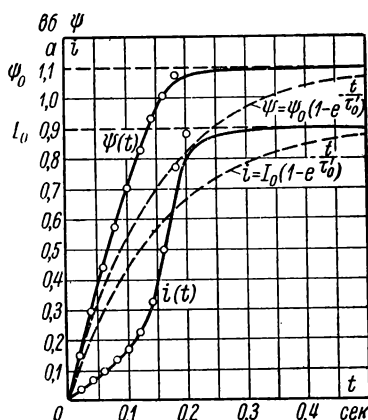


Рис. 346

чение которого потокосцепление увеличивается от 0 до  $\Psi$ , т. е. позволяет найти зависимость  $\Psi(t)$ .

Напряжение  $U_0$  выберем так, чтобы установившийся ток  $I_0$ , как и в предыдущем примере, был равен  $0,9$  а, т. е. примем

$$U_0 = I_0 r = 0,9 \cdot 8,5 = 7,65 \text{ в.}$$

На рис. 346 изображена рассчитанная таким путем кривая  $\Psi(t)$ , а также кривая  $i(t)$ . Для построения последней значения  $i$  для каждого момента времени берутся из кривой  $\Psi(i)$  на рис. 340, соответственно найденным значениям  $\Psi$  для этих моментов времени.

Здесь же на рис. 346 пунктиром изображены кривые  $\Psi = \Psi_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}}\right)$

и  $i = I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}}\right)$ , которые имели бы место при линейной связи потокосцепления и тока  $\Psi = L'_0 i$ , где  $L'_0 = \frac{\Psi_0}{I_0} = \frac{1,1}{0,9} = 1,22 \text{ гн}$ , причем  $\tau'_0 = \frac{L'_0}{r} = \frac{1,22}{8,5} = 0,144 \text{ сек}$ .

Ход кривой  $i(t)$  можно, как и в предыдущем примере, пояснить, написав уравнение в виде:

$$L_{\partial} \frac{di}{dt} + ri = U_0.$$

Вначале  $L_{\partial} > L'_0$ , и ток нарастает медленней, чем при  $L = L'_0 = \text{const}$ . При больших токах  $L_{\partial} < L'_0$ , и ток растет быстрее, чем при  $L = L'_0 = \text{const}$ . Кривые  $i(t)$  и  $i = I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}}\right)$  должны в некоторый момент времени пересечься. Действительно, независимо от закона изменения тока во времени, имеем:

$$d\Psi = (U_0 - ri) dt,$$

и так как  $U_0 = I_0 r$ , то

$$\int_0^{\Psi_0} (I_0 - i) dt = \frac{1}{r} \int_0^{\Psi_0} d\Psi = \frac{\Psi_0}{r},$$

т. е. площадь на рис. 346, ограниченная кривой  $i(t)$ , или  $i = I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}}\right)$  осью ординат и горизонтальной линией  $I_0$ , не зависит от закона изменения тока во времени.

Потокоцепление возрастает значительно быстрее, чем при  $L = L'_0 = \text{const}$ , и практически к моменту времени  $t \approx 0,25$  сек. принимает свое установившееся значение  $\Psi_0$ .

Можно было бы получить результат аналитическим путем, подобрав аналитическое выражение для кривой намагничивания (кривая  $a$  на рис. 340), аналогично тому, как это было сделано для случая короткого замыкания катушки. Новым и осложняющим решение является теперь наличие в уравнении постоянного члена ( $U_0 \neq 0$ ). Ограничимся только указанием возможного общего пути такого решения, так как он относится к любым нелинейным уравнениям первого порядка, описывающим процесс в той или иной электрической цепи при постоянном напряжении на ее зажимах.

Выразим  $i = F(\Psi)$  в виде ряда:

$$i = a_0 + a_1 \Psi + a_2 \Psi^2 + \dots + a_k \Psi^k + \dots = \sum_{k=0}^n a_k \Psi^k.$$

В частном случае кривой  $a$  на рис. 340  $a_0 = 0$ , но вообще это необязательно. Имеем для рассматриваемого примера:

$$U_0 - ri = U_0 - r \sum_{k=0}^n a_k \Psi^k = G(\Psi).$$

Уравнение цепи  $\frac{d\Psi}{dt} + r i = U_0$  можно написать в виде:

$$\frac{d\Psi}{G(\Psi)} = dt \quad \text{или} \quad \int_{\Psi_0}^{\Psi} \frac{d\Psi}{G(\Psi)} = t - t_0,$$

где  $\Psi_0$  — значение  $\Psi$  при  $t = t_0$ .

Если полином  $G(\Psi)$  не имеет кратных корней, то, разлагая  $\frac{1}{G(\Psi)}$  на простые дроби, будем иметь:

$$\int_{\Psi_0}^{\Psi} \frac{d\Psi}{G(\Psi)} = \sum_{s=1}^{s=n} \int_{\Psi_0}^{\Psi} \frac{A_s d\Psi}{(\Psi - \Psi_s)} = \sum_{s=1}^{s=n} A_s \ln \frac{\Psi - \Psi_s}{\Psi_0 - \Psi_s},$$

где  $\Psi_s$  — корни уравнения  $G(\Psi) = 0$ , а постоянные  $A_s$  определяются следующим образом:

$$A_s = \frac{1}{G'(\Psi_s)} \quad \text{и} \quad G'(\Psi_s) = \left( \frac{dG(\Psi)}{d\Psi} \right)_{\Psi = \Psi_s}.$$

Задаваясь значениями  $\Psi$ , нетрудно найти соответствующие им значения  $t$ .

Чем больше членов мы возьмем в выражении  $i = \sum_{k=0}^n a_k \Psi^k$ ,

тем точнее удастся представить аналитически заданную нелинейную характеристику элемента цепи, но тем более громоздким оказывается решение. При этом основная трудность заключается в отыскании корней уравнения  $G(\Psi) = 0$  при высоком его порядке. Избежать случая кратных корней всегда возможно, так как выражение  $i = \sum a_k \Psi^k$  мы выбираем сами. Изложенное ценно тем, что дает общую методику решения подобных задач.

В конкретных случаях оказывается часто более целесообразным выразить  $i = F(\Psi)$  не в виде ряда, а с помощью той или иной подходящей элементарной функции, которая позволяет сравнительно

просто взять интеграл  $\int_{\Psi_0}^{\Psi} \frac{d\Psi}{G(\Psi)}$ .

Для демонстрации метода последовательных интервалов произведем расчет этим методом рассматриваемой в настоящем параграфе задачи.

Разобьем промежуток времени, в течение которого рассматривается процесс, на достаточное большое число малых и равных друг другу интервалов  $\Delta t$ . Для оценки выбора величины  $\Delta t$  можно подсчитать по известным конечным значениям  $\Psi_0$  и  $I_0$  постоянную

времени  $\tau'_0 = \frac{L'_0}{r} = \frac{\Psi_0}{I_0 r}$ , которая характеризовала бы процесс при  $L = L'_0 = \text{const}$ . В данном случае  $\tau'_0 = \frac{1,1}{0,9 \cdot 8,5} = 0,144$  сек. Выберем соответственно  $\Delta t = 0,01$  сек.

Пусть  $k$  — порядковый номер интервала. Будем приписывать всем величинам индекс  $k$  соответственно их значению в конце  $k$ -того интервала. Тогда их значения в начале  $k$ -того интервала, равные их значениям в конце предыдущего интервала, будут иметь индексы  $k-1$ .

Дифференциальное уравнение цепи

$$\frac{d\Psi}{dt} = U_0 - ri$$

приближенно запишем в виде:

$$(\Delta\Psi)_k = \Psi_k - \Psi_{k-1} \approx (U_0 - ri_{k-1}) \Delta t.$$

В начале первого интервала  $k = 1$ , т. е. при  $t = 0$ , имеем:

$$\Psi_{k-1} = \Psi_0 = 0; \quad i_{k-1} = i_0 = 0.$$

Следовательно, для первого интервала

$$(\Delta\Psi)_1 = \Psi_1 = U_0 \Delta t.$$

Ток  $i_1$  находим из кривой намагничивания (кривая  $a$  на рис. 340) по найденному значению  $\Psi_1$ .

Приращение потокосцепления во втором интервале равно:

$$(\Delta\Psi)_2 = \Psi_2 - \Psi_1 = (U_0 - ri_1) \Delta t.$$

Отсюда находим  $\Psi_2 = \Psi_1 + (\Delta\Psi)_2$  и по нему из графика ток  $i_2$  и т. д.

В таблице дан расчет для рассматриваемого нами конкретного примера. Момент времени  $t_k$  к концу интервала очевидно равен  $k\Delta t$ .

$k$	$t_k$	$U_0 - ri_{k-1}$	$(\Delta\Psi)_k$	$\Psi_k$	$i_k$
1	0,01	7,65	0,0765	0,076	0,020
2	0,02	7,48	0,0748	0,151	0,036
3	0,03	7,34	0,0734	0,224	0,050
4	0,04	7,23	0,0723	0,296	0,067
5	0,05	7,08	0,0708	0,367	0,080
6	0,06	6,97	0,0697	0,437	0,100
7	0,07	6,80	0,0680	0,505	0,115
8	0,08	6,67	0,0667	0,572	0,130
9	0,09	6,55	0,0655	0,637	0,150
10	0,10	6,38	0,0638	0,701	0,170
11	0,11	6,21	0,0621	0,763	0,200
12	0,12	5,95	0,0595	0,822	0,230
13	0,13	5,70	0,0570	0,879	0,270
14	0,14	5,36	0,0536	0,933	0,325
15	0,15	4,90	0,0490	0,982	0,415
16	0,16	4,13	0,0413	1,023	0,500
17	0,17	3,40	0,0340	1,057	0,605
18	0,18	2,50	0,0250	1,082	0,780
19	0,19	1,03	0,0103	1,092	0,850
20	0,20	0,45	0,0045	1,096	~0,9

На рис. 346 обведены кружками точки из таблицы. Эти точки хорошо ложатся на кривые, полученные методом графического интегрирования.

Метод последовательных интервалов в принципиальном отношении должен обеспечить тем большую точность, чем мельче выбрать интервалы  $\Delta t$ . Однако при этом увеличивается количество вычислений, каждое из которых производится с определенной степенью точности. Может оказаться, что ошибки будут наращиваться, так как ошибка, допущенная при вычислении величины в каком-нибудь интервале, отражается на значениях этих величин во всех последующих интервалах.

### § 170. Включение катушки с ферромагнитным сердечником под синусоидальное напряжение

Рассмотрим включение катушки с ферромагнитным сердечником под синусоидальное напряжение. Этот случай соответствует часто встречающемуся на практике включению ненагруженного трансформатора. Имеем:

$$\frac{d\Psi}{dt} + ri = U_m \sin(\omega t + \psi),$$

где  $\Psi$  — потокосцепление с обмоткой катушки или трансформатора, а  $r$  — сопротивление этой обмотки. Так как при наличии сердечника  $\Psi$  и  $i$  связаны сложной зависимостью, то приходится ограничиться приближенным решением.

Представим  $ri$  в виде  $\frac{r\Psi}{L}$ , где  $L = \frac{\Psi}{i}$  — статическая индуктивность цепи, являющаяся функцией потокосцепления  $\Psi$ . Тогда дифференциальное уравнение примет вид:

$$\frac{d\Psi}{dt} + \frac{r}{L} \Psi = U_m \sin(\omega t + \psi).$$

Так как в случае реактивной катушки второй член левой части уравнения количественно играет обычно значительно менее существенную роль, чем первый член, то, решая последнее уравнение, можно положить, что  $L$  не зависит от потока и является величиной постоянной. При этом предположении коэффициенты уравнения будут постоянны, и оно легко решается, что и было показано в § 111 для аналогичного уравнения. Наиболее опасным является случай включения в момент, когда установившийся поток должен проходить через свое наибольшее по абсолютной величине значение. Тогда, полагая, что  $\Psi(0) = 0$  получим:

$$\Psi(t) = -\Psi_m \cos \omega t + Ae^{-\frac{r}{L}t} = -\Psi_m \cos \omega t + \Psi_m e^{-\frac{r}{L}t},$$

откуда следует, что при малом значении  $r/L$  потокосцепление в конце первого полупериода почти в два раза превышает амплитуду

потокосцепления при установившемся режиме (рис. 347). С течением

времени член  $\Psi_m e^{-\frac{r}{L}t}$  затухает, стремясь к нулю, причем это затухание происходит тем быстрее, чем больше  $r/L$ . Так как наибольшая опасность получается при малых значениях  $r/L$ , то, вводя предположение  $L = \text{const}$ , следует принимать для  $L$  наибольшее возможное значение, определяемое по кривой  $\Psi = F(i)$ .

Найдя кривую изменения потокосцепления с течением времени, при помощи кривой  $\Psi = F(i)$  (рис. 348) можно построить соответствующую зависимость тока  $i$  от времени (рис. 349). Так как в современных трансформаторах максимальное значение потока при нормальном режиме работы лежит за коленом кривой намагничивания, то повышение потока во время переходных режимов до двойного максимального значения связано с резким увеличением тока в цепи, как это следует из кривой  $\Psi = F(i)$ . Еще более неблагоприятны условия включения при наличии потока

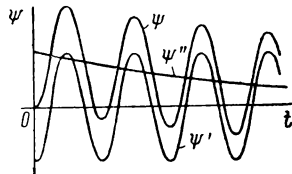


Рис. 347

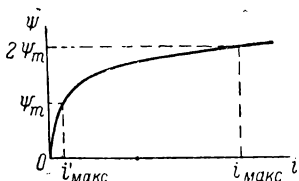


Рис. 348

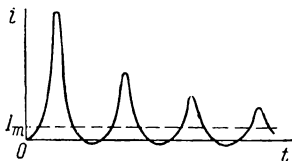


Рис. 349

остаточного намагничивания и соответствующего ему потокосцепления  $\Psi_0$ , если он по направлению противоположен установившемуся потоку в момент включения. Тогда наибольшее возможное значение потока во время переходного процесса может достичь величины  $2\Psi_m + \Psi_0$ , что повлечет за собой еще более резкий «толчок тока» в цепи.

Заметим, что явление «толчка тока» смягчается наличием стыков в магнитной цепи, потоком рассеяния и вихревыми токами. Практика показала, что ток при включении ненагруженных трансформаторов иногда в десятки раз превосходит установившийся ток холостого хода и может превысить не только ток при нормальной грузке, но и ток при установившемся коротком замыкании. Во избежание появления указанных сверхтоков и связанных с ними серьезных повреждений вследствие ненормальных электродинамических усилий в обмотках мощные трансформаторы включают через особые пусковые сопротивления, которые вводят в цепь при ее включении, а затем замыкают накоротко.



Сущность метода, которым мы воспользовались в настоящем параграфе, заключается в пренебрежении нелинейностью во второстепенных членах уравнения. Существенно при этом уяснить, в каком отношении тот или иной член уравнения можно рассматривать как второстепенный. В отдельные моменты времени  $i r$  может и превосходить величину  $\frac{d\Psi}{dt}$ , например, в моменты, когда  $\Psi = \Psi_{\text{макс}}$  и  $\frac{d\Psi}{dt} = 0$ , а  $i r \neq 0$ . Следует сравнивать эти члены не в отдельные моменты времени, а сопоставлять между собой их возможные амплитуды. Максимальные значения падения напряжения  $i r$  в катушках, особенно в больших, обычно много меньше максимальных значений составляющей напряжения  $\frac{d\Psi}{dt}$ , уравнивающей э. д. с. в катушке. Однако, если бы мы стали рассматривать очень маленькую катушку с ферромагнитным сердечником, для которой  $\frac{r}{L}$  велико, или рассмотрели бы случай, когда последовательно с катушкой в цепь включено большое активное сопротивление, то сделанное выше допущение могло бы оказаться несправедливым. Могло бы даже оказаться, что второстепенным членом в вышеуказанном смысле оказалось бы слагаемое  $\frac{d\Psi}{dt}$ . В таком случае правильнее было бы положить  $L = \text{const}$  в этом члене, т. е. написать:

$$L \frac{di}{dt} + ri = U_m \sin(\omega t + \psi)$$

и, положив приближенно  $L = \text{const}$ , найти  $i(t)$  путем решения этого линейного уравнения. Кривую же  $\Psi(t)$  при этом следовало бы найти, пользуясь вычисленной зависимостью  $i(t)$  и кривой намагничивания  $\Psi = F(i)$ . При этом оказалось бы, что ток содержит экспоненту с наложенной на нее синусоидой, а полуволны кривой потокоцепления, при которых сердечник насыщается, имели бы уплощенный вид.

Характер изменения величины  $\frac{r}{L}$  ни в том, ни в другом случае нельзя считать несущественным, если интересоваться действительной скоростью перехода процесса от начального, имеющего место сразу после включения, к установившемуся. В этом отношении выполненное выше решение является весьма приближенным, так как остается неясным, какое значение  $L$  следует подставить в выражение  $Ae^{-\frac{r}{L}t}$ . Можно рекомендовать подставить один раз наибольшее и другой раз наименьшее возможные значения, определяемые по кривой  $\Psi = F(i)$ . Этим путем определяются крайние пределы возможных процессов. Действительный процесс будет ближе к тому, который может быть рассчитан при некотором среднем значении  $L$ .

## § 171. Изображение переходных процессов на фазовой плоскости

Пусть исследуемый процесс в цепи описывается линейным или нелинейным уравнением первого или второго порядка, причем коэффициенты уравнения не являются явными функциями времени. Рассмотрим случай замыкания таких цепей накоротко или включения их под действие постоянной э. д. с., т. е. случай, когда свободный член уравнения не зависит от времени. Для уяснения характера процесса при этом оказывается весьма полезным изобразить его на так называемой *фазовой плоскости*. В этой плоскости одной из декартовых координат является изменяющаяся во времени величина  $x(t)$ , характеризующая исследуемый процесс, например ток в цепи  $i(t)$ , напряжение на конденсаторе  $u_C(t)$ , магнитный поток в катушке  $\Psi(t)$  и т. п. Другой координатой является производная от этой величины по времени  $y = \frac{dx}{dt}$ , например, соответственно,  $\frac{di}{dt}$ ,  $\frac{du_C}{dt}$ ,  $\frac{d\Psi}{dt}$  и т. д.

Точка  $x, y$  на фазовой плоскости называется *изображающей точкой*. Линия, которую вычерчивает на фазовой плоскости изображающая точка при протекании процесса во времени, называется *фазовой траекторией*.

Значения  $x$  и  $y = \frac{dx}{dt}$ , т. е. положение изображающей точки на плоскости, вполне определяют состояние процесса в данный момент времени.

Заметим, что в верхней полуплоскости  $y = \frac{dx}{dt} > 0$ , т. е.  $x$  увеличивается, и, следовательно, изображающая точка движется слева направо. В нижней полуплоскости  $y < 0$ ,  $x$  убывает и изображающая точка движется справа налево.

В случае уравнения первого порядка ( $ax' + bx + c = 0$ , или соответственно  $ay + bx + c = 0$ ) каждому значению  $x$  соответствует определенное значение  $y$ , определяемое из этого уравнения. Следовательно, на фазовой плоскости процесс изображается одной определенной фазовой траекторией (прямой, если уравнение линейное, т. е.  $a, b, c$  не зависят от  $x$ , и кривой, если уравнение нелинейное, причем  $a, b, c$  суть однозначные функции от  $x$  или  $y$ ). В виде примера на рис. 350 сплошной кривой изображена фазовая траектория для случая включения катушки с ферромагнитным сердечником, рассмотренной в §§ 168 и 169, под действие постоянного напряжения  $U_0 = 7,65$  в, т. е. для случая, исследованного в § 169 различными методами, причем в качестве переменной  $x$  принят ток  $i$  в катушке. Из уравнения цепи  $L_0 \frac{di}{dt} + ri = U_0$ , или, соответственно,  $L_0 y + rx = U_0$ , где динамическая индуктивность  $L_0 = \frac{d\Psi}{di} = \varphi(i) =$

$= \varphi(x)$  находится по кривой намагничивания катушки (кривая  $a$  на рис. 340), определяем для каждого значения  $x$  ему соответствующее значение  $y$  и строим по точкам фазовую траекторию. Точка  $B$  является точкой установившегося режима ( $i = I_0 = U_0/r$ ), к которой стремится изображающая точка, перемещаясь по фазовой траектории. Положение точки  $B$  на оси  $x$  зависит от величины и знака  $U_0$ . Скорость движения изображающей точки по мере приближения ее к точке  $B$  замедляется и теоретически точка  $B$  достигается только при  $t = \infty$ .

Пунктирная кривая на рис. 350 изображает фазовую траекторию для катушки с тем же сопротивлением  $r = 8,5 \text{ ом}$ , но при

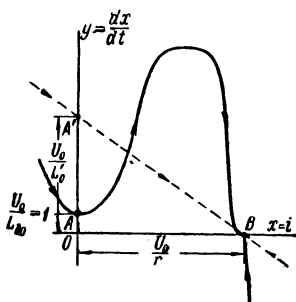


Рис. 350

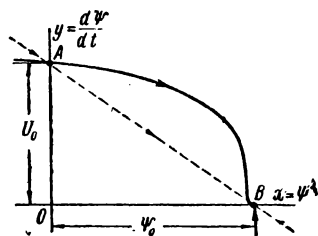


Рис. 351

постоянной индуктивности  $L'_0 = 1,22 \text{ гн}$ , т. е. когда процесс описывается линейным уравнением.

Точки  $A$  и  $A'$  являются точками начала процесса при  $t = 0$ . В данном примере начальное значение тока  $i = x = 0$ . Если бы начальное значение тока было иное, то процесс начинался бы в других точках фазовых траекторий, но во всех случаях изображающая точка стремится по той же траектории к точке  $B$  установившегося режима. Изменения тока во времени, соответствующие кривым на рис. 350, представлены кривыми  $i(t)$  (сплошной и пунктирной) на рис. 346.

Если в качестве переменной  $x$  для той же задачи принять потоко-сцепление  $\Psi$ , то уравнение будет иметь вид:  $\frac{d\Psi}{dt} + \frac{r}{L_{cm}} \Psi = U_0$ ,

или соответственно  $y + \frac{r}{L_{cm}} x = U_0$ , где статическая индуктивность

$L_{cm} = \frac{\Psi}{i} = F(\Psi)$  находится также по кривой намагничивания (кривая  $a$  на рис. 340). На рис. 351 изображены фазовые траектории, дающие связь между потоко-сцеплением  $\Psi$  и скоростью его изменения  $\frac{d\Psi}{dt}$  для той же катушки. Сплошная кривая соответствует не-

линейной зависимости  $\Psi$  от  $i$ , а пунктирная линейной зависимости  $\Psi$  от  $i$ , т. е. предположению, что  $L = L_0 = \text{const.}$  Соответствующие кривые зависимости  $\Psi$  от времени приведены на рис. 346.

Если процесс описывается уравнением второго порядка, то в зависимости от начальных условий  $x(0) = x_0$  и  $y(0) = y_0$  изображающая точка будет описывать ту или иную фазовую траекторию, проходящую через эту начальную точку. При этом ни одна фазовая траектория не пересекается с другой, так как во всех случаях в реальной электрической цепи процесс от любого его состояния протекает определенным образом. Фазовые траектории могут только сходиться или расходиться в некоторых точках, что будет видно из дальнейшего.

Для лучшего уяснения вопроса рассмотрим сначала вид фазовых траекторий для уже изученных случаев разряда конденсатора на цепь  $r, L$  в случае линейной цепи (§ 114). Полагая в уравнении для тока в цепи  $L \frac{d^2 i}{dt^2} + r \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0$ ,  $i = x$  и  $\frac{di}{dt} = \frac{dx}{dt} = y$ , будем иметь:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{r}{L} y + \frac{1}{LC} x = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dt} = - \left( \frac{r}{L} y + \frac{1}{LC} x \right).$$

Разделив это уравнение на  $\frac{dx}{dt} = y$ , получаем

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{r}{L} y + \frac{1}{LC} x}{y},$$

что и является уравнением фазовой траектории.

В случае, когда  $r = 0$ , получаем:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{1}{LC} \cdot \frac{x}{y},$$

т. е.

$$y^2 + \frac{1}{LC} x^2 = A^2,$$

причем  $A^2$  определяется начальными значениями  $x(0) = x_0$  и  $y(0) = y_0$ .

Таким образом, фазовая траектория является эллипсом с полуосями  $A\sqrt{LC}$  и  $A$ . Так как при  $x = x_{\text{макс}} = I_m$  имеем  $y = 0$ , то  $A = \frac{I_m}{\sqrt{LC}} = y_{\text{макс}}$ , где  $I_m$  — амплитуда тока, изменяющегося при  $r = 0$  по синусоидальному закону (§ 114). На рис. 352 приведена кривая тока  $i(t)$  при  $i(0) = 0$  и соответствующая ей фазовая траектория с начальной точкой  $A$ . При других начальных значе-

ниях тока и его производной изображающая точка будет также описывать эллипс, но в общем случае с другими величинами полуосей. Все эти эллипсы охватывают точку  $M$  (в данном случае начало координат). Точка  $M$ , когда охватывающие ее фазовые траектории являются расположенными одна в другой замкнутыми кривыми, называется *центром*. В этом случае мы имеем устойчивые незатухающие колебания.

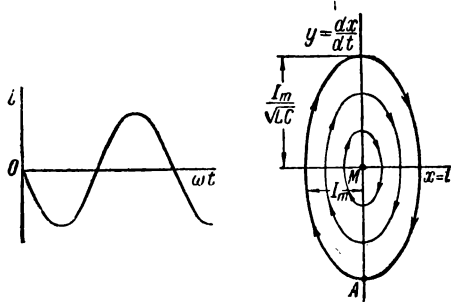


Рис. 352

Если  $r \neq 0$ , то разряд конденсатора будет либо затухающим колебательным при

$$r < 2 \sqrt{\frac{L}{C}}, \text{ либо аperiодическим при } r > 2 \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Кривые  $i(t)$  для случая  $i(0) = 0$  и соответствующие им фазовые траектории изображены на рис. 353 и 354. В случае колебательного разряда фазовая траектория представляет собою сви-

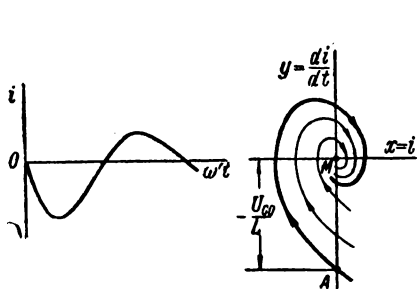


Рис. 353

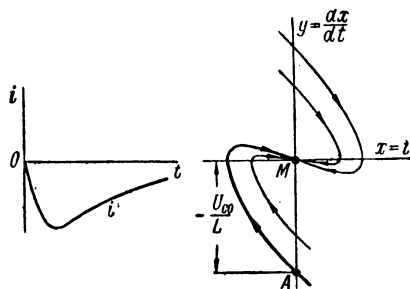


Рис. 354

вающуюся к точке  $M$  спираль (рис. 353), причем каждому витку спирали соответствует один период колебаний. Теоретически около точки  $M$  располагается бесконечно большое число витков спирали, соответствующее бесконечному числу колебаний с убывающими в одном и том же отношении амплитудами. Практически же процесс затухает в течение конечного промежутка времени. Точка  $M$ , к которой сходятся спирали фазовых траекторий, носит название *устойчивого фокуса*.

В случае  $r > 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$  процесс будет аperiодический, ток не меняет своего знака и на фазовой траектории изображающая точка

не совершает более одного полуоборота. Точка  $M$  такого типа носит наименование *устойчивого узла*.

Во всех случаях, изображенных на рис. 352, 353, 354, начальная точка  $A$  имеет координаты  $x_0 = 0$  и  $y_0 = \left(\frac{\partial i}{\partial t}\right)_{t=0} = -\frac{U_{c0}}{L}$ , где  $U_{c0}$  — начальное напряжение на конденсаторе, что вытекает из дифференциального уравнения цепи при условии  $i(0) = 0$ .

В рассмотренных случаях точки  $M$  являются точками устойчивого равновесия.

В случае нелинейных цепей, содержащих нелинейные элементы с падающими участками характеристик, как было показано в § 148,

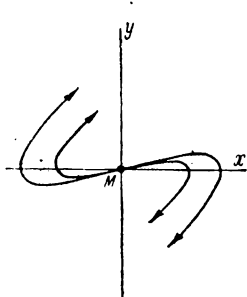


Рис. 355

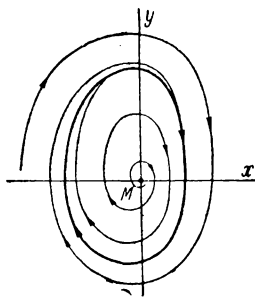


Рис. 356

могут иметь место состояния как устойчивого, так и неустойчивого равновесия. Неустойчивое равновесие возможно также при наличии достаточной положительной обратной связи (§ 156). В случае неустойчивого равновесия раз возникшее небольшое отклонение от положения равновесия в дальнейшем возрастает. При этом возможен случай аperiodического перехода в другие устойчивые состояния равновесия, или возможен случай нарастания автоколебаний в цепи до некоторого устойчивого значения амплитуды колебаний, примером чего является ламповый генератор (§ 156). В обоих случаях новое устойчивое состояние, или, соответственно, устойчивый периодический автоколебательный процесс, определяется нелинейностью характеристик элементов цепи.

При аperiodическом процессе точке неустойчивого равновесия соответствует на фазовой плоскости точка  $M$ , называемая *неустойчивым узлом* (рис. 355). В этом случае расходящиеся от точки  $M$  фазовые траектории приходят в устойчивые узлы, не показанные на рисунке. При колебательном процессе это будет *неустойчивый фокус* (рис. 356). В этом случае расходящиеся от точки  $M$  спирали фазовых траекторий все свиваются к замкнутой кривой, называемой *предельным циклом* (рис. 356), который и соответствует установившимся автоколебаниям. Если согласно начальным условиям

начальная точка окажется вне предельного цикла, то фазовая траектория, свиваясь, приходит также к этому предельному циклу.

Заметим, что хотя на фазовой траектории моменты времени, соответствующие точкам фазовой траектории, явно не фиксированы, однако они могут быть найдены методом, изложенным в следующем параграфе.

### § 172. Метод изоклин для построения фазовых траекторий и расчета переходных процессов

Пусть процесс описывается уравнением второго порядка  $F(x'', x', x) = 0$ . Обозначая  $\frac{dx}{dt} = y$ , имеем  $F(y', y, x) = 0$ . Решая это уравнение относительно  $y'$ , получаем:

$$\frac{dy}{dt} = \varphi(y, x).$$

Разделив это последнее уравнение на  $\frac{dx}{dt} = y$ , находим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(y, x)}{y},$$

что представляет собой уравнение фазовой траектории. Величина  $\frac{dy}{dx}$  есть тангенс угла наклона касательной к фазовой траектории

в соответствующей точке. Если положить  $\frac{dy}{dx} = k = \text{const}$ , то урав-

нение  $k = \frac{\varphi(y, x)}{y}$  определит собой кривую, пересекающую фазовые траектории в точках, в которых касательные к ним имеют одинаковые углы наклона. Такая кривая носит наименование *изоклины*. Выбирая разные значения  $k$ , получаем семейство изоклин (рис. 357). Если теперь на каждой изоклине нанести достаточное количество точек, тангенс угла наклона которых к оси абсцисс равен соответствующему данной изоклине числу  $k$ , то при достаточном количестве изоклин на плоскости чертежа легко провести из данной начальной точки фазовую траекторию. Для этого только следует стремиться, чтобы она пересекала изоклины под углами, указанными черточками, нанесенными на изоклины.

Исследуем этим методом разряд конденсатора на цепь, состоящую из катушки с ферромагнитным сердечником и участка с сопротивлением. Пусть емкость конденсатора  $C = 1 \text{ мкф}$  и сопротивление цепи, включая и сопротивление обмотки катушки,  $r = 200 \text{ ом}$ . Возьмем катушку, рассмотренную в § 168 (рис. 341) и, пренебрегая явлением гистерезиса, будем считать, что кривая намагничивания как при возрастании, так и при убывании тока изображается кривой  $a$  на рис. 340.

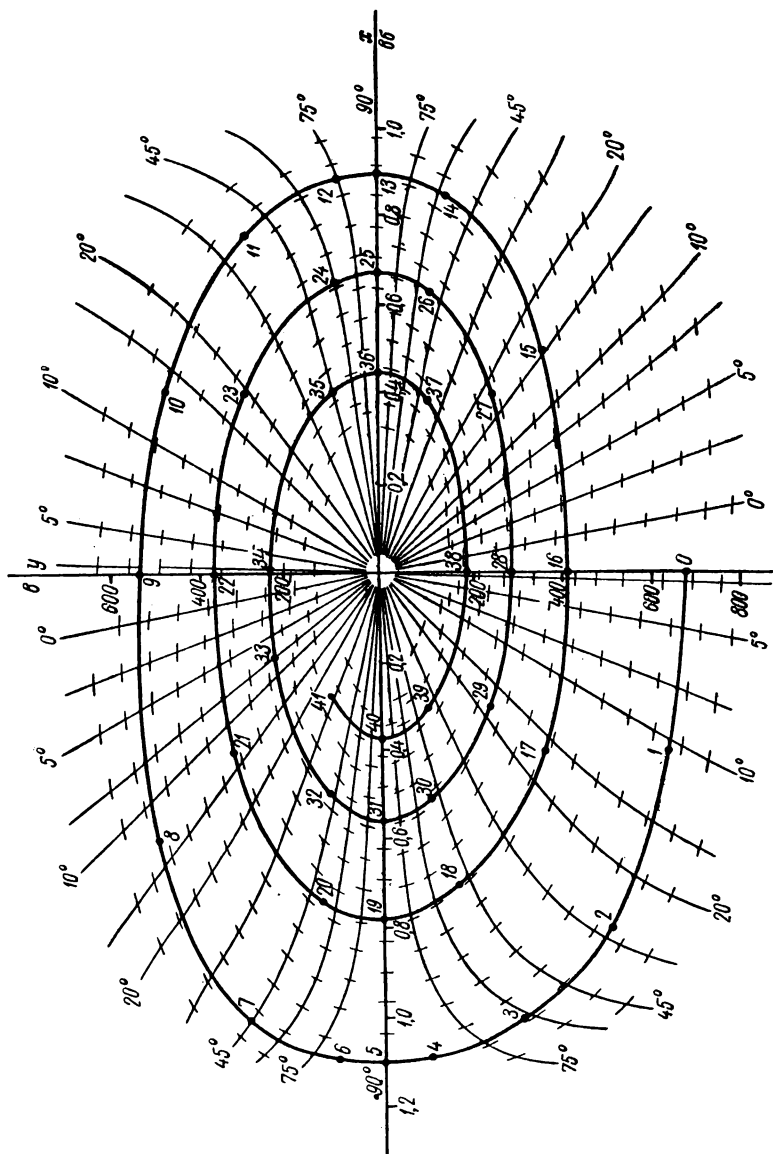


Рис. 357



Дифференциальное уравнение цепи имеет вид:

$$\frac{d\Psi}{dt} + ri + \frac{1}{C} \int i dt = 0,$$

или

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} + r \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0.$$

В данном случае удобнее принять в качестве координаты на фазовой плоскости величину потокосцепления  $\Psi$ . Соответственно, уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} + r \frac{di}{d\Psi} \frac{d\Psi}{dt} + \frac{1}{C} \frac{i}{\Psi} \Psi = 0.$$

Величины  $\frac{d\Psi}{di} = L_{\partial}$  и  $\frac{\Psi}{i} = L_{cm}$  суть динамическая и статическая индуктивности, являющиеся функциями  $\Psi$ , определяемыми из кривой намагничивания. Полагая  $\Psi = x$  и  $\frac{d\Psi}{dt} = y$ , запишем уравнение в форме:

$$y' + \frac{r}{L_{\partial}} y + \frac{1}{CL_{cm}} x = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dt} = - \left( \frac{r}{L_{\partial}} y + \frac{1}{CL_{cm}} x \right).$$

Разделив последнее уравнение на  $\frac{dx}{dt} = y$  получим уравнение фазовой траектории:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{r}{L_{\partial}} y + \frac{1}{CL_{cm}} x}{y}.$$

Полагая  $\frac{dy}{dx} = k$ , находим уравнение изоклины

$$y = \frac{x}{CL_{cm} \left( k + \frac{r}{L_{\partial}} \right)},$$

где  $L_{cm} = F_1(x)$  и  $L_{\partial} = F_2(x)$ .

Задавая ряд значений  $x = \Psi$ , вычисляем из последнего уравнения  $y$  и по точкам строим изоклину для данного  $k$ . На рис. 357 построены изоклины для данной конкретной задачи, около изоклин помечены соответствующие им значения угла  $\alpha = \arctg k$  наклона касательных к фазовой траектории. Под этим углом нанесены черточки, пересекающие изоклину, и по ним проведена фазовая траектория для начальных значений  $U_c(0) = 680$  в и  $\Psi(0) = 0$ . По характеру фазовой траектории видно, что разряд имеет колебательный характер.

Для построения кривой  $\Psi(t)$  необходимо определить моменты времени, соответствующие точкам фазовой траектории. Промежутки времени  $\Delta t$ , в течение которого совершается переход от  $\nu$ -той точки  $(x_\nu, y_\nu)$  фазовой траектории к близкой к ней  $\nu + 1$ -ой точке  $(x_{\nu+1}, y_{\nu+1})$ , можно приближенно определить следующим образом. Так

как  $y = \frac{dx}{dt}$ , то  $\Delta t = \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \frac{1}{y} dx$ . Обозначая  $\frac{1}{y} = f(x)$ , имеем по

теореме о среднем  $\Delta t = f(\xi)(x_{\nu+1} - x_\nu) = f(\xi)\Delta x$ , где  $x_\nu < \xi < x_{\nu+1}$ . При небольшом интервале  $\Delta t$  и монотонном изменении  $y$  в этом интервале можно принять  $f(\xi) \approx \frac{1}{y_{cp}}$ , где  $y_{cp} = \frac{y_\nu + y_{\nu+1}}{2}$ . При этом имеем

$$\Delta t \approx \frac{\Delta x}{y_{cp}}.$$

Если рассматриваемый участок фазовой траектории является отрезком прямой с тангенсом угла наклона к оси абсцисс  $\frac{dy}{dx} =$

$= k = \frac{y_{\nu+1} - y_\nu}{x_{\nu+1} - x_\nu}$ , то  $dt = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{y} = \frac{1}{k} \cdot \frac{dy}{y}$  и, следовательно,

$$\Delta t = \int_{y_\nu}^{y_{\nu+1}} \frac{1}{k} \frac{dy}{y} = \frac{1}{k} \ln \frac{y_{\nu+1}}{y_\nu}.$$

Если рассматриваемый участок фазовой траектории является дугой окружности, имеющей центр на оси абсцисс, то  $\Delta t$  вычисляется следующим образом. Выразим координаты точек этой дуги окружности в виде:  $x = R \cos \varphi + x_0$ ,  $y = R \sin \varphi$ , где  $x_0$  — координата центра окружности,  $R$  — радиус окружности и  $\varphi$  — угол между осью абсцисс и направлением радиуса, проведенного в точку  $x, y$  дуги. Получаем

$$\Delta t = \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \frac{dx}{y} = - \int_{\varphi_\nu}^{\varphi_{\nu+1}} d\varphi = \Delta\varphi,$$

где  $\Delta\varphi$  центральный угол рассматриваемой дуги.

В случае, если отрезок фазовой траектории близко совпадает с отрезком прямой, то приближенно можно воспользоваться фор-

мулой:  $\Delta t = \frac{1}{k} \ln \frac{y_{\nu+1}}{y_\nu}$ , за исключением случаев, когда  $y_\nu = 0$  или  $y_{\nu+1} = 0$ , а также когда  $y_{\nu+1} = y_\nu$ . В последнем случае хороший результат дает формула  $\Delta t = \frac{\Delta x}{y_{cp}}$ .

Если отрезок фазовой траектории близко совпадает с дугой окружности, имеющей центр на оси абсцисс, то приближенно можно воспользоваться формулой  $\Delta t = \Delta \varphi$ . В частности, этой формулой рекомендуется пользоваться для случаев, когда  $y_v = 0$  или  $y_{v+1} = 0$  (рис. 358). Заметим, что в этом последнем случае величины  $\Delta t$ , вычисленные по формулам  $\Delta t = \frac{\Delta x}{y_{cp}}$  и  $\Delta t = \Delta \varphi$ , отличаются меньше чем на 1% при  $\Delta \varphi \leq 20^\circ$ .

Вычисляя промежутки времени, соответствующие последовательным отрезкам фазовой траектории, легко построить кривую  $\Psi(t)$ , что и сделано на рис. 359.

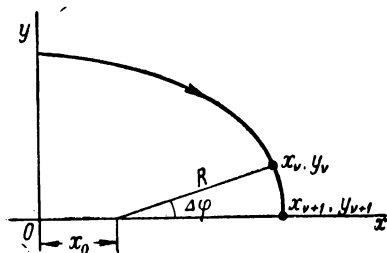


Рис. 358

На этом же рисунке построена кривая  $i(t)$ , причем значения тока брались из кривой намагничивания (рис. 340) по соответствующим значениям потокоцепления  $\Psi$ .

Рассмотренное в настоящем и в предыдущем параграфах изображение переходных процессов на фазовой плоскости дает возможность наглядно обозреть весь характер этих процессов. Этот метод применим в случаях, когда процесс описывается уравнениями

первого или второго порядка со свободным членом, не зависящим от времени. Особенно ценным является то, что здесь открываются новые возможности расчета переходных процессов в нелинейных цепях.

### § 173. Практическое использование нелинейных свойств электрических цепей в различных областях электротехники

Все изложенное в настоящей главе, а также в главе, посвященной нелинейным цепям постоянного тока, показывает исключительно широкие возможности, которые открываются при использовании нелинейных элементов для создания электрических цепей, обладающих самыми различными, весьма важными для практики свойствами.

Мы видели, что, используя нелинейные элементы, можно осуществить стабилизаторы напряжения и тока, усилители мощности, модуляторы, детекторы, генераторы незатухающих колебаний, выпрямители, инверторы и т. д. Рассмотренными примерами далеко не исчерпывается перечень возможных применений нелинейных элементов в электрических цепях. Так, например, очень важным является создание устройств для формирования импульсов напряжения различной формы, создание так называемых спусковых устройств — триггеров, в которых используется неустойчивое состояние и при плавном изменении входного напряжения происхо-

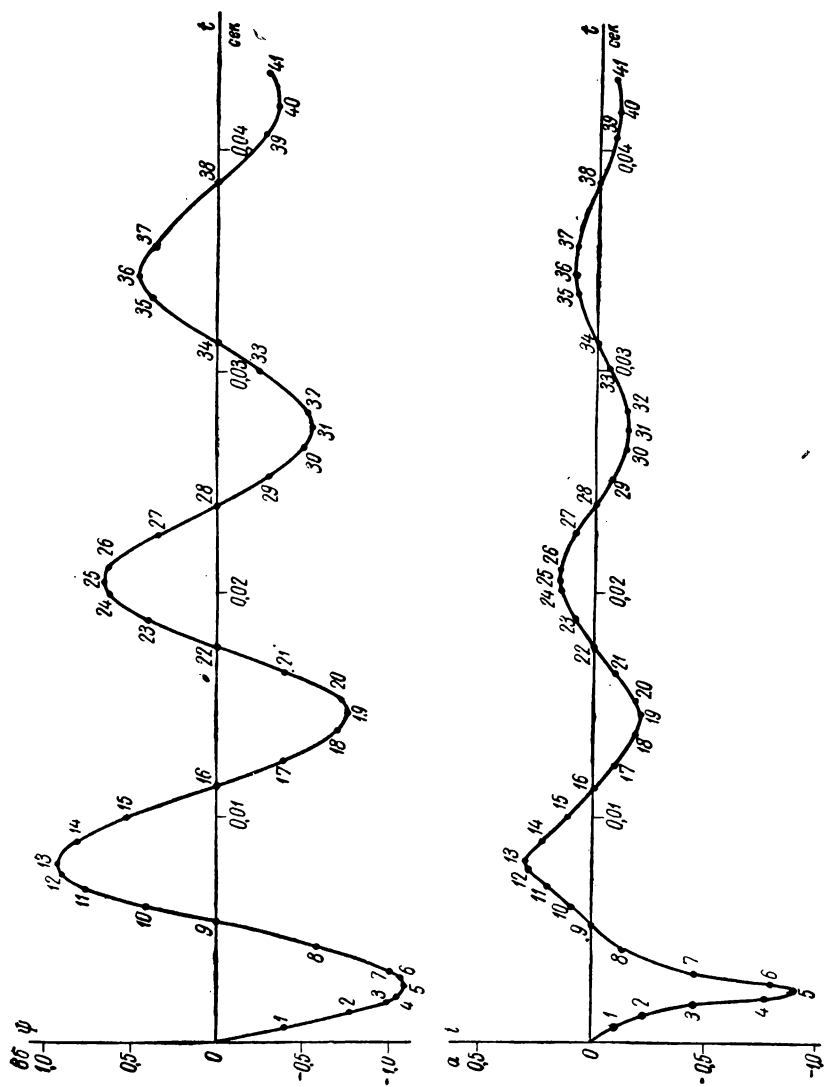


Рис. 359

дит скачок напряжения или тока на выходе, создание на этой основе счетчиков импульсов и т. д.

Радиотехника, автоматика, телемеханика, электроизмерительная техника, техника электронных быстродействующих счетно-решающих и управляющих машин, электроэнергетика и другие области техники на современном этапе развития все шире используют особые свойства нелинейных цепей. Еще большие возможности открываются в этом направлении в будущем.

Вместе с тем изучение явлений в нелинейных системах представляет собой еще недостаточно разработанную и весьма интересную область для теоретических и экспериментальных исследований, хотя многое, как отмечалось, здесь уже сделано, причем весьма существенный вклад в разработку нелинейных проблем внесен советскими учеными.

---

## АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автотрансформатор** 248  
**Активная мощность** 51  
 — — проводимость 42  
 — — эквивалентная 62  
**Активное напряжение** 42  
 — сопротивление 37  
 — — эквивалентное 62  
**Активный ток** 45  
 — четырехполюсник 142  
**Амплитуда комплексная** 74  
 — тока, э. д. с. и напряжения 13  
**Амплитудно-частотная характеристика** 307  
**Анодно-сеточные характеристики** 377  
**Апериодический разряд конденсатора** 270
- Бегущие волны** 330  
**Биения колебаний** 222, 285  
**Боковые частоты** 225
- Векторная диаграмма** 32  
 — — реактивной катушки с ферромагнитным сердечником 235  
 — — трансформатора со стальным сердечником 245  
**Векторы вращающиеся** 30  
**Взаимная индукция при параллельном соединении** 96  
 — — — последовательном соединении 94  
**Вихревые токи** 65  
**Включение встречное** 94  
 — согласное 94  
**Вносимое сопротивление** 101  
**Внутреннее сопротивление лампы** 378  
**Волна обратная (отраженная)** 330, 332, 348  
 — преломленная 348  
 — прямая (падающая) 330, 332, 348  
**Волновая проводимость** 109  
**Волновое сопротивление** 104, 325, 332  
 — уравнение 343  
**Волны бегущие** 330  
 — в неискажающей линии 345  
**Волны напряжения и тока** 330  
**Вращающееся магнитное поле** 186  
**Встречное включение** 94  
**Высшие гармоники** 205  
 — — в трехфазной системе 220
- Гистерезисный угол** 231  
**Г-образная схема, эквивалентная трансформатору** 244
- Данилевский А. М., операторный метод** 291  
**Действующее значение несинусоидальных э. д. с., напряжения и тока** 211  
 — значение синусоидальных э. д. с., напряжения и тока 23  
**Декремент колебания** 277  
 — — логарифмический 278  
**Детектирование колебаний** 393
- Диаграммы в отрезках на осях** 47  
 — круговые и линейные 49, 144  
**Дифференцирующие цепи** 314  
**Длина волны** 330, 333  
**Добротность контура** 104  
**Доливо-Добровольский М. О., связанная трехфазная система** 168  
 — — трехфазные трансформаторы 168  
 — — трехфазный асинхронный двигатель 168
- Заграждающий фильтр** 131  
**Закон Кирхгофа первый** 80  
 — — второй 80  
 — Ома 79  
**Затухание контура** 104  
**Затухающие колебания** 277  
**Зона затухания фильтра** 131  
 — прозрачности фильтра 131
- Игнатовский В. С., операторный метод** 291  
**Идеальный трансформатор** 242  
**Изображающая точка** 429  
**Изображение интеграла функции** 292  
 — производной функции 292  
 — функции 291  
**Интеграл Дюамеля** 289  
**Интеграл Фурье** 306  
**Интегрирующие цепи** 314
- Катушка с ферромагнитным сердечником** 227  
**Колебания затухающие** 277  
 — незатухающие 276  
 — энергии 54  
 — — при резонансе 104, 110  
**Колебательный контур** 111  
**Комплексная амплитуда** 74  
 — мощность 81  
 — проводимость 78  
**Комплексное сопротивление** 78  
**Короткое замыкание однородной линии** 351  
 — — трансформатора 248  
 — — четырехполюсника 124  
**Коэффициент амплитуды кривой** 29  
 — связи 114  
 — затухания 128, 329  
 — цепной схемы 130  
**Коэффициент затухания четырехполюсника** 128  
 — модуляции 225  
 — мощности 51  
 — отражения волн 332, 348  
 — преломления волн 348  
 — распространения волн 127, 329  
 — — цепной схемы 130  
 — — четырехполюсника 127  
 — связи, критический 137  
 — трансформации 240  
 — усиления 378

- Коэффициент фазы 128, 329  
 — — цепной схемы 130  
 — — четырехполосника 128  
 — — формы кривой 29  
 Круговое вращающееся магнитное поле 186  
 Крутизна характеристики лампы 378
- Линейные напряжения и токи 173  
 — провода 173  
 Линии однородные 322  
 Линия неискажающая 334  
 Логарифмический декремент колебания 278  
 Ляпунов А. М., метод решения задач об устойчивости движения 373
- Максимальное значение напряжения, тока и э. д. с. 13  
 Мгновенная мощность 51  
 Мгновенные значения напряжения, тока и э. д. с. 11  
 Метод изоклин для построения фазовых траекторий 434  
 — контурных токов 91  
 — графического интегрирования 416  
 — кусочно-линейного выражения характеристик 415  
 — последовательных интервалов 415  
 Миткевич В. Ф., символический метод 71  
 — — — схемы выпрямления 374  
 Многофазная система несвязанная 168  
 — — несимметричная 171  
 — — неуравновешенная 171  
 — — связанная 168, 172  
 — — симметричная 168  
 — — токов 167  
 — — уравновешенная 171  
 — — электрических цепей 167  
 — — электродвижущих сил 167  
 Многофазные цепи 167  
 — — несимметричные 168  
 — — симметричные 168  
 Модулированный ток 225  
 Модуляция колебаний 224, 392  
 Мощность активная 51  
 — в комплексной форме 81  
 — мгновенная 51  
 — многофазной цепи 176  
 — полная 53  
 — реактивная 53  
 — трехфазной цепи 176  
 — цепи переменного тока 51
- Напряжение линейное 173  
 — фазное 173  
 Начальная фаза 13  
 Незатухающие колебания 276  
 Неискажающая линия 334  
 Нейтральная точка 173  
 Нейтральный провод 173  
 Нелинейные сопротивления 365  
 — — цепи 363  
 Несимметричные нелинейные сопротивления 367  
 — — многофазные цепи 168  
 — — трехфазные цепи 179  
 Несовершенный конденсатор 68  
 Несущая частота 225  
 Нулевой последовательности система 190
- Обратная волна 330  
 — связь 317, 390  
 Обращение в комплексной плоскости 149  
 — геометрических мест 147  
 — окружности 148
- Обращение прямой 148  
 Однородная линия 322  
 Операторный метод 290  
 Основная волна ряда Фурье 205  
 Отражение волн от конца линии 350  
 Отраженная волна 330, 348  
 Отрицательная обратная связь 318
- Падающая волна 330, 348  
 Падение напряжения в линии 89  
 Параллельное соединение 85  
 Параметры несовершенного конденсатора 68  
 — — распределенные 322  
 — — сосредоточенные 18  
 — — эквивалентные 61  
 — — электрической цепи 20  
 Передаточные функции 314  
 Передача энергии по индуктивной линии 88  
 Переходная проводимость 288  
 Переходные процессы 252  
 Период переменного тока 11  
 — — собственных колебаний линии 355  
 — — — незатухающих колебаний 276  
 Периодические напряжения, токи и э. д. с. 11  
 Поверхностный эффект 65  
 Повторное сопротивление звеньев простейших фильтров 133  
 — — симметричного четырехполосника 126  
 — — симметричной однородной цепной схемы 129  
 Положительная обратная связь 318  
 Полосной электрический фильтр 131  
 Полупроводниковые триоды 379  
 Последовательное соединение 83  
 Постоянная времени цепи 256  
 — — составляющая ряда Фурье 205  
 Постоянные четырехполосника 122  
 Потери на вихревые токи 229  
 — — — в плоском листе 229  
 — — — в цилиндрическом стержне 229  
 — — — гистерезис 230  
 Потеря напряжения 89  
 Поток рассеяния 236  
 Потери рассеяния в трансформаторе 239  
 Преломленная волна 348  
 Преобразование соединения звездой в соединение многоугольником 92  
 — — трехфазной симметричной системы в двухфазную несимметричную систему 251  
 — — трехфазной симметричной системы в шестифазную симметричную систему 250  
 — — числа фаз многофазных систем 249  
 Преходящие величины 253  
 Преходящий ток 254  
 Проводимость активная 42  
 — — волновая 109  
 — — динамическая 366  
 — — емкостная 42  
 — — индуктивная 42  
 — — обобщенная 297  
 — — переходная 288  
 — — полная 42  
 — — реактивная 42  
 — — эквивалентная 46  
 Проницаемость лампы 377  
 Прямая волна 330  
 Пульсирующее магнитное поле 184  
 Пучности напряжения и тока 338
- Разделение потерь в сердечнике 230  
 Размагничивающее действие вихревых токов 66  
 Разность фаз напряжения и тока 14  
 Разряд конденсатора колебательный 274

Распространение волн в линии 330, 344

Расчет токов короткого замыкания 200

Реактивная мощность 53

— проводимость 42

— эквивалентная 62

Реактивное напряжение 43

— сопротивление 37

— эквивалентное 62

Реактивный ток 45

Режущий фильтр 131

Резонанс 102

— в двух связанных цепях 114

— — трехфазной цепи, состоящей из реактивной катушки с ферромагнитным сердечником и конденсаторов 399, 401

— напряжений 103

— токов 109

Резонансная частота цепи 103

Резонансные явления в цепных схемах 138

Релаксационные колебания 395

Ряд Фурье 205

— — в комплексной форме 305

Связи коэффициент 114

Символический метод 71

Симметричные нелинейные сопротивления 367

— системы синусоидальных напряжений, э. д. с. и токов 168

— составляющие трехфазной системы 191

Симметричный четырехполюсник 123

Система прямой последовательности 190

Синусоидальные напряжения, э. д. с. и токи 12

Сложные электрические цепи 90

Собственная частота цепи 103

Соединение звездой 172

— многоугольником 172

— параллельное 85

— последовательное 83

— смешанное 87

— треугольником 177

Сопротивление активное 37

— волновое 104

— динамическое 366

— емкостное 37

— индуктивное 37

— обобщенное 295

— повторное 126

— полное 37

— реактивное 37

— характеристическое 325, 332

— эквивалентное 43

Спектральная плотность функции 307

— характеристика функции 307

Среднее значение напряжения, тока и э. д. с. 24

— квадратичное значение напряжения, тока и э. д. с. 23

Стабилизаторы напряжения 404

Статический резонансный умножитель частоты 406

Степень обращения 147

Стоячие волны 338

Схема эквивалентная полупроводниковому триоду 385

Схема эквивалентная трансформатору 243

Схемы фильтров для выделения симметричных составляющих 195

T-образная схема, эквивалентная трансформатору 244

Ток намагничивающий 242

— насыщения 378

— переменный 11

— периодический 11

— преходящий 254

Ток реактивный 45

— синусоидальный 12

Токи вихревые 65

— линейные 173

— фазные 173

— Фуко 65

Топографические диаграммы 178

Транзисторы 379

Трансформатор без сердечника 99

— со стальным сердечником 236

Треугольник мощностей 60

— напряжений 43

— проводимостей 45

— сопротивлений 43

— токов 45

Трехфазная симметричная система 173

Трехэлектродная лампа 377

Угловая частота собственных незатухающих колебаний 276

— — напряжения, тока и э. д. с. 11

Угол гистерезисный 231

— магнитного запаздывания 235

— потерь в конденсаторе 68

— сдвига фаз напряжения и тока 14

Удвоитель частоты 407

Узлы стоячих волн 338

Умножение вектора на комплексное число 144

— кривой на комплексное число 145

— окружности на комплексное число 146

Уравнение кривых в символической форме 156

— однородной линии 323

— окружности в символической форме 157

— прямой в символической форме 156

— симметричной однородной цепной схемы 130

Уравнение трансформатора без сердечника 99

— — со стальным сердечником 238

Уравнение четырехполюсника 122

Усагин И. Ф., изобретение трансформатора 237

Усилитель мощности 410

Установившиеся величины 253

Удвоитель частоты 407

Утроитель частоты 406

Фаза тока, напряжения 13

Фазные токи, напряжения и э. д. с. 173

Фазовая плоскость 429

— скорость волны в линии 330

— траектория 429

Фазо-частотная характеристика 307

Фазы многофазных систем 167

Ферромагнитные умножители частоты 406

— усилителя мощности 410

Феррорезонанс 399, 401

Фильтры загораживающие 131

— полосные 131

— режущие 131

— симметричных составляющих 195

— частотные 137

Формы записи уравнений четырехполюсника 139

Характеристика катушки с ферромагнитным сердечником 398

— нелинейного элемента 365

— электрической дуги 367

Характеристики линии 332

Характеристическое сопротивление однородной линии 325, 332

Хевисайд, операторный метод 290

Холостой ход однородной линии 335

— — четырехполюсника 124



- Цепи нелинейные 363  
— с распределенными параметрами 322  
— — сосредоточенными параметрами 19  
Цепные схемы 129
- Частота переменного тока 11  
— резонансная 103  
— собственная 103  
— угловая 11  
Частотные характеристики 105, 110, 116  
— электрические фильтры 131  
Четырехполюсник пассивный 120  
— симметричный 123
- Эквивалентная синусоида 233  
— схема катушки с ферромагнитным сердечником 236  
— — несовершенного конденсатора 68
- Эквивалентная схема трансформатора без сердечника 101  
— — — со стальным сердечником 242  
Эквивалентные параметры цепи 61  
— проводимости 46  
— сопротивления 43  
— — для нулевой, обратной и прямой составляющих 199  
Электрические фильтры 131  
Электродвижущая сила мгновенная 11  
— — периодическая 11  
— — синусоидальная 12  
— — фазная 173  
Эллиптическое вращающееся поле 186  
Эффект близости 65
- Яблочков П. Н., трансформатор со стальным сердечником 236
-

Цена 10 р. 45 к.