В. Н. МАТВЕЕВ, Н. М. МАТВЕЕВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

В ПОМОЩЬ ПОСТУПАЮЩИМ В ВУЗЫ

В. Н. МАТВЕЕВ, Н. М. МАТВЕЕВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ
С МЕТОДАМИ РЕШЕНИЙ

Издание третье, переработанное

ИЗДАТЕЛЬСТВО
КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1968

2-2-2
1-68

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Казанского университета

Сборник содержит около 600 задач с методами решений, а также задачи и упражнения для самостоятельного решения и образцы вариантов письменных экзаменационных работ.

Даются решения многих задач, предлагавшихся в последние годы на вступительных экзаменах по математике в Ленинградском государственном университете и других вузах.

В качестве тренировочного материала к письменным работам и устным экзаменам в Сборник включены специально подобранные задачи по всем наиболее важным разделам, входящим в программу вступительных экзаменов.

Особое внимание уделяется алгебре и элементарным функциям и тригонометрии, так как эти разделы элементарной математики являются наиболее важными для изучения курса высшей математики.

В конце Сборника приведен большой список литературы, рекомендуемой для лучшей подготовки к вступительным экзаменам и успешного изучения курса высшей математики.

Редактор Т. Н. Бык

Техн. редактор Л. И. Блашкова

Корректоры В. С. Александров и Д. М. Мустафина

Сдано в набор 7/V-1968 г. Подписано в печать 30/VIII-1968 г. ПФ 16004. Формат бумаги $60 \times 90^1/_{16}$. Печ. л. 17,25. Уч.-изд. л. 16,68. Тираж 35000 экз. Заказ Д-852. Цена без переплета 49. Переплет 10 коп.

Издательство КГУ. Казань, ул. Ленина, д. 4/5

Комбинат печати имени Камиля Якуба. Казань, ул. Баумана, д. 19

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая книга представляет собой пособие в помощь поступающим в высшие учебные заведения.

В ней содержатся методы решения основных типов задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах по математике за последние годы в вузах Ленинграда.

Чтобы дать материал для тренировки к письменным экзаменам, в книгу включены специально подобранные задачи по наиболее важным разделам, включенным в программу вступительных экзаменов, и образцы вариантов экзаменационных работ.

Задачи, предназначенные для самостоятельного решения, имеют сквозную нумерацию по всей книге. Большая часть их решений изложена в сжатой форме (пропущены промежуточные преобразования, имеющие чисто технический характер; не делается ссылок на общеизвестные формулы и теоремы, если их применение очевидно из хода решения; исследование условий и решений задач описывается подробно лишь в сложных случаях, а в остальных дается окончательный результат). Излагая решения задач таким образом, мы преследуем цель дать возможность читателю, разбирающему решение той или иной задачи, в процессе самостоятельной работы восполнить пропущенные выкладки.

Для лучшей подготовки к вступительным экзаменам и более успешного изучения курса высшей математики приводится большой список литературы, где особо выделены те книги, которые рекомендуются в качестве основных руководств.

На вступительных экзаменах по математике наиболее высокие требования предъявляются по алгебре и элементарным функциям и по тригонометрии. Это объясняется тем, что для изучения курса высшей математики данные разделы элементарной математики являются наиболее важными. Поэтому поступающие в высшие учебные заведения должны иметь твердые знания и навыки по всему школьному курсу алгебры и тригонометрии.

Письменные экзамены преследуют цель выяснить, в какой мере абитуриент владеет техникой элементарных преобразований, знает ли необходимые формулы и умеет ли рационально выполнять все необходимые действия.

На устных экзаменах проверяется уровень знаний и навыков по программе вступительных экзаменов. При этом особое внимание уделяется проверке наличия навыков логического мышления, ибо последнее имеет решающее значение при изучении курса высшей математики.

Отметим наиболее часто встречающиеся ошибки, допускаемые абитуриентами на вступительных экзаменах.

На письменных экзаменах абитуриенты не всегда в состоянии правильно составить уравнение по условию задачи, не умеют, а чаще всего забывают, делать требуемых исследований области допустимых значений искомых величин и заданных в условии параметров; в задачах по тригонометрии многие теряют решения в процессе их нахождения или при записи общего вида найденных углов; большое количество ошибок и описок в вычислениях и нерациональность последних говорит об отсутствии требуемых навыков в выполнении преобразований и навыков самоконтроля.

На устных экзаменах абитуриенты затрудняются дать правильные и четкие определения основных понятий (например, понятие о вещественных числах и их классификации, понятие об абсолютной величине вещественного числа, о нулевой степени числа, об арифметическом корне, равносильности уравнений и т. п.), порой не отличают определение от теоремы; не владеют понятиями о необходимом и достаточном условиях; не умеют использовать в доказательствах метод полной математической индукции; нечетко формулируют понятие о пределе, не имеют навыков в решении примеров на нахождение пределов, требующих простейших элементарных преобразований, не владеют понятием о сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии; нечетко формулируют понятие о функции и ее графике (не знают, что такое область определения функции, или смешивают ее с областью значений, принимаемых функцией, не умеют показать на графике эти области).

Многие затрудняются (не имея выработанной схемы и навыков) в исследовании свойств функции и построении графика ее (изучение наличия свойств четности, нечетности и вытекающих отсюда свойств симметрии графика относительно оси ординат и начала координат; изучение наличия свойств периодичности и ограниченности; нахождение точек пересечения графика функции с осями координат, установление промежутков возрастания и убывания, нахождение наибольших и наименьших значений функции, изучение поведения функции в окрестности точек разрыва и на бесконечности). Некоторая часть абитуриентов недостаточно владеет техникой разложения функции на множители; многие не имеют навыков в использовании теоремы Безу, затрудняются в решении неравенств первой и второй степени и, особенно, показательных, логарифмических и тригонометрических неравенств; часть абитуриентов затрудняется в исследовании и решении уравнений (особенно иррациональных и трансцендентных) и систем уравнений (не умея иногда дать геометрическое истолкование уравнений, систем уравнений и их решений и не используя разложение на множители для нахождения решений); слабы навыки в действиях над комплексными числами, в переходе от нормальной формы комплексного числа к тригонометрической и обратно; многие не имеют четкого представления об обратной функции и построении ее графика по графику прямой функции в случае, когда независимая переменная одна и та же, в частности не понимают геометрической связи между графиками показательной и логарифмической функций и не имеют представления об обратных тригонометрических функциях. В некоторых случаях затруднения вызывали отдельные преобразования, которые необходимо уметь делать быстро (например, выделение полного квадрата из квадратного трехчлена).

Мы с глубокой благодарностью примем все критические замечания и пожелания, которые просим направлять по адресу: Казань, Центр, ул. Ленина, д. 4/5. Издательство КГУ.

Авторы.

Часть первая

ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ

РАЗДЕЛ I

АЛГЕБРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Введение

Понятие о функции. Основные определения

Пусть даны два непустых множества X и $У$. Если каждому элементу x из X сопоставлен один и только один элемент y из $У$, то говорят, что на множестве X задана функция f со множеством значений в $У$. При этом множества X и $У$ называются соответственно о б л а с т ь ю о п р е д е л е н и я и о б л а с т ь ю и з м е н е н и я функции f. Символически это записывают так:

$$y = f(x),$$

где x — аргумент, $f(x)$ или y — значение функции f.

Основными способами задания функции f являются: аналитический, табличный и графический.

В данном пособии мы рассматриваем, за редким исключением, так называемые э л е м е н т а р н ы е ф у н к ц и и. Сюда относятся прежде всего следующие классы функций:

1. $y = c$, где $c = \text{const}$.
2. $y = x^{\mu}$ (μ — вещественное число) — степенная функция.
3. $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) — показательная функция.
4. $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) — логарифмическая функция.
5. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ — тригонометрические функции.
6. $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ — обратные тригонометрические функции.

Указанные классы функций будем называть п р о с т е й ш и м и к л а с с а м и э л е м е н т а р н ы х ф у н к ц и й. Если функция f принадлежит одному из этих классов или может быть получена из таких функций при помощи четырех арифметических действий и операций взятия функции от функции, последовательно примененных конечное число раз, то мы будем называть ее элементарной функцией. Например, функции

$$y=\sqrt{x^2-a^2},\ y=\frac{3^x+3^{-x}}{2},\ y=\arcsin(\sin x),$$

$$y=\lg(x^2+x+1),\ y=\lg\sin x,\quad y=2\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2}$$

— суть элементарные функции; функция $y=|x|$ — тоже элементарная функция, ибо она может быть представлена в виде $y=\sqrt{x^2}$; функция f, заданная формулами

$$y=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 0,\\ x^2 & \text{при } x>0,\end{cases}$$

не будет элементарной, в то время как „составляющие" ее функции $y=0$ $(x\leqslant 0)$ и $y=x^2$ $(x>0)$ являются элементарными.

Из определения элементарной функции f следует, что она задается аналитически и притом в виде одной формулы. Эта формула задает закон, по которому каждому x из X ставится в соответствие y из Y.

Если при этом значение $f(x)$ функции f получается из значения аргумента x только при помощи алгебраических операций (т. е. четырех арифметических действий, возведения в степень и извлечения корня), то такая функция f называется алгебраической.

Все неалгебраические элементарные функции называются трансцендентными. Среди простейших элементарных функций, указанных выше, к трансцендентным относятся показательная, логарифмическая, тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

Алгебраические функции, заданные формулами, содержащими только четыре арифметических действия над аргументом, называются рациональными.

Рациональная функция, заданная формулой вида

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — постоянные вещественные числа, называется целой рациональной функцией или многочленом степени n.

Функция

$$y=\frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{1}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, называется дробной-рациональной функцией или рациональной дробью. Рациональная дробь (1) называется правильной (неправильной), если степень многочлена $P(x)$ меньше (больше или равна) степени многочлена $Q(x)$.

Все алгебраические функции, не являющиеся рациональными, называются **иррациональными**.

Уравнения. Основные понятия и определения

Уравнением будем называть символическую запись задачи об отыскании тех значений аргумента, при которых две функции f и g принимают равные значения:

$$f(x) = g(x). \tag{2}$$

Решить уравнение в данной числовой области G (найти решение) означает найти такие значения x_i (решения) из G, что

$$f(x_i) = g(x_i).$$

По характеру функций, входящих в их состав, уравнения классифицируются на алгебраические (рациональные, иррациональные) и трансцендентные (показательно-логарифмические, тригонометрические).

Уравнение (2) может иметь решение, если существует общая часть областей изменения функций f и g. Решения уравнения должны находиться в общей части областей определения функций f и g.

Множество значений неизвестного, в котором могут находиться решения, будем называть **областью допустимых значений неизвестного** (О. Д. З.).

Уравнения называются **равносильными**, если они имеют одно и то же множество решений.

При решении уравнения надо стараться заменять исходное уравнение ему равносильными. Если это оказывается невозможным, то допустима замена исходного уравнения его **следствием**, т. е. уравнением, в множестве решений которого содержатся все решения исходного (но могут быть и другие).

К основным равносильным преобразованиям относятся следующие:

1. $f(x) = g(x) <\!\!==\!\!> f(x) + \varphi(x) = g(x) + \varphi(x)$,*

где $\varphi(x)$ имеет смысл в О. Д. З. исходного уравнения.

2. $f(x) = g(x) <\!\!==\!\!> f(x)\varphi(x) = g(x)\varphi(x)$,

где $\varphi(x)$ не обращается в нуль в О. Д. З. исходного уравнения.

---

* $<\!\!==\!\!>$ — знак равносильности.

Все сказанное выше относится и к системам уравнений. При решении данной системы надо заменять ее равносильной системой или следствием. В случае замены исходной системы следствием необходима проверка всех найденных решений подстановкой в исходную систему.

Неравенства. Основные понятия и определения

Будем считать, что понятие числового неравенства и свойства числовых неравенств читателю известны.

В этом пособии рассматриваются две основные задачи, связанные с неравенствами: доказательство неравенств и решение неравенств.

Доказать неравенство*

$$f(a, b, c, \ldots) \vee g(a, b, c, \ldots)$$

означает установить, что данное неравенство становится верным числовым неравенством при всех значениях аргументов из данной области и при указанных связях между ними.

Неравенством, содержащим неизвестное, будем называть символическую запись задачи об отыскании областей изменения аргумента таких, что при любом значении аргумента из этих областей значения одной функции больше (меньше) значений другой функции:

$$f(x) \vee g(x). \qquad (3)$$

Решить неравенство (3) означает найти такие области (a, b)**, что при всех x из (a, b) это неравенство становится верным числовым неравенством.

Решение неравенства (3) может существовать только при наличии общей части областей определения функций f и g и необходимо входит в эту часть.

Понятие равносильности и понятие следствия, данные для уравнений, переносятся на неравенства.

При умножении обеих частей неравенства на некоторую функцию необходимо исследовать знак этой функции и в случае ее отрицательности изменить знак неравенства на противоположный:

$$f(x) > g(x) \Longleftrightarrow f(x)\varphi(x) < g(x)\varphi(x) \text{ при } \varphi(x) < 0.$$

Уравнения и неравенства с параметром. Основные понятия и определения

Мы будем называть уравнением с параметром уравнение

---

* $\vee$ — один из знаков: $<, >, \leqslant, \geqslant$.

** или области вида $(a, b]$, $[a, b]$, $[a, b)$. Область может быть также бесконечной в одну или обе стороны.

$$F(a,\ x) = 0, \tag{4}$$

определяющее x как функцию* параметра a.

Задача решения уравнения с параметром состоит в нахождении функции

$$x = f(a), \tag{5}$$

определяемой уравнением (4).

Обычно, решая уравнение с параметром (4), получают несколько функций вида (5), определенных в различных интервалах изменения параметра a.

Очень полезно, по возможности, изображать решения (5) в виде **кривых** в прямоугольной системе координат $(a,\ x)$.

Пример 1. Решить уравнение

$$ax - a = 0.$$

Решение. Уравнение можно переписать так:

$$ax = a.$$

1. $x = \frac{a}{a} = 1$ при $a \neq 0$;

2. x — любое число при $a = 0$ (рис. 1).

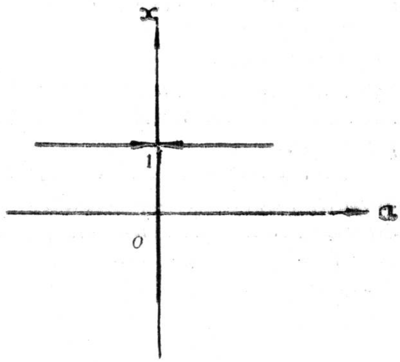


Рис. 1.

Совершенно аналогично задача решения **неравенства с параметром**

$$F(x,\ a) \vee 0 \tag{6}$$

состоит в приведении (6) к виду

$$x \vee f(a). \tag{7}$$

Геометрически решениям (7) соответствуют **области** в прямоугольной системе координат $(a,\ x)$.

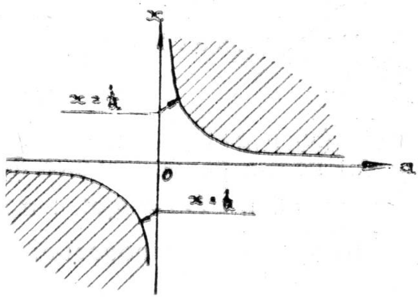


Рис. 2.

Пример 2. Решить неравенство

$$ax - 1 > 0.$$

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$ax > 1.$$

1. $x > \frac{1}{a}$ при $a > 0$;

2. $x < \frac{1}{a}$ при $a < 0$ (рис. 2).

---

* Такое задание функции называется неявным.

Теорема 1 (теорема Безу). *Остаток R от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $x-a$ равен значению этого многочлена при $x=a$, $R=P(a)$.*

Следствие. Для того, чтобы многочлен $P(a)$ делился на двучлен $x-a$ без остатка, необходимо и достаточно, чтобы число a было корнем этого многочлена, т. е. $P(a)=0$.

Если найден хотя бы один вещественный корень $x=a$ многочлена $P(x)$, то этот многочлен можно представить в виде

$$P(x)=(x-a)\;Q(x), \qquad (8)$$

где $Q(x)$ — многочлен (с вещественными коэффициентами), степень которого на единицу ниже степени многочлена $P(x)$.

Теорема 2. *Всякий многочлен n-ой степени с вещественными коэффициентами может быть представлен в виде произведения многочленов первой и второй степеней с вещественными коэффициентами, сумма степеней которых равна n.*

Теорема 3. *Два многочлена равны тогда и только тогда, когда их свободные члены и все коэффициенты при одинаковых степенях x равны между собой.*

§ 1. Рациональные уравнения

1. Определение рационального уравнения

Рациональным уравнением будем называть уравнение вида

$$f(x)=g(x), \qquad (1)$$

где $f(x)$ и $g(x)$

а) целые рациональные функции

$$f(x),\ g(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n, \qquad (2)$$

б) дробные рациональные функции

$$f(x),\ g(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^k+b_1x^{k-1}+\ldots+b_{k-1}x+b_k}. \qquad (3)$$

Как уже говорилось во введении, решение уравнения может существовать только в том случае, если существует общая часть областей изменения функций $f(x)$ и $g(x)$.

Пример 1.

$$\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{x^2+1}.$$

Решение. Это уравнение заведомо не может иметь решений, ибо левая часть его строго положительна ($f(x) > 0$), а правая строго отрицательна ($g(x) < 0$) (рис. 3).

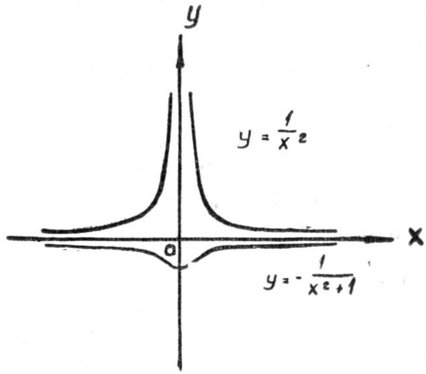


Рис. 3.

2. Область допустимых значений неизвестного в рациональных уравнениях

В уравнениях вида (2) О. Д. З. есть любые значения x, а в уравнениях вида (3) необходимо исключить те точки, в которых знаменатели обращаются в нуль.

3. Равносильность преобразований

При решении рационального уравнения может возникнуть необходимость в некоторых преобразованиях, приводящих к более простому уравнению. Здесь необходимо внимательно следить за выполнением условий, сформулированных в теоремах о равносильности уравнений во введении.

Пример 2.

$$x + 6 = x^2.$$

Какие из следующих уравнений равносильны исходному:

1. $x^2 - x - 6 = 0$.
2. $3(x + 6) = 3x^2$.
3. $x(x + 6) = x^3$.
4. $x + 6 + \frac{1}{x-3} = x^2 + \frac{1}{x-3}$.
5. $x + 6 + \frac{1}{x^2 - x - 6} = x^2 + \frac{1}{x^2 - x - 6}$.
6. $x + 6 + x^2 = x^2 + x + 6$.

Решение. Только уравнения 1 и 2 равносильны исходному; уравнение 3 является следствием исходного, появился посторонний корень $x = 0$; уравнение 4 имеет только один корень $x = -2$ (потеря решения); уравнение 5 не имеет корней; уравнение 6 является следствием исходного, оно тождественно при всех значениях x.

4. Некоторые типы рациональных уравнений. Исследование решений по параметру

А. Уравнение вида

$$ax+b=0 \qquad (4)$$

называется линейным уравнением.

Если $a \neq 0$, то (4) имеет единственное решение вида $x=-\frac{b}{a}$; если $a=0$, $b=0$, то x — любое число; если $a=0$, $b \neq 0$, то решений нет.

Б. Уравнение вида

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (5)$$

называется квадратным уравнением. При $a \neq 0$ имеет место формула для решения:

$$x_{1,2}=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Если $a=0$, то уравнение (5) является уравнением типа (4). Непосредственно изучая формулу для решения уравнения (5), можно заключить, что вещественность или невещественность решения зависит от знака разности

$$b^2-4ac \equiv D,$$

которую называют дискриминантом квадратного уравнения (5). Если $D>0$, то корни вещественные различные; если $D=0$, то — вещественные равные; если $D<0$, то — комплексные сопряженные. В более подробном изучении зависимости значений корней уравнения (5) от параметров a, b и c потребность возникает в конкретных задачах.

Корни квадратного уравнения удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

(теорема Виета).

Пример 3. Решить уравнение

$$1+kx+\frac{x^2}{a-x}=\frac{a^2}{a-x}.$$

Решение. О. Д. З. $x \neq a$.

$$1+kx=\frac{a^2-x^2}{a-x}.$$

Сокращая на знаменатель, что возможно из-за О. Д. З., получаем:

$$1 + kx = a + x \text{ и } x = \frac{1-a}{1-k} \text{ при } k \neq 1.$$

Если $k = 1$, но $a \neq 1$, то решений нет; если $k = 1$ и $a = 1$, то уравнение имеет бесчисленное множество решений, за исключением $x = 1$.

Пример 4. Решить уравнение

$$\frac{1}{x} = \frac{b}{a-x}.$$

Решение. О. Д. З. $x \neq 0$, $x \neq a$.

Имеем:

$$a - x = bx, \ (b+1)\,x = a.$$

1. Если $b \neq -1$, то $x = \frac{a}{b+1}$.

а) $x = \frac{a}{b+1} \neq 0$ справедливо при $a \neq 0$, $b \neq -1$,

б) $x = \frac{a}{b+1} \neq a$ справедливо при $b \neq 0$, $b \neq -1$.

2. Если $b = -1$ и $a \neq 0$, то $0 \cdot x = a$ и решений нет.

3. Если $b = 0$, то решения нет, т. к. тогда $x = a$.

4. Если $b = -1$ и $a = 0$, то $0 \cdot x = 0$ — бесчисленное множество решений, с учетом О. Д. З.

Ответ: $x = \frac{a}{b+1}$ при $a \neq 0$, $b \neq 0$ и $b \neq -1$; x — любое число при $b = -1$ и $a = 0$, с учетом О. Д. З.

Пример 5. При каких целых k корни квадратного уравнения

$$kx^2 - (1-2k)\,x + k - 2 = 0$$

рациональны?

Решение. Корни уравнения будут рациональны, если дискриминант является полным квадратом:

$$D = (1-2k)^2 - 4k\,(k-2) = 4k + 1.$$

Далее подбираем подходящие значения k, например: $k = 2$, 6, 12, 20, 30 и т. д.

Пример 6. При каких a корни квадратного уравнения

$$4x^2 + 8ax - 12x + 1$$

равны по абсолютной величине?

Решение. а) Если $x_1 = x_2$, то необходимо $D = 0$.

$$D=(8a-12)^2-16=64a^2-192a+128.$$

Решая уравнение

$$64a^2-192a+128=0$$

или

$$a^2-3a+2=0,$$

найдем: $a_1=1$, $a_2=2$.

б) Если $x_2=-x_1$, то по теореме Виета

$$x_1+x_2=x_1+(-x_1)=-\frac{b}{a},$$

т. е. необходимо $b=0$. Отсюда

$$8a-12=0, \text{ т. е. } a=1,5.$$

Пример 7. Найти зависимость между a и c в уравнении

$$ax^2+bx+c=0,$$

если корни его взаимно обратные числа.

Решение. По теореме Виета, т. к. $x_2=\frac{1}{x_1}$, получим:

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}, \text{ или } x_1\cdot\frac{1}{x_1}=\frac{c}{a}, \text{т. е. } \frac{c}{a}=1,\ c=a.$$

Пример 8. При каком значении p сумма квадратов корней уравнения

$$x^2+(p-2)x+p-3=0$$

принимает наименьшее значение и какое?

Решение. По теореме Виета

$$\left.\begin{aligned}x_1+x_2&=-(p-2)=2-p\\ x_1\cdot x_2&=p-3\end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned}(x_1+x_2)^2&=4-4p+p^2\\ 2x_1\cdot x_2&=2p-6\end{aligned}\right\}.$$

Тогда

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=p^2-6p+10=$$

$$=(p-3)^2+1, \text{ т. е. при } p=3 \min(x_1^2+x_2^2)=1.$$

Пример 9. При каких p и q корни уравнения

$$x^2+px+q=0$$

будут также равны p и q? Найти эти уравнения.

Решение. По теореме Виета

$$\begin{cases}p+q=-p,\\ pq=q.\end{cases}$$

Из второго уравнения замечаем, что возможны два случая: а) $q=0$, тогда p — любое, б) $q \neq 0$, тогда $p=1$. С учетом первого уравнения получим:

$$\text{а) } q=0,\ p=0, \quad \text{б) } p=1,\ q=-2.$$

Искомыми уравнениями будут

$$x^2=0 \text{ и } x^2+x-2=0.$$

В. Уравнение вида

$$ax^{2n}+bx^n+c=0 \tag{6}$$

называется трехчленным (биквадратным при $n=2$).

Подстановкой

$$x^n=t$$

это уравнение приводится к квадратному:

$$at^2+bt+c=0.$$

Возвращаясь к старой переменной x, получим $2n$ решений уравнения (6).

Пример 10. Решить уравнение

$$x^4-10x^2+1=0.$$

Решение.

$$x^2=t;\ t^2-10t+1=0.$$

$$t_{1,2}=5\pm\sqrt{24};\quad x_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{5\pm\sqrt{24}}.$$

Для биквадратного уравнения

$$x^4+px^2+q=0 \tag{6$'$}$$

при $q>0$ может иметь место другой способ решения.

Разделив обе части уравнения (6′) на x^2, получим:

$$x^2+\frac{q}{x^2}+p=0.$$

Последнее уравнение подстановкой

$$x+\frac{\sqrt{q}}{x}=t$$

приводится к квадратному.

Рассмотрим решение примера 10 данным методом.

Пример 11.

$$x^4-10x^2+1=0.$$

Решение.

$$x^2+\frac{1}{x^2}-10=0 \text{ или } x^2+2x^2\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}-10-2=0.$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=12,\ x+\frac{1}{x}=\pm\sqrt{12}.$$

1. $x+\frac{1}{x}=\sqrt{12},\ x^2-\sqrt{12}x+1=0,\quad x_{1,2}=\sqrt{3}\pm\sqrt{2}.$

2. $x+\frac{1}{x}=-\sqrt{12},\quad x^2+\sqrt{12}x+1=0,\ x_{3,4}=-\sqrt{3}\pm\sqrt{2}.$

Нетрудно убедиться в том, что результаты, внешне сильно отличающиеся, тождественны, причем результат, полученный вторым способом, красивее.

Однако второй способ применим к биквадратным уравнениям вида (6′) только при условии $q>0$. Это не случайно. Дело в том, что в этом случае, если $q=1$, уравнение (6′) является симметрическим, если $q\neq 1$, — возвратным.

Г. Уравнение вида

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_kx^{n-k}+\ldots+a_kx^k+\ldots+a_1x+a_0=0, \quad (7)$$

где коэффициенты членов, равно отстоящих от концов, равны, называется *симметрическим* уравнением.

Симметрические уравнения обладают двумя свойствами:

1. Симметрическое уравнение нечетной степени имеет корень $x=-1$.

2. Симметрическое уравнение четной степени $2n$ при помощи подстановки

$$t=x+\frac{1}{x}$$

сводится к уравнению степени n.

Из этих свойств вытекает способ решения симметрических уравнений, который заключается в следующем:

1. Если уравнение (7) имеет нечетную степень, то, используя свойство 1, понижаем степень уравнения на единицу* и получаем уравнение четной степени.

2. Производим некоторые преобразования (см. примеры 12 и 13) и применяем свойство 2.

Пример 12. Решить уравнение

$$2x^5+5x^4-13x^3-13x^2+5x+2=0.$$

Решение. Разделив обе части уравнения на $(x+1)$, получим:

$$2x^4+3x^3-16x^2+3x+2=0.$$

---

* См. Введение, формула (8).

Разделив далее обе части уравнения на x^2, получим:

$$2x^2 + 3x - 16 + 3 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x^2} = 0.$$

Сгруппируем члены уравнения следующим образом:

$$\left(2x^2 + 2\frac{1}{x^2}\right) + \left(3x + 3 \cdot \frac{1}{x}\right) - 16 = 0,$$

или

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 16 = 0;$$

введем подстановку

$$t = x + \frac{1}{x}.$$

Замечая, что

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2,$$

получим, после упрощений, квадратное уравнение

$$2t^2 + 3t - 20 = 0,$$

корни которого суть $t_1 = \frac{5}{2}$ и $t_2 = -4$. Искомое уравнение распалось на два квадратных уравнения:

1. $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$, $x_{2,3} = -2 \pm \sqrt{3}$.
2. $x + \frac{1}{x} = -4$, $x_4 = 2$, $x_5 = \frac{1}{2}$.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_{2,3} = -2 \pm \sqrt{3}$, $x_4 = 2$, $x_5 = \frac{1}{2}$.

Пример 13. Решить уравнение

$$x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Решение.

$$x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0 \ (: x^2),$$

$$x^2 - 2x - 1 - 2\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0,$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0,$$

$$x + \frac{1}{x} = t, \ x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2,$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0, \ t_1 = 3, \ t_2 = -1;$$

$$x + \frac{1}{x} = 3, \ x + \frac{1}{x} = -1.$$

Ответ: $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, $x_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

Интересно заметить, что в симметрических уравнениях мы всегда будем получать пары взаимно обратных корней.

Разобранный тип уравнений является частным видом возвратных уравнений.

Д. Уравнение вида

$$a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\dots+a_nx^{n+1}+$$
$$+a_{n+1}x^n+\dots+a_{2n}x+a_{2n+1}=0 \qquad (8)$$

называется **возвратным** уравнением нечетной степени, если его коэффициенты удовлетворяют условиям:

$$\frac{a_{2n+1}}{a_0}=\lambda^{2n+1};$$
$$\frac{a_{2n}}{a_1}=\lambda^{2n-1},$$
$$\cdots\cdots \qquad (9)$$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lambda. \text{ (λ — любое действительное число).}$$

Уравнение вида

$$a_0x^{2n}+a_1x^{2n-1}+\dots+a_{n-1}x^{n+1}+a_nx^n+$$
$$+a_{n+1}x^{n-1}+\dots+a_{2n-1}x+a_{2n}=0 \qquad (10)$$

называется **возвратным** уравнением четной степени, если его коэффициенты удовлетворяют условиям:

$$\frac{a_{2n}}{a_0}=\lambda^n,$$
$$\frac{a_{2n-1}}{a_1}=\lambda^{n-1}$$
$$\cdots\cdots \qquad (11)$$
$$\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}=\lambda.$$

При решении примеров необходимо сосчитать

$$\lambda=\frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ или } \lambda=\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}$$

и проверить, удовлетворяют ли полученные значения λ условиям (9) или (11).

Возвратные уравнения обладают двумя свойствами:

1. Возвратное уравнение нечетной степени имеет корень $x=-\lambda$.

2. Возвратное уравнение четной степени $2n$ при помощи подстановки

$$t = x + \frac{\lambda}{x}$$

сводится к уравнению степени n.

Способ решения возвратных уравнений сходен со способом решения симметрических уравнений.

Пример 14. Решить уравнение

$$x^4 + 2x^3 - 18x^2 - 10x + 25 = 0.$$

Решение. Убедимся в том, что данное уравнение является возвратным уравнением.

$$\frac{25}{1} = (-5)^2,$$

$$\frac{-10}{2} = -5,$$

т. е. $\lambda = -5$.

Разделив обе части уравнения на x^2, группируем члены уравнения следующим образом:

$$\left(x^2 + \frac{25}{x^2}\right) + 2\left(x - \frac{5}{x}\right) - 18 = 0.$$

Вводим подстановку

$$t = x - \frac{5}{x},$$

тогда

$$x^2 + \frac{25}{x^2} = t^2 + 10.$$

Решая квадратное уравнение

$$t^2 + 2t - 8 = 0,$$

получим:

$$t_1 = 2, \ t_2 = -4.$$

Возвращаясь к старой переменной x, будем иметь:

1. $x - \frac{5}{x} = 2$, $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{6}.$

2. $x - \frac{5}{x} = -4$, $x_3 = -1$, $x_4 = -5.$

5. Уравнения высших степеней. Замена переменной. Метод неопределенных коэффициентов. Искусственные приемы

В курсе высшей алгебры доказывается, что уравнения 3-й, 4-ой степеней могут быть решены в общем виде. Уравнения, степень которых выше 4-й, не могут быть решены в общем виде. В последнем случае необходимо применять некоторые частные приемы.

а) Замена переменной.

Способ заключается в том, что некоторое уравнение вида

$$f(x)=g(x),$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены степени выше 4-й, сводится к виду:

$$f_1(t)=g_1(t),$$

где $f_1(t)$ и $g_1(t)$ — многочлены степени ниже 4-й, и $t=t(x)$.

Пример 15. Решить уравнение

$$(x-2)(x-3)(x-4)=6.$$

Решение. Перепишем данное уравнение в виде

$$(x-2)\ [(x-2)-1]\ [(x-2)-2]=6,$$

обозначая

$$x-2=t,$$

после упрощений получим:

$$t^3-3t^2+2t-6=0,$$

$$t^2(t-3)+2(t-3)=0,\ (t-3)(t^2+3)=0.$$

$$t_1=3,\ t_{2,3}=\pm i\sqrt{2}.$$

Тогда

$$x_1=5,\ x_{2,3}=2\pm i\sqrt{2}.$$

Пример 16. Решить уравнение

$$x^3+6x+4x^2+3=0.$$

Решение. Перепишем данное уравнение в виде

$$x^3+3x+2x+x+3x^2+x^2+1+1+1=0,$$

или

$$(x^3+3x^2+3x+1)+(x^2+2x+1)+(x+1)=0.$$

Нетрудно заметить, что последнее уравнение можно переписать в виде

$$(x+1)^3+(x+1)^2+(x+1)=0.$$

Дальнейшие вычисления не сложны:

$$x+1=t,$$

$$t^3+t^2+t=0,\ t(t^2+t+1)=0,$$

$$t_1=0,\ t_{2,3}=-\frac{1}{2}\pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$x_1=-1,\ x_{2,3}=-\frac{3}{2}\pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Пример 17. Решить уравнение

$$x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)-5=0.$$

Решение. Обозначая

$$x-\frac{1}{x}=t,$$

заметим, что тогда $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2+2$. Будем иметь

$$t^2+2+\frac{t}{2}-5=0 \text{ или } 2t^2+t-6=0.$$

$$t_1=-2,\ t_2=\frac{3}{2}.$$

Задача свелась к решению двух квадратных уравнений:

1. $x-\frac{1}{x}=-2,\ x_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}.$

2. $x-\frac{1}{x}=\frac{3}{2},\ x_3=2,\quad x_4=-\frac{1}{2}.$

В разобранных примерах требуемую подстановку было сравнительно легко заметить. Однако это не всегда так.

Пример 18. Решить уравнение

$$x^4-2x^3+x-\frac{3}{4}=0.$$

Решение. Прибавим и вычтем в левой части уравнения x^2. Будем иметь

$$x^4-2x^3+x^2-x^2+x-\frac{3}{4}=0,$$

или

$$(x^2-x)^2-(x^2-x)-\frac{3}{4}=0.$$

Обозначая

$$x^2-x=t,$$

получим:

$$t^2-t-\frac{3}{4}=0,\ t_1=-\frac{3}{2},\quad t_2=\frac{1}{2}.$$

Возвращаясь к старой переменной, будем иметь:

$$1.\ x^2 - x + \frac{3}{2} = 0, \quad x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$2.\ x^2 - x - \frac{1}{2} = 0, \quad x_{3,4} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Пример 19. Решить уравнение

$$(a + x)^4 + (b + x)^4 = c.$$

Решение. Введем подстановку

$$t = \frac{(a + x) + (b + x)}{2},$$

откуда получим:

$$x = t - \frac{a + b}{2}.$$

Подставляя в уравнение, будем иметь:

$$\left(a + t - \frac{a + b}{2}\right)^4 + \left(b + t - \frac{a + b}{2}\right)^4 = c,$$

или

$$\left(t + \frac{a - b}{2}\right)^4 + \left(t - \frac{a - b}{2}\right)^4 = c.$$

Раскрывая скобки, получим:

$$[4t^2 + 4(a - b)t + (a - b)^2]^2 + [4t^2 - 4(a - b)t + (a - b)^2]^2 = 16c,$$
$$16t^4 + 16(a - b)t^2 + (a - b)^4 + 16t^3(a - b) + 8t^2(a - b)^2 +$$
$$+ 8(a - b)^3 t + 16t^4 + 16(a - b)t^2 + (a - b)^4 - 16t^3(a - b) +$$
$$+ 8t^2(a - b)^2 - 8(a - b)^3 t = 16c$$

или

$$16t^4 + 24(a - b)t^2 + (a - b)^4 - 8c = 0.$$

Последнее уравнение биквадратное, метод его решения уже известен.

Пример 20. Найти приемом, показанном в примере 19, вещественные решения уравнения

$$x^4 + (x - 1)^4 = \frac{1}{8}.$$

Решение. Здесь $a = 0$, $b = -1$, $c = \frac{1}{8}$. Получим уравнение

$$16t^4 + 24t^2 + 1 - 1 = 0$$

или

$$t^2(2t^2 + 3) = 0.$$

$$t_{1,2} = 0,\ t_{3,4} = \pm i\sqrt{\frac{3}{2}};\ x_{1,2} = \frac{1}{2},\ x_{3,4} = \frac{1}{2} \pm i\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

б) Разложение на множители.

Пример 21. Решить уравнение

$$x^2 - \frac{2}{3x} = 1\frac{4}{9}.$$

Решение. Перепишем данное уравнение в виде

$$x^2 - \frac{4}{9} = \frac{1}{x}\left(x + \frac{2}{3}\right).$$

Тогда будем иметь:

$$\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3} - \frac{1}{x}\right) = 0,$$

$$x_1 = -\frac{2}{3}; \quad x - \frac{2}{3} - \frac{1}{x} = 0, \; 3x^2 - 2x - 3 = 0,$$

$$x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{3}.$$

Пример 22. Решить уравнение

$$x^4 - 2x^2 - 12x - 8 = 0.$$

Решение. Будем разлагать левую часть на множители методом неопределенных коэффициентов. Предположим, что левая часть уравнения представима в виде

$$x^4 - 2x^2 - 12x - 8 = (x^2 + p_1x + q_1)(x^2 + p_2x + q_2),$$

где p_1, p_2, q_1, q_2 — целые числа.

Раскроем скобки в правой части последнего равенства и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x. Будем иметь тогда:

$$\left.\begin{aligned} &p_1 + p_2 = 0 \\ &q_1 + q_2 + p_1p_2 = -2 \\ &p_1q_2 + p_2q_1 = -12 \\ &q_1 \cdot q_2 = -8 \end{aligned}\right\}.$$

Полученную систему будем решать с учетом целочисленности неизвестных. Из последнего уравнения следует, что для q_1 возможны следующие значения: 1, 2, 4, 8, —1, —2, —4, — 8.

1. Предположим, что $q_1 = 1$. Тогда $q_2 = -8$. Так как из первого уравнения следует: $p_2 = -p_1$, то после подстановки q_1 и q_2 в третье уравнение $(q_2 - q_1)\,p_1 = -12$ получим: $q_1=1$, $q_2 = -8$, $q_2 - q_1 = -9$, $-9p_1 = -12$, $p_1 = \frac{4}{3}$ — не целое. Значит, $q_1 \neq 1$.

2. Аналогично проверяем $q_1 = 2$.

$q_1=2,\ q_2=-4,\ q_2-q_1=-6,\ \ -6p_1=-12,\ p_1=2$ — целое. Однако найденные значения $q_1=2,\ q_2=-4,\ p_1=2$ не удовлетворяют второму уравнению:

$$q_1+q_2-p_1^2=-2,$$

но

$$2-4-4\neq-2.$$

3. Пусть $q_1=4$. Тогда $q_2=-2,\ q_2-q_1=-6,\ -6p_1=-12,\ p_1=2$. Подставляя $q_1=4,\ q_2=-2,\ p_1=2$ в третье уравнение, получаем тождество:

$$4-2-4=-2.$$

Итак, заданное уравнение можно записать так:

$$(x^2+2x+4)\ (x^2-2x-2)=0.$$

1. $x^2+2x+4=0;\ x_{1,2}=-2.$
2. $x^2-2x-2=0;\ \ x_{3,4}=1\pm\sqrt{3}.$

в) Рассмотрим еще один вид подстановки, отличающийся от указанных выше.

Пример 23. Решить уравнение

$$(x+2)\ (x-3)\ (x-1)\ (x+6)=40x^2.$$

Решение. Перемножая выражения, стоящие в скобках, попарно, получим:

$$(x^2-x-6)\ (x^2+5x-6)=40x^2.$$

Введем подстановку

$$x^2-6=t.$$

Тогда уравнение принимает вид:

$$(t-x)\ (t+5x)=40x^2 \ \text{ или } \ t^2+4xt-45x^2=0.$$

Решая последнее уравнение относительно t, получим: $t_1=5x$ и $t_2=-9x$. Задача сводится к решению двух квадратных уравнений:

1. $x^2-5x-6=0;\ x_1=-1,\ x_2=6.$
2. $x^2+9x-6=0;\ x_{3,4}=\dfrac{-9\pm\sqrt{105}}{2}.$

г) Рассмотрим решение уравнения с параметром.

Пример 24. Найти вещественные решения уравнения

$$x^4-2ax^2-x-a^2-a=0.$$

Решение. Так как любое уравнение с параметром можно рассматривать как уравнение с двумя неизвестными, замечая, что данное уравнение есть квадратное относительно a, перепишем уравнение в виде

$$a^2-(2x^2+1)\ a+(x^4-x)=0$$

и решим его относительно a. Будем иметь

$$a_{1,2}=\frac{2x^2+1\pm(2x+1)}{2}$$

или

$$a_1=x^2+x+1,\ a_2=x^2-x.$$

Исходное уравнение сводится к решению двух квадратных уравнений:

1. $x^2+x+1-a=0,\ \ x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{4a-3}}{2},\ a\geqslant\dfrac{3}{4}.$

2. $x^2-x-a=0,\ x_{3,4}=\dfrac{1\pm\sqrt{4a+1}}{2},\ a\geqslant-\dfrac{1}{4}.$

Ответ: При $a\geqslant\dfrac{3}{4}$ четыре решения:

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{4a-3}}{2},\ \ x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{4a+1}}{2};$$

при $-\dfrac{1}{4}\leqslant a<\dfrac{3}{4}$ два решения:

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{4a+1}}{2}.$$

* * *

Решить следующие уравнения:

1. $x^4-2x^3-x^2-2x+1=0.$

2. $x^6-3x^5+6x^4-7x^3+6x^2-3x+1=0.$

3. $2x^8-9x^7+20x^6-33x^5+46x^4-66x^3+80x^2-72x+$
$+32=0.$

4. $m^2\ (x-2)-3m=x+1.$

5. $\dfrac{(a-x)^2-(x-b)^2}{(a-x)\ (x-b)}=\dfrac{4ab}{a^2-b^2}.$

6. $\dfrac{a^2+2x}{x-a}=\dfrac{x-a}{x+a}.$

7. $(1+x+x^2)^2=\dfrac{a+1}{a-1}(1+x^2+x^4).$

8. $\dfrac{2x}{a\,(a+x)}+\dfrac{1}{x-2a}=\dfrac{4x+6-a}{a\,(x-2a)\ (a+x)}.$

9. $(9a+b-x)^2+(a+5b-3x)^2=(7a-b+x)^2+$
$+(7a+3b-5x)^2.$

10. $\frac{a(c-d)}{x+a}+\frac{d(a-b)}{x+d}=\frac{b(c-d)}{x+b}+\frac{c(a-b)}{x+c}$.

11. $|1-|x||=a$.

§ 2. Иррациональные уравнения

1. Определение иррационального уравнения

Иррациональным уравнением будем называть уравнение

$$f(x)=g(x), \tag{1}$$

где $f(x)$ и $g(x)$

а) иррациональные функции вида

$$f(x),\ g(x)=\sqrt[2n]{\varphi(x)},\ (n=1,\ 2,\ \ldots), \tag{2}$$

б) иррациональные функции вида

$$f(x),\ g(x)=\sqrt[2n+1]{\varphi(x)}\ \ (n=1,2,\ldots). \tag{3}$$

Как уже говорилось во введении, решение уравнения (1) следует искать в О. Д. З. для неизвестного, т. е. в общей части областей определения функций $f(x)$ и $g(x)$. Решение уравнения может существовать только в том случае, если существует общая часть областей изменения функций $f(x)$ и $g(x)$.

2. Область допустимых значений неизвестного в иррациональных уравнениях

В уравнениях вида (2) О. Д. З. есть множество решений, удовлетворяющих неравенству $\varphi(x)\geqslant 0$, а в уравнениях вида (3) совпадает с естественной областью определения функции $\varphi(x)$.

Пример 1. Доказать, что следующие уравнения не имеют решений:

1. $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-5}+3=0$.
2. $\sqrt{x-5}+\sqrt{2-x}=8$.
3. $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}=1$.
4. $\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{2-x}=2$.
5. $\sqrt{x^2-4}\cdot\sqrt{4-x^2}=x$.

Решение. 1. Так как корни всегда считаются арифметическими, то левая часть уравнения при всех допустимых значениях x строго больше нуля. 2. О. Д. З. $x-5\geqslant 0$ и $2-x\geqslant 0$, т. е. $x\geqslant 5$, $x\leqslant 2$. Общая часть областей определения отсутствует. 3. О. Д. З. $x^2-1\geqslant 0$, $1-x^2\geqslant 0$, т. е. $|x|\geqslant 1$, $|x|\leqslant 1$; единственно возможно $x=1$, но $x=1$ не является решением. 4. О. Д. З. $x\geqslant 2$, $x\leqslant 2$; единственно возможно $x=2$, но $x=2$ не является решением. 5. О. Д. З. $|x|=2$, но $|x|=2$ не является решением.

Пример 2. Решить уравнение

$$x^2-2x+3=\sqrt{4-x^2}.$$

Решение. О. Д. З. $|x|\leqslant 2$. Рассмотрим области изменения правой и левой частей уравнения.

а) $f(x)=x^2-2x+3=(x^2-2x+1)+2=(x-1)^2+2$,

т. е. область изменения левой части есть

$$2\leqslant f(x)<\infty;$$

б) область изменения правой части есть

$$0\leqslant g(x)\leqslant 2.$$

Итак, единственно возможно такое решение, когда $f(x)=g(x)=2$. Но $f(x)=2$ при $x=-1$, а $g(x)=2$ при $x=0$. Эти значения x не совпадают, следовательно, решений нет (рис. 4).

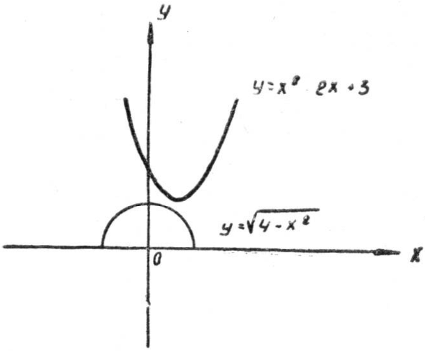


Рис. 4.

3. Равносильность преобразований

Основным преобразованием при решении иррациональных уравнений является последовательное возведение в одинаковую степень двух частей уравнений (рационализация уравнений). Это преобразование приводит к равносильному уравнению в О. Д. З. исходного уравнения при условии

$$f(x)\cdot g(x)\geqslant 0.$$

Возможны также некоторые искусственные приемы, которые будут проиллюстрированы в дальнейшем.

Пример 3. Равносильны ли следующие уравнения:

1. $\sqrt{4x^2-9}=\sqrt{7}$.
2. $\sqrt{2x-3}\cdot\sqrt{2x+3}=\sqrt{7}$.
3. $\sqrt{(2x-3)(2x+3)}=\sqrt{7}$?

Решение. Уравнения 1 и 3 равносильны. Уравнение 2 неравносильно уравнениям 1 и 3, ибо, вследствие сужения О. Д. З., теряется корень $x=-2$.

4. Общий метод решения иррациональных уравнений. (Примеры)

Пример 4. Решить уравнение

$$\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-2}=\sqrt{x+1}.$$

Решение. О. Д. З. $2x-1\geqslant 0$, $x\geqslant 2$, $x\geqslant -1$, т. е. $x\geqslant 2$. Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$2x-1+2\sqrt{2x-1}\cdot\sqrt{x-2}+x-2=x+1,$$
$$\sqrt{2x-1}\cdot\sqrt{x-2}=2-x.$$

Решение последнего уравнения должно удовлетворять неравенству $x\leqslant 2$. С учетом О. Д. З. единственно возможным является решение $x=2$. Непосредственной подстановкой в уравнение убеждаемся в том, что $x=2$ является решением.

Пример 5. Решить уравнение

$$\sqrt{2x-6}+\sqrt{x+4}=5.$$

Решение. О. Д. З. $2x-6\geqslant 0$, $x+4\geqslant 0$, т. е. $x\geqslant 3$. Уединяем радикал:

$$\sqrt{2x-6}=5-\sqrt{x+4}. \qquad (*)$$

Последнее уравнение имеет решение, если

$$5-\sqrt{x+4}\geqslant 0,$$

т. е. $5\geqslant\sqrt{x+4}$, $25\geqslant x+4$, $x\leqslant 21$, т. е. О. Д. З. $3\leqslant x\leqslant 21$. Возводя в квадрат обе части (*), получим:

$$2x-6=25-10\sqrt{x+4}+x+4,\ 10\sqrt{x+4}=35-x\ (x<35);$$
$$100x+400=1225-70x+4;\ x^2-170x+825=0.$$
$$x_1=5,\ x_2=165.$$

Ответ: $x=5$ ($x_2=165$ не подходит по О. Д. З.).

5. Освобождение от иррациональности путем тождественных преобразований радикалов. Замена переменной. (Примеры)

В следующих примерах существенно используется понятие абсолютной величины.

Пример 6. Решить уравнение

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2.$$

Решение. Будем иметь

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}-1+1}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}-1+1}=2,$$

$$\sqrt{(x-1)+2\sqrt{x-1}+1}-\sqrt{(x-1)-2\sqrt{x-1}+1}=2,$$

$$\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}=2$$

или

$$\sqrt{x-1}+1-|\sqrt{x-1}-1|=2.$$

Возможны два случая:

1. $\sqrt{x-1}-1\geqslant 0$, т. е. $\sqrt{x-1}\geqslant 1$, или $x\geqslant 2$. Тогда получим:

$$\sqrt{x-1}+1-\sqrt{x-1}+1=2,$$

что выполняется тождественно.

2. $\sqrt{x-1}-1<0$, т. е. $\sqrt{x-1}<1$, или $x<2$. Тогда получим:

$$\sqrt{x-1}+1-1+\sqrt{x-1}=2,$$

$2\sqrt{x-1}=2$, $\sqrt{x-1}=1$, $x=2$, что противоречит предположению $x<2$.

Ответ: $x\geqslant 2$.

Пример 7. Решить уравнение

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x+4+3\sqrt{2x+1}}=\sqrt{32}.$$

Решение. Пусть $\sqrt{2x-1}=t$ $(t\geqslant 0)$, тогда $x=\frac{t^2+1}{2}$.

Подставляя в уравнение, получим:

$$\sqrt{\frac{t^2+1}{2}+t}+\sqrt{\frac{t^2+1}{2}+4+3t}=\sqrt{32},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(t+1)^2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(t+3)^2}=\sqrt{32},$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(t+1)+\frac{1}{\sqrt{2}}(t+3)=\sqrt{32}.$$

Решая последнее уравнение, найдем $t=2$, откуда, возвращаясь к старой переменной x, получим $x=2{,}5$.

6. Решение уравнений вида $\sqrt{ax^2+bx+c}\pm\sqrt{ax^2+bx+d}=e$

Уравнение такого вида удобно решать следующим способом.

Припишем к данному уравнению ему сопряженное, обозначив правую часть буквой t:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}\pm\sqrt{ax^2+bx+d}=e,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}\mp\sqrt{ax^2+bx+d}=t. \quad (*)$$

Перемножая правые и левые части записанных уравнений, получим:

$$(\sqrt{ax^2+bx+c} \pm \sqrt{ax^2+bx+d})\,(\sqrt{ax^2+bx+c} \mp$$
$$\mp \sqrt{ax^2+bx+d}) = et,$$

или

$$ax^2+bx+c-ax^2-bx-d=et,$$

откуда

$$t=\frac{c-d}{e}.$$

Подставляя это значение t в (*) и складывая уравнения почленно, получим:

$$2\sqrt{ax^2+bx+c}=e+\frac{c-d}{e}, \text{ и т. д.}$$

Изложенный способ решения применим и к уравнениям вида

$$\sqrt{ax^2+bx+c} \pm \sqrt{ax^2+kx+d}=e.$$

Пример 8. Решить уравнение

$$\sqrt{x+10}-\sqrt{x+1}=1.$$

Решение.

$$\sqrt{x+10}-\sqrt{x+1}=1,$$
$$\sqrt{x+10}+\sqrt{x+1}=t,$$

перемножаем

$$x+10-x-1=t,\ t=9.$$

Складываем:

$$2\sqrt{x+10}=10,\ x=15.$$

Пример 9. Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1.$$

Решение.

$$\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1,$$
$$\sqrt{3x^2+5x+8}+\sqrt{3x^2+5x+1}=t.$$

Перемножая, получим $t=7$. Складываем:

$$2\sqrt{3x^2+5x+8}=8;\ 3x^2+5x+8=16;$$
$$3x^2+5x-8=0.\ x_1=-\frac{8}{3},\ x_2=1.$$

7. Решение уравнений, содержащих кубические радикалы

Основным методом решения уравнений с кубическими радикалами является последовательное возведение обеих частей уравнения в куб. Эту операцию удобно производить по формуле

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab\,(a \pm b).$$

Пример 10. Показать, что уравнение

$$\sqrt[3]{ax+b} + \sqrt[3]{c-ax} = d$$

после трехкратного возведения в куб принимает вид

$$(ax+b)\ (c-ax) = \frac{(d^3-b-c)^3}{27d^3}.$$

Пример 11. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{15+2x} + \sqrt[3]{13-2x} = 4,$$

используя результат примера 10.

Ответ: $x_1 = -7, \quad x_2 = 6$.

Пример 12. Решить уравнение в области вещественных чисел

$$\sqrt[3]{2x+4} + \sqrt[3]{x-3} = 1.$$

Решение. Возведя обе части уравнения в куб, получим:

$$2x+4) + (x-3) + 3\sqrt[3]{(2x+4)(x-3)}\left(\sqrt[3]{2x+4} + \sqrt[3]{x-3}\right) = 1.$$

После упрощений, с учетом того, что выражение, стоящее в квадратных скобках, равно 1, получим:

$$\sqrt[3]{(2x+4)(x-3)} = -x.$$

Возведя обе части уравнения в куб, получим:

$$x^3 + 2x^2 - 2x - 12 = 0.$$

Разложив левую часть на множители, будем иметь:

$$(x-2)\ (x^2+4x+6) = 0,$$

откуда $x = 2$.

8. Иррациональные уравнения с параметрами

В иррациональных уравнениях с параметрами необходимо особенно тщательно следить за равносильностью преобразований. Как правило, необходимо устанавливать как О. Д. З.

неизвестного, так и О. Д. З. параметров, причем эти области связаны. Обычно при различных ограничениях по параметру уравнение имеет различные решения.

Пример 13. Решить уравнение

$$\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x.$$

Установим, при каких значениях x и a уравнение может иметь решение.

Очевидно, необходимо выполнение трех условий:

$$1)\ x\geqslant 0,\quad 2)\ a+x\geqslant 0,\quad 3)\ a-\sqrt{a+x}\geqslant 0.$$

Из второго неравенства получим $x\geqslant -a$, из третьего — $a\geqslant\sqrt{a+x}$, что имеет смысл только при $a\geqslant 0$. Но тогда условие 1) включает в себя условие $x\geqslant -a$. Решая третье неравенство, получим:

$$a^2>a+x \quad \text{или} \quad x\leqslant a^2-a.$$

Итак, окончательно получим:

О. Д. З. $0\leqslant x\leqslant a^2-a$ при $a\geqslant 1$; $x=0$ при $a=0$ (рис. 5).

Читатель может подумать здесь, стоит ли проводить эти исследования, не проще ли решать это уравнение, формально возведя обе части несколько раз в квадрат и проверив полученные результаты подстановкой в исходное уравнение.

Но дело в том, что результат может получиться громоздкий, и проверка тогда будет весьма затруднительна. Кроме того, проводя решение предлагаемым методом, читатель получит определенные навыки в методах, без владения которыми невозможно будет решение неравенств с параметрами, где проверка вообще невозможна.

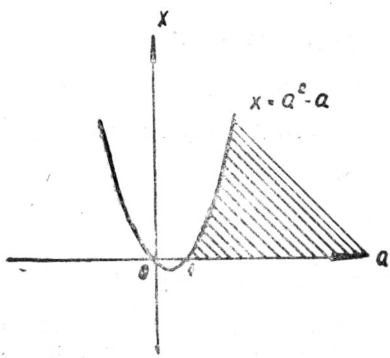


Рис. 5.

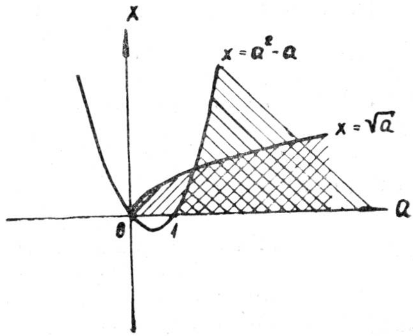


Рис. 6.

Итак, вернемся к нашему примеру. Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$a-\sqrt{a+x}=x^2 \text{ или } \sqrt{a+x}=a-x^2.$$

Последнее уравнение может иметь решение только в области (рис. 6) $a-x^2 \geqslant 0$ (*).

Возведя еще раз в квадрат, получим уравнение 4-й степени:

$$a+x=a^2-2ax^2+x^4 \text{ или } a^2-(2x^2+1)\,a+(x^4-x)=0.$$

Замечая, что последнее уравнение есть квадратное относительно a, решим его относительно параметра

$$a_{1,2}=\frac{2x^2+1\pm\sqrt{(2x^2+1)^2-4x^2+4x}}{2}.$$

$$1)\ a_1=x^2-x, \qquad 2)\ a_2=x^2+x+1.$$

Рассматривая уравнение 1), заметим, что условию (*) в О. Д. З. удовлетворяет только решение $x=0$ при $a=0$ (рис. 7).

В уравнении 2) $x^2+x+(1-a)=0$ положительным решением может быть только

$$x=\frac{-1+\sqrt{4a-3}}{4}.$$

Это значение x очевидно вещественно и положительно в О. Д. З.

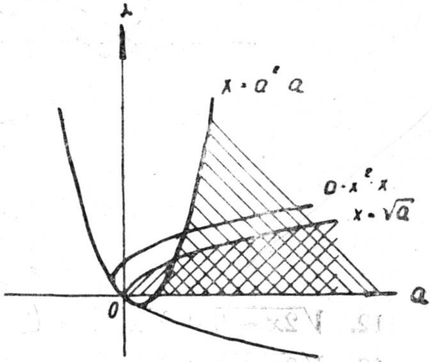


Рис. 7.

Проверим, выполняется ли условие (*), т. е. $|x| \leqslant \sqrt{a}$ или $x \leqslant \sqrt{a}$. Необходимо:

$$\frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2} \leqslant \sqrt{a}.$$

Решим последнее неравенство:

$$-1+\sqrt{4a-3} \leqslant 2\sqrt{a},\ \sqrt{4a-3} \leqslant 2\sqrt{a}+1,$$

$$4a-3 \leqslant 4a+4\sqrt{a}+1,\ 4\sqrt{a} \geqslant -4,$$

что справедливо при всех $a \geqslant 0$.

Проверим, наконец, удовлетворяет ли найденное значение О. Д. З. Необходимо:

$$\frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2} \leqslant a^2-a.$$

Решим последнее неравенство:

$$\sqrt{4a-3} \leqslant 2a^2-2a+1,$$

$$4a-3 \leqslant 4a^4+4a^2+1-8a^3+4a^2-4a,$$

$$4a^4-8a^3+8a^2-8a+4 \geqslant 0,$$

$$a^4-2a^3+2a^2-2a+1 \geqslant 0,$$

$$(a^4-2a^3+a^2)+(a^2-2a+1) \geqslant 0,$$

$$a^2(a^2-2a+1)+(a^2-2a+1) \geqslant 0,$$

$$(a-1)^2(a^2+1) \geqslant 0.$$

Последнее неравенство выполняется при всех a.

Ответ: $x=0$ при $a=0$;

$$x=\frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2} \text{ при } a \geqslant 1 \text{ (рис. 8).}$$

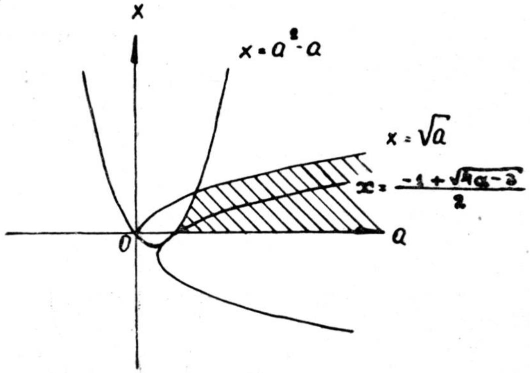


Рис. 8.

* * *

12. $\sqrt{2x-6}+\sqrt{x+4}=5.$

13. $\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4}=5.$

14. $\sqrt{x+1}-1-\sqrt{\frac{x-1}{x}}=0.$

15. $\frac{\sqrt[5]{3+x}}{3}+\frac{\sqrt[5]{3+x}}{x}=\frac{64}{3}\sqrt[5]{x}.$

16. $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}.$

17. $\sqrt{a^2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}=2b.$

18. $\sqrt{x-4a+16}=2\sqrt{x-2a+4}-\sqrt{x}.$

19. $\sqrt{ax+1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{(a-1)x}.$

20. $(x-a)\sqrt{x}-(x+a)\sqrt{b}=b(\sqrt{x}-\sqrt{b}).$

21. $\dfrac{(a-x)\sqrt{a-x}-(b-x)\sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}}=a-b.$

22. $$(a-x)\sqrt{b+x}-(b+x)\sqrt{a-x}=$$
$$=ab\left(\frac{1}{\sqrt{b+x}}-\frac{1}{\sqrt{a-x}}\right).$$

23. $\sqrt[m]{(1+x)^2}-\sqrt[m]{(1-x)^2}=\sqrt[m]{1-x^2}.$

24. $\sqrt[3]{(x+a)^2}+\sqrt[3]{(x-a)^2}+\sqrt[3]{x^2-a^2}=\sqrt[3]{a^2}.$

25. $\sqrt{x+1}=1+\sqrt{\dfrac{x-1}{a}}.$

26. $\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=a\sqrt{x}.$

27. $\sqrt[5]{\dfrac{a+x}{a}}+\sqrt[5]{\dfrac{a+x}{b}}=\sqrt[5]{\dfrac{x}{ab}}.$

28. $\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}+\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}=\sqrt{\dfrac{b+x}{b-x}}+\sqrt{\dfrac{b-x}{b+x}}.$

§ 3. Показательно-логарифмические уравнения

Показательно-логарифмическим уравнением будем называть уравнение, в котором неизвестное входит в показатель степени или находится под знаком логарифма.

Невозможно рассматривать отдельно показательные и логарифмические уравнения, ибо нередко в методах решения показательных уравнений приходится использовать логарифмирование, а логарифмические уравнения часто приводятся к показательным.

Итак, мы вынуждены рассматривать некоторый общий тип уравнений. Невозможно абсолютно точно классифицировать показательно-логарифмические уравнения по методам решения, ибо часто одно и то же уравнение можно решать разными способами. Однако существуют определенные виды уравнений, которые встречаются более часто. Изучение методов решения последних будет способствовать успешному решению более сложных примеров.

Далее мы приводим некоторую классификацию уравнений, которая, в связи с вышеизложенным, не может претендовать на абсолютную полноту. Для удобства ссылок будем объединять уравнения в типы.

1. Типы показательно-логарифмических уравнений

Тип 1. Рассмотрим показательные уравнения, в решении которых после некоторых преобразований используются свойства

$$a^{f(x)} = a^{\varphi(x)} \Longrightarrow f(x) = \varphi(x) \quad (a \neq 1)$$

$$a^{f(x)} = b^{f(x)} \Longrightarrow f(x) = 0 \quad (a \neq 1,\ b \neq 1,\ a \neq b).$$

Пример 1. Решить уравнение

$$2^{12x-1} - 4^{6x-1} + 8^{4x-1} - 16^{3x-1} = 1280.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$2^{12x-1} - 2^{12x-2} + 2^{12x-3} - 2^{12x-4} = 1280.$$

Далее будем иметь

$$2^{12x-4}(2^3 - 2^2 + 2 - 1) = 1280,\ 5 \cdot 2^{12x-4} = 1280,$$

$$2^{12x-4} = 256,\ 2^{12x-4} = 2^8,\ 12x - 4 = 8,\ x = 1.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$2\left(2^{\sqrt{x+3}}\right)^{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}} - \sqrt[\sqrt{x}-1]{16} = 0.$$

Решение. О. Д. З. $x \geqslant 0,\ x \neq 1$.
Перепишем уравнение в виде

$$2^{1+\frac{\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}}} = 2^{\frac{4}{\sqrt{x}-1}}.$$

Тогда будем иметь:

$$1 + \frac{\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}} = \frac{4}{\sqrt{x}-1},\quad 3(x-1) = 8\sqrt{x} \quad (x > 1),$$

$$9(x^2 - 2x + 1) = 64x,\quad x_1 = 9,\ x_2 = \frac{1}{9} \text{ (не подходит)}.$$

Пример 3. Решить уравнение

$$6^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 2^{x+8}.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$3^{2x+4} \cdot 2^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 2^{x+8}.$$

Используя далее свойство членов пропорции, будем иметь:

$$\frac{2^{2x+4}}{2^{x+1}} = \frac{3^{3x}}{3^{2x+4}} \text{ или } 2^{x-4} = 3^{x-4},\ \text{т. е. } x = 4.$$

Пример 4. Решить уравнение

$$\sqrt{7^{2x^2-5x-9}} = (\sqrt{2})^{3\log_2 7}.$$

Решение. Используя тождество $a^{\log_a b} = b$, преобразуем правую часть уравнения. Будем иметь:

$$7^{\frac{2x^2-5x-9}{2}} = 7^{\frac{3}{2}}.$$

Ответ: $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = 4$.

Тип 2. Рассмотрим уравнения, которые после некоторых преобразований подстановкой

$$a^{f(x)} = t$$

приводятся к алгебраическим.

Пример 5. Решить уравнение

$$4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6.$$

Решение. О. Д. З. $|x| \geqslant \sqrt{2}$.

Перепишем уравнение в виде

$$2^{2(x+\sqrt{x^2-2})} - \frac{5}{2} \cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}} - 6 = 0$$

и введем подстановку

$$2^{x+\sqrt{x^2-2}} = t > 0.$$

Тогда

$$t^2 - \frac{5}{2}t - 6 = 0, \text{ т. е. } t_1 = 4,\ t_2 = -\frac{3}{2} \text{ (не подходит)},$$

$$2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 4,\ x + \sqrt{x^2-2}, \quad x = \frac{3}{2}.$$

Пример 6. Решить уравнение

$$\sqrt[x]{3} - \sqrt[2x]{3} = 2.$$

Решение. Обозначая

$$\sqrt[2x]{3} = t > 0,$$

получим:

$$t^2 - t - 2 = 0, \text{ т. е. } t_1 = 2,\ t_2 = -1 \text{ (не подходит)},$$

$$3^{\frac{1}{2x}} = 2,\ \frac{1}{2x} = \lg_3 2, \quad x = \frac{1}{2\log_2 3} = \frac{\lg 3}{2\lg 2}.$$

Тип 3. Рассмотрим трехчленные уравнения, члены которых представляют собой степени с одинаковыми показателями и различными основаниями. Уравнения эти весьма специфичны и составлены с расчетом на приведение к алгебраическим в результате почленного деления на одну из степеней.

Пример 7.

$$6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x = 0.$$

Решение. Разделим обе части уравнения почленно на $9^x \neq 0$. Будем иметь:

$$6\left(\frac{4}{9}\right)^x - 13\left(\frac{6}{9}\right)^x + 6 = 0,$$

или

$$6\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 13\left(\frac{2}{3}\right)^x + 6 = 0.$$

Решая квадратное уравнение, получим:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2}, \quad \text{т. е. } x_1 = -1,$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3}, \quad \text{т. е. } x_2 = 1.$$

Пример 8. Решить уравнение

$$7 \cdot 4^{x^2} - 9 \cdot 14^{x^2} + 2 \cdot 49^x = 0.$$

Решение. Разделив на $4^{x^2} \neq 0$, получим:

$$7 - 9\left(\frac{14}{4}\right)^{x^2} + 2\left(\frac{49}{4}\right)^{x^2} = 0,$$

или

$$2\left(\frac{7}{2}\right)^{2x^2} - 9\left(\frac{7}{2}\right)^{x^2} + 7 = 0.$$

Решая квадратное уравнение, получим:

$$\left(\frac{7}{2}\right)^{x^2} = \frac{7}{2}, \text{ т. е. } x_1 = -1, \ x_2 = 1.$$

$$\left(\frac{7}{2}\right)^{x^2} = 1, \text{ т. е. } x_3 = 0.$$

Тип 4. Метод решений уравнений вида

$$(a + b)^x + (a - b)^x = c, \text{ где } a^2 - b^2 = 1,$$

связан с условием, наложенным на основания степеней:

$$(a + b)^x + \frac{(a - b)^x \cdot (a + b)^x}{(a + b)^x} = c,$$

или $(a+b)^x + \frac{1}{(a+b)^x} = c$ — квадратное уравнение относительно $(a+b)^x$.

Пример 9. Решить уравнение

$$(4+\sqrt{15})^x + (4-\sqrt{15})^x = 62.$$

Решение. Обозначая

$$(4+\sqrt{15})^x = t,$$

получим:

$$t + \frac{1}{t} = 62,$$

$$t = 31 \pm \sqrt{961-1} = 31 \pm 8\sqrt{15} = 16 \pm 2\cdot 4\sqrt{15} + 15 = \\ = (4 \pm \sqrt{15})^2.$$

Итак

1. $(4+\sqrt{15})^x = (4+\sqrt{15})^2$, откуда $x = 2$.

2. $(4+\sqrt{15})^x = (4-\sqrt{15})^2 = (4+\sqrt{15})^{-2}$, откуда $x = -2$.

В рассмотренных типах уравнений мы имеем в качестве О. Д. З. преимущественно любые числа. В следующих типах неизвестное будет содержаться под знаком логарифма, в связи с этим О. Д. З. существенно будет влиять на решение.

Тип 5. Рассмотрим уравнения, приводящиеся к уравнению

$$\log_a f(x) = \log_a \varphi(x), \quad \text{где } f(x),\ \varphi(x) > 0.$$

Пример 10. Решить уравнение.

$$\frac{1}{2}\lg(x^2-10x+25) + \lg(x^2-6x+3) = 2\lg(x-5) + \frac{1}{2}\lg 25.$$

Решение. О. Д. З. $x > 5$.

$$\lg\sqrt{(x-5)^2} + \lg(x^2-6x+3) = \lg(x-5)^2 + \lg 5.$$

С учетом О. Д. З., получим

$$(x-5)(x^2-6x+3) = (x-5)^2 \cdot 5.$$

Разделив обе части уравнения на $(x-5) \neq 0$ и упростив, получим:

$$x^2 - 11x + 28 = 0, \text{ т. е. } x_1 = 7,\ x_2 = 4 \text{ (не подходит).}$$

Пример 11. Решить уравнение

$$\frac{1}{10}\lg\sqrt[3]{x^2-4x+4} - \frac{1}{2}\lg x - \lg\frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$

Решение. О. Д. З. $x > 0,\ x \neq 2$.

Так как левая часть

$$\frac{1}{10}\lg\sqrt[3]{x^2 - 4x + 4} = \frac{1}{10}\cdot\frac{2}{3}\lg|x-2| = \frac{1}{15}\lg|x-2|,$$

а правая часть

$$\lg\frac{1}{\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}\lg x,$$

будем иметь

$$\frac{1}{15}\lg|x-2| - \frac{1}{2}\lg x + \frac{1}{2}\lg x = 0,$$

т. е.

$$\lg|x-2| = 0, \quad |x-2| = 1, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 3.$$

Тип 6. В уравнениях этого типа, для представления некоторых членов уравнения в виде логарифмов, существенно используется тождество $a^{\log_a b} = b$.

Пример 12. Решить уравнение

$$\lg_4(25^x - 4\cdot 5^x + 43) = 2 + \lg_4 3.$$

Решение. Выясним, при каких x определена левая часть уравнения

$$25^x - 4\cdot 5^x + 43 > 0 \text{ или } 5^{2x} - 4\cdot 5^x + 43 > 0.$$

Дискриминант этого трехчлена отрицателен, так что x может быть любым числом. Представляя число 2 в виде $\lg_4 16$ и потенцируя, получим:

$$\lg_4(25^x - 4\cdot 5^x + 43) = \lg_4(16\cdot 3).$$

Остается решить показательное уравнение типа 2.

$$5^{2x} - 4\cdot 5^x - 5 = 0.$$

Ответ: $x = 1$.

Пример 13. Решить уравнение

$$x + \lg(1 + 2^x) = x\lg 5 + \lg 6.$$

Решение. О. Д. З. x — любое число.

Представляя x в виде $\lg 10^x$, получим:

$$\lg[10^x(1 + 2^x)] = \lg(5^x\cdot 6)$$

или

$$5^x\cdot 2^x + 5^x\cdot 2^{2x} = 5^x\cdot 6.$$

Решая уравнение

$$2^{2x} + 2^x - 6 = 0,$$

получим:

1. $2^x = -3$ (не может быть),
2. $2^x = 2$, т. е. $x = 1$.

Пример 14. Решить уравнение

$$4^{\lg_{64}(x-3)+\lg_2 5}=50.$$

Решение. Воспользуемся соотношениями

$$a^{\lg_a b}=b \text{ и } \lg_a b=\lg_{a^n} b^n .$$

Тогда

$$4^{\lg_4 \sqrt[3]{x-3}}\cdot 4^{\lg_4 25}=50.$$

Отсюда

$$25\sqrt[3]{x-3}=50,\ x=11.$$

Тип 7. Рассмотрим уравнения, приводящиеся к алгебраическим относительно логарифма.

Пример 15. Решить уравнение

$$3\sqrt{\lg x}+2\lg\sqrt{\frac{1}{x}}=2.$$

Решение. О. Д. З. $x\geqslant 1$.

Перепишем уравнение в виде

$$3\sqrt{\lg x}+2\left(-\frac{1}{2}\lg x\right)=2$$

или

$$(\sqrt{\lg x})^2-3\sqrt{\lg x}+2=0.$$

Дальнейшее очевидно.

Ответ: $x_1=10,\quad x_2=10^4$.

Пример 16. Решить уравнение

$$\sqrt{\lg(-x)}=\lg\sqrt{x^2}.$$

Решение. О. Д. З. $x\leqslant -1$.

С учетом О. Д. З., получаем уравнение:

$$\sqrt{\lg(-x)}=\lg(-x),\ \sqrt{\lg(-x)}\ \left(1-\sqrt{\lg(-x)}\right)=0.$$

Ответ: $x_1=-10,\ x_2=-1$.

Пример 17. Решить уравнение

$$\lg_3(3^x-1)\cdot\lg_3(3^{x+1}-3)=6.$$

Решение. О. Д. З. $x>0$.

Так как

$$\lg_3(3^{x+1}-3)=\lg_3[3\cdot(3^x-1)]=1+\lg_3(3^x-1),$$

то уравнение принимает вид:

$$\lg_3^2(3^x-1)+\lg_3(3^x-1)-6=0.$$

Решая последнее уравнение, получим:

$$\lg_3(3^x-1)=-3 \text{ и } \lg_3(3^x-1)=2.$$

1. $3^x-1=3^{-3}$, т. е. $3^x=\frac{28}{27}$ и $x=\lg_3 28-3$.

2. $3^x-1=3^2$, т. е. $3^x=10$ и $x=\lg_3 10$.

Тип 8. Рассмотрим так называемые степенно-показательные уравнения, т. е. такие уравнения, в которых неизвестное входит как в основание, так и в показатель степени. Подобные уравнения чаще всего решаются при помощи логарифмирования обеих частей уравнения.

Пример 18. Решить уравнение

$$15^{\lg_5 3}\cdot x^{\lg_5 9x+1}=1.$$

Решение. О. Д. З. $x>0$, $x\neq 1$.

Так как $15^{\lg_5 3}=(5\cdot 3)^{\lg_5 3}=3\cdot 3^{\lg_5 3}$, а $x^{\lg_5 9x+1}=x\cdot x^{2\lg_5 3+\lg_5 x}$, будем иметь:

$$3\cdot 3^{\lg_5 3}\cdot x\cdot x^{2\lg_5 3+\lg_5 x}=1.$$

Логарифмируя обе части уравнения по основанию 5, получим

$$\lg_5 3+\lg_5 3\cdot\lg_5 3+\lg_5 x+(2\lg_5 3+\lg_5 x)\lg_5 x=0,$$

или после упрощений

$$\lg_5^2 x+(2\lg_5 3+1)\lg_5 3+\lg_5^2 x+\lg_5 3=0.$$

Решая последнее квадратное уравнение относительно $\lg_5 x$, получим:

$$\lg_5 x=-\lg_5 3 \text{ и } \lg_5 x=-\lg_5 3-1.$$

Ответ: $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=\frac{1}{15}$.

Пример 19. Решить уравнение

$$x^{\lg^2 x+\lg x^3+3}=\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}}.$$

Решение. О. Д. З. $x>0$.

Произведем преобразования в правой части данного уравнения, тогда уравнение принимает вид

$$x^{\lg^2 x+\lg x^3+3}=x.$$

Логарифмируя обе части уравнения по основанию 10, получим:

$$(\lg^2 x + \lg x^3 + 3)\lg x = \lg x$$

или

$$\lg x(\lg^2 x + \lg x^3 + 2) = 0.$$

1. $\lg x = 0$, $x_1 = 1$.
2. $\lg x = -1$, $x_2 = 0{,}1$.
3. $\lg x = -2$, $x_3 = 0{,}01$.

Тип 9. Логарифмические уравнения с логарифмами по разным основаниям решаются после предварительного приведения всех логарифмов к одному основанию.

Пример 20. Решить уравнение

$$\lg_x 3 \cdot \lg_{\frac{x}{3}} 3 + \lg_{\frac{x}{81}} 3 = 0.$$

Решение. О. Д. З. $x > 0$, $x \neq 1$, $x \neq 3$, $x \neq 81$. Целесообразно привести все логарифмы к основанию 3

$$\frac{1}{\lg_3 x} \cdot \frac{1}{\lg_3 \frac{x}{3}} + \frac{1}{\lg_3 \frac{x}{81}} = 0,$$

или, после приведения к общему знаменателю,

$$\frac{\lg_3 x - 4 + \lg_3 x(\lg_3 x - 1)}{\lg_3 x \cdot \lg_3 \frac{x}{3} \cdot \lg_3 \frac{x}{81}} = 0.$$

После упрощения получим:

$$\lg_3^2 x = 4, \quad \text{т. е.} \quad \lg_3 x = \pm 2.$$

Ответ: $x_1 = \frac{1}{9}$, $x_2 = 9$.

2. Показательно-логарифмические уравнения с параметром

Наличие параметра в показательно-логарифмических уравнениях не влияет существенно на методы их решений. Как правило, параметр играет значительную роль при нахождении О. Д. З. и отборе решений уравнения.

Пример 21. Решить уравнение

$$\lg_a(a + \sqrt{a + x}) = \frac{2}{\lg_x a}.$$

Решение. О. Д. З. $x > 0$, $x \neq 1$; $a > 0$, $a \neq 1$.

Преобразуем правую часть уравнения

$$\lg_a\left(a+\sqrt{a+x}\right)=\lg_a x^2.$$

Потенцируя, получим:

$$a+\sqrt{a+x}=x^2.$$

С подобным уравнением мы уже встречались **(см. § 2).** Рассмотрим несколько способов его решения.

Первый способ.

$$\sqrt{a+x}=x^2-a \quad (x^2>a),$$

$$a+x=x^4-2ax^2+a^2, \quad a^2-(2x^2+1)\,a+(x^4-x)=0,$$

$$a_{1,2}=\frac{2x^2+1\pm(2x+1)}{2}.$$

Наше уравнение распалось на два квадратных уравнения

$$a=x^2+x+1 \quad \text{и} \quad a=x^2-x.$$

Заметим, прежде всего, что первое из полученных уравнений не имеет решений в О. Д. З.

$$(x^2-a)+x+1\neq 0, \text{ ибо } x^2-a>0, \quad x>0.$$

Решая второе уравнение, получим:

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{4a+1}}{2}.$$

В О. Д. З. входит лишь $x=\dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$.

Второй способ.

Запишем уравнение в виде

$$a+\sqrt{a+x}=x^2$$

и прибавим к обеим частям уравнения x:

$$a+x+\sqrt{a+x}=x^2+x.$$

Обозначая для удобства дальнейших рассуждений

$$\sqrt{a+x}=b,$$

получим:

$$b^2+b=x^2+x, \; (x^2-b^2)+(x-b)=0, \; (x-b)(x+b+1)=0.$$

Очевидно, нулю может быть равен только первый множитель. Остается решить уравнение

$$x - \sqrt{a+x} = 0 \text{ или}$$

$$x^2 - x - a = 0,$$

решение которого уже найдено выше.

Третий способ.

Запишем уравнение еще раз

$$x^2 - a = \sqrt{a+x}$$

и обозначим

$$y_1 = x^2 - a \quad \text{и} \quad y_2 = \sqrt{a+x}.$$

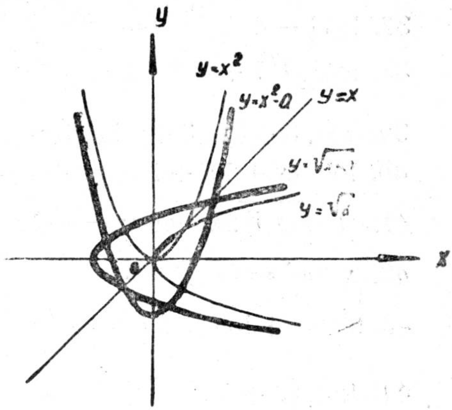


Рис. 9.

Воспользуемся следующим обстоятельством.

Графики функций $\overline{y}_1 = x^2$ и $\overline{y}_2 = \sqrt{x}$ представляют собой параболы ($\overline{y}_2 = \sqrt{x}$ только положительная ветвь), симметричные относительно прямой $y = x$, и имеют точку пересечения, общую с этой прямой. Но тогда, в силу того, что графики функций $y_1 = x^2 - a$ и $y_2 = \sqrt{a+x}$ получаются сдвигом графиков функций $\overline{y}_1 = x^2$ и $\overline{y}_2 = \sqrt{x}$ на отрезок a вниз и влево ($a > 0$) (рис. 9), они тоже пересекаются на прямой $y = x$ и решение исходного уравнения можно заменить решением одного из следующих двух уравнений:

$$x^2 - a = x \, (y_1 = x) \quad \text{или} \quad \sqrt{a+x} = x \; (y_2 = x),$$

которые по существу одинаковые.

* * *

29. $6^{x+1} + 3^{x+1} = 3^{x+2} - 6^x + 3^x.$

30. $12 \sqrt[2x]{3} - \sqrt[x]{3} = 27.$

31. $4^{-\frac{1}{x}} + 6^{-\frac{1}{x}} = 9^{-\frac{1}{x}}.$

32. $4^{x+1,5} + 9^x = 6^{x+1}.$

33. $3^{1-x} - 3^{1+x} + 9^x + 9^{-x} = 6.$

34. $3(3 - \lg 0,5) - \lg 5 = 3 \lg x + 9 \lg 5.$

35. $\dfrac{\lg (56 - x^3)}{\lg (2 - x)} = 3.$

36. $4 \lg \sqrt{\dfrac{1}{x}} = 2 - 5 \sqrt{\lg x}.$

37. $\lg(1-4^{-1}\,2^{\sqrt{x}})=\lg\sqrt{2^{\sqrt{x}}+2}-2\lg 2.$

38. $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{1+x}+3\log_{\frac{1}{4}}(1-x)=\log_{\frac{1}{16}}(1-x^2)^2+2.$

39. $2\lg_x 3+\lg_{3x}3+3\lg_{9x}3=0.$

40. $\log_2(x+1)^2+\log_2|x+1|=6.$

41. $\sqrt{\log_x\sqrt{2x}}\cdot\log_2 x=-1.$

42. $x^{\log_a x}=(a^{\pi})^{\log_a^3 x}.$

43. $9^{\log_{25}x^2}+\log_{\sqrt{2}}2\sqrt{2}=\frac{1}{2}\left(9^{\log_{25}x+1}-9^{\log_{25}x}\right).$

44. $\log_3(3+\sqrt{3+x})=\frac{2}{\log_x 3}.$

45. $\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_3\sqrt{x+1}-\frac{1}{2}\log_3(x^2-1)}=\sqrt{2(x-1)}.$

46. $\lg\sqrt{1+x}+3\lg\sqrt{1-x}=\lg\sqrt{1-x^2}+2.$

47. $a^{\frac{2}{x}}+b^{\frac{2}{x}}=m\,(ab)^{\frac{1}{x}},\ a\geqslant 0,\ b\geqslant 0.$

48. $\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x-\left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^x=1.$

49. $\log_9(2\cdot 3^x-m\cdot 3^x+2^{\log_2 m-1})=10^{\lg(x+\log_3\sqrt{2})}.$

50. $1+\log_x\frac{4-x}{10}=(\lg\lg a-1)\lg_x 10.$

51. $1+\log_b(21\lg a-x)\log_x b=\frac{2}{\log_b x}.$

§ 4. Уравнения с несколькими неизвестными

Рассмотрим уравнение вида

$$F(x,\ y)=0. \qquad (1)$$

Очевидно, что в общем случае уравнение (1) имеет бесчисленное множество решений. Однако в некоторых случаях, вследствие ограничений по О. Д. З. или дополнительных условий задачи, возможно существование конечного числа решений. Рассмотрим несколько задач такого рода.

Пример 1. Решить уравнение

$$\log_2\left(xy+\frac{1}{xy}\right)=1-(x+y-2)^2.$$

Решение. О. Д. З. $xy>0$.

Очевидно, что $xy+\frac{1}{xy}\geqslant 2$ и, следовательно,

$$\log_2\left(xy+\frac{1}{xy}\right)\geqslant 1.$$

Тогда, для того, чтобы уравнение имело решение, необходимо выполнение неравенства

$$1-(x+y-2)^2\geqslant 1.$$

Единственно возможный случай:

$$1-(x+y-2)^2=1, \quad \text{т. е.} \quad x+y-2=0. \ (*)$$

Но тогда и левая часть уравнения должна быть равна единице:

$$\log_2\left(xy+\frac{1}{xy}\right)=1, \ \text{т. е.} \ xy+\frac{1}{xy}=2. \ (**)$$

Решая систему из полученных условий (*) и (**)

$$\left.\begin{aligned} x+y&=2\\ xy&=1\end{aligned}\right\},$$

получим: $x=1$, $y=1$, что является единственным решением исходного уравнения.

Пример 2. Найти целочисленные решения системы

$$\left.\begin{aligned} x^{x+y}&=y^n\\ y^{x+y}&=x^{2n}y^n\end{aligned}\right\},$$

где $x>0$, $y>0$, n — целое число.

Решение. Эту систему двух уравнений с двумя неизвестными удобно решать, составив неопределенное уравнение

$$(xy)^{x+y}=(xy)^{2n},$$

которое получается в результате перемножения правых и левых частей уравнений системы. Последнее уравнение имеет решение, если

$$1. \ xy=1 \quad \text{или} \quad 2. \ x+y=2n.$$

Рассмотрим эти случаи.

1. $xy=1$.

Так как здесь x и y — взаимно обратные числа, то условию целочисленности удовлетворяют только значения $x=y=1$.

2. $x+y=2n$.

Так как $x>0$ и $y>0$, то $n>0$.

Из первого уравнения системы получим:

$$x^{2n}=y^n \quad \text{или} \quad x^2=y.$$

Подставив $y=x^2$ в условие $x+y=2n$, получим

$$x^2+x-2n=0 \text{ и, т. к. } x>0,$$

$$x=\frac{-1+\sqrt{1+8n}}{2};$$

тогда

$$y=\frac{4n+1-\sqrt{1+8n}}{2}.$$

Для того, чтобы x и y были целыми числами, необходимо, чтобы выражение, стоящее под радикалом, было полным квадратом нечетного числа (в числителе должно получаться четное число, а числа -1 и $4n+1$ очевидно нечетные), т. е. необходимо

$$1+8n=(2k+1)^2,$$

откуда

$$n=\frac{k(k+1)}{2}.$$

Остается подставить эти значения n в выражения x и y.

Ответ: $x_1=1, \quad y_1=1; \quad x_2=k, \quad y_2=k^2$

$$\text{при } n=\frac{k(k+1)}{2}.$$

* * *

52. Решить в целых положительных числах уравнение

$$x^5-x^3=y^3z,$$

где y и z — простые числа.

53. Из всех прямоугольных параллелепипедов со сторонами, измеряемыми целыми числами, выбрать те, у которых:

1. Полная поверхность численно равна сумме ребер.
2. Объем численно равен сумме ребер.

54. Решить уравнение

$$2x+3y=6,$$

где x — целое число, y — простое число.

55. Решить уравнение в целых числах

$$3x^2-4y^2=17.$$

§ 5. Системы уравнений

Система n уравнений с несколькими неизвестными всегда может быть записана в виде

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x,\ y,\ z,\ \ldots)=0, \\ F_2(x,\ y,\ z,\ \ldots)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x,\ y,\ z,\ \ldots)=0. \end{array}\right\}$$

Решениями системы будем называть комбинации чисел вида $\{x_k,\ y_k,\ z_k,\ \ldots\}$, подстановка которых в систему обращает все уравнения в тождества.

Так, для системы двух уравнений с двумя неизвестными

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x,\ y)=0, \\ F_2(x,\ y)=0 \end{array}\right\}$$

решениями будут пары $(x_k,\ y_k)$.

1. Равносильность преобразований

При решении системы приходится производить некоторые преобразования. Равносильность этих преобразований по существу определяется равносильными преобразованиями уравнений.

Отметим лишь два дополнительных свойства:

1. В системе любое из уравнений можно заменять суммой соответствующих частей этого уравнения с любыми из остальных.

2. В системе любое уравнение можно заменять результатом умножения соответствующих частей этого уравнения на любое другое.

Так, например, системы

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2; \end{array}\right\},\qquad \left.\begin{array}{l} (a_1x+b_1y)+(a_2x+b_2y)=c_1+c_2, \\ a_2x+b_2y=c_2; \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l} (a_1x+b_1y)\ (a_2x+b_2y)=c_1c_2, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{array}\right\}$$

равносильны.

2. Линейные системы

Мы не будем подробно останавливаться на решении линейных систем, ибо этот вопрос подробно рассматривается в школьном курсе и в любом пособии по алгебре. Напомним лишь основные свойства линейных систем.

Будем называть линейной системой систему вида

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{aligned}\right\}.$$

Решение системы находят способами алгебраического сложения, подстановки или по формулам Крамера

$$\Delta \cdot x = \Delta_x,\ \Delta \cdot y = \Delta_y, \tag{*}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

выбирая тот или иной способ в зависимости от коэффициентов уравнений системы.

Из записанных формул (*) следует непосредственно возможность появления трех случаев:

1. $\Delta \neq 0$, тогда система имеет единственное решение.
2. $\Delta = 0$, $\Delta_x \neq 0$ $(\Delta_y \neq 0)$ — система несовместна.
3. $\Delta = 0$, $\Delta_x = \Delta_y = 0$ — система неопределена. (Заметим, что Δ_x и Δ_y всегда одновременно равны или не равны нулю).

Указанные условия можно записать непосредственно через коэффициенты:

1. $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$.
2. $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$.
3. $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$.

Здесь необходимо предполагать, что коэффициенты, стоящие в знаменателях, не равны нулю.

3. Исследование линейных систем по параметру

При решении линейных систем без параметров, как правило, не требуется производить никаких исследований. В задачах с параметрами объект исследования обычно специально указывается. В такого рода задачах используют свойства линейных систем, указанные выше.

Пример 1. При каких значениях параметра m система

$$\left.\begin{aligned} (m+2)\,x + 3y = 9 + 3m, \\ x + (m+4)\,y = 2 \end{aligned}\right\}$$

а) имеет единственное решение,
б) несовместна,
в) неопределена?

Решение. а) $\frac{m+2}{1} \neq \frac{3}{m+4}$ — условие единственности решения, т. е. $m^2+6m+5 \neq 0$; $m \neq -1$, $m \neq -5$.

б) Пусть $m=-1$, тогда

$$\frac{1}{1}=\frac{3}{3} \neq \frac{9-3}{2}.$$

В этом случае система несовместна.

в) Пусть $m=-5$, тогда

$$\frac{-3}{1}=\frac{3}{-1}=\frac{9-12}{2}.$$

В этом случае система неопределена.

Пример 2. При каких целых n система

$$\left.\begin{aligned} nx-y&=5,\\ 2x-3ny&=7 \end{aligned}\right\}$$

имеет решение $x>0$, $y<0$?

Решение. По формулам Крамера находим решение:

$$\Delta=3n^2+2,\ \Delta_x=15n+7,\quad \Delta_y=7n-10,$$

т. е.

$$x=\frac{15n+7}{3n^2+2} \text{ и } y=\frac{7n-10}{3n^2+2}.$$

Остается выбрать область, в которой одновременно выполняются неравенства

$$15n+7>0 \text{ и } 7n-10<0$$

(т. к. $3n^2+2>0$ всегда).

Будем иметь $n>-\frac{7}{15}$ и $n<\frac{10}{7}$, т. е. $n_1=0$ и $n_2=1$.

Пример 3. При каких x и y n — любое число, если

$$nx+2y-3n=2ny-3x+1?$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$(x-3-2y)\,n=1-3x-2y.$$

Для того, чтобы это линейное относительно n уравнение имело решение при любом n, необходимо, чтобы коэффициент при n и свободный член одновременно были равны нулю, т. е. имела решение система

$$\left.\begin{aligned} x-3-2y&=0,\\ 1-3x-2y&=0. \end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему, получим:

$$x=1,\ y=-1.$$

4. Нелинейные системы

Нелинейной системой будем называть систему уравнений, из которых хотя бы одно нелинейное.

Решение нелинейных систем в общем случае сводится к решению уравнений высших степеней. В связи с этим общих методов для решения нелинейных систем указать нельзя. Однако в некоторых случаях, если уравнения системы неполные, удается выделить некоторые виды нелинейных систем и указать их методы решения.

Тип 1. Одно из уравнений линейное.

Системы такого вида решаются путем выражения одного неизвестного через другое из линейного уравнения и подстановкой в нелинейное.

Пример 4. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=2(xy+2), \\ x+y&=6. \end{aligned}\right\}$$

Решение. *Первый способ.* Из второго уравнения системы получим $x=6-y$.

Подставляя это значение x в первое уравнение, будем иметь

$$(6-y)^2+y^2=2[(6-y)y+2]$$

или

$$y^2-6y+8=0,$$

откуда

$$y_1=2,\ y_2=4.$$

Ответ: $x_1=4,\ y_1=2;\ x_2=2,\ y_2=4.$

Следует заметить, что не всегда имеет смысл решать систему, относящуюся к тому или иному типу, именно тем способом, который мы предлагаем.

Второй способ. Перепишем первое уравнение в виде

$$x^2-2xy+y^2=4 \text{ или } |x-y|=2.$$

Тогда исходная система распадается на две линейные системы:

$$\left.\begin{aligned} x-y&=2, \\ x+y&=6 \end{aligned}\right\} \text{ и } \left.\begin{aligned} x-y&=-2, \\ x+y&=6. \end{aligned}\right\}$$

Решая эти системы, получим тот же ответ, как и при первом способе.

Тип 2. Системы вида

1) $\left.\begin{array}{l}x+y=a,\\ xy=b;\end{array}\right\}$ 2) $\left.\begin{array}{l}x-y=a,\\ xy=b;\end{array}\right\}$

3) $\left.\begin{array}{l}ax+by=c\\ xy=d;\end{array}\right\}$ 4) $\left.\begin{array}{l}x^n+y^n=a\\ xy=b\end{array}\right\}$

удобно решать следующим образом.

Рассмотрим систему 1). Составим вспомогательное уравнение, корнями которого будут x и y, используя формулы Виета:

$$z^2-az+b=0.$$

Решая последнее уравнение, получим две пары решений:

$$z_1=x_1,\ z_2=y_1 \text{ и } z_1=x_2,\ z_1=y_2.$$

Система 2) приводится к системе 1) подстановкой $y=-t$:

$$\left.\begin{array}{l}x+t=a,\\ xt=-b.\end{array}\right\}$$

Система 3) приводится к системе 1) подстановкой $ax=t$, $by=v$:

$$\left.\begin{array}{l}t+v=c,\\ tv=abd.\end{array}\right\}$$

Система 4) приводится к системе 1) после возведения второго уравнения в степень n:

$$\left.\begin{array}{l}x^n+y^n=a,\\ x^ny^n=b^n\quad.\end{array}\right\}$$

Заметим, что записанная система является следствием исходной. Она имеет n^2 решений, в то время как исходная система имеет $2n$ решений.

Тип 3. Системы вида

1) $\left.\begin{array}{l}x^2+y^2=a,\\ x+y=b;\end{array}\right\}$ 2) $\left.\begin{array}{l}x^3+y^3=a,\\ x+y=b;\end{array}\right\}$ 3) $\left.\begin{array}{l}x^4+y^4=a,\\ x+y=b\end{array}\right\}$

приводятся к системам типа 2, как показано в следующих примерах.

Пример 5. Решить систему

$$\left.\begin{array}{l}x^3+y^3=35,\\ x+y=5.\end{array}\right\}$$

Решение. Перепишем систему в виде

$$\left.\begin{array}{l}(x+y)^3-3xy(x+y)=35,\\ x+y=5.\end{array}\right\}$$

Подставляя значение $(x+y)$ из второго уравнения в первое, получим равносильную систему

$$\left.\begin{aligned} xy &= 6, \\ x+y &= 5. \end{aligned}\right\}$$

Ответ: $x_1 = 2$, $y_1 = 3$; $x_2 = 3$, $y_2 = 2$.

Пример 6. Решить систему в области вещественных чисел

$$\left.\begin{aligned} x^4 + y^4 &= 82, \\ x + y &= 4. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Возведя обе части второго уравнения в квадрат и изменив форму первого уравнения, получим:

$$\left.\begin{aligned} (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 &= 82, \\ x^2+y^2 &= 16 - 2xy. \end{aligned}\right\}$$

Эта система является следствием исходной.

Подставляя значение (x^2+y^2) из второго уравнения в первое, получим:

$$16 - 2xy - 2x^2y^2 = 82$$

или

$$x^2y^2 - 32xy + 87 = 0,\ (xy)_1 = 3,\ (xy)_2 = 29.$$

Исходная система распалась на две линейные системы

$$\left.\begin{aligned} x+y &= 4, \\ xy &= 3; \end{aligned}\right\} \quad \text{и} \quad \left.\begin{aligned} x+y &= 4, \\ xy &= 29. \end{aligned}\right\}$$

Из первой системы получим:

$$x_1 = 3,\ y_1 = 1 \ \text{и}\ x_2 = 1,\ y_2 = 3.$$

Вторая система вещественных решений не дает.

Полученные решения, вообще говоря, необходимо проверить подстановкой в систему, т. к. в результате операции, произведенной в начале решения, мы получили систему, не равносильную исходной.

Тип 4. Системы, в уравнения которых входят выражения вида

$$a(x^n + y^n) \ \text{и}\ b(xy)^n$$

в различных комбинациях, являются обобщением систем типа 3 и приводятся к системам типа 2.

Пример 7. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x + y + x^2 + y^2 &= 8, \\ xy + x^2 + y^2 &= 7. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Вычитая из второго уравнения первое, получим:

$$xy = (x + y) - 1.$$

Перепишем второе уравнение системы в виде

$$xy + (x + y)^2 - 2xy = 7 \text{ или } (x + y)^2 - xy = 7$$

и подставим в него найденное значение xy:

$$(x + y)^2 - (x + y) - 6 = 0,$$
$$\text{т. е. } (x + y)_1 = -2, \ (x + y)_2 = 3.$$

Исходная система распадается на две системы типа 2:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= -2, \\ xy &= -3; \end{aligned}\right\} \quad \text{и} \quad \left.\begin{aligned} x + y &= 3, \\ xy &= 2. \end{aligned}\right\}$$

Решая эти системы, получим четыре пары решений. Все преобразования были равносильными, проверка не нужна.

Ответ: $x_1 = 1, \ y_1 = 2;$ $\quad x_2 = 2, \ y_2 = 1,$
$x_3 = 1, \ y_3 = -3;$ $\quad x_4 = -3, \ y_4 = 1.$

Пример 8. Решить систему в области вещественных чисел

$$\left.\begin{aligned} x^3 + y^3 &= 2, \\ xy(x + y) &= 2. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Перепишем первое уравнение системы в виде

$$(x + y)^3 - 3xy(x + y) = 2$$

и произведем подстановку

$$x + y = m, \ xy = n.$$

Будем иметь

$$\left.\begin{aligned} m^3 - 3mn &= 2, \\ mn &= 2. \end{aligned}\right\}$$

Подставляя значение mn из второго уравнения в первое, получим:

$$m^3 - 6 = 2, \text{ т. е. } m^3 = 8, \text{ значит } m = 2, \text{ тогда } n = 1.$$

Решая систему

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 2, \\ xy &= 1, \end{aligned}\right\}$$

получим: $x = 1, \ y = 1.$

Тип 5. Одно из уравнений системы однородное.

В системах этого типа удается выразить линейно одно из неизвестных через другое из однородного уравнения.

Пример 9. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Замечая, что $y \neq 0$, разделим первое уравнение на y^2, тогда будем иметь:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5 \cdot \frac{x}{y} + 6 = 0, \text{ т. е. } \left(\frac{x}{y}\right)_1 = 2 \text{ и } \left(\frac{x}{y}\right)_2 = 3$$

или

$$x = 3y \text{ и } x = 2y.$$

Исходная система распалась на две простейшие системы

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 = 10, \\ x = 3y; \end{aligned}\right\} \quad \text{и} \quad \left.\begin{aligned} x^2 + y^2 = 10, \\ x = 2y. \end{aligned}\right\}$$

Ответ: $x_{1,2} = \pm 3$, $y_{1,2} = \pm 1$; $x_{3,4} = \pm 2\sqrt{2}$, $y_{3,4} = \pm\sqrt{2}$.

Тип 6. Левые части уравнений системы — однородные полиномы одной и той же степени. Рассмотрим метод решения систем этого типа в общем виде

$$\left.\begin{aligned} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 \end{aligned}\right\}.$$

Исключим из системы свободные члены

$$\begin{array}{r|l} -\,d_2 & a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \\ d_1 & a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{(a_1d_2 - a_2d_1)\,x^2 + (b_1d_2 - b_2d_1)\,xy + (c_1d_2 - c_2d_1)\,y^2 = 0} \end{array}.$$

Обозначим для краткости

$$a_1d_2 - a_2d_1 = A,\ b_1d_2 - b_2d_1 = B,\ c_1d_2 - c_2d_1 = C$$

и разделим обе части полученного однородного уравнения

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$$

на y^2:

$$A\left(\frac{x}{y}\right)^2 + B\left(\frac{x}{y}\right) + C = 0.$$

Решая последнее квадратное уравнение относительно $\frac{x}{y}$, получим линейное выражение одного неизвестного через другое вида

$$x = yt_1 \text{ и } x = yt_2.$$

Дальнейший ход решения очевиден.

Пример 10. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x^2 + xy &= 12, \\ xy - y^2 &= 2. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Используя метод, указанный выше, получим:

$$-\begin{array}{r|l} 1 & x^2 + xy = 12 \\ 6 & xy - y^2 = 2 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{x^2 - 5xy + 6y^2 = 0} \end{array},$$

откуда

$$x = 2y \text{ и } x = 3y.$$

Подставляя в любое уравнение системы (лучше во второе), найдем

$$x_{1,2} = \pm 2\sqrt{2},\ y_{1,2} = \pm \sqrt{2};\ x_{3,4} = \pm 3,\ y_{3,4} = \pm 1.$$

Тип 7. Одно из уравнений системы имеет вид:

1) $(ax + b)(cy + d) = 0$;
2) $(ax + b)(cx + d) = 0$;
3) $(ay + b)(cy + d) = 0$.

В системах этого типа, приравнивая каждую из скобок нулю, получаем сразу значение x и y. Далее исходная система распадается на две простейших системы типа

$$1)\ \left.\begin{aligned} F(x, y) &= 0, \\ x &= -\frac{b}{a}; \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} F(x, y) &= 0, \\ y &= -\frac{d}{c}. \end{aligned}\right\}$$

$$2)\ \left.\begin{aligned} F(x, y) &= 0, \\ x &= -\frac{b}{a}; \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} F(x, y) &= 0, \\ x &= -\frac{d}{c}. \end{aligned}\right\}$$

$$3)\ \left.\begin{aligned} F(x, y) &= 0, \\ y &= -\frac{b}{a}; \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} F(x, y) &= 0, \\ y &= -\frac{d}{c}. \end{aligned}\right\}$$

Заметим, что в системах вида 1) пара

$$x = -\frac{b}{a}, \quad y = -\frac{d}{c}$$

в общем случае не является решением.

Пример 11. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} 2x^2 - 3xy + 5y &= 5, \\ (x - 2)(y - 1) &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Из второго уравнения системы получим:

$$x = 2 \text{ и } y = 1.$$

Таким образом, исходная система распалась на две системы:

$$\left.\begin{aligned} 2x^2 - 3xy + 5y = 5, \\ x = 2; \end{aligned}\right\} \quad \text{и} \quad \left.\begin{aligned} 2x^2 - 3xy + 5y = 5, \\ y = 1. \end{aligned}\right\}$$

Ответ: $x_1 = 2$, $y_1 = 3$; $y_2 = 1$, $x_2 = 0$; $y_3 = 1$; $x_3 = \frac{3}{2}$.

5. Геометрическая интерпретация систем уравнений

Пусть дана система

$$\left.\begin{aligned} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0. \end{aligned}\right\}$$

Предположим, что уравнения системы определяют две неявно заданные функции $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$. В том случае, если удается построить графики последних, возможно графическое решение и исследование системы уравнений.

Пример 12. Исследовать графически систему

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 = a, \\ x + y = b. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Очевидно, первое уравнение системы имеет решение только при $a \geqslant 0$. В случае $a = 0$ мы имеем единственное решение $x = y = 0$, что возможно при $b = 0$.

Если $a > 0$, то первое уравнение задает окружность радиуса $\sqrt{a}$, с центром в начале координат. Второе уравнение задает прямую l, проходящую через точки $A_1(b, 0)$ и $A_2(0, b)$.

Исследуем вопрос о числе решений данной системы.

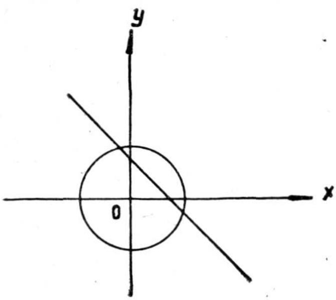


Рис. 10.

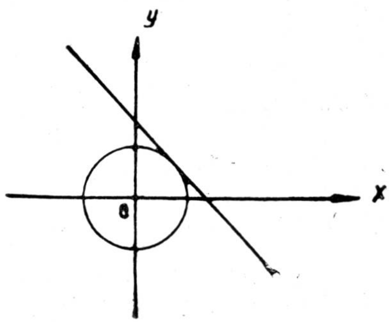


Рис. 11.

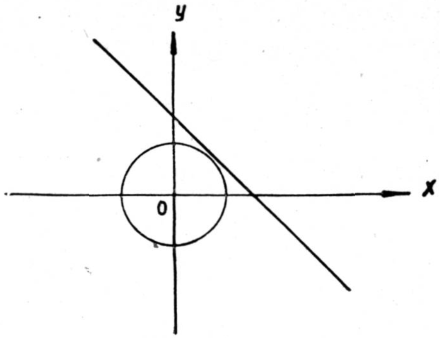


Рис. 12.

1. Если l пересекает окружность (рис. 10), то мы имеем два решения. Геометрически это соответствует случаю, когда расстояние от центра окружности до прямой $\frac{|b|}{\sqrt{2}}$ меньше a. Итак, в случае $|b| < a\sqrt{2}$ система имеет два решения.

2. Если прямая касается окружности (рис. 11), т. е. $|b| = a\sqrt{2}$, то система имеет единственное решение.

3. Если прямая проходит вне окружности (рис. 12), т. е. $|b| > a\sqrt{2}$, то система не имеет решений.

Мы рассмотрели выше примеры рациональных систем. Однако при решении задач нам приходится иметь дело также с системами, составленными из иррациональных и показательно-логарифмических уравнений. Обычно такие системы после некоторых преобразований сводятся к рациональным системам.

* * *

56. $\begin{cases} 2x^2 - y = 3, \\ 2y^2 - x = 3. \end{cases}$

57. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = a, \\ xy + yz + xz = b, \\ xyz = c. \end{cases}$

58. $\begin{cases} x + y + \sqrt{x^2 - y^2} = 2a, \\ y\sqrt{x^2 - y^2} = 2b^2. \end{cases}$

59. $\begin{cases} |x| + 2|y| = 3, \\ 2(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1. \end{cases}$

60. $\begin{cases} |x| + 3y = 7, \\ 2x + 2|y-1| = 3. \end{cases}$

61. $\begin{cases} |x+y| = x-y+a, \\ |x-y| = x+y+b. \end{cases}$

62. $\begin{cases} (x+y)\,2^{y-x} = \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{27}}(3^{-1})}, \\ (x+y)^{\frac{1}{x-y}} = \sqrt{12}. \end{cases}$

63. $\begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y}, \\ x^2 y = 1. \end{cases}$

64. $\begin{cases} \log_{xy}(x+y) = 0, \\ \log_{xy}(y-x) = 1. \end{cases}$

65. $\begin{cases} \log_3(\log_2 x) + \log_{\frac{1}{3}}(\log_{\frac{1}{2}} y) = 1, \\ xy^2 = 4. \end{cases}$

66. $\begin{cases} \log_a x + \log_{a^2} y + \log_{a^2} z = d, \\ \log_c y + \log_{c^2} z + \log_{c^2} x = d, \\ \log_b z + \log_{b^2} x + \log_{b^2} y = d. \end{cases}$

67. $\begin{cases} \left(\log_{\frac{1}{y}} x + \log_{\frac{1}{x}} y\right)\left(\log_{\frac{x}{y}} xy + \log_{xy} \dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{20}{3}, \\ x^2 + y = a. \end{cases}$

68. $\begin{cases} (\log_a x + \log_a y)\log_{\frac{4}{9}} a = -1, \\ x + y - 5a = 0. \end{cases}$

69. $\begin{cases} \log_y \log_y x = \log_x \log_x y, \\ \log_a^2 x + \log_a^2 y = 8. \end{cases}$

70. $\begin{cases} a^{2x} + a^{2y} = 2b, \\ a^{x+y} = c. \end{cases}$

71. $\begin{cases} x^2 + 2yz = 1, \\ y^2 + 2zx = 2, \\ z^2 + 2xy = 1. \end{cases}$

72. $\begin{cases} x^y = a, \\ y = x^a. \end{cases}$

73. $\begin{cases} \dfrac{x+5}{2} = \dfrac{y-3}{-3} = \dfrac{z-4}{1} = \dfrac{t-2}{4}, \\ x + y + z + t = 6. \end{cases}$

74. $\begin{cases} x + y = 13, \\ x^y + y^x = 145. \end{cases}$

75. $7x - 11y = \sqrt[3]{x+y} = \sqrt[5]{x+9y}.$

§ 6. Рациональные неравенства

Рациональными неравенствами будем называть неравенства вида

$$P(x)\cdot Q(x)\vee 0, \qquad \frac{P(x)}{Q(x)}\vee 0. \tag{1}$$

Рассмотрим наиболее рациональный способ решения неравенств этих видов, заключающийся в замене одного неравенства равносильным ему неравенством, решение которого проводится методом интервалов. Этот способ исключает необходимость разбора многочисленных вариантов в каждом отдельном случае.

1. Метод интервалов

Решение неравенства

$$F(x)\equiv P(x)\cdot Q(x)\vee 0, \tag{2}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, будем проводить следующим образом.

1. Разложим левую часть неравенства (2) на множители

$$F(x)=a(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}(x^2+p_2x+q_2)^{k_2}\dots(x^2+p_sx+ \\ +q_s)^{k_s}\times(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\dots(x-x_n)^{m_n}, \tag{3}$$

где $x_1<x_2<\dots<x_n$ — вещественные корни $F(x)$.

Не умаляя общности, можно считать, что $a>0$, ибо этого можно добиться умножением обеих частей неравенства (2) на (-1). Очевидно, что произведение степеней трехчленов с комплексными корнями положительно и не влияет на знак $F(x)$.

2. Отметим значения x_1, x_2, ... x_n на числовой оси.

3. Заметим, что если $x>x_n$, то $F(x)>0$.

4. Используя теоремы о знакопостоянстве непрерывной функции внутри корневого промежутка и о перемене (сохранении) ее знака при переходе через корень нечетной (четной) кратности, записываем ответ, считывая его из соответствующего рисунка*.

Например, в разложении (3) может быть:

а) $m_{n-1}=2l+1$, $m_n=2p+1$, (рис. 13)

б) $m_{n-1}=2l$, $m_n=2p+1$, (рис. 14)

в) $m_{n-1}=2l$, $m_n=2p$. (рис. 15)

Рис. 13.

Рис. 14.

* Не следует смешивать графическую иллюстрацию расположения корней с графиком функции.

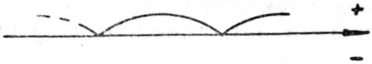


Рис. 15.

Можно сказать, что кривые пересекают числовую ось во всех отмеченных точках, причем число пересечений равно кратности корня. При этом имеются в виду случаи, изображенные на рисунках 13, 14, 15.

В предлагаемом методе, очевидно, не требуется определять при помощи контрольных точек знак $F(x)$ ни в одном из корневых промежутков, что значительно экономит время.

Решение неравенства вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \vee 0 \tag{4}$$

сводится к решению неравенства (2), равносильного неравенству (4), ибо

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \vee 0 \Longrightarrow \frac{P(x)\,Q^2(x)}{Q(x)} \vee 0 \cdot Q^2(x) \Longrightarrow P(x)\,Q(x) \vee 0. \tag{5}$$

Пример 1. Решить неравенство

$$\frac{4x^3 - 3x - 1}{x^2(x^2 - 4)} > 0.$$

Решение. Разложим числитель и знаменатель левой части на множители

$$\frac{4(x-1)\left((x+\frac{1}{2}\right)^2}{x^2(x-2)\,(x+2)} > 0$$

и запишем равносильное исходному неравенство

$$4(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 x^2(x-2)\,(x+2) > 0.$$

Ответ: $-2 < x < -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} < x < 0$, $0 < x < 1$, $x > 2$.

2. Условия расположения корней квадратного уравнения относительно заданных точек

Дано квадратное уравнение с параметрами

$$f(x) \equiv ax^2 + bx + c = 0$$

и поставлены условия расположения его корней относительно заданных точек.

Требуется определить, при каких значениях параметров корни данного уравнения удовлетворяют поставленным условиям.

Для того, чтобы решить такую задачу, достаточно найти формальные решения уравнения и подчинить их поставленным условиям.

Рассмотрим, однако, метод, при помощи которого удается свести решение поставленной задачи к решению нескольких рациональных неравенств.

А. Итак, пусть корни квадратного уравнения должны удовлетворять условию

$$m < x_1 \leqslant x_2, \tag{1}$$

где m — некоторое число.

Тогда достаточно найти решение системы неравенств

$$\begin{cases} D \geqslant 0, \\ af(m) > 0, \\ m < -\dfrac{b}{2a}. \end{cases} \tag{1'}$$

Поясним составление этой системы. Первое неравенство очевидно. Второе неравенство есть требование того, что a и $f(m)$ должны быть одного знака (рис. 16). Третье неравенство выражает условие того, что абсцисса вершины параболы, соответствующей левой части уравнения, меньше m. Рекомендуем доказать необходимость и достаточность записанных условий для решения задачи.

Пример 2. При каких значениях k корни квадратного уравнения

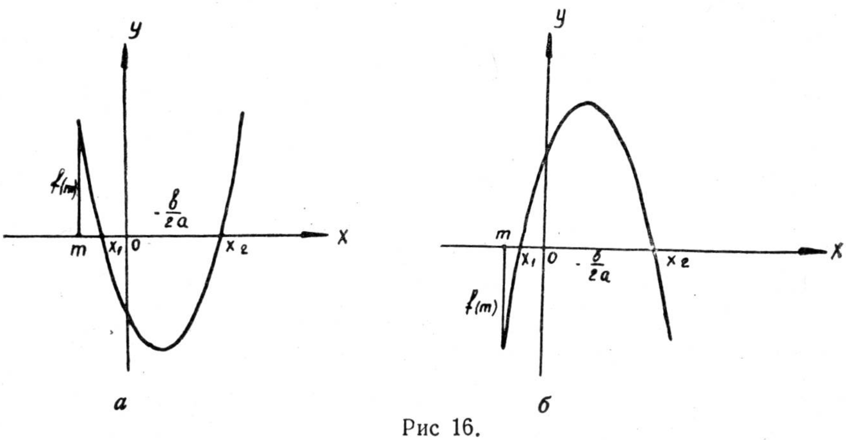


Рис 16.

$$x^2+(2k+6)x+4k+12=0$$

будут больше (-1)?

Решение. Используя (1), будем иметь:

1) $D \geqslant 0.\ (k+3)^2-(4k+12) \geqslant 0;\ k^2+2k-3 \geqslant 0;$
$(k+3)(k-1) \geqslant 0;\ k \leqslant -3,\ k \geqslant 1;$

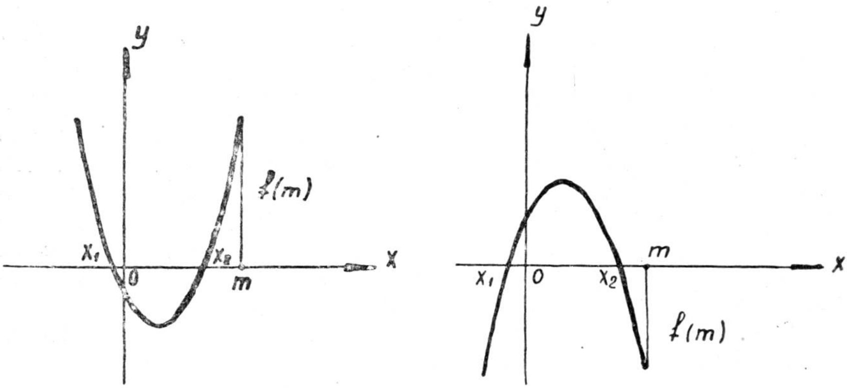
2) $1 \cdot f(-1) > 0.\ 1^2+(2k+6)(-1)+4k+12 > 0;$
$2k+7>0;\quad k>-\frac{7}{2};$

3) $-\frac{b}{2a}>-1.\qquad -\frac{2k+6}{2}>-1,\quad k+3<1;\quad k<-2;$

Ответ: $-\frac{7}{2}<x<-3.$

Б. Корни квадратного уравнения должны удовлетворять условию

$$x_1 \leqslant x_2 < m. \tag{2}$$



а *б*

Рис. 17.

Тогда необходимо и достаточно решить систему (рис. 17)

$$\begin{cases} D \geqslant 0, \\ af(m)>0, \\ m>-\frac{b}{2a}. \end{cases} \tag{2'}$$

Пример 3. При каких k уравнение

$$x^2-2kx+k+6=0$$

имеет корни меньше единицы?

Решение. Используя (2′), получим:

1) $D \geqslant 0.\quad k^2-(k+6) \geqslant 0$, т. е. $k \leqslant -2$ и $k>3$.

2) $1 \cdot f(1) > 0$. $1 \cdot (1 - 2k + k + 6) > 0$; $k < 7$.

3) $-\frac{b}{2a} = \frac{2k}{2 \cdot 1} < 1$, т. е. $k < 1$.

Ответ: $k < -2$.

В. Корни квадратного уравнения удовлетворяют условию

$$x_1 < m < x_2. \tag{3}$$

Тогда необходимо и достаточно выполнение условий (рис. 18)

$$\begin{cases} D > 0, \\ af(m) < 0. \end{cases} \tag{3'}$$

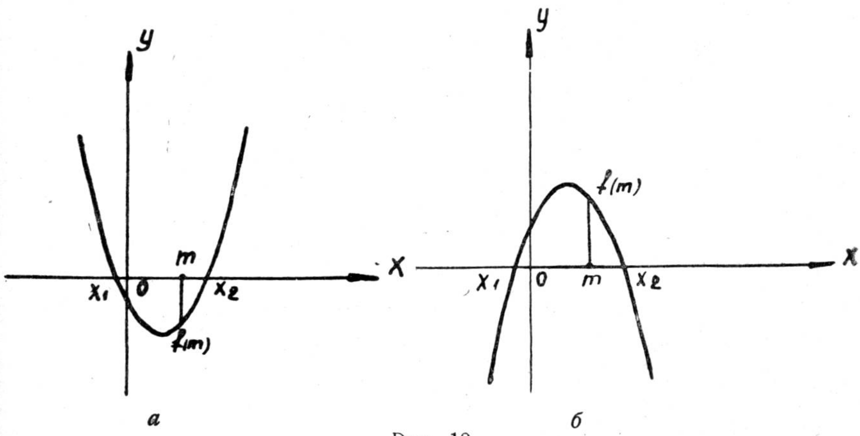


Рис. 18.

Пример 4. При каких k число 3 заключено между корнями уравнения

$$kx^2 + 2(k-1)x - 4 = 0?$$

Решение. Используя (3′), будем иметь:

1) $D > 0$. $(k-1)^2 + 4k > 0$; $k^2 - 2k + 1 + 4k > 0$;

$$(k+1)^2 > 0; \ k \neq -1.$$

2) $k \cdot f(3) < 0$. $k[k \cdot 3^2 + 2(k-1)3 - 4] < 0$;

$$15k\left(k - \frac{2}{3}\right) < 0; \quad 0 < k < \frac{2}{3}.$$

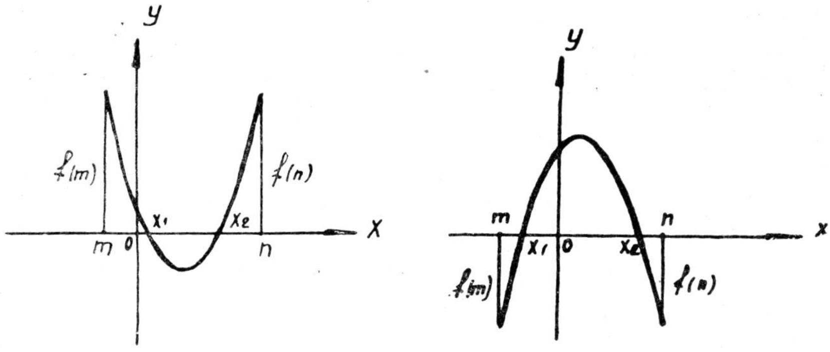
Ответ: $0 < k < \frac{2}{3}$.

Г. Корни квадратного уравнения удовлетворяют условию

$$m < x_1 \leqslant x_2 < n. \tag{4}$$

Необходимо и достаточно найти решение системы (рис. 19)

$$\begin{cases} D \geqslant 0, \\ af(m) > 0, \\ af(n) > 0, \\ m < -\dfrac{b}{2a} < n. \end{cases} \qquad (4')$$



а *б*

Рис. 19.

Пример 5. При каких a корни уравнения

$$2x^2 - (2a - 5)x$$

заключены между 0 и 1 ?

Решение. Итак,

$$0 < x_1 \leqslant x_2 < 1.$$

Используя (4′), получим:

1) $D \geqslant 0$. $(2a-5)^2 - 4\cdot 2\cdot (a-3) \geqslant 0$, $4a^2 - 28a + 49 \geqslant 0$,
$(2a+7)^2 \geqslant 0$, т. е. a — любое число.

2) $2\cdot f(0) > 0$. $2(2a-3) > 0$; $a > 3$.

3) $2\cdot f(1) > 0$. $2[2-(2a-5)+a-3] > 0$; $a < 4$.

4) $0 < \dfrac{2a-5}{2\cdot 2} < 1$; $0 < 2a-5 < 4$, $5 < 2a < 9$; $2{,}5 < a < 4{,}5$

Ответ: $3 < a < 4$.

3. Исследование рациональных неравенств по параметру

Решение рациональных неравенств с параметрами производится обычными способами. Однако, производя различные операции, мы должны каждый раз указывать, в какой области изменения параметра эти операции приводят к равносильным неравенствам.

Пример 6. Решить неравенство

$$\frac{x}{2a} + \frac{1-x}{6} > \frac{x+1}{8a}.$$

Р е ш е н и е. О. Д. З. $a \neq 0$, x — любое число.

Перенесем все члены неравенства в левую часть, приведем к общему знаменателю и перенесем в правую часть свободный член:

$$\frac{12x+4a-4ax-3x-3}{24a} > 0, \quad \frac{9-4a}{24a}x > \frac{3-4a}{24a}.$$

Рассмотрим три случая.

1. $\frac{9-4a}{24a} = 0$, т. е. $a = \frac{9}{4}$.

Непосредственной подстановкой убеждаемся в том, что при $a = \frac{9}{4}$ неравенство выполняется при всех x.

2. Если $\frac{9-4a}{24a} > 0$ или $4 \cdot 24a\left(a - \frac{9}{4}\right) < 0$, т. е. $0 < a < \frac{9}{4}$, то, разделив обе части неравенства на $\frac{9-4a}{24a}$, получим:

$$x > \frac{(3-4a)\,24a}{24a\,(9-4a)} \text{ или } x > \frac{3-4a}{9-4a}.$$

3. Если $\frac{9-4a}{24a} < 0$, т. е. $a < 0$ и $a > \frac{9}{4}$, то при делении на $\frac{9-4a}{24a}$ мы получаем неравенство противоположного смысла:

$$x < \frac{(3-4a)\,24a}{24a\,(9-4a)} \text{ или } x < \frac{3-4a}{9-4a}.$$

О т в е т: При $a < 0$ и $a > \frac{9}{4}$ $x < \frac{3-4a}{9-4a}$; при $0 < a < \frac{9}{4}$ $x > \frac{3-4a}{9-4a}$; при $a = \frac{9}{4}$ x — любое число.

* * *

76. $\frac{x^2+5x+4}{x^3+1} \geqslant 1$.

77. $\frac{x^2-7x+6}{x^2-1} < -1$.

78. $\frac{x^3+15}{x^3+8} < 2$.

79. $x - \frac{a}{1-a} < 1 - \frac{x-1}{a-1}$.

80. $\frac{x}{a+b} - \frac{a}{a-b} > \frac{x}{a-b} - \frac{b}{a+b}$.

81. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} m(x-2) > x-3, \\ (2m+3)(x-1) > (m-1)(x+2). \end{cases}$$

82. При каких значениях m уравнение

$$(m-5)\,x^2-4mx+m-2=0$$

имеет вещественные корни противоположных знаков?

83. Найти все вещественные значения a, при которых оба корня уравнения

$$4x^2-2x+a=0$$

заключены между 0 и -2.

84. Найти все вещественные значения a, при которых оба корня уравнения

$$(1+a)\,x^2-3ax+4a=0$$

больше единицы.

85. Найти все вещественные значения a, при которых корни уравнения

$$2x^2-2(2a+1)\,x-a(a-1)=0$$

удовлетворяют условию

$$x_1<a<x_2.$$

86. Расположить корни данных квадратных уравнений

$$x^2-x-1=0 \text{ и } x^2+ax+1=0$$

в порядке возрастания.

§ 7. Иррациональные неравенства

1. Определение иррационального неравенства

Иррациональным неравенством будем называть неравенство вида

$$f(x)\vee g(x), \tag{1}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — функции, содержащие иррациональности.

При решении иррациональных неравенств, так же как и при решении иррациональных уравнений, большую роль играет определение О. Д. З., но особенно существенно предварительное изучение знаков двух частей неравенства.

Так как при решении иррациональных неравенств, как неравенств вообще, проверка невозможна, то все преобразования должны быть равносильными.

2. Область допустимых значений неизвестного

В неравенствах вида (1) О. Д. З. есть любые значения x, удовлетворяющие естественной области определения функций $f(x)$ и $g(x)$. Однако, в зависимости от знака неравенства, О. Д. З. может дополняться результатами исследования знаков $f(x)$ и $g(x)$.

3. Равносильность преобразований

Обычно при решении иррациональных неравенств производят предварительно некоторые равносильные преобразования с целью получить неравенство, одна из частей которого при всех x из О. Д. З. имеет фиксированный знак.

Пусть, для определенности, в (1)

$$f(x) > 0.$$

Тогда могут представиться следующие случаи.

1. Неравенству $f(x) > g(x)$ удовлетворяют все x из О. Д. З., при которых $g(x) < 0$. При возведении в квадрат двух частей неравенства в этой области происходит потеря решений. В области, где $g(x) > 0$, обычно необходимо возведение в квадрат двух частей неравенства.

2. Неравенству $f(x) < g(x)$ могут удовлетворять только те значения x из О. Д. З., для которых $g(x) > 0$. В этом случае предварительное исследование положительности $g(x)$ уточняет О. Д. З. Возведение в квадрат без такого исследования дает посторонние решения.

Рассмотрим несколько простейших примеров.

Пример 1. Решить неравенство

$$\sqrt{x} > 1.$$

Решение. О. Д. З. $x \geqslant 0$.

Так как обе части неравенства неотрицательны, то, возведя обе части в квадрат, получим равносильное неравенство

$$x > 1,$$

что и является ответом.

Пример 2. Решить неравенство

$$\sqrt{x} > -1.$$

Решение. О. Д. З. $x \geqslant 0$.

Так как левая часть неравенства неотрицательна, а правая отрицательна, то О. Д. З. является ответом. Здесь возведение в квадрат даст результат $x > 1$ (потеряна область $0 \leqslant x \leqslant 1$).

Пример 3. Решить неравенство

$$\sqrt{x} < 1.$$

Решение. О. Д. З. $x \geqslant 0$.

Так как обе части неравенства неотрицательны, то, возведя их в квадрат, получим равносильное неравенство

$$x < 1.$$

Ответ: $0 \leqslant x < 1$.

Пример 4. Решить неравенство

$$\sqrt{x} < -1.$$

Решение. О. Д. З. $x \geqslant 0$.

Так как левая часть неравенства неотрицательна, а правая отрицательна, то решений нет. Здесь возведение в квадрат даст результат $x < 1$, или, с учетом О. Д. З. $0 \leqslant x < 1$, — постороннее решение.

4. Общий метод решения иррациональных неравенств. (Примеры)

Пример 5. Решить неравенство

$$3\sqrt{6 + x - x^2} > 4x - 2.$$

Решение. О. Д. З. $-2 \leqslant x \leqslant 3$.

1. Решением, очевидно, является вся область, в которой правая часть неравенства отрицательна, т. е. $x < \frac{1}{2}$. С учетом О. Д. З., в этом случае получим $-2 \leqslant x < \frac{1}{2}$.

2. Если правая часть неравенства положительна, т. е. $x \geqslant \frac{1}{2}$, то, возводя обе части неравенства в квадрат, получим:

$$9(6 + x - x^2) > 16x^2 - 16x + 4,$$

или, после упрощений,

$$(x + 1)\ (x - 2) < 0,$$

т. е. $1 \leqslant x < 2$.

С учетом условия $x \geqslant \frac{1}{2}$, объединяя полученные результаты, будем иметь

$$-2 \leqslant x < 2.$$

Пример 6. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2 - 55x + 250} < x - 14.$$

Решение. О. Д. З. $x \geqslant 50$, $x \leqslant 5$.

Очевидно, правая часть неравенства должна быть положительна, т. е. $x > 14$. Итак, решение должно принадлежать области $x \geqslant 50$. Возводя в квадрат и упрощая, получим:

$$x^2 - 55x + 250 < x^2 - 28x + 196 \text{ или } x > 2.$$

С учетом О. Д. З., получим $x \geqslant 50$.

Пример 7. Решить неравенство

$$\frac{(x-1)^2}{(3 + \sqrt{8 + x})^2} > x - 7.$$

Решение. О. Д. З. $8 + x \geqslant 0$, т. е. $x \geqslant -8$.

Если $x - 7 \leqslant 0$, то неравенство выполняется при всех x из области $-8 \leqslant x \leqslant 7$.

При $x > 7$, избавляясь от иррациональности в знаменателе, получим:

$$\frac{(x-1)^2 (3-\sqrt{8+x})^2}{(3+\sqrt{8+x})^2 (3-\sqrt{8+x})^2} > x-7,$$

$$\frac{(x-1)^2 (3-\sqrt{8+x})^2}{(9-8-x)^2} > x-7, \quad (3-\sqrt{8+x})^2 > x-7,$$

$$9-6\sqrt{8+x}+8+x > x-7, \quad 24 > 6\sqrt{8+x}, \sqrt{8+x}<4, x<8.$$

Ответ: $-8 \leqslant x < 8$.

Нередко при помощи удачно выбранной подстановки удается привести решение иррационального неравенства к решению некоторого рационального неравенства.

Пример 8. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2-x+1} < (x-1)^2 + x^2.$$

Решение. Заметим прежде всего, что подкоренное выражение положительно при всех значениях x. Приведем данное неравенство к виду:

$$\sqrt{x^2-x+1} < 2x^2-2x+1+1-1,$$

или

$$t < 2t^2-1,$$

где

$$t = \sqrt{x^2-x+1}.$$

Решая последнее неравенство, получим:

$$t < -\frac{1}{2} \text{ и } t > 1.$$

Возможно только

$$\sqrt{x^2-x+1} > 1$$

или

$$x(x-1) > 0,$$

т. е.

$$x < 0 \text{ и } x > 1.$$

5. Иррациональные неравенства с параметром

При решении иррациональных неравенств с параметрами, так же как и при решении иррациональных уравнений, при различных значениях параметра получаются различные решения.

Исключительно полезно строить полученные области решений в системе координат.

Пример 9. Решить неравенство

$$\sqrt{a+\sqrt{x}} + \sqrt{a-\sqrt{x}} < \sqrt{2}.$$

Решение. О. Д. З. $0 \leqslant x \leqslant a^2$, $a \geqslant 0$.

Возведя обе части неравенства в квадрат, получим:

$$\sqrt{a^2 - x} < 1 - a. \qquad (1)$$

Отсюда следует, что необходимо

$$1 - a > 0, \text{ т. е. } a < 1.$$

Возведя обе части (1) в квадрат, получим после преобразований:

$$x > 2a - 1.$$

1. Пусть $2a - 1 \geqslant 0$, т. е. $a \geqslant \frac{1}{2}$. Тогда, с учетом О. Д. З., замечая, что

$$a^2 \geqslant 2a - 1,$$

получим:

$$2a - 1 < x \leqslant a^2.$$

2. Пусть $2a - 1 < 0$, т. е. $a < \frac{1}{2}$. Тогда, по О. Д. З., имеем:

$$0 \leqslant x \leqslant a^2.$$

Ответ: При $0 \leqslant a < \frac{1}{2}$ $0 \leqslant x \leqslant a^2$; при $\frac{1}{2} \leqslant a < 1$

$$2a - 1 < x \leqslant a^2 \text{ (рис. 20).}$$

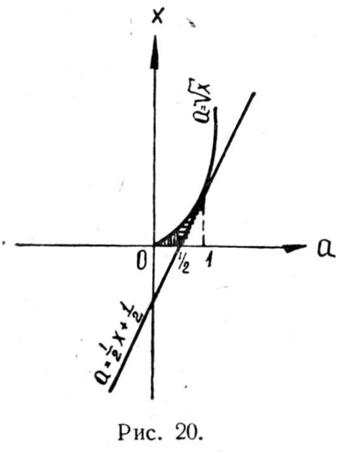


Рис. 20.

Пример 10. Решить неравенство

$$\sqrt{a^2 - \sqrt{x^2 - a^2}} > x.$$

Решение. О. Д. З. $|x| \geqslant |a|$; $a^2 \geqslant \sqrt{x^2 - a^2}$; $x \neq 0$.

1. При $x < 0$ имеем ограничения по О. Д. З.

а) $-x \geqslant |a|$.

При $a > 0$ получим $-x \geqslant a$, т. е. $x \leqslant -a$;

при $a < 0$ получим $-x \geqslant -a$, т. е. $x \leqslant a$.

б) $a^2 \geqslant \sqrt{x^2 - a^2}$; $a^4 \geqslant x^2 - a^2$; $x^2 \leqslant a^4 + a^2$;

$$-x \leqslant |a| \sqrt{a^2 + 1}.$$

При $a > 0$ получим $-x \leqslant a\sqrt{a^2 + 1}$, т. е. $x \geqslant -a\sqrt{a^2 + 1}$; при $a < 0$ получим $-x \leqslant -a\sqrt{a^2 + 1}$, т. е. $x \geqslant a\sqrt{a^2 + 1}$.

Окончательно в этом случае получим:

$$-|a|\sqrt{a^2+1} \leqslant x \leqslant -|a|.$$

2. При $x>0$, возведя обе части исходного неравенства в квадрат, получим:

$$a^2-\sqrt{x^2-a^2} > x^2,$$

$$-\sqrt{x^2-a^2} > x^2-a^2.$$

Последнее неравенство не выполняется ни при каких x.

Ответ: $-|a|\sqrt{a^2+1} \leqslant x \leqslant -|a|$.

* * *

87. $\dfrac{x+1+2x\sqrt{2-x}}{(x-1)^2} \geqslant -1.$

88. $\dfrac{x+\sqrt{x}-2}{x-\sqrt{x}-2} < 0.$

89. $2\sqrt{x+a} > x+1.$

90. $\sqrt{x-b^2}+\sqrt{x} > 2b.$

§ 8. Показательно-логарифмические неравенства

Решение показательно-логарифмических неравенств сводится к решению алгебраических неравенств при помощи некоторых равносильных преобразований и к решению простейших неравенств вида

$$a^x > b,\ \log_a x > b,\ \log_x a > b.$$

По методам решений показательно-логарифмические неравенства можно классифицировать так же, как и уравнения.

Основное внимание следует уделять переходам типа:

$$a^{f(x)} > a^{\varphi(x)} \Longrightarrow f(x) > \varphi(x) \quad (a>1);$$

$$a^{f(x)} > a^{\varphi(x)} \Longrightarrow f(x) < \varphi(x) \quad (0<a<1);$$

$$\lg_a f(x) > \lg_a \varphi(x) \Longrightarrow f(x) > \varphi(x) \ (a>1,\ f(x)>0,\ \varphi(x)>0);$$

$$\lg_a f(x) > \lg_a \varphi(x) \Longrightarrow f(x) < \varphi(x) \ (0<a<1,\ f(x)>0,\ \varphi(x)>0).$$

Пример 1. Решить неравенство

$$\frac{1}{5-\lg x}+\frac{2}{1+\lg x} < 1.$$

Решение. О. Д. З. $x > 0$.

Перенесем все члены неравенства в левую часть и приведем к общему знаменателю.

Будем иметь

$$\frac{11 - \lg x - 5 - 4\lg x + \lg x}{(5 - \lg x)\ (1 + \lg x)} < 0,$$

$$\frac{6 - 5\lg x + \lg^2 x}{(5 - \lg x)\ (1 + \lg x)} < 0,$$

и наконец

$$(\lg x + 1)\ (\lg x - 2)\ (\lg x - 3)\ (\lg x - 5) > 0.$$

Получим (рис. 21):

1. $\lg x < -1$, $\quad x < 0{,}1$.
2. $2 < \lg x < 3$, $10^2 < x < 10^3$.
3. $\lg x > 5$, $\quad x > 10^5$.

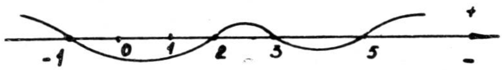


Рис. 21.

Пример 2. Решить неравенство

$$4^x \leqslant 3\cdot 2^{\sqrt{x}+x} + 4^{1+\sqrt{x}}.$$

Решение. О. Д. З. $x \geqslant 0$.

Разделим обе части неравенства почленно на $4^x \neq 0$. После преобразований получим:

$$1 \leqslant 3\cdot 2^{\sqrt{x}-x} + 4\cdot 2^{2(\sqrt{x}-x)}.$$

Обозначая

$$2^{\sqrt{x}-x} = t,$$

будем иметь

$$4t^2 + 3t - 1 \geqslant 0.$$

Решая последнее неравенство, получим:

$$t \leqslant -1 \text{ и } t \geqslant \frac{1}{4}.$$

Итак, решение неравенства свелось к решению двух неравенств:

1. $2^{\sqrt{x}-x} \leqslant -1$.
2. $2^{\sqrt{x}-x} \geqslant \frac{1}{4}$.

Первое неравенство, очевидно, не имеет решений. Переписав второе неравенство в виде $2^{\sqrt{x}-x} > 2^{-2}$, получим: $\sqrt{x}-x \geqslant -2, x-\sqrt{x}-2 \leqslant 0$, т. е. $-1 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 2$ или $0 \leqslant x \leqslant 4$.

1. Показательно-логарифмические неравенства вида

$$u^v \vee a \text{ и } \lg_u v \vee a$$

Неравенства этого вида очень часто встречаются в практике решения задач. Рассмотрим два примера.

Пример 3. Решить неравенство.

$$x^{3x+1} > x^x.$$

Решение. О. Д. З. $x > 0$, $x \neq 1$.

Очевидно, решение существенно зависит от того, какие функции составляют неравенство: возрастающие или убывающие.

1. Если $x > 1$ (функции возрастающие), то очевидно должно быть

$$3x+1 > x, \quad \text{т. е. } x > -\frac{1}{2}.$$

Окончательно получим $x > 1$.

2. Если $0 < x < 1$ (функции убывающие), то очевидно должно быть

$3x+1 < x$, т. е. $x < -\frac{1}{2}$, что противоречит О. Д. З.

Ответ: $x > 1$.

Пример 4. Решить неравенство

$$\lg_x \sqrt{x+12} > 1.$$

Решение. О. Д. З. $x > 0$, $x \neq 1$.

Здесь решение также зависит от того, в каком из интервалов находится x ($0 < x < 1$ или $x > 1$). Перепишем неравенства в виде

$$\lg_x \sqrt{x+12} > \lg_x x.$$

1. Если $0 < x < 1$, то

$$\sqrt{x+12} < x, \; x+12 < x^2, \; x^2-x-12 > 0.$$

Значит, $x > 4$ и $x < -3$ — решений нет, с учетом О. Д. З. и нашего предположения.

2. Если $x > 1$, то

$$\sqrt{x+12} > x, \quad x^2 - x - 12 < 0, \quad -3 < x < 4.$$

С учетом нашего предположения,

$$1 < x < 4.$$

Заметим, что рассмотренные в примерах 3 и 4 неравенства имели решение только в одном из интервалов $0 < x < 1$ и $x > 1$. Однако определить сразу, какой из этих интервалов следует рассматривать, было невозможно. Далее мы предлагаем метод решения, который позволяет сразу находить непустые множества решений.

Рассмотрим неравенство вида

$$u^v \vee a.$$

Здесь u и v — некоторые функции от x, причем $u > 0$ и $u \neq 1$. Решим это неравенство тем же методом, что и пример 3.

Перепишем неравенство в виде

$$u^v \vee u^{\lg_u a}.$$

Рассмотрим два случая.

1. $u > 1$. Тогда необходимо искать решение системы

$$\left.\begin{matrix} u > 1 \\ v \vee \lg_u a \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} u - 1 > 0 \\ v - \lg_u a \vee 0 \end{matrix}\right\}.$$

Следствием этой системы будет неравенство

$$(u-1)\ (v - \lg_u a) \vee 0.$$

2. $0 < u < 1$. Тогда необходимо искать решение системы

$$\left.\begin{matrix} 0 < u < 1 \\ v \wedge \lg_u a \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} u - 1 < 0 \\ v - \lg_u a \wedge 0 \end{matrix}\right\}$$

(здесь знак $\wedge$ — знак противоположный $\vee$).

Следствием этой системы будет неравенство

$$(u-1)\ (v - \lg_u a) \vee 0.$$

Отметим, что обе системы неравенств имеют следствием одно и то же неравенство. Отсюда можно заключить, что

$$u^v \vee a \Longleftrightarrow (u-1)\ (v - \lg_u a) \vee 0, \tag{1}$$

$$u^v \vee 1 \Longleftrightarrow (u-1)\, v \vee 0 \tag{1'}$$

при условии $u > 0$ и $u \neq 1$.

По формуле (1) ответ примера 3 может быть получен сразу:

$$x^{3x+1} > x^x \Longrightarrow (x-1)\ (3x + 1 - x) > 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)>0, \text{ т. е. } x<-\frac{1}{2} \text{ и } x>1.$$

С учетом О. Д. З. $x>1$.

Пример 5. Решить неравенство

$$|x|^{x^2-x-2}<1.$$

Решение. О. Д .З $|x|\neq 1$

По формуле (1′) будем иметь

$$(|x|-1)\ (x-2)\ (x+1)<0$$

или, т. к. $|x|-1 \vee 0 \Longrightarrow x^2-1 \vee 0 \Longrightarrow (x-1)\ (x+1) \vee 0$,

$$(x+1)^2\ (x-1)\ (x-2)<0.$$

Рис. 22.

Ответ: $1<x<2$ (рис. 22).

Рассмотрим неравенство

$$\lg_u v \vee a.$$

Здесь u и v — некоторые функции от x, удовлетворяющие условиям $u>0$, $u\neq 1$, $v>0$.

Выведем общую формулу для решения неравенства этого вида.

$$\lg_u v \vee a \lg_u u \Longleftrightarrow \lg_u v \vee \lg_u u^a.$$

1. $u>1$.

$$\left.\begin{matrix} u>1 \\ v \vee u^a \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} u-1>0 \\ v-u^a \vee 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow (u-1)\ (v-u^a) \vee 0.$$

2. $0<u<1$.

$$\left.\begin{matrix} 0<u<1 \\ v \wedge u^a \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} u-1<0 \\ v-u^a \wedge 0 \end{matrix}\right\} \Longleftarrow (u-1)\ (v-u^a) \vee 0.$$

Итак,

$$\lg_u v \vee a \Longleftrightarrow (u-1)\ (v-u^a) \vee 0, \qquad (2)$$

$$\lg_u v \vee 1 \Longleftrightarrow (u-1)\ (v-u) \vee 0, \qquad (2')$$

$$\lg_u v \vee 0 \Longleftrightarrow (u-1)\ (v-1) \vee 0, \qquad (2'')$$

при условии $u>0$, $u\neq 1$ и $v>0$.

Пример 6. Решить неравенство

$$\lg_{x^2}(x^2-4x+3)>1.$$

Решение. О. Д. З. $|x|\neq 1$, $x<1$, $x>3$.

По формуле ($2'$) будем иметь:

$$(x^2-1)\,(x^2-4x+3-x^2)>0,\ 4\,(x-1)\,(x+1)\left(x-\frac{3}{4}\right)<0.$$

Ответ: $x<-1$, $\frac{3}{4}<x<1$ (рис. 23).

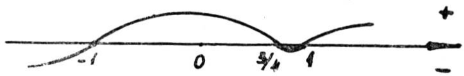


Рис. 23.

2. Показательно-логарифмические неравенства с параметром

Решение показательно-логарифмических неравенств с параметром сводится к решению алгебраических неравенств. Наличие параметра существенно влияет на О. Д. З. и отбор решений. Если параметр входит в основание степени или логарифма, то решение неравенства распадается обычно на два случая.

Пример 7. Решить неравенство

$$x^{\lg_a x}>a.$$

Решение. О. Д. З. $x>0$; $x\neq 1$, $a>0$, $a\neq 1$.

1. Прологарифмируем неравенство по основанию $a>1$:

$$\lg_a^2 x<1 \quad \text{или} \quad -1<\lg_a x<1,$$

$$\text{т. е. } \frac{1}{a}<x<a.$$

С учетом О. Д. З., в этом случае получим:

$$\frac{1}{a}<x<1 \text{ и } 1<x<a.$$

2. Прологарифмируем неравенство по основанию $a<1$:

$$\lg_a^2 x>1 \text{ или } \lg_a x<-1 \text{ и } \lg_a x>1,$$

т. е. $x>\frac{1}{a}$ и $x<a$.

С учетом О. Д. З., в этом случае получим:

$$0<x<a \text{ и } x>\frac{1}{a}.$$

Ответ: При $0<a<1$ $0<x<a$ и $x>\frac{1}{a}$;

при $a>1$ $\frac{1}{a}<x<1$ и $1<x<a$ (рис. 24)

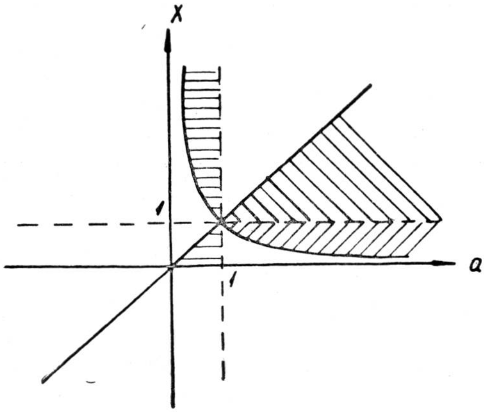


Рис. 24.

* * *

91. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-x-1}\leqslant 3.$

92. $3^{x+\frac{1}{2}}+3^{x-\frac{1}{2}}\geqslant 4^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}.$

93. $2\log_{\frac{1}{2}}x>\log_{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{3}{2}\right)-1.$

94. $\log_{3-x}x<-1.$

95. $\log_x 2\cdot\log_{2x}2>\log^2_{4x}2.$

96. $\log_2\log_3\frac{x-1}{x+1}<\log_{\frac{1}{2}}\log_{\frac{1}{3}}\frac{x+1}{x-1}.$

97. $\log_{\frac{1}{3}}x>\log_x 3-\frac{5}{2}.$

98. $\log_a x+\log_a(x-2)>1.$

99. $\log_a(x-a)>\log_{\frac{1}{a}}(x+a).$

100. $\log_{x+p}2<\log_x 4$, где $0<p<\frac{1}{4}.$

§ 9. Доказательство неравенств

Напомним основные свойства неравенств:

1) если $a>b$ и $b>c$, то $a>c$;

2) если $a>b$, то $a+m>b+m$;

3) если $a_1 > b_1$, $a_2 > b_2, \dots, a_n > b_n$, то $a_1 + a_2 + \dots + a_n > b_1 + b_2 + \dots + b_n$;

4) если $a > b$, то $am > bm$ при $m > 0$ и $am < bm$ при $m < 0$;

5) если $a_1 > b_1 \geqslant 0$; $a_2 > b_2 \geqslant 0, \dots, a_n > b_n \geqslant 0$, то $a_1 a_2 \dots a_n > b_1 b_2 \dots b_n$;

6) если $a > b > 0$, то $a^x > b^x$ при $x > 0$;

7) если $a > 1$ и $x > y > 0$, то $a^x > a^y$, если же $0 < a < 1$ и $x > y > 0$, то $a^x < a^y$.

При доказательстве неравенств используются различные приемы. Мы рассмотрим некоторые из них.

1. Доказательство неравенств при помощи тождественных преобразований

Здесь существует два приема решения.

А. **При помощи некоторых преобразований удается свести неравенство к тождественному.**

Пример 1. Доказать неравенство

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + xz.$$

Решение. Умножим обе части неравенства на 2 и сгруппируем:

$$x^2 + x^2 + y^2 + y^2 + z^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz \geqslant 0,$$

$$(x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2xz + z^2) + (y^2 - 2yz + z^2) \geqslant 0,$$

$$(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 \geqslant 0.$$

Последнее неравенство очевидно.

Пример 2. Доказать неравенство

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leqslant \sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}}.$$

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leqslant \frac{\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3}}{\sqrt{ab}}$$

или

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leqslant \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a^2} - \sqrt{ab} + \sqrt{b^2})}{\sqrt{ab}}.$$

Разделив обе части неравенства на $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ и умножив на $\sqrt{ab}$, получим:

$$\sqrt{ab} \leqslant \sqrt{a^2} - \sqrt{ab} + \sqrt{b^2}$$

или

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0,$$

что, очевидно, верно при всех a и b.

Пример 3. Доказать неравенство

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2 \quad (ab>0).$$

Решение. Приведя к общему знаменателю, получим очевидное неравенство $(a-b)^2\geqslant 0$.

Б. **Комбинируя тождественные неравенства, удается получить доказываемое.**

Пример 4. Доказать неравенство

$$a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2)\geqslant 6abc.$$

Решение. Запишем три очевидных неравенства и сложим их почленно

$$\begin{array}{r} a^2+b^2c^2\geqslant 2abc \\ +\ b^2+c^2a^2\geqslant 2abc \\ c^2+a^2b^2\geqslant 2abc \\ \hline a^2+b^2c^2+b^2+c^2a^2+c^2+a^2b^2\geqslant 6abc \end{array}$$

Сгруппируем члены левой части

$$a^2+a^2b^2+b^2+b^2c^2+c^2+c^2a^2\geqslant 6abc$$

или

$$a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2)\geqslant 6abc,$$

что и требовалось доказать.

Равенство возможно в пяти случаях:

1. $a=b=c=0$; 2. $a=b=c=1$;
3. $a=1$, $b=c=-1$; 4. $b=1$, $a=c=-1$;
5. $c=1$, $a=b=-1$.

Пример 5. Доказать неравенство

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant 3\,(a>0,\ b>0,\ c>0).$$

Решение. Пусть для определенности

$$a\leqslant b\leqslant c.$$

Тогда $\frac{b}{a}\geqslant 1$ и $\frac{c}{b}\geqslant 1$. Поэтому $\left(\frac{b}{a}-1\right)\left(\frac{c}{b}-1\right)\geqslant 0$ или $\frac{c}{a}-\frac{b}{a}-\frac{c}{b}+1\geqslant 0$, т. е.

$$\frac{c}{a}\geqslant\frac{b}{a}+\frac{c}{b}-1.$$

Прибавим к обеим частям последнего неравенства $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right)$. Будем иметь:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}-1.$$

Но, так как $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$ и $\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\geqslant 2$, то выполняется и более слабое неравенство

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant 2+2-1=3.$$

Варианты $b\leqslant c\leqslant a$ и $c\leqslant a\leqslant b$ рассматриваются аналогично.

2. Доказательство неравенств с дополнительными условиями

В задачах, предлагаемых ниже, доказываются неравенства, верные при некоторых данных связях между членами.

Пример 6. Доказать, что куб гипотенузы больше суммы кубов катетов.

Решение. Пусть a и b — катеты, а c — гипотенуза, т. е. $c>a$ и $c>b$. Тогда, умножив обе части равенства $c^2=a^2+b^2$ на c, получим:

$$c^3=a^2c+b^2c>a^2a+b^2b=a^3+b^3.$$

Пример 7. Доказать неравенство

$$x^5+y^5-x^4y-xy^4\geqslant 0,$$

если $x+y\geqslant 0$.

Решение. Преобразуем левую часть неравенства:

$$x^4(x-y)-y^4(x-y)=(x-y)\ (x^4-y^4)=$$
$$=(x-y)\ (x^2-y^2)\ (x^2+y^2)=(x-y)^2\ (x^2+y^2)\ (x-y)\geqslant 0.$$

Неравенство очевидно.

3. Доказательство неравенств методом математической индукции

Поясним „принцип математической индукции“ на примере.

Предположим, нам надо доказать, что все поезда метрополитена голубые.

Доказательством может служить следующее рассуждение. Если первый из увиденных поездов голубой и есть уверенность в том, что каждый следующий тоже голубой, то все поезда голубые.

С точки зрения логики рассуждений, приведенных выше, „принцип математической индукции“ означает следующее. Если в последовательности событий первое происходит, и за происходящим событием следует происходящее событие, то все события последовательности происходят.

Доказательства методом математической индукции производятся в три этапа.

1. Определяем, что утверждение верно при $n=1$.

2. Предполагаем, что утверждение верно при $n=k$ (k — произвольное, натуральное).

3. Убеждаемся, что утверждение справедливо при $n=k+1$.

Очевидно, что метод математической индукции можно применять, начиная с любого натурального n.

Пример 8. Рассмотрим неравенство, обобщающее результат примера 6. Требуется доказать, что

$$a^n+b^n<c^n \tag{*}$$

при $a^2+b^2=c^2$, $c>a$, $c>b$ для всех натуральных $n>2$.

Решение. Неравенство справедливо при $n=3$. Пусть $a^k+b^k<c^k$ при $n=к$. Тогда при $n=к+1$ будем иметь

$$a^{k+1}+b^{k+1}=a^k\cdot a+b^k\cdot b<a^kc+b^kc=(a^k+b^k)\,c<c^{k+1}.$$

Итак, неравенство (*) доказано.

Пример 9. Доказать неравенство

$$2^n>2n+1,$$

где n — натуральное и $n\geqslant 3$.

Доказательство. При $n=3$ неравенство справедливо. Докажем, что

$$2^{k+1}>2\,(k+1)+1 \tag{**}$$

при условии выполнения неравенства

$$2^k>2k+1.$$

Перепишем (**) в виде

$$2\cdot 2^k>2k+3$$

или

$$2^k+2^k>(2k+1)+2,$$

что очевидно, т. к. $2^k>2k+1$ по условию, а $2^k>2$, т. к. $к>0$.

* * *

Доказать следующие неравенства:

101. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^8\geqslant 64ab\,(a+b)^2, \quad (a>0,\ b>0).$

102. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\frac{1}{n^2}<\frac{n-1}{n}.$

103. $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\geqslant 0.$

104. $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+4\geqslant 0, \ (xy\neq 0).$

Доказать методом математической индукции:

105. $(1+\lambda)^n > 1 + n\lambda$, где $\lambda \neq 0$, $\lambda \geqslant -1$, n — натуральное число, большее единицы (неравенство Бернулли).

106. а) $a^n + b^n \leqslant (a+b)^n$, если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$;

б) $2^n > n$, если $n \geqslant 2$;

в) $2^n > n^2$, если $n \geqslant 5$.

§ 10. Задачи на составление уравнений

Задача на составление уравнений представляет собой ряд соотношений между данными и неизвестными величинами, выраженный в словесной форме.

С такого рода задачами учащемуся приходится встречаться в процессе обучения не только математике, но и физике и химии.

Решить задачу на составление уравнений означает найти значения неизвестных величин, т. е. ответить на вопрос задачи. При решении задачи необходимо учитывать естественные физические ограничения, которые, как правило, в тексте задачи не указываются.

Для успешного решения задач на составление уравнений необходимо владеть аппаратом исследования всевозможных уравнений и неравенств.

Невозможно дать полную классификацию задач этой темы, ибо они достаточно разнообразны и допускают решение несколькими способами. Нам представляется, однако, полезным дать общую схему решения задач на составление уравнений.

1. Общая схема решения задачи на составление уравнений

Решение текстовой задачи можно разбить на ряд этапов.

1. **Выбор неизвестных величин и их обозначение.** Здесь следует отметить, что не всегда за неизвестные величины принимаются те, которые требуется найти по условию.

2. **Запись данных в задаче соотношений между неизвестными и данными величинами в аналитической форме.** Указанные соотношения могут быть записаны в виде уравнения, системы уравнений, неравенства, системы неравенств и смешанной системы.

3. **Установление области допустимых значений неизвестных и данных величин.** Здесь необходимо указать естественные физические границы изменения неизвестных и данных величин, а также наложить ограничения, вытекающие из построенной аналитической записи условия задачи.

4. **Решение составленного уравнения, системы уравнений и т. п. и выделение реальных ответов по О. Д. З.** Здесь необходимо владение методами решения уравнений и неравенств с параметрами.

Предполагаемая схема не может претендовать на полноту, ибо, как правило, решение каждой задачи требует индивидуального подхода. Однако в большинстве случаев данную схему можно успешно использовать.

2. Примеры решения задач на составление уравнений

Пример 1. Решить задачу (мы считаем везде в дальнейшем само собой разумеющимся исследование задачи по параметрам, если последние имеются).

Путник, находящийся на расстоянии h от прямолинейного шоссе, увидел автобус, идущий по шоссе, на расстоянии a от себя. Путник побежал по прямой к шоссе и прибежал в ту точку, в которую подошел в то время автобус. Найти расстояние, которое пришлось пробежать путнику, если отношение скорости пешехода к скорости автобуса равно k.

Мы сознательно приводим здесь очень трудную задачу для того, чтобы читатель мог познакомиться с тем, что значит исследовать задачу по параметрам.

Подобные задачи на составление уравнений предлагаются на математических и физических факультетах университетов страны.

Решение. Итак, данные задачи $h,\ a,\ k=\frac{v_{\text{п}}}{v_{\text{а}}}$. Обозначим искомое расстояние x. Отметим сразу же, что $a>h$ и $k<1$. Невыполнение первого из этих условий противоречит условию задачи; второе условие накладываем мы сами из реальности ситуации.

Решение задачи, по-видимому, можно свести к решению прямоугольных треугольников (рис. 25, 26, 27). Однако сразу же возникает вопрос, какая из ситуаций, изображенных на рисунках, может иметь место. Это очевидно зависит от параметров задачи.

Проведем предварительное исследование.

Пусть путник решил двигаться перпендикулярно шоссе. Найдем, при каких значениях параметров это решение ока-

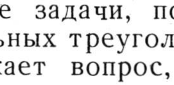


Рис. 25.

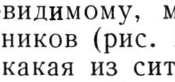


Рис. 26.

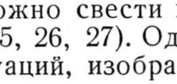


Рис. 27.

залось верным и при каких значениях параметров путник попадет на шоссе раньше и позже автобуса. Этот вопрос можно решить за счет сравнения времени движения автобуса и путника до точки O.

Итак,

$$t_a \vee t_n,$$

$$\frac{\sqrt{a^2-h^2}}{V_a} \vee \frac{h}{V_n},$$

$$\sqrt{a^2-h^2} \vee \frac{h}{k}.$$

Первый случай. Если $\sqrt{a^2-h^2}=\frac{h}{k}$, то решение путника было верным и

$$x=h \text{ (рис. 26).}$$

Второй случай. Если $\sqrt{a^2-h^2}>\frac{h}{k}$, то путник прибежит в O раньше автобуса ($t_а > t_п$). Перепишем связь между параметрами в виде

$$k>\frac{h}{\sqrt{a^2-h^2}}. \tag{1}$$

Третий случай. Если $\sqrt{a^2-h^2}<\frac{h}{k}$, то путник прибежит в O позже автобуса ($t_а < t_п$). Связь между параметрами этого случая запишем в виде

$$k<\frac{h}{\sqrt{a^2-h^2}}. \tag{2}$$

Определим теперь, чему равен x во втором и третьем случаях.

Второй случай. Итак, пусть выполнено условие (1). Тогда, очевидно, путнику придется бежать так, как показано на рис. 25.

Составим очевидное уравнение

$$v_а t=\sqrt{a^2-h^2}-\sqrt{x^2-h^2}.$$

Но

$$v_а=\frac{v_п}{k}, \text{ а } v_п=\frac{x}{t}, \text{ т. е. } v_а=\frac{x}{tk}.$$

Тогда уравнение примет вид

$$\frac{x}{k}=\sqrt{a^2-h^2}-\sqrt{x^2-h^2}. \tag{3}$$

При решении уравнения (3) следует использовать методы решения иррациональных уравнений с параметрами с учетом условия (1).

Переписав (1) в виде

$$\sqrt{a^2-h^2}-\frac{x}{k}=\sqrt{x^2-h^2},$$

заметим, что решение возможно только в области

$$\sqrt{a^2-h^2}-\frac{x}{k}>0,$$

т. е.

$$x<k\sqrt{a^2-h^2}. \qquad (4)$$

Возведя далее обе части уравнения в квадрат, получим после преобразований:

$$(1-k^2)x^2-2k\sqrt{a^2-h^2}\,x+a^2k^2=0,$$

откуда

$$x_{1,2}=\frac{k\sqrt{a^2-h^2}\pm k\sqrt{a^2k^2-h^2}}{1-k^2}.$$

Проверим вещественность найденных решений:

$$a^2-h^2>0 \text{ — всегда}.$$

$$a^2k^2-h^2\geqslant 0, \text{ т. е. } k\geqslant\frac{h}{a}.$$

Последнее условие является более слабым по сравнению с (1), т. к. $a>\sqrt{a^2-h^2}$. Итак, найденные значения x вещественны при наших условиях.

Определим далее, удовлетворяют ли полученные значения x условию (4).

Необходимо выполнение неравенства

$$k\sqrt{a^2-h^2}>k\frac{\sqrt{a^2-h^2}\pm\sqrt{a^2k^2-h^2}}{1-k^2}$$

или

$$\sqrt{a^2-h^2}\,(1-k^2)>\sqrt{a^2-h^2}\pm\sqrt{a^2k^2-h^2}.$$

$$-k^2\sqrt{a^2-h^2}>\pm\sqrt{a^2k^2-h^2}.$$

Последнее неравенство может выполняться только при отрицательной правой части.

Преобразовывая неравенство

$$-k^2\sqrt{a^2-h^2}>-\sqrt{a^2k^2-h^2},$$

получим:

$$k^2\sqrt{a^2-h^2}<\sqrt{a^2k^2-h^2};\ k^4a^2-k^4h^2<a^2k^2-h^2;$$

$$a^2(k^4-k^2)+h^2(1-k^4)<0.$$

Последнее неравенство очевидно, т. к.

$$k^4-k^2<0 \text{ и } 1-k^4<0$$

при условии $k<1$.

Итак, во втором случае, мы получаем

$$x = \frac{k(a^2 - h^2) - k\sqrt{a^2k^2 - h^2}}{1 - k^2}$$

при $k > \frac{h}{\sqrt{a^2 - h^2}}$.

Аналогично *в третьем случае* получаем (рис. 27)

$$x = \frac{k(a^2 - h^2) + k\sqrt{a^2k^2 - h^2}}{1 - k^2}$$

при $\frac{h}{a} < k < \frac{h}{\sqrt{a^2 - h^2}}$.

Рекомендуем читателю самостоятельно решить задачу в третьем случае.

Пример 2. Решить задачу.

Лодка плывет по реке против течения, скорость которого v км/час. Через l км пути она попадает в озеро со стоячей водой. С какой постоянной скоростью должна двигаться лодка, чтобы общее расстояние в S км она прошла не более чем за t часов?

Решение. Пусть x — искомая скорость, тогда

$\frac{l}{x - v}$ — время движения лодки по реке,

$\frac{s - l}{x}$ — время движения лодки в озере.

По условию задачи составляем неравенство:

$$\frac{l}{x - v} + \frac{s - l}{x} \leqslant t. \tag{1}$$

Из условия задачи получим следующие ограничения:

$$v > 0,\ l > 0,\ t > 0,\ s \geqslant l. \tag{2}$$

$$x > v. \tag{3}$$

Преобразуем неравенство (1) к виду

$$tx^2 - (s + vt)x + v(s - l) \geqslant 0.$$

Решая это неравенство, получим

$$x < x_1 = \frac{s + vt - \sqrt{D}}{2t} \text{ и } x > x_2 = \frac{s + vt + \sqrt{D}}{2t},$$

где $D = (s - vt) + 4tvl > 0$.

Выясним далее знак x_1.

$$s + vt - \sqrt{(s-v)^2 + 4tvl} \vee 0,\ s + vt \vee \sqrt{(s - v)^2 + 4tvl},$$

$$s^2 + 2svt + v^2t^2 \vee s^2 - 2svt + v^2t^2 + 4tvl,$$

$$4svt \vee 4tvl,$$

но по условию $s \geqslant l$, следовательно, $x_1 > 0$. Тогда возможен один из трех случаев: 1. $v < x_1$, 2. $x_1 < v < x_2$, 3. $v > x_2$.

Первый случай. Предположим, что

$$v < x_1.$$

Тогда должно выполняться неравенство

$$\frac{s + vt - \sqrt{D}}{2t} > v$$

или

$$s - vt > \sqrt{D}.$$

Это неравенство может иметь решение только при условии $s > vt$. Возведя в квадрат, получим

$$(s - vt)^2 > (s - vt)^2 + 4tvl,$$

что невозможно. Итак, всегда

$$v > x_1.$$

Второй случай. Предположим, что

$$v < x_2.$$

Тогда, аналогично

$$\frac{s + vt + \sqrt{D}}{2t} > v,$$

$$s - vt > - D \text{ или } vt - s < \sqrt{D}.$$

Последнее неравенство выполняется всегда, если $s > vt$. При $s < vt$, возведя в квадрат, получим

$$(vt - s)^2 < (s - vt)^2 + 4tvl,$$

что выполняется всегда.

Так как возможен только один из трех случаев, будем иметь окончательно

$$x > \frac{s + vt + \sqrt{(s - vt)^2 + 4tvl}}{2t}.$$

* * *

107. На лыжной трассе два контрольных пункта, делящих трассу на равные участки. Средняя скорость лыжника на первых двух участках была $a\ \frac{м}{сек}$, а на последних двух — $b\ \frac{м}{сек}$. Какова средняя скорость лыжника, если первый и третий участки он прошел с той же средней скоростью, что и второй участок?

108. Турист прошел расстояние между пунктами A и D со средней скоростью $a\,\frac{км}{час}$, минуя пункты B и C. Его средняя скорость на участке AB в k раз больше его средней скорости на участке BD, а полусумма средних скоростей на участке BC и участке CD равна средней скорости на участке AB. Определить средние скорости на каждом участке, если $AB = BC = CD$.

109. Из одного пункта одновременно и в одном направлении выехали два велосипедиста, первый со скоростью $a\,\frac{км}{час}$ и второй со скоростью $b\,\frac{км}{час}$. Через полчаса в том же направлении выехал третий велосипедист, который, после того как обогнал первого велосипедиста, находился в пути еще полтора часа, пока догнал второго. Определить скорость третьего велосипедиста.

110. Бассейн наполняется из двух кранов. Сначала первый кран был открыт $\frac{1}{k}$ часть того времени, за которое наполняет бассейн второй кран. Затем второй кран был открыт $\frac{1}{k}$ часть того времени, за которое наполняет бассейн первый кран. После этого оказалась наполненной $\frac{1}{n}$ часть бассейна. Оба крана вместе наполняют бассейн за a часов. Сколько времени требуется для наполнения бассейна каждым краном отдельно?

111. Из города выехал грузовик со скоростью $v\,\frac{км}{час}$. Через m часов вдогонку выехал мотоциклист. В некоторый момент времени расстояние между ними было n *км*. Если бы скорость мотоциклиста была в p раз больше, чем в действительности, то это расстояние оказалось бы в три раза меньше. Найти скорость мотоциклиста.

112. Двое рабочих выкопали ров, работая один после другого. При этом первый работал a дней и выполнил часть всей работы, равную $\frac{p}{q}$. Если бы они работали вместе, то ров был бы выкопан в число дней, равное среднему арифметическому между числом дней, в течение которых работал первый, и числом дней, в течение которых работал второй. Сколько дней работал второй рабочий?

113. По одной и той же окружности движутся два тела в одну и ту же сторону. Длина окружности — a метров. Одно тело проходит окружность на p минут скорее другого тела.

Определить, сколько метров в минуту проходит каждое тело, зная, что при движении они сходятся каждые q минут.

114. Во время действия двигателя модель ракеты поднималась с постоянным ускорением, а затем в свободном полете продолжала подъем с замедлением $g = 10 \frac{м}{сек^2}$; достигнув наивысшей точки траектории через 12 *сек* с момента пуска, она спускалась на парашюте в течение 20 *сек* с постоянной скоростью $6 \frac{м}{сек}$. Найти ускорение, с которым поднималась ракета при работающем двигателе, и время его работы.

115. Известно, что масса вещества при радиоактивном распаде уменьшается по закону $m = m_0 a^{-\lambda t}$, где m и m_0 — количество вещества в моменты времени t и 0, λ — постоянная, зависящая от природы вещества.

Из двух радиоактивных веществ первого было взято в два раза меньше, чем второго. Через двадцать лет общая масса обоих веществ уменьшилась в восемь раз. Найти период полураспада обоих веществ, если период полураспада второго вещества в два раза меньше, чем первого вещества.

116. Ребята установили на середине реки флажок и затеяли игру. Нужно, получив на расстоянии l ниже по течению от флажка два мяча и оставив один из них, перевезти вплавь второй на некоторое расстояние так, чтобы, вернувшись за первым, доставить его к флажку в тот момент, когда у флажка окажется и второй. На какое расстояние нужно отвезти второй мяч и сколько метров придется проплыть пловцу, если скорость пловца в k раз больше скорости реки?

117. В Ленинград должны прийти два московских поезда с разрывом в один час. Машинистам поездов, идущих с одинаковой скоростью, сообщили по радио, что первый поезд опаздывает на t_1 минут, а второй — на t_2 минут. Тогда машинист первого поезда увеличил скорость на v_1 *км/час*, а машинист второго — на v_2 *км/час*. После этого поезда прибыли в Ленинград без опоздания. С какой скоростью шли поезда до сообщения об опоздании?

118. Сплав из меди и цинка весом a *кг* при погружении в воду потерял в своем весе b *кг*. Определить количество меди и цинка в этом сплаве, если известно, что медь теряет в воде $p\%$ своего веса, а цинк $q\%$.

119. Имеется лом стали двух сортов с содержанием никеля $a\%$ и $b\%$. Сколько нужно взять каждого из этих сортов, чтобы получить c тонн стали с содержанием $d\%$ никеля?

120. В двух сосудах находился раствор вещества различной концентрации, причем в первом сосуде на m литров меньше, чем во втором. Из каждого сосуда взяли одновременно n литров, и взятое из первого сосуда перелили во второй, а взятое из второго — в первый. После этого концентрация растворов в обоих сосудах стала одинаковой. Найти, сколько литров раствора было в каждом сосуде.

121. Из сосуда, наполненного раствором соляной кислоты концентрации $p\,\dfrac{г}{литр}$, отлили a литров и долили сосуд водой. После переливания эту операцию повторили еще один раз и получили в сосуде раствор концентрации $q\,\dfrac{г}{литр}$. Определить вместимость сосуда.

122. Имеется два раствора йода в спирте. В первом растворе отношение веса йода к весу растворителя равно p, во втором — q. В каком отношении нужно взять веса этих растворов, чтобы получить раствор, в котором отношение веса йода к весу растворителя было бы равно r? При каких соотношениях между p, q и r задача имеет решение?

123. Воздух, содержащий $a\%$ углекислого газа, пропускается через систему фильтров, каждый из которых поглощает количество углекислоты, пропорциональное ее концентрации в процентах (коэффициент пропорциональности равен k). Какое наименьшее количество фильтров следует взять, чтобы очищенный с их помощью воздух содержал не более $b\%$ углекислого газа?

124. По закону действующих масс для мономолекулярных реакций количество вещества, прореагировавшее за малый промежуток времени от t до $t+\tau$ *сек*, пропорционально концентрации этого вещества в момент времени t и длине промежутка τ (коэффициент пропорциональности равен k).

Начальная концентрация некоторого вещества равна $a\,\dfrac{моль}{литр}$. Через T *сек* концентрация его была $b\,\dfrac{моль}{литр}$. Разбивая данный промежуток на n равных частей и считая, что для каждой из них имеет место закон действующих масс, найти константу скорости реакции k.

125. Интенсивность радиоактивного излучения смеси двух радиоактивных веществ A и B через 8 дней составила 0,5, а еще через 8 дней 0,29 первоначальной. Сколько процентов составляет содержание вещества B в смеси и какова интенсивность его излучения через 8 дней, по сравнению с первоначальной, если интенсивность излучения вещества A за 8 дней ослабевает до 0,6?

126. Пассажир пробежал вверх от нижней площадки по поднимающемуся эскалатору 10 *м* и затем спустился вниз, затратив на это 73 *сек*. Ему потребовалось бы 4 *мин* 22 *сек*, чтобы аналогично по спускающемуся эскалатору пробежать вниз 10 *м*, а затем подняться наверх. Найти скорость эскалатора, если по неподвижному эскалатору пассажир бежит вниз на 35% быстрее, чем наверх.

127. Рыболовы делили улов. Первый взял a штук и n-ую часть остатка. Второй взял $2a$ штук и n-ую часть остатка, третий — $3a$ штук и n-ую часть остатка и т. д. Оказалось, что таким образом весь улов был разделен поровну. Сколько было рыбаков?

128. Сколько существует прямоугольников, у которых длины сторон выражаются целыми числами, а их сумма численно равна площади прямоугольника?

129. У мальчика было некоторое количество пятаков, он складывал их то в правильный треугольник, то в квадрат. Сколько денег было у мальчика, если сторона квадрата содержала на две монеты меньше, чем сторона треугольника?

130. Пловец плыл против течения Невы, у Кировского моста он потерял пустую флягу. Проплыв еще двадцать минут против течения реки, он заметил свою потерю и вернулся, чтобы догнать флягу. Какова скорость течения Невы, если он догнал флягу у Дворцового моста, а расстояние между мостами равно 2 *км*?

131. Два туриста одновременно отбывают из пункта A и следуют в пункт B. Считается, что туристы прибыли в пункт B, если туда прибыл последний из них. В распоряжении туристов имеется один велосипед, который они могут оставлять на дороге требуемое время и на котором попеременно может ехать любой из них, но одновременно вдвоем туристы не могут ехать на велосипеде. Нужно распорядиться велосипедом таким образом, чтобы время прибытия туристов в пункт B было наименьшим. Найти это время, если скорость пешехода равна v, скорость велосипедиста втрое больше и расстояние между пунктами A и B равно S.

132. Измеряется скорость звука в трех стержнях, сделанных из разных материалов. В первом опыте оказалось, что систему из трех последовательных стержней звук проходит за время t, а систему из второго и третьего стержней в два раза быстрее, чем один первый стержень. Во втором опыте второй стержень заменили новым, и тогда систему из трех стержней звук прошел за время T, а систему из первого и второго стержней вдвое медленнее, чем один третий. Найти скорость звука в новом стержне, если длина его l.

133. Рабочий, возвращаясь из отпуска, проехал 246 *км* и на этот путь употребил на один день больше половины оставшегося ему на остальную дорогу времени. Сделав расчет, он увидел, что должен проезжать ежедневно на 15 *км* больше, чем раньше, чтобы проехать оставшиеся 276 *км* и поспеть к сроку. За сколько времени до конца отпуска он отправился в дорогу?

134. Длина окружности заднего колеса экипажа в два раза больше длины окружности переднего. Если окружность переднего колеса увеличить на 5 *дм*, а окружность заднего колеса уменьшить на 5 *дм*, то на расстоянии 150 *м* переднее колесо сделало бы на 15 оборотов больше заднего. Найти длину окружности каждого колеса.

135. Два насоса, работая одновременно, могут выкачать воду из котлована за два часа. Один первый насос затратит на эту работу на три часа более, чем один второй. Во сколько времени эту работу может выполнить каждый насос?

136. Для того, чтобы поддержать на определенном уровне воду в котловане, в который за сутки прибывает n *м*^{3} воды, поставлены два насоса производительностью $a_1 \frac{м^3}{час}$ и $a_2 \frac{м^3}{час}$ и стоимостью одного часа, соответственно, r_1 руб. и r_2 руб. Определить, сколько времени должен работать каждый насос, чтобы затраты были наименьшими $\left(\frac{n}{a_1 + a_2} \leqslant 24\right)$.

137. Одному буксиру нужно перевезти за наименьшее время два понтона вниз по реке на 1 *км*. Было решено, что один понтон будет отправлен по течению реки самостоятельно, а другой будет некоторое время транспортироваться буксиром, после чего он оставит его и вернется за первым, отбуксировав его до конечного пункта. Сколько километров должен транспортироваться второй понтон, чтобы оба пришли к конечному пункту одновременно, и сколько потребуется времени на всю перевозку, если собственная скорость буксира $v \frac{км}{час}$, а скорость течения реки $u \frac{км}{час}$?

138. Некоторую часть маршрута туристам предстоит совершить вверх по реке. В их распоряжении моторная лодка, способная развивать две скорости с разным расходом горючего. Если скорость реки окажется u *км/час*, то при движении на любой из скоростей будет затрачено одинаковое количество горючего. Если же скорость реки окажется в k раз больше, то при движении с собственной скоростью $v_1 \frac{км}{час}$ горючее будет израсходовано полностью, а при движении с собственной скоростью $v_2 \frac{км}{час}$ останется A *кг* горючего. Каким запасом горючего снабжена лодка?

139. Скорость течения реки, вытекающей из озера, равна $c \frac{км}{час}$. Моторная лодка, находящаяся на расстоянии l *км* от озера, обладает двумя скоростями $v_1 \frac{км}{час}$ и $v_2 \frac{км}{час}$ с расходом горючего p_1 *кг* и p_2 *кг* в час соответственно ($v_1 > v_2$ и $p_1 > p_2$). Сколько времени должна идти лодка на большей из скоростей, чтобы достичь озера за наименьшее время, если запас горючего P *кг*?

140. Пассажир, опоздавший на t часов на свой поезд, решил сначала догнать его на такси. Однако через некоторое время он пересел на автобус, заплатив за билет A руб., и прибыл на одну из станций одновременно с поездом. Рассчитав скорость поезда, он обнаружил, что если бы продолжал ехать на такси, то догнал бы поезд станцией раньше, затратив при этом на B руб. меньше. Какова скорость поезда и сколько времени пассажир ехал на такси, если скорость такси $v_1 \frac{км}{час}$, скорость автобуса $v_2 \frac{км}{час}$, стоимость проезда одного километра на такси a_1 руб., а на автобусе — a_2 руб.?

141. От момента встречи двух поездов до момента, когда они разошлись, прошло t секунд. Пассажир первого поезда видел в окно второй поезд на τ секунд больше, чем пассажир второго поезда видел первый поезд. Мимо километрового столба первый поезд шел на θ секунд больше, чем второй. Во сколько раз скорость второго поезда больше скорости первого?

142. На соревнованиях авиамоделей лучшими оказались две модели. При встречном ветре $u \frac{м}{сек}$ первая модель продержалась в воздухе на t секунд меньше второй, но пролетела на l метров дальше. Какая из моделей пролетит большее расстояние при безветренной погоде?

143. Вам поручили срочно догнать велосипедиста, выехавшего t часов назад из города по шоссе. Располагая A рублями, вы можете часть пути совершить на такси или ехать на автобусе. Сколько рублей надо истратить на такси, чтобы выполнить поручение, если скорость автобуса $v_2 \frac{км}{час}$, такси $v_1 \frac{км}{час}$, велосипедиста $u \frac{км}{час}$, а стоимость проезда 1 *км* на автобусе a_2 руб., на такси a_1 руб.,? Остановки автобуса достаточно часты, и временем на ожидание автобуса можно пренебречь ($u < v_2 < v_1$; $a_2 < a_1$).

144. Набранные командами, участницами турнира по волейболу, очки образуют арифметическую прогрессию. Сколько очков набрала команда, занявшая последнее место, если за проигрыш очки не начислялись (ничьих в волейболе нет) и каждая команда играла со всеми остальными по одному разу?

145. Двигатель ракеты, начавшей движение без начальной скорости, отрезок пути h давал постоянное ускорение a_1, а затем перешел на другой режим и на таком же пути h давал постоянное ускорение a_2 ($a_2 > 0$). Найти время полета на втором режиме. Провести исследование.

146. Велосипедист прошел первый круг с некоторой постоянной скоростью, а на втором круге увеличил скорость на $a\frac{км}{час}$. Время между двумя прохождениями через точку дистанции, диаметрально противоположную старту, равно t час. С какой скоростью велосипедист шел первый круг, если длина одного круга s *км*? Провести исследование.

147. Два велосипедиста начали движение с одинаковой скоростью по дистанции, состоящей из трех кругов. Первый сохранил эту скорость до конца дистанции, а второй увеличивал скорость на $a\frac{км}{час}$ каждый последующий круг. На финише оказалось, что он обогнал первого велосипедиста на полкруга. Найти начальную скорость велосипедистов.

148. Корабль движется с постоянной скоростью v_1. По прямой, перпендикулярной к направлению движения корабля, движется частица с постоянной скоростью v_2. В момент обнаружения частицы корабль находился на расстоянии s от точки A пересечения траекторий и включил двигатель, дающий постоянное ускорение a. На каком расстоянии от точки A могла находиться частица в момент ее обнаружения, если корабль проскочил точку A раньше частицы?

§ 11. Последовательности и пределы

1. Понятие о числовой последовательности и пределе числовой последовательности

Рассмотрим функцию f, заданную на множестве натуральных чисел

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots$$

Множество значений функции f

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ \ldots,\ f(n),\ \ldots \qquad (1)$$

будем называть *последовательностью* и обозначать $\{f(n)\}$. Числа $f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n), \ldots$ называются *членами* последовательности (1), а $f(n)$, где n — любое натуральное число, — ее *общим членом*, так что общий член последовательности (1) есть функция целочисленного аргумента n.

Введем обозначение

$$x_n = f(n), \qquad (2)$$

тогда последовательность (1) запишется в виде

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots \qquad (3)$$

Постоянное число a называется *пределом* последовательности (3) или переменной x_n, если для любого положительного числа ε существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для любого номера $n > N$ справедливо неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Если a есть предел последовательности x_n, то пишут

$$\lim x_n = a \text{ или } x_n \to a.$$

* * *

149. Пусть дана возвратная последовательность (3), определяемая возвратным уравнением

$$x_n = tx_{n-1} + 1 \; (n > 1)$$

при $x_1 = 1$. Выразить общий член x_n этой последовательности как функцию номера n.

150. Найти общий член x_n возвратной последовательности, определяемой возвратным уравнением

$$x_n = (\alpha + \beta)\, x_{n-1} - \alpha - \beta\, x_{n-2}$$

при

$$x_1 = \alpha - \beta, \; x_2 = \alpha^2 - \beta^2.$$

151. Найти первые десять чисел Фибоначчи — первые десять членов возвратной последовательности, определяемой возвратным уравнением

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} (n > 2)$$

при $x_1 = x_2 = 1$.

152. Найти пределы следующих числовых последовательностей, заданных формулой для общего члена:

а) $x_n = 2 + \frac{1}{n}$, б) $x_n = 2 - \frac{1}{n}$, в) $x_n = \frac{n}{n+1}$,

г) $x_n = \frac{2n+1}{n+1}$, д) $x_n = \underbrace{0{,}33\ldots3}_{n}$,

е) $x_n = \underbrace{1{,}233\ldots3}_{n}$, ж) $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}$,

з) $x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$.

153. Что означают следующие предложения:

а) данная последовательность не имеет числа a своим пределом?

б) данная последовательность вовсе не имеет предела?

154. Какая переменная величина называется ограниченной, ограниченной сверху (снизу)? Указать, какие из перечисленных ниже ограниченных переменных имеют пределы:

а) $x_n = \frac{n^2}{n^2+1}$, б) $x_n = (-1)^n$, в) $x_n = \frac{2^n - 2^{-n}}{2^n + 2^{-n}}$.

155. Доказать, что переменная x_n монотонна и ограничена сверху (снизу), и найти ее предел:

а) $x_n = \frac{1}{n+1}$, б) $x_n = \frac{1}{n^2+1}$, в) $x_n = 1 + \frac{1}{n}$,

г) $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, д) $x_n = \frac{c^n}{n!}$ $(c > 0,\ n > c - 1)$.

156. Доказать методом полной математической индукции, что переменная

$$x_n = \underbrace{\sqrt{c + \sqrt{c + \cdots + \sqrt{c}}}}_{n \text{ корней}} \quad (c > 0)$$

ограничена сверху числом $\sqrt{c} + 1$, и найти ее предел, убедившись, что она монотонно возрастает.

157. Доказать, что переменная

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

монотонно возрастает и ограничена сверху.

2. Бесконечно малые величины

Переменная величина α_n называется *бесконечно малой*, если ее предел равен нулю

$$\lim \alpha_n = 0.$$

Последнее означает, что для любого положительного числа ε существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для любого номера $n > N$ выполняется неравенство

$$|\alpha_n| < \varepsilon.$$

* * *

158. Доказать, что переменные

а) $\alpha_n = \frac{1}{n}$, б) $\alpha_n = -\frac{1}{n}$,

в) $\alpha_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$, г) $\alpha_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}$,

д) $\alpha_n = \frac{1}{n^2}$, е) $\alpha_n = -\frac{1}{n^2}$,

ж) $\alpha_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{n^2+1}$

суть бесконечно малые.

159. Доказать, что переменная величина $\alpha_n = q^n$, есть бесконечно малая, если $|q| < 1$.

160. Чему равны сумма и произведение двух бесконечно малых величин? Чему равно произведение бесконечно малой величины на величину ограниченную?

161. Доказать, что переменная величина x_n и ее предел a связаны соотношением

$$x_n = a + \alpha_n,$$

где α_n — бесконечно малая.

3. Бесконечно большие величины

Переменная величина α_n называется бесконечно большой, если для любого положительного числа E существует такой номер $N = N(E)$, что для любого номера $n > N$ выполняется неравенство

$$|\alpha_n| > E.$$

* * *

162. Доказать, что переменные

а) $\alpha_n = n$, б) $\alpha_n = -n$,

в) $\alpha_n = (-1)^n \cdot n$, г) $\alpha_n = n^2$,

д) $\alpha_n = -n^2$, е) $\alpha_n = (-1)^n \cdot \frac{n^2+1}{n}$

суть бесконечно большие.

163. Доказать, что если переменная α_n — бесконечно большая, то $\frac{1}{\alpha_n}$ — бесконечно малая.

164. Доказать, что если переменная α_n — бесконечно малая, отличная от нуля, то $\frac{1}{\alpha_n}$ — бесконечно большая.

165. Доказать, что переменная $x_n = Q^n$, есть бесконечно большая, если $|Q| > 1$.

4. Свойства конечных пределов, связанные с арифметическими действиями над переменными и неравенствами

Если переменные x_n и y_n имеют конечные пределы a и b

$$\lim x_n = a, \ \lim y_n = b,$$

то их сумма $x_n + y_n$, разность $x_n - y_n$, произведение $x_n \cdot y_n$, частное $\frac{x_n}{y_n}$ (если $b \neq 0$) также имеют конечные пределы, причем,

$$\lim (x_n \pm y_n) = a \pm b,$$

$$\lim x_n \cdot y_n = a \cdot b, \ \lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

* * *

166. Найти пределы

а) $\lim \left(2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n^2}\right)$,

б) $\lim \left(2-\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{1}{n+1}\right)$,

в) $\lim \dfrac{3-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n^2+1}}$.

167. Известно, что если переменные x_n, y_n и z_n связаны соотношением

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n,$$

причем $x_n \to a$, $z_n \to a$, то и $y_n \to a$. Пользуясь этим свойством, найти предел переменной

$$x_n = \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}.$$

5. Некоторые задачи на пределы

168. Доказать, что если x измеряется в радианах, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Указание. Воспользоваться неравенством

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

169. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{3x}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin mx}{\sin nx}$,

г) $\lim\limits_{n\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$,

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x}$,

е) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{3x^2}$,

ж) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$,

з) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{x}$,

и) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\operatorname{ctg} x$,

к) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{ctg} x}$,

л) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$,

м) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

170. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \dfrac{2x+3}{x+2}$, б) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \dfrac{1}{1-x^2}$,

в) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{1-x^2}$, г) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{1-x^2}$,

д) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^2+1}$ е) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$.

171. Найти пределы:

а) $\lim \dfrac{n^2+2n-1}{n^2-n+3}$, б) $\lim \dfrac{n+1}{n^2-n+2}$,

в) $\lim \dfrac{n+2}{n^2-n}$, г) $\lim \dfrac{n^2-n+1}{n+2}$,

д) $\lim \dfrac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}}$, е) $\lim\left(\dfrac{1}{(n+1)!} : \dfrac{1}{n!}\right)$,

ж) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-6x+8}$, з) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$,

и) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^5-1}{x^4-1}$, к) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^m-1}{x^n-1}$.

172. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$, б) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-1}-x)$,

в) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2-4}+x)$, г) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x}$,

д) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$, е) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-a^2}-x)$.

173. Используя предел

$$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2,\quad 718281828459045 \approx 2{,}72,$$

найти пределы:

а) $\lim\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$, б) $\lim\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$,

в) $\lim\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, г) $\lim\left(\dfrac{2n+1}{2n}\right)^{3n}$.

174. Используя предел

$$\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

(знаком ln обозначим логарифм по основанию e; такой логарифм называется **натуральным**), найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{x}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin x)}{x}$, г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\operatorname{tg} x)}{\sin x}$.

175. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x$, б) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{x}$, в) $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{x}$,

г) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x}$, д) $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{-x}$, е) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}}$,

ж) $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{\frac{1}{x}}$, з) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-\frac{1}{x^2}}$, и) $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{-\frac{1}{x^2}}$.

176. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0 (x<0)} \dfrac{\kappa}{x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0 (x>0)} \dfrac{\kappa}{x}$,

в) $\lim\limits_{x\to 2 (x<2)} \dfrac{2x+3}{x-2}$, г) $\lim\limits_{x\to 2 (x>2)} \dfrac{2x+3}{x-2}$,

д) $\lim\limits_{x\to 1 (x<1)} \dfrac{1}{1-x^2}$, е) $\lim\limits_{x\to 1 (x>1)} \dfrac{1}{1-x^2}$,

ж) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}\left(x<\frac{\pi}{2}\right)} \operatorname{tg} x$, з) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}\left(x>\frac{\pi}{2}\right)} \operatorname{tg} x$.

177. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0 (x<0)} e^{\frac{1}{x}}$, б) $\lim\limits_{x\to 0 (x>0)} e^{\frac{1}{x}}$, в) $\lim\limits_{x\to 0} \ln x$,

г) $\lim\limits_{x\to 0 (x<0)} e^{-\frac{1}{x^2}}$, д) $\lim\limits_{x\to 0 (x>0)} e^{-\frac{1}{x^2}}$.

§ 12. Функции и графики функций

1. Область определения (область задания) функции. Область изменения (множество значений) функции. Четная и нечетная функции. Периодические функции.

178. Найти область определения и область изменения каждой из следующих функций:

а) $y=\sqrt{1-x^2}$, б) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, в) $y=\sqrt{x-1}$, г) $y=\sqrt{1-x}$,

д) $y=\sqrt{x^2-4}$, е) $y=\sqrt{|x|}$,

ж) $y=\frac{x}{x-2}$, з) $y=\frac{1}{x^2-1}$,

и) $y=\frac{x}{x^2-1}$, к) $y=2x\sqrt{1-x^2}$.

179. Найти область определения и область изменения функций:

а) $y=3^{\frac{1}{x}}$, б) $y=e^x$,

в) $y=e^{\sin x}$, г) $y=e^{\frac{1}{x}}$,

д) $y=e^{\frac{1}{x-1}}$, е) $y=\frac{3^x+3^{-x}}{2}$,

ж) $y=\frac{3^x-3^{-x}}{2}$, з) $y=\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$,

и) $y=\frac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}}$, к) $y=\sqrt{\sin\frac{x}{2}}$,

л) $y=\sqrt{\sin x-1}$, м) $y=2\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2}$,

н) $y=\frac{1}{2}\arccos\sqrt{2x}$, о) $y=2\,\mathrm{arctg}\,(x+1)$.

180. Найти область определения и область изменения функций:

а) $y=\lg\sin x$, б) $y=\lg(x^2-3x+2)$,

в) $y=\lg(x^2+x+1)$, г) $y=\lg(-x^2+x-1)$,

д) $y=\mathrm{artg}\,\frac{1}{x}$, е) $y=\sin|x|$,

ж) $y=|\sin x|$, з) $y=\sqrt{\lg\cos 2\pi x}$.

181. Указать, какие из перечисленных функций являются четными:

а) $y=x^2+|x|$, б) $y=x^2+x$,

в) $y=\cos 3x$, г) $y=\sin 3x$,

д) $y=x^2+c$, е) $y=\sin|x|$,

ж) $y=|\sin x|$, з) $y=кx$,

и) $y=x^3-x$, к) $y=\frac{к}{x}$,

л) $y=\frac{1}{x^2}$, м) $y=\frac{1}{x^2-1}$.

182. Указать, какие из перечисленных функций являются нечетными:

а) $y = x|x|$, б) $y = \sin\frac{x}{2}$,

в) $y = \frac{3^x + 3^{-x}}{2}$, г) $y = \frac{3^x - 3^{-x}}{2}$,

д) $y = ||x| - x|$, е) $y = \ln|x|$,

ж) $y = |\ln x|$, з) $y = \frac{1}{x^2+1}$,

и) $y = e^{-x^2}$, к) $y = \arcsin|x|$,

л) $y = \frac{x}{x^2-1}$, м) $y = xe^{|x|}$,

н) $y = \operatorname{tg} mx$, о) $y = \operatorname{arctg}|x|$,

п) $y = \arcsin mx$, р) $y = \operatorname{arctg} mx$.

183. Доказать, что функция

$$y = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

является четной.

184. Доказать, что функция

$$y = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

является нечетной.

185. Представить любую функцию $f(x)$, заданную в интервале, симметричном относительно точки $x = 0$, в виде суммы четной и нечетной функций.

186. Найти периоды функций:

а) $y = \cos 2x$, б) $y = \cos\frac{x}{2}$,

в) $y = \cos\sqrt{2}x$, г) $y = 2\sin(3x + 2)$.

187. Являются ли периодическими следующие функции:

а) $y = 1 + \cos x + \cos 2x$, б) $y = \cos 2x + \cos\sqrt{2}x$.

2. Построение графиков функций

188. Как по графику функции $y = f(x)$ построить графики следующих функций:

а) $y = f(x) + b$, б) $y = f(x - a)$,

в) $y = -f(x)$, г) $y = kf(x)$,

д) $y = f(-x)$, е) $y = f(kx)$,

ж) $y = kf[m(x-a)] + b$, з) $y = f(mx+n)$,

и) $y = f(|x|)$, к) $y = |f(x)|$,

л) $y = |f(|x|)|$, м) $y = \frac{1}{f(x)}$?

189. Построить графики указанных ниже функций, проведя предварительно исследование их свойств по схеме:

а) область определения и область изменения;

б) наличие свойств четности и нечетности;

в) наличие свойства ограниченности;

г) наличие свойства периодичности;

д) точки пересечения графика функций с осями координат;

е) интервалы знакопостоянства функции;

ж) интервалы возрастания и убывания, максимумы и минимумы, наибольшие и наименьшие значения функции;

з) поведение функции на границе области определения ее, в окрестности точек разрыва и на бесконечности, наличие асимптот.

а) $y = |x|$, б) $y = ax^2$, в) $y = x^2 - 4x + 3$,

г) $y = x^3$, д) $y = \frac{k}{x}$, е) $y = \frac{1}{1+x^2}$,

ж) $y = \frac{1}{1-x^2}$, з) $y = \sqrt{x}$, и) $y = \sqrt[3]{x}$,

к) $y = 3^x$, л) $y = 3^{-x}$, м) $y = 3\sin 2x$,

н) $y = 4\sin\frac{x}{2}$, о) $y = \sqrt{1-x^2}$, п) $y = \frac{x}{x}$,

р) $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, с) $y = x^3 - x$, т) $y = \sqrt{x^2-4}$.

190. Найти область задания дробно-линейной функции

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad - bc \neq 0).$$

Найти точки пересечения графика этой функции с осями координат, изучить поведение функции в окрестности точки разрыва и на бесконечности, найти вертикальные и горизонтальные асимптоты. Построить график. Построить график дробно-линейной функции по графику функции

$$y = \frac{1}{x}.$$

Построить графики функций

$$y = -\frac{1}{x}, \quad y = \frac{1}{1-x}, \quad y = \frac{x-1}{x+1}.$$

191. Построить графики функций:

а) $y=-\dfrac{1}{x^2+1}$, б) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$, в) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$,

г) $y=\dfrac{1}{x^2-1}$, д) $y=\dfrac{1}{x^2}$, е) $y=\dfrac{x^2+1}{x}$,

ж) $y=x^2+\dfrac{1}{x}$, з) $y=x+\dfrac{1}{x^2}$, и) $y=-\dfrac{1}{x^2}$.

192. Построить графики функций:

а) $y=|x|+1$, б) $y=|x|-1|$, в) $y=-|x|$,
г) $y=2|x|$, д) $y=|-x|$, е) $y=|2x|$,
ж) $y=-|x|+1$, з) $y=|1-|x||$, и) $x=|x+1|+|x-1|$,

к) $y=x+|x|$, л) $y=\dfrac{|x|-x}{2}$, м) $y=\dfrac{|x|}{x}$.

193. Построить графики функций:

I. а) $y=|x^2-1|$, б) $y=x^2-2|x|+1$,
в) $y=|x^2-3|x|+|2|$, г) $y=(5-|x|)(x+1)$.

II. а) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, б) $y=\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$,

в) $y=\sqrt{2px}$, г) $y=x\sqrt{x}$,

д) $y=\sqrt[3]{x^2}$, е) $y=x\sqrt{|x|}$.

194. Построить графики функций:

а) $y=3^{|x|}$, б) $y=3^{\frac{|x|}{x}}$, в) $y=\lg\dfrac{|x|}{x}$,
г) $y=\sin|x|$, д) $y=|\sin x|$, е) $y=|\sin|x||$,

ж) $y=\sin(|x|+x)$, з) $y=\sin\dfrac{|x|-x}{2}$, и) $y=\sin\left(\pi\dfrac{|x|}{x}\right)$,

к) $y=\lg|x|$, л) $y=|\lg x|$, м) $v=|\lg||x||$.

195. Построить графики функций:

а) $y=\dfrac{1}{2}\cos 2x$, б) $y=2\cos\dfrac{x}{2}$,

в) $y=2\sin 2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$, г) $y=\sin x+\cos x$,

д) $y=3\sin 2x+4\cos 2x$, е) $y=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1$.

196. Построить графики функций:

а) $y=x\sin x$, б) $y=\sin\dfrac{1}{x}$, в) $y = x \sin \frac{1}{x}$,

г) $y = 3^{-x} \sin x$,

д) $y = 3^x \sin x$,

е) $y = 3^{\frac{1}{x}}$,

ж) $y = 3^{-\frac{1}{x^2}}$,

з) $y = 3^{\frac{x-1}{x}}$,

и) $y = 3^{\frac{1}{x^2-1}}$,

к) $y = \frac{3^x + 3^{-x}}{2}$,

л) $y = \frac{3^x - 3^{-x}}{2}$,

м) $y = \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^x}$,

н) $y = \frac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}}$,

о) $y = e^x$,

п) $y = e^{-x}$,

р) $y = e^{-x^2}$,

с) $y = e^{\frac{1}{x}}$,

т) $y = e^{\frac{1}{x-1}}$.

197. Построить графики функций:

а) $y = x^2 \ (x \geqslant 0)$,

б) $y = (x-1)^2 \ (x \geqslant 1)$,

в) $y = x^2 - x + 1 \ (x \geqslant 1)$,

г) $x = -x^2 \ (x \leqslant 0)$.

198. Построить график функции $y = \operatorname{sign} x$, определяемой следующим образом:

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 0 \\ 0 & \text{при } x = 0 \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

199. Доказать, что

$$|x| = x \cdot \operatorname{sign} x.$$

200. Построить графики функций:

а) $y = \operatorname{sign} |x|$,

б) $y = \operatorname{sign} 3^x$,

в) $y = \operatorname{sign} (2x - 1)$,

г) $y = \operatorname{sign} (\sin x)$,

д) $y = \operatorname{sign} \sqrt{x}$,

е) $y = \operatorname{sign} \frac{x}{x}$,

ж) $y = \operatorname{sign} (x^2 - 4x + 3)$,

з) $y = \operatorname{sign} \left(x^4 - x^2 + \frac{1}{4} \right)$,

и) $y = \operatorname{sign} (x^2 + x + 1)$,

к) $y = \operatorname{sign} \lg x$.

201. Построить график функции $y = E(x)$, где $E(x)$ — „целая часть“ x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x.

202. Доказать, что функция

$$y = x - E(x)$$

ограничена и имеет период, равный единице. Построить график этой функции.

3. Прямая и обратная функции

203. Как связаны между собою графики прямой и обратной функций, например, графики функций

$$y = a^x \text{ и } y = \log_a x?$$

204. Найти обратную функцию для данной функции и построить графики обеих функций на одном рисунке:

а) $y = ax$, б) $y = \sqrt{x}$, в) $y = x^3$,
г) $y = \log_3 x$, д) $y = \arcsin x$, е) $y = \arccos x$,
ж) $y = \operatorname{arctg} x$, з) $y = \dfrac{k}{x}$.

205. Построить графики функций:

а) $y = \sin(\arcsin x)$, б) $y = \arcsin x\ (\sin x)$,
в) $y = \cos(\arccos x)$, г) $y = \arccos(\cos x)$,
д) $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$, е) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$,
ж) $y = \sin(\arccos x)$, з) $y = \cos(\arcsin x)$.

206. Построить графики функций, определяемых следующими уравнениями:

а) $x^2 + y^2 = 1$, б) $x^2 + 2y = 1$,
в) $x^2 - y^2 = 1$, г) $y^2 - x^2 = 1$,
д) $xy = 1$, е) $y^2 = 2px$,
ж) $y^2 = x^3$.

4. Геометрическое истолкование уравнений и систем уравнений

207. Найти решения следующих систем уравнений и дать геометрическое истолкование систем уравнений и их решений:

а) $\begin{cases} x + y = 0, \\ x - y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x - y = 0, \\ 4x - 2y = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y = 3, \\ 2x + 2y = 6; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x - y = 1, \\ 2x - 2y = 3; \end{cases}$ е) $\begin{cases} y = x, \\ x = 1. \end{cases}$

208. Найти решения следующих систем уравнений и дать геометрическое истолкование систем уравнений и их решений:

а) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = y^2, \\ y = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y = x^2, \\ x = y^2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ xy = 1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ y = x; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ y = x; \end{cases}$ з) $\begin{cases} y^2 - x^2 = 1, \\ y = x; \end{cases}$

и) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ x^2 + y^2 = 1; \end{cases}$ к) $\begin{cases} |y| = x^2, \\ x = 1. \end{cases}$

§ 13. Комплексные числа

1. Определение комплексного числа. Алгебраическая форма комплексного числа

Комплексными числами будем называть упорядоченные пары вещественных чисел (a, b), для которых понятие равенства и правила действий определены следующими аксиомами:

1. $(a, b) = (c, d)$ тогда и только тогда, когда $a = c$, $b = d$;
2. $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$;
3. $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$,

и для которых имеет место аксиома

4. $(a, 0) = a$ (аксиома, определяющая связь между комплексными и вещественными числами).

Комплексное число (a, b), где $b \neq 0$, будем называть мнимым числом. Мнимое число $(0, b)$ будем называть чисто мнимым числом.

Понятия „больше", „меньше" ($>$, $<$) для комплексных чисел не определяются.

Пару $(0, 1)$ будем называть мнимой единицей и обозначать через i, так что

$$(0,1) = i. \qquad (1)$$

Докажем, что

$$i^2 = -1. \qquad (2)$$

Имеем

$$i^2 = i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1).$$

Согласно аксиоме 3,

$$(0,1)\ (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1,\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0),$$

откуда, в силу аксиомы 4, получим

$$(0,1)\ (0,1) = -1, \tag{3}$$

что и доказывает равенство (2).

Легко убедиться, что

$$(a,\ b) = (a,\ 0) + (0,\ b), \tag{4}$$

$$(0,\ b) = (b,\ 0)\ (0,\ 1). \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует:

$$(a,\ b) = (a,\ 0) + (0,\ b) = (a,\ 0) + (b,\ 0)\ (0,\ 1).$$

Применяя аксиому 4 и используя обозначение (1), получим:

$$(a,\ b) = a + bi. \tag{6}$$

В дальнейшем выражение вида $a + bi$ будем называть **алгебраической формой** комплексного числа $(a,\ b)$. При этом **вещественные** числа a и b называются соответственно **вещественной** и **мнимой частями** комплексного числа $a + bi$. Выражение вида bi, где $b \neq 0$, будет алгебраической формой чисто мнимого числа.

2. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа

Установим взаимно однозначное соответствие между множеством всех комплексных чисел

$$z = x + yi \tag{7}$$

и точками плоскости xOy (рис. 28). Для этого сопоставим комплексному числу $z = x + yi$ точку $M(x, y)$, координатами которой являются соответственно вещественная и мнимая части этого комплексного числа.

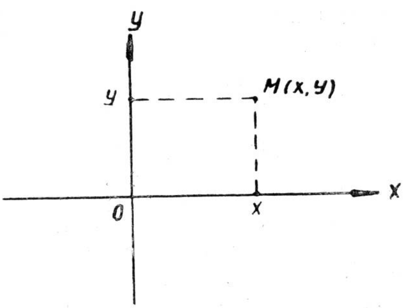


Рис. 28.

Таким образом, комплексные числа (7) изобразятся точками на плоскости xOy, которую в этом случае будем называть плоскостью комплексной переменной. При этом числу $0=0+0\cdot i$ будет соответствовать начало координат, вещественные числа изобразятся точками оси Ox, чисто мнимые числа — точками оси Oy. Оси Ox и Oy будем называть соответственно вещественной и мнимой осями.

Комплексному числу $z=x+yi$ можно поставить в соответствие вектор $\overrightarrow{OM}$ с началом в точке O (0,0) и концом в точке M $(x,\ y)$ (рис. 29).

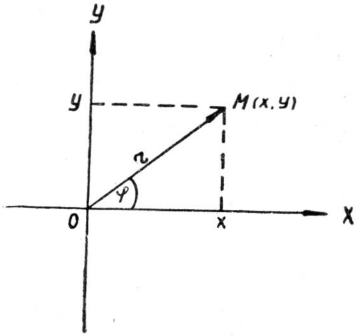


Рис. 29.

Вещественное неотрицательное число

$$\sqrt{x^2+y^2} \tag{8}$$

называется **модулем** комплексного числа $z=x+yi$ и обозначается $|z|$, так что

$$|z| \equiv \sqrt{x^2+y^2}. \tag{9}$$

Модуль комплексного числа $z=x+yi$ равен длине соответствующего ему вектора $\overrightarrow{OM}$ (рис. 29). В частности,

$$|0|=0, \quad |i|=1, \quad |-i|=1.$$

Если $z\neq 0$, то угол φ, образованный вектором $\overrightarrow{OM}$ с положительным направлением оси Ox и определяемый соотношениями

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \sin\varphi &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \end{aligned}\right\}, \tag{10}$$

называется **аргументом** комплексного числа $z=x+iy$ и обозначается через $\operatorname{Arg} z$, $\varphi=\operatorname{Arg} z$. Аргумент комплексного числа z определяется с точностью до слагаемого, кратного 2π, вследствие 2π-периодичности функций $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$. В качестве аргумента обычно выбирают значение φ, удовлетворяющее условию

$$-\pi<\varphi\leqslant\pi. \tag{11}$$

Это значение аргумента называется **главным значением** и обозначается через $\arg z$. Тогда $\operatorname{Arg} z$ определяется по формуле

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi \, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{12}$$

Имеют место следующие соотношения:

$$x = r\cos\varphi, \; y = r\sin\varphi, \tag{13}$$

где $r = |z|$. Поэтому

$$z = x + yi = r\cos\varphi + r\sin\varphi \cdot i$$

или

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{14}$$

Эту форму комплексного числа z будем называть **тригонометрической формой**.

Два комплексных числа, записанных в тригонометрической форме, равны тогда и только тогда, когда их модули равны, а аргументы разнятся на число, кратное 2π.

3. Сопряженные комплексные числа

Комплексное число $x - yi$ называется **сопряженным** комплексному числу $z = x + yi$ и обозначается через $\bar{z}$, так что

$$\bar{z} = x - yi. \tag{15}$$

Точки z и $\bar{z}$, изображающие сопряженные комплексные числа, симметричны относительно вещественной оси. Векторы, соответствующие сопряженным комплексным числам z и $\bar{z}$, тоже симметричны относительно вещественной оси.

Модули сопряженных комплексных чисел z и $\bar{z}$, очевидно, равны между собою, а главные значения их аргументов отличаются только знаком:

$$\arg z = -\arg z, \tag{16}$$

если z не является отрицательным вещественным числом. Если же $z < 0$, то

$$\arg \bar{z} = \arg z - \pi. \tag{17}$$

Имеет место соотношение

$$\bar{z}z = |z|^2 \text{ или } \bar{z}z = x^2 + y^2. \tag{18}$$

4. Арифметические действия над комплексными числами в алгебраической форме

1. Правило сложения

$$(a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i.$$

2. Правило умножения

$$(a+bi)(c+di)=ac-bd+(ad+bc)i.$$

3. Правило вычитания

$$(a+bi)-(c+di)=a-c+(b-d)i.$$

4. Правило деления

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}.$$

5. Умножение, деление и извлечение корня из комплексных чисел в тригонометрической форме

Пусть

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1) \text{ и } z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2).$$

Тогда

$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)],$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)],$$

$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$ (n — целое число) (формула Муавра),

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{z}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

* * *

209. Вычислить i^n, где n — произвольное целое число.

210. Вычислить $(1+i)^{24}$.

211. Найти все числа, сопряженные своему квадрату.

212. Найти мнимую часть числа z, если известно, что $z=\overline{z}$.

213. Найти зависимость между a, b, c, d, если

$$(a+bi)(c-di)=(a-bi)(c+di).$$

214. Дать геометрическую интерпретацию сложения комплексных чисел, сопоставив каждому комплексному числу $z=a+bi$ вектор $\overrightarrow{OM}$, начало которого совпадает с началом координат O, а конец есть точка $M(a, b)$.

215. Как изменится положение точки z, если к ней прибавить данное комплексное число α? Какое преобразование плоскости описывается равенством $\omega = z + \alpha$?

216. Какое преобразование плоскости описывается равенством

$$\omega = az,$$

где a — вещественное число?

217. Найти геометрическое место точек, изображающих комплексные числа, которые удовлетворяют условиям:

а) $|z| = a$, б) $|z| < a$, в) $|z| > a$,
г) $2 \leqslant |z| \leqslant 4$, д) $|z - z_0| = a$, е) $|z - z_0| \leqslant a$,
ж) $|z - z_0| \geqslant a$, з) $2 \leqslant |z - z_0| \leqslant 4$.

218. Найти геометрическое место точек, изображающих комплексные числа, которые удовлетворяют условиям:

а) $\arg z = \pi$, б) $\arg z = 0$, в) $\arg z = \frac{\pi}{4}$,

г) $\arg z = \frac{5\pi}{4}$, д) $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{2\pi}{3}$, е) $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}$,

ж) $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{4}$ и $|z| \leqslant 1$, з) $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{6}$ и $1 \leqslant |z| \leqslant 2$.

219. Доказать тождество

$$2|x|^2 + 2|y|^2 = |x + y|^2 + |x - y|^2.$$

Выяснить, какой геометрический смысл имеет это тождество.

220. Доказать неравенство

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — комплексные числа. Выяснить, какой геометрический смысл имеет это неравенство.

221. Доказать тождества:

а) $|x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n| = |x_1| \cdot |x_2| \cdot \ldots \cdot |x_n|$,

б) $|x^n| = |x|^n$,

в) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$,

г) $\arg(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n) = \arg x_1 + \arg x_2 + \ldots + \arg x_n$,

д) $\arg x^n = n \arg x$,

е) $\arg \frac{x}{y} = \arg x - \arg y$.

222. Где расположены точки, изображающие комплексные числа вида $z = \cos\alpha - i\sin\alpha$?

223. Где расположены точки, изображающие комплексные числа вида $1+2z$ при условии, что $|z|=1$?

224. Найти геометрическое место точек, изображающих комплексные числа, которые удовлетворяют условиям:

а) $|z-i|=\frac{z+\bar{z}}{2}+1$, б) $|\arg(z-1)-\arg z|=\frac{\pi}{2}$.

225. Даны n комплексных чисел

$$z_k=r_k(\cos\varphi_k+i\sin\varphi_k)\ (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Доказать, что

$$z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n=r_1\cdot r_2\cdot\ldots\cdot r_n[\cos(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)+ \\ +i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)].$$

226. Дано комплексное число

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\neq 0.$$

Доказать, что

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)\ (n\text{ — целое число}).$$

227. Вычислить

$$(1+i\sqrt{3})^6,\quad \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{24},\ (1+i)^4,\ (1-i)^4,\quad \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^8.$$

228. Найти $(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n$.

229. Используя формулу Муавра и формулы сокращенного умножения, найти выражение для $\cos 2\alpha$ и $\sin 2\alpha$, $\cos 3\alpha$ и $\sin 3\alpha$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

230. Используя формулу Муавра и формулу Ньютона о возведении двучлена в натуральную степень, найти выражения для $\cos 6\alpha$ и $\sin 7\alpha$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

231. Доказать, что если $2\cos\alpha=z+\frac{1}{z}$, то $2\cos n\alpha= =z^n+\frac{1}{z^n}$.

232. Зная, что $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$, найти тригонометрическую форму для $\bar{z}$ и z^{-1}.

233. Доказать тождества:

$$\cos n\varphi=\cos^n\varphi-C_n^2\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi+C_n^4\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi+\ldots$$

$$\ldots+\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}\sin^n\varphi\,(n\text{ — четное})\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}n\cos\varphi\sin^{n-1}\varphi\,(n\text{ — нечетное}),\end{cases}$$

$$\sin n\varphi = n\cos^{n-1}\sin\varphi - C_n^3\cos^{n-3}\sin^3\varphi + \ldots$$

$$\ldots + \begin{cases} (-1)^{\frac{n-2}{2}} n\cos\varphi\sin^{n-1}\varphi \ (n \text{ — четное}), \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin^n\varphi \ (n \text{ — нечетное}). \end{cases}$$

234. Доказать, что функция $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ при n целом, большем 0, представляет собою полином n-ой степени относительно x.

235. Доказать, что $\cos^n x$ и $\sin^n x$ выражаются линейно через $\sin kx$ и $\cos kx$.

236. Доказать тождества:

$$\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}},$$

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

237. Вычислить $\sqrt[n]{1}$.

238. Как расположены на плоскости точки, изображающие корни n-ой степени из 1?

239. Найти сумму всех корней n-ой степени из 1.

240. Вычислить

$$\sqrt{i},\ \sqrt{-i},\ \sqrt{1+i},\ \sqrt{1-i},\ \sqrt[3]{1},\ \sqrt[3]{-1},\ \sqrt[4]{4},\ \sqrt[4]{-4}.$$

241. Найти все комплексные числа, удовлетворяющие условию

$$z^{n-1} = \bar{z}.$$

242. Доказать тождество

$$\frac{1}{4}[(x+1)^n + (x+i)^n + (x-1)^n + (x-i)^n] =$$
$$= x^n + C_n^4 x^{n-4} + C_n^8 x^{n-8} + \ldots + C_n^m x^{n-m},$$

где m — наибольшее целое число, кратное 4 и не превосходящее n.

243. Найти суммы:

$$S_1 = C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \ldots;$$
$$S_2 = C_n^2 + C_n^6 + C_n^{10} + \ldots.$$

244. Зная разложение на линейные множители для многочлена $x^n - 1$, написать разложение на линейные множители для многочлена

$$x^n - a^n.$$

245. Доказать, что если $\overline{z}$ есть комплексное число, сопряженное с комплексным числом z, то $z + \overline{z}$, $z \cdot \overline{z}$ — вещественные числа.

246. Доказать, что операция „сопряжения" комплексных чисел обладает свойствами:

1. $\overline{\alpha \pm \beta} = \overline{\alpha} \pm \overline{\beta}$.
2. $\overline{\alpha \cdot \beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$.
3. $\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$.
4. $\overline{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n} = \overline{\alpha}_1 + \overline{\alpha}_2 + \ldots + \overline{\alpha}_n$.
5. $\overline{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \ldots \alpha_n} = \overline{\alpha}_1 \cdot \overline{\alpha}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{\alpha}_n$.
6. $\overline{\alpha_1^n} = \overline{\alpha}_1^n$.

247. Доказать, что если

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$$

есть полином от z с вещественными коэффициентами, то

$$\overline{P(z)} = P(\overline{z}).$$

248. Доказать, что если уравнение

$$\overline{P}(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

с вещественными коэффициентами a_0, a_1, ..., a_n имеет комплексный корень $x = a + bi$ кратности k, то оно имеет и сопряженный комплексный корень $x = a - bi$ той же кратности.

249. Доказать, что если

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

где $P(z)$ и $Q(z)$ — полиномы с вещественными коэффициентами, то

$$\overline{f(z)} = f(\overline{z}).$$

250. Решить уравнения:

1. $z^2 - i = 0$.
2. $x^5 = 1 + i\sqrt{3}$.
3. $x^6 + 64 = 0$.

§ 14. Разные задачи

251. Доказать, что уравнение

$$x^2+ax+1=0$$

не имеет рациональных и целых корней, если a — целое и $|a| \neq 2$.

252. Определить, при каком значении p сумма квадратов корней уравнения

$$x^2+(p-2)x+(p-3)=0$$

принимает наименьшее значение, и найти его.

253. Доказать тождество

$$\frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+$$
$$+\frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2\,(a\neq b\neq c).$$

254. При каких значениях k корни уравнения

$$kx^2-(1-2k)x+k-2=0$$

рациональны?

255. Доказать, что система

$$\begin{cases} (x^2+x+5)^{y-\frac{1}{2}}<1, \\ \log_y(yx-x)=1 \end{cases}$$

не имеет решений.

256. Определить функцию $f(x)$, если при всех допустимых значениях x имеет место равенство

$$2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right)+f\left(\frac{x+1}{x-2}\right)=x.$$

257. Найти коэффициенты A, B и C разложения следующих рациональных дробей на простейшие:

1. $\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}.$

2. $\dfrac{1}{x^2(x-1)}=\dfrac{A}{x^2}+\dfrac{B}{x}+\dfrac{C}{x-1}.$

3. $\dfrac{1}{x^3+1}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2-x+1}.$

258. Определить, не выполняя деления, делится ли полином x^4-2x^3-x+2 на полином x^2-3x+2.

259. Вывести формулу квадрата многочлена

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 = ?$$

260. Построить графики функций, заданных уравнениями:

1. $x = y^2$. 2. $y^2 = 2px$. 3. $y^2 = x^3$.
4. $|y| = |x - 1|$. 5. $|x| + |y| = 1$. 6. $|x| - |y| = 1$.
7. $x^2 + y^2 = 1$. 8. $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. 9. $x^2 - y^2 = 1$.

261. Изобразить в декартовой системе координат следующие области:

1. $x + y - 1 > 0$.
2. $y \geqslant \frac{x - |x|}{2}$.
3. $x^2 - y^2 < 1$.
4. $yx \geqslant 1$.
5. $\log_x (\log_y x) > 0$.

262. Построить графическое изображение семейства функций:

1. $y = Cx$. 2. $y = x + C$. 3. $x = C$.
4. $y = C$. 5. $y = Cx^2$. 6. $y = x^2 + C$.
7. $y = (x - C)^2$. 8. $y = (x - C)^2,\ x \geqslant C$. 9. $x^2 + y^2 = C^2$.
10. $y = x^3 + C$. 11. $y = (x - C)^3$.

263. Из заданного семейства кривых выделить кривую, проходящую через заданную точку:

1. $y = Cx^2$; $M(1,\ 2)$.
2. $y = x^2 + C$; $M(0,\ 1)$.
3. $x^2 + y^2 = C^2$; $M(3,\ 4)$.
4. $y = \log_a x + C$; $M(1,\ 0)$.
5. $y = a^x + C$; $M(0,\ 1)$.

264. Исключить параметр t из параметрических уравнений кривых; построить графики этих кривых:

1. $\begin{cases} x = r \cos t, \\ y = r \sin t. \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$

2. $\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$

3. $\begin{cases} x = 2t, \\ y = \dfrac{3t+1}{2}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = t, \\ y = t^2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = \dfrac{3^t + 3^{-t}}{2}, \\ y = \dfrac{3^l - 3^{-l}}{2}. \end{cases} \quad 0 \leqslant t < \infty.$

265. При каких x заданная бесконечная геометрическая прогрессия является убывающей и чему равна в этом случае ее сумма?

1. $1 + x + x^2 + \ldots$
2. $1 - x + x^2 - \ldots$
3. $1 - x^2 + x^4 - \ldots$
4. $1 + 2x + 4x^2 + \ldots$
5. $1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{4} + \ldots$

266. Найти все значения a, при которых из неравенства

$$0 \leqslant x \leqslant 1$$

следует неравенство

$$(a^2 + a - 2)\,x^2 - (a + 5)\,x - 2 \leqslant 0.$$

267. Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} 2^{bx} + (a+1)\,by^2 = a^2, \\ (a-1)\,x^3 + y^3 = 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение для любого b (a, b, x, y, — вещественные числа).

268. Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет только одно решение.

269. Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} (x^2+1)^a + (b^2+1)^y = 2, \\ a + bxy + x^2y = 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение для любого b (a, b, x, y — вещественные числа).

270. Найти все значения a и b, при которых система

$$\begin{cases} xyz + z = a, \\ xyz^2 + z = b, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

имеет только одно решение (a, b, x, y, z — вещественные числа).

271. Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} x^3 - ay^3 = \frac{1}{2}(a+1)^2, \\ x^3 + ax^2y + y^2x = 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение и всякое ее решение удовлетворяет уравнению

$$x + y = 0$$

(a, x, y — вещественные числа).

272. Определить число корней уравнения

а) $2^x = 4x$, б) $2^x = \log_2 x$.

273. Решить уравнение

$$x^3 - [x] = 3,$$

где $[x]$ — целая часть x (наибольшее целое число, не превосходящее x).

274. Даны три утверждения.

1. Уравнение

$$x + \frac{1}{x} = a$$

не имеет вещественных решений.

2. $\sqrt{a^2 - 4a + 4} = 2 - a$.

3. Система

$$\begin{cases} x + y^2 = a, \\ x - \sin^2 y = -3 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

При каких значениях параметра a два из этих утверждений верны, а одно неверно?

275. Даны три утверждения:

1. Трехчлен

$$x^2 + x + a$$

неотрицателен при всех x.

2. Функция

$$y = \log_{2a} x$$

убывает (y здесь есть функция от x).

3. Система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ y + \cos x = 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

При каких значениях параметра a два из этих утверждений верны, а одно неверно?

РАЗДЕЛ II

ТРИГОНОМЕТРИЯ

§ 1. Преобразование тригонометрических выражений

1. Основные тригонометрические тождества

Будем называть тригонометрическим тождеством равенство, содержащее тригонометрические функции числового аргумента, справедливое для всех значений аргумента, при которых правая и левая части равенства имеют смысл.

Основными тригонометрическими тождествами называются

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

2. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (определение тангенса).

3. $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ (определение котангенса).

2. Таблица формул приведения

Углы / Функции	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$ $(90^\circ-\alpha)$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$ $(90^\circ+\alpha)$	$\pi-\alpha$ $(180^\circ-\alpha)$	$\pi+\alpha$ $(180^\circ+\alpha)$	$\frac{3}{2}\pi-\alpha$ $(270^\circ-\alpha)$	$\frac{3}{2}\pi+\alpha$ $(270^\circ+\alpha)$	$2\pi-\alpha$ $(360^\circ-\alpha)$	$2\pi+\alpha$ $(360^\circ+\alpha)$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
ctg	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$

3. Таблица значений тригонометрических функций основных углов

Углы α / Функции	0 $(0°)$	$\frac{\pi}{6}$ $(30°)$	$\frac{\pi}{4}$ $(45°)$	$\frac{\pi}{3}$ $(60°)$	$\frac{\pi}{2}$ $(90°)$	π $(180°)$	$\frac{3}{2}\pi$ $(270°)$	2π $(360°)$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не существует	0	не существует	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	не существует	0	не существует

4. Формулы связи тригонометрических функций числового аргумента

При преобразованиях тригонометрических выражений необходимо знать следующие формулы.

А. Формулы сложения и вычитания

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta. \qquad (А.\ 1)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta. \qquad (А.\ 2)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta. \qquad (А.\ 3)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta. \qquad (А.\ 4)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (А.\ 5)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}. \qquad (А.\ 6)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (А.\ 7)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}. \qquad (А.\ 8)$$

Б. Формулы связи тригонометрических функций аргумента α с функциями аргументов 2α и $\frac{\alpha}{2}$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha. \qquad (Б.\ 1)$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1. \qquad (Б.\ 2)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}. \qquad (Б.\ 3)$$

Эти формулы следуют непосредственно из формул (А. 1), (А. 2) и (А. 5) при $\beta = \alpha$.

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}. \qquad (Б.\ 4)$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}. \qquad (Б.\ 5)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}. \qquad (Б.\ 6)$$

Формулы (Б. 4) и (Б. 5) получены из формулы (Б. 2), формула (Б. 6) получена делением (Б. 4) на (Б. 5). Знак перед радикалом в последних формулах выбирается в зависимости от того, в какой четверти расположен $\frac{\alpha}{2}$.

Имеют место также удобные формулы выражения $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, в которых нет необходимости выбирать знак.

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}. \qquad (Б.\ 7)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}. \qquad (Б.\ 8)$$

В. Формулы выражения основных тригонометрических функций аргумента α через $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

Следующие формулы имеют исключительно большое значение в курсе математики, ибо они дают рациональные выражения $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ через $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}. \qquad (В.\ 1)$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}. \qquad (В.\ 2)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}. \qquad (В.\ 3)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}. \qquad (В. 4)$$

Г. Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (Г. 1)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}. \qquad (Г. 2)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (Г. 3)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}. \qquad (Г. 4)$$

Эти формулы могут быть получены из формул (А. 1) и (А. 2). Преобразования сумм тригонометрических функций в произведение полезны для вычисления различных тригонометрических выражений с помощью таблиц логарифмов.

Из формул (А. 1) — (А. 4) следуют формулы:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}. \qquad (Г. 5)$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}. \qquad (Г. 6)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}. \qquad (Г. 7)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}. \qquad (Г. 8)$$

Д. Формулы преобразования некоторых произведений тригонометрических функций в полусумму или полуразность

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{2}. \qquad (Д. 1)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}. \qquad (Д. 2)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2}. \qquad (Д. 3)$$

Эти формулы могут быть получены из формул (Г. 1), (Г. 3) и (Г. 4).

§ 2. Тригонометрические уравнения

1. Определение тригонометрического уравнения. Простейшие тригонометрические уравнения

Будем называть уравнение *тригонометрическим*, если выполнены три условия:

1. Неизвестные находятся только под знаком тригонометрических функций.

2. Аргументами тригонометрических функций являются линейные функции от неизвестных.

3. Над тригонометрическими функциями выполняются только алгебраические операции.

Пример 1. Указать, какие из перечисленных уравнений являются тригонометрическими.

1. $\sin(3x+1)=\cos(5x-7)$.

2. $\sin(x^2+3x-2)=\frac{1}{2}$.

3. $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{ctg}(x-3)$.

4. $\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\frac{\pi}{x}=0$.

5. $\operatorname{ctg}(2x-1)\cdot\operatorname{tg}(2x+1)=1$.

6. $\lg(\cos x)=0$.

Решение. Уравнения 1, 3 и 5 являются тригонометрическими. Уравнения 2, 4, 6 не являются тригонометрическими, т. к. в уравнениях 2 и 4 не выполнено условие 2, в уравнении 6 не выполнено условие 3.

Тригонометрические уравнения имеют бесчисленное множество решений, определяемое некоторыми формулами. Множество решений тригонометрического уравнения может быть пустым.

Пример 2. Определить, почему следующие уравнения не имеют решений:

1. $\sin x+\cos x=1{,}5$.

2. $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{1}{4}$.

3. $\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{1}{8}$.

4. $\sec^2 x+\operatorname{cosec}^2 x=2$.

5. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 1$.

6. $\sin x + \operatorname{cosec} x = -\sqrt{2}$.

7. $\sec x + \cos x = \sqrt{3}$.

8. $\sin 7x + \cos 15x + \sin 19x = 4$.

Указание. Уравнения 1, 2, 3, 4 не имеют решений в силу справедливости неравенств:

1. $|\sin x + \cos x| \leqslant \sqrt{2}$.

2. $\frac{1}{2} \leqslant \sin^4 x + \cos^4 x \leqslant 1$.

3. $\frac{1}{4} \leqslant \sin^6 x + \cos^6 x \leqslant 1$.

4. $\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x \geqslant 4$.

Уравнения 5, 6 и 7 не имеют решений в силу справедливости неравенства

$$\left| a + \frac{1}{a} \right| \geqslant 2.$$

Уравнение 8 не имеет решений, т. к. $|\sin \alpha| \leqslant 1$ и $|\cos \alpha| \leqslant 1$, т. е. левая часть уравнения не может превышать трех.

Докажите справедливость неравенств 1—4.

Простейшими тригонометрическими уравнениями будем называть уравнения $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$.

Рассмотрим решение этих уравнений.

1. $\sin x = a$.

При $|a| \leqslant 1$ имеет место формула

$$x_k = (-1)^k \arcsin a + \pi k\ ^*.$$

2. $\cos x = a$.

При $|a| < 1$ имеет место формула

$$x_k = \pm \arccos a + 2\pi k.$$

3. $\operatorname{tg} x = a$. $x_k = \operatorname{arctg} a + \pi k$.

4. $\operatorname{ctg} x = a$. $x_k = \operatorname{arcctg} a + \pi k$.

---

* Здесь и в дальнейшем $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, если нет никаких дополнительных указаний.

2. Классификация тригонометрических уравнений

Общий метод решения тригонометрических уравнений состоит в сведении данных тригонометрических уравнений к простейшим. В связи с этим задача классификации тригонометрических уравнений состоит в отборе того или иного числа типов уравнений, способы сведения которых к простейшим одинаковы. В силу того, что способы решения тригонометрических уравнений чрезвычайно разнообразны и рациональность решения зависит от специфики уравнения, никакую классификацию тригонометрических уравнений нельзя назвать абсолютно полной.

В рассматриваемых далее типах тригонометрических уравнений мы преследуем цель показать наиболее часто встречающиеся приемы решений.

Тип 1. Уравнения вида

$$T(ax+b)=T(cx+d),$$

где T — знак любой из тригонометрических функций, приводятся к простейшим перенесением всех членов в левую часть уравнения, преобразованием полученной разности в произведение и приравниванием нулю каждого из множителей.

Пример 3. Решить уравнение

$$\sin 7x=\sin 3x.$$

Решение.

$$\sin 7x-\sin 3x=0; \quad 2\sin 2x\cos 5x=0.$$

1. $\sin 2x=0;\ x_к^{(1)}=\frac{\pi}{2}.$
2. $\cos 5x=0;\ x_к^{(2)}=\frac{\pi}{10}(2k+1).$

Тип 2. Уравнения вида

$$T(ax+b)=T_c(cx+d),$$

где T и T_c — знаки кофункций, приводятся к типу 1 преобразованием

$$T(ax+b)=T\left(\frac{\pi}{2}-cx-d\right).$$

Тип 3. Уравнения вида

$$f[T(ax+b)]=0,$$

где знак f — характеристика алгебраических операций над функцией T, т. е. уравнения алгебраические относительно тригонометрической функции некоторого аргумента.

Решение уравнений этого типа сводится к решению алгебраических уравнений с последующим приравниванием $T(ax+b)$ корням алгебраического уравнения.

Пример 4. Решить уравнение

$$2\sin^2 x+\sin x-1=0.$$

Решение. Это уравнение квадратное относительно $\sin x$. Решая его, найдем $\sin x=-1$ и $\sin x=\frac{1}{2}$.

Ответ: $x_к^{(1)}=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,$

$$x_к^{(2)}=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k.$$

К уравнениям типа 3 приводится большое число тригонометрических уравнений.

Тип 4. Однородные уравнения, т. е. уравнения вида

$$a\sin x+b\cos x=0,$$

$$a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0,$$

приводятся к алгебраическим (тип 3) относительно $\operatorname{tg} x$ делением двух частей уравнения на $\cos x$ и $\cos^2 x$ соответственно. Эта операция приводит к равносильным уравнениям, т. к. те значения x, при которых $\cos x=0$, не являются корнями исходных уравнений.

Пример 5. Решить уравнение

$$3\sin^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x=0.$$

Решение. Разделим на $\cos^2 x$; получим:

$$3\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg} x-1=0;$$

$$\operatorname{tg} x=-1 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} x=\frac{1}{3}.$$

Ответ: $x_к^{(1)}=-\frac{\pi}{4}+\pi k;$

$$x_к^{(2)}=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k.$$

К уравнению типа 4 приводится уравнение вида

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d,$$

если переписать его в виде

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

и привести подобные члены.

Пример 6. Решить уравнение

$$\sin x\cos x - \cos^2 x = 1.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\sin x\cos x - \cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x$$

и приведем подобные члены

$$\sin^2 x - \sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0\ (:\cos^2 x).$$

$$\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 2 = 0.$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2}.$$

Ответ: Решений нет.

Тип 5. Уравнения вида

$$f[\sin(ax+b),\ \cos(ax+b),\ \operatorname{tg}(ax+b),\ \operatorname{ctg}(ax+b)] = 0,$$

где знак f — характеристика алгебраических операций над тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.

В общем случае эти уравнения могут быть приведены к уравнениям типа 3 выражением всех тригонометрических функций через одну.

Если f — характеристика только рациональных операций, то уравнения типа 5 приводятся к рациональным алгебраическим уравнениям с помощью подстановки

$$\operatorname{tg}\frac{ax+b}{2} = t. \qquad (1)$$

Всякое действительное решение такого уравнения t_i дает серию решений тригонометрического уравнения

$$ax + b = 2\operatorname{arctg} t_i + 2k\pi.$$

При помощи подстановки (1), которую будем называть универсальной, могут быть найдены все решения тригонометрического уравнения за исключением решений вида

$ax+b=(2k+1)\pi$, при которых $\operatorname{tg}\frac{ax+b}{2}$ не определен. Наличие или отсутствие таких решений проверяется непосредственно подстановкой в уравнение.

Пример 7. Решить уравнение

$$(\cos x-\sin x)\left(2\operatorname{tg}x+\frac{1}{\cos x}\right)+2=0.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$(\cos x-\sin x)(2\sin x+1)+2\cos x=0.$$

Используя формулы (В. 1) и (В. 2) (см. § 1) и обозначая

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t,$$

получим после преобразований

$$\frac{3t^4+6t^3+8t^2-2t-3}{(1+t^2)(1-t^2)}=0$$

или

$$(3t^2-1)(t^2+2t+3)=0.$$

1. $3t^2-1=0;\quad t=\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\quad x_k=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k.$

2. $t^2+2t+3=0$ — вещественных решений нет.

Тип 6. Уравнение

$$a\sin x+b\cos x=c$$

является уравнением типа 5. Мы выделяем это уравнение в самостоятельный тип, желая показать различные приемы решения тригонометрических уравнений на его примере.

Первый способ. Решение при помощи универсальной подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$.

$$\frac{2at}{1+t^2}+\frac{b(1-t^2)}{1+t^2}=c$$

или

$$2at+b-bt^2=c+ct^2.$$

$$(b+c)t^2-2at+(c-b)=0.$$

Решая это квадратное уравнение, получим:

$$t=\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{c+b}.$$

Решение данного уравнения есть

$$x_k^{(1)} = 2 \operatorname{arctg} \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{c + b}$$

при $a^2 + b^2 \geqslant c^2$ и $b \neq -c$.

При $b = -c$ полученное квадратное уравнение обращается в линейное:

$$2at + 2b = 0,\ t = -\frac{b}{a},$$

$$x_k^{(2)} = -2 \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + 2k\pi.$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что при $b = -c$ уравнение имеет решение вида

$$x_k^{(3)} = (2k + 1)\pi.$$

Второй способ. Решение посредством введения вспомогательного аргумента.

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{a}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Выбор знака перед корнем следует из условия $\pm a\sqrt{a^2 + b^2} > 0$.

Замечая, что

$$\left(\frac{a}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$$

и

$$\left|\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| \leqslant 1 \text{ и } \left|\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| \leqslant 1,$$

обозначим

$$\frac{a}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos\varphi \text{ и } \frac{b}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin\varphi,$$

т. е. введем вспомогательный аргумент φ по формуле

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}.$$

Тогда исходное уравнение перепишется в виде

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}},$$

откуда

$$x_k = (-1)^k \arcsin \frac{c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} + \pi k - \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

при $c^2 \leqslant a^2 + b^2$.

Третий способ. Решение при помощи выражения одной из функций через другую.

По формуле

$$\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$$

будем иметь

$$a \sin x \pm b\sqrt{1 - \sin^2 x} = c.$$

Это иррациональное уравнение относительно $\sin x$. Решая его обычным приемом, получим:

$$\pm b\sqrt{1 - \sin^2 x} = c - a \sin x.$$

Это уравнение распадается на два:

1. $b\sqrt{1 - \sin^2 x} = c - a \sin x$ при $a \sin x < c$.
2. $-b\sqrt{1 - \sin^2 x} = c - a \sin x$ при $a \sin x > c$.

Возведя обе части полученных уравнений в квадрат, получим четыре серии решений, из которых необходимо отобрать серии, удовлетворяющие поставленным условиям $a \sin x \vee c$.

Четвертый способ. Решение сведением рассматриваемого уравнения к однородному уравнению второй степени.

В этом способе, так же как и в предыдущем, необходимо вводить некоторые условия, при которых преобразования будут равносильными.

Возведем обе части исходного уравнения в квадрат, тогда получим уравнение, приводящееся к однородному:

$$a^2 \sin^2 x + 2ab \sin x \cos x + b^2 \cos^2 x = c^2.$$

Это уравнение равносильно исходному в области

$$(a \sin x + b \cos x)\, c \geqslant 0.$$

Дальнейший ход решения очевиден.

* * *

Решить уравнения:

276. $(1 - 2 \sin x) \sin x = 2 \cos 2x - 1.$

277. $\sin^4 x + \cos^4 x - 2 \sin 2x + \sin^2 2x = 0.$

278. $\sin^3 x \cdot \cos x - \cos^3 x \cdot \sin x = \cos^4 \frac{\pi}{3}.$

279. $\cos^2 x (6 \sin^2 x - \cos^2 x) = \cos x + \sin^4 x.$

280. $\sin^2 6x + 8 \sin^2 3x = 0.$

281. $\sec^4 x - \operatorname{tg}^4 x = 7.$

282. $\cos 3x \cdot \cos^3 x + \sin 3x \cdot \sin^3 x = 0.$

283. $(3 + 5\sin x \cdot \cos x - \cos^2 x)^2 = 9.$

284. $5\sin 2x + \sin x + \cos x = 1.$

285. $5(1 - \sin 2x) - 16(\sin x - \cos x) + 3 = 0.$

286. $(1 + \sqrt{3})\sin 2x + (1 - \sqrt{3})\cos 2x = 1 + \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$

287. $\sqrt{2}\sin 2x + 3(\sin x + \cos x) = 4\sqrt{2}.$

288. $3\sin x + \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = 1 - 3\sin x \cdot \cos x.$

289. $\sin^4 x + \cos^4 x - 3\sin 2x + \frac{5}{2}\sin^2 2x = 0.$

290. $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \frac{1}{4}\sin 4x.$

291. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{18}\right) \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{9}\right) = -\frac{1}{4}.$

292. $\cos 2x \cdot \cos 3x = \cos 5x \cdot \cos 6x.$

293. $1 + 2\cos 2x + 2\cos 4x + 2\cos 6x = 0.$

294. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2.$

295. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x.$

296. $\cos^4 x + \cos^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}.$

297. $\sin^{10} x + \cos^{10} x = \frac{29}{16}\cos^4 2x.$

298. $|\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x| = \frac{4}{\sqrt{3}}.$

299. $5\sin x - 12\cos x + 13\sin 3x = 0.$

300. $\operatorname{tg}(\pi \operatorname{ctg} x) = \operatorname{ctg}(\pi \operatorname{tg} x).$

301. $3\operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x) + \cos|\pi(\operatorname{tg} x + 4\operatorname{ctg} x)| =$
$= 3\operatorname{ctg}(4\pi \operatorname{ctg} x).$

302. $\sin 2x + 3\cos 2x = a.$

303. $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + a = 0.$

304. $\operatorname{tg}(a + x) \cdot \operatorname{tg}(a - x) = 1 - 2\cos 2x.$

305. $(1 + k)\cos x \cdot \frac{\cos(2x - \alpha)}{\cos(x - \alpha)} = 1 + k\cos 2x.$

306. $\sin^2 x + a\sin^2 2x = \sin\frac{\pi}{6}.$

307. $\sin^6 x + \cos^6 x = a(\sin^4 x + \cos^4 x).$

308. $\sin\frac{3x}{2} + \sin x = m\sin\frac{x}{2}.$

309. $a \sin 2x + b \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{a^2 + b^2} \sin 6x = 0.$

310. $\sec x + \operatorname{cosec} x + \sec x \cdot \operatorname{cosec} x = a \quad (a \neq 0).$

311. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} \sin x \cdot \sin y &= \frac{3}{4} \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y &= 3 \end{aligned}\right\}.$$

312. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} \sin^2 x + \sin^2 y &= \frac{3}{4} \\ x + y &= 75^\circ \end{aligned}\right\}.$$

313. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} \sin x \cdot \cos y &= a \\ \cos x \cdot \cos y &= b \end{aligned}\right\}.$$

$(a \neq 0, \quad b \neq 0).$

§ 3. Разные задачи

314. Решить неравенство

$$\operatorname{ctg} x + \frac{\sin x}{\cos x - 2} \geqslant 0.$$

315. Решить неравенство

$$\sin\left[\frac{4\pi}{3} \cos(\pi x)\right] \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

316. Найти $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, если

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \text{ и } \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

317. Найти $\operatorname{tg} 5\alpha$ и определить, в какой четверти расположен угол 5α, если

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0.$$

318. Зная, что $\sin x + \cos x = a$, найти

$$\sin^4 x + \cos^4 x.$$

319. Пусть

$$\cos \alpha + \cos \beta = a,$$
$$\sin \alpha + \sin \beta = b.$$

Найти $\sin(\alpha + \beta)$.

320. Вычислить $\cos 2\alpha$, если

$$\operatorname{tg}^2\alpha - a \operatorname{tg}\alpha + 1 = 0$$

при

$$\text{a) } 0^\circ < \alpha < 45^\circ,$$
$$\text{b) } 45^\circ < \alpha < 90^\circ.$$

321. При каких значениях α и β возможно равенство

$$\sin\alpha + \sin\beta = \sin(\alpha + \beta)?$$

322. Что больше: $\operatorname{tg} 2\alpha$ или $2 \operatorname{tg}\alpha$, если $0^\circ < \alpha < 45^\circ$?

323. Доопределить в уравнении $\operatorname{ctg}(m \cos 2\pi x) = \sqrt{3}$ коэффициент $m > 0$ так, чтобы уравнение имело корни $x_{1,2} = \pm \frac{1}{6}$, и затем при найденном значении m определить все остальные решения этого уравнения.

324. Доказать тождество

$$\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ = 4.$$

325. Доказать, что

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma \cdot \operatorname{tg}\alpha = 1,$$

если

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}\cdot$$

326. В каком треугольнике углы α и β связаны соотношениями

$$\cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha + \beta) = \frac{3}{2}?$$

327. Показать, что

$$\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c > 2,$$

где a, b, c — углы остроугольного треугольника.

328. Пусть A, B, C — углы треугольника и C — его тупой угол. Доказать, что $\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B < 1$.

329. Найти те значения x, при которых функция

$$f(x) = \sin x - \cos^2 x - 1$$

принимает наименьшее значение.

330. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = a \sin^2 x + b \sin x \cdot \cos x + c \cos^2 x.$$

331. Найти те значения x, при которых функция

$$f(x) = 2\cos^2 x - 3\sqrt{3} \cos x - \sin^2 x + 5$$

принимает наибольшее и наименьшее значения.

332. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{1+\lg \operatorname{tg} x}+\sqrt[3]{1-\lg \operatorname{tg} x}=2.$$

333. Решить уравнение

$$4^{\log_{\frac{1}{2}}(\sin^2 x + 5\sin x \cdot \cos x + 2)} = \frac{1}{9}.$$

334. Решить неравенство

$$\log_{\sin x} \operatorname{tg} x < 2\log_{\operatorname{tg} x} \sin x + 1.$$

335. Решить неравенство

$$\log_{\frac{\cos 2x}{\sqrt{2}}}\left(\frac{\cos^2 2x - \sin^2 x}{2}\right) \leqslant 2.$$

336. Решить неравенство

$$\frac{1}{a^{\sin x+1}-1} > \frac{1}{1-a^{\sin x}} \quad a>0,\ (a \neq 1).$$

337. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} (\sin x)^{\log_2 x + \log_x^2} \geqslant (1+\operatorname{ctg}^2 x)^{\cos y}, \\ \pi \sin^2 y + \cos^2 y \operatorname{arctg} x \leqslant \operatorname{arctg} x. \end{cases}$$

338. Решить систему

$$\begin{cases} 2^{\log_{\sin 2x} x} < 1, \\ y^2 + y\sqrt{5-x} - \dfrac{x}{2(1+\sqrt[4]{\log_2 \cos 2\pi x})} = 0. \end{cases}$$

339. Доказать, что если α, β и γ — углы произвольного остроугольного треугольника, то

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma > 2\pi.$$

340. 1. Найти все пары чисел x и y, которые удовлетворяют уравнению

$$\cos x + \cos y + \cos(x+y) = \frac{3}{2}.$$

2. Найти все пары чисел x и y, которые удовлетворяют уравнению

$$\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 = 12 + \frac{1}{2}\sin y,$$

341. Найти все пары чисел x и y, которые удовлетворяют уравнению

$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2\operatorname{ctg}^2 x \cdot \operatorname{ctg}^2 y = 3 + \sin^2(x + y).$$

342. Найти все пары чисел a и b, для которых любая пара чисел $x\left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $y\left(y \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, удовлетворяющая уравнению

$$x + y = a,$$

удовлетворяет также уравнению

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = b.$$

343. Решить неравенство

$$(\sin x)^{\log_2 x + \log_x 2} \geqslant (1 + \operatorname{ctg}^2 x)^{\cos y}.$$

344. При каких a следующие неравенства не имеют решений:

1. $a \sin^2 x + 2(a + 1)\sin x + a - 4 > 0$.
2. $(a - 1)\sin^2 x + 2(a - 2)\sin x + a + 3 < 0$?

РАЗДЕЛ III

ГЕОМЕТРИЯ

§ 1. Задачи по планиметрии

345. В каком отношении делит площадь правильного треугольника прямая, проходящая через середину его стороны и составляющая угол $\alpha\,(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$ с этой стороной?

346. В равнобедренном треугольнике отношение неравных сторон равно $a:b$. Найти отношение площади этого треугольника к площади треугольника с вершинами в точках пересечения биссектрис со сторонами.

347. В равнобедренном треугольнике высота делится на три части. Через ближайшую к вершине точку деления и через одну из двух других вершин проводится прямая. В каком отношении она делит сторону треугольника?

348. Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его на равновеликие части. В каком отношении делит она его стороны?

349. Найти отношения сторон треугольника, если известно, что один из его углов равен 120° и что стороны его образуют арифметическую прогрессию.

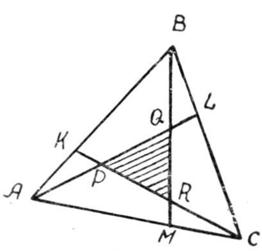


Рис. 30.

350. Стороны равностороннего треугольника ABC (рис. 30) разделены на три равные части. Вершины треугольника соединены с некоторыми точками деления, как указано на рисунке. Выразить площадь данного треугольника через площадь заштрихованного.

351. Вычислить катеты прямоугольного треугольника, зная длину c его гипотенузы и длину l биссектрисы одного из острых углов.

352. Зная углы треугольника, определить угол между медианой и высотой.

353. Основание AD прямоугольника $ABCD$, в три раза большее его высоты AB, точками M и N разделено на три равные части. Найти $\angle AMB + \angle ANB + \angle ADB$.

354. Определить площадь параллелограмма и длину его диагоналей, если даны острый его угол α и расстояния m и n от точки пересечения диагоналей до неравных сторон.

355. Найти расстояние от точки, расположенной внутри угла 60°, до вершины этого угла, если расстояния от данной точки до сторон угла равны m и n.

356. Треугольник с площадью S повернут вокруг центра тяжести на угол π. Чему равна площадь общей части исходного и повернутого треугольника?

357. Основания трапеции равны a и b. Найти отрезок прямой, соединяющий середины ее диагоналей.

358. Найти длину отрезка прямой, параллельной основаниям трапеции и проходящей через точку пересечения диагоналей, если основания трапеции равны a и b.

359. Найти длину отрезка прямой, параллельной основаниям трапеции и делящей ее площадь в отношении $m:n$ (считая от верхнего основания, длина которого a, к нижнему, большему основанию, длина которого равна b).

360. Меньшая диагональ трапеции перпендикулярна основаниям. Найти боковые стороны этой трапеции, если сумма противоположных острых углов равна $\frac{\pi}{2}$, а основания равны a и b.

361. Из точки M, отстоящей от центра круга на расстоянии m, проведены к нему две касательные. Найти радиус круга, если расстояние между точками касания равно a.

362. На отрезке и двух неравных его частях построены полукруги в одну сторону от отрезка. По радиусам r и R меньших полукругов определить радиус круга, касательного ко всем полукругам.

363. Три равные окружности попарно касаются друг друга. Проведены еще две окружности, каждая из которых касается всех трех данных. Найти отношение радиусов этих окружностей.

364. Две окружности одинакового радиуса касаются внешне друг друга и сторон угла величины α. Расстояния точек касания окружностей со сторонами угла до его вершины равны a и b ($a < b$). Найти расстояние между центрами окружностей.

365. Угол между общими касательными к двум окружностям, касающимся между собой внешним образом, равен φ. Длина отрезка касательной между точками касания a. Найти радиусы окружностей.

366. Два круга одинакового радиуса касаются друг друга; первый круг касается гипотенузы и катета прямоугольного треугольника, второй круг касается обоих катетов (длиною a и b соответственно). Найти радиус кругов.

367. Три круга радиусов r, $2r$, $2r$ попарно внешне касательны друг к другу. Прямые, каждая из которых касается двух окружностей, но не пересекает их, образуют треугольник. Найти высоту треугольника, которая опущена на большую высоту.

368. Точка D внутри круга радиуса R удалена от центра на расстояние a. Через эту точку проведены диаметр и две взаимно-перпендикулярные хорды, одна из которых образует угол α с диаметром. Определить площадь вписанного в круг четырехугольника, имеющего эти хорды диагоналями.

369. В сегмент, соответствующий центральному углу 2α круга радиуса R, вписан прямоугольник, основание которого лежит на хорде, стягивающей дугу сегмента. Найти отношение площади сегмента к площади этого прямоугольника, если его основание в два раза больше высоты.

370. Дан правильный треугольник. Из его центра описана окружность, радиус которой в три раза меньше сторон треугольника. Площадь части треугольника, лежащая вне этой окружности, равна S. Определить сторону треугольника.

371. Дан равнобедренный треугольник с основанием $2a$ и высотой h. В него вписана окружность, и к ней проведена касательная, параллельная основанию. Найти радиус окружности и длину отрезка касательной, заключенного между сторонами треугольника.

372. Равнобедренный прямоугольный треугольник вписан в окружность радиуса R. Найти радиус окружности, которая касается неравных сторон треугольника и данной окружности.

373. В круг вписан треугольник с углом α при вершине B, сторона AB, равная стороне BC, продолжена до пересечения в точке D с касательной, проведенной через вершину угла C. Найти отношение площадей треугольников ABC и BDC.

374. Найти расстояние от центра описанного около треугольника круга до центра вписанного в этот треугольник круга. Радиусы кругов R и r $(R > r)$.

375. Около окружности описана равнобочная трапеция с боковой стороной l, одно из оснований которой равно a. Найти площадь трапеции.

376. В ромб вписан круг, а в круг — квадрат. Чему равен острый угол ромба, если площадь квадрата в четыре раза меньше площади ромба?

377. Через две смежные вершины квадрата проведена окружность так, что отрезок касательной к ней из третьей вершины равен удвоенной стороне квадрата. Найти радиус этой окружности, если площадь квадрата a кв. ед.

378. В круг единичного радиуса вписан правильный пятиугольник; взята точка F на дуге окружности между двумя соседними вершинами пятиугольника. Соединим эту точку со всеми вершинами пятиугольника и обозначим соответствующие расстояния: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Доказать, что

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 10.$$

379. Вокруг равностороннего треугольника ABC описана окружность, и на дуге BC взята произвольная точка M. Показать, что отрезок AM равен сумме отрезков BM и CM.

380. Расстояние от точки M, взятой внутри треугольника, до сторон: x, y, z; соответствующие высоты равны: a, b, c. Доказать, что

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

381. Доказать, что квадрат биссектрисы внутреннего угла треугольника равен произведению боковых сторон без произведения отрезков основания.

382. Доказать, что если в произвольном треугольнике $ABCD$ провести внутренние биссектрисы, то точки пересечения биссектрис углов A и C с биссектрисами углов B и D лежат на одной окружности.

383. Доказать, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки окружности на стороны вписанного в нее треугольника, лежат на одной прямой.

384. Доказать, что во всяком треугольнике сумма расстояний произвольной внутренней точки до его сторон (или их продолжений) не меньше меньшей высоты его и не больше большей.

385. Доказать, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между медианой и высотой, опущенными на гипотенузу.

386. Медианы треугольника взаимно-перпендикулярны. Доказать, что среди углов треугольника есть угол не больший $\arccos \frac{4}{5}$.

387. Через точку A, лежащую внутри угла, проведена прямая, отсекающая от него треугольник наименьшей площади. Доказать, что отрезок этой прямой, заключенный между сторонами угла, делится в точке A пополам.

388. Из всех треугольников с общим углом при вершине, равным φ, и заданной суммой S боковых сторон найти треугольник с наименьшим основанием.

389. Вписанная и описанная окружности некоторого четырехугольника имеют радиусы соответственно r и R. Доказать, что $R \geqslant r\sqrt{2}$.

§ 2. Задачи по стереометрии

390. Плоский угол боковой грани при вершине правильной треугольной пирамиды меньше 90°, сторона основания равна a. Определить двугранный угол между боковыми гранями и площадь сечения пирамиды, проведенного через сторону основания перпендикулярно противолежащему боковому ребру.

391. Через одно из ребер основания правильной треугольной пирамиды со стороной основания a проведена плоскость, перпендикулярная к противоположному боковому ребру и делящая это ребро в отношении $m:n$. Определить полную поверхность пирамиды.

392. Найти объем правильной треугольной пирамиды, у которой плоский угол при вершине равен α, а кратчайшее расстояние между боковым ребром и противоположной стороной основания равно d.

393. Вычислить объем правильной треугольной пирамиды, зная, что плоский угол при вершине равен α, а радиус окружности, описанной около боковой грани, равен r.

394. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания 3 *дм*, а высота 2 *дм*. Найти боковую поверхность усеченной пирамиды, отсекаемой от данной плоскостью, параллельной ее основанию, и отстоящей от нее на 5 *см*.

395. Найти боковую поверхность и объем правильной четырехугольной пирамиды, стороны основания которой a, а плоский угол при вершине α.

396. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании равен α. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, делящей пополам двугранный угол при основании.

397. Найти высоту правильной четырехугольной пирамиды, полная поверхность которой равна S, а плоский угол боковой грани при вершине равен α.

398. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде угол между боковой гранью и нижним основанием равен β, а стороны основания a и b. Найти ее боковую поверхность и объем.

399. Вычислить объем правильной пирамиды высоты h, зная, что в ее основании лежит многоугольник, сумма внутренних углов которого равна $n\pi$, а отношение боковой поверхности пирамиды к площади основания равно k.

400. Правильная n-угольная пирамида, сторона основания которой равна a, плоскостью, параллельной основанию, рассечена на две части, равновеликие по объему. Найти площадь сечения.

401. Определить число сторон правильной n-угольной пирамиды, объем которой в $\frac{3\pi}{n}$ раз меньше объема цилиндра равной высоты, основанием которого является круг, вписанный в основание пирамиды.

402. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, равные стороны которого имеют длину b и составляют угол α. Боковые ребра пирамиды составляют с ее высотой угол β. Определить объем пирамиды.

403. Прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α служит основанием пирамиды. Грань ее, проходящая через гипотенузу, перпендикулярна к основанию, а две другие наклонены к нему под углом β. Найти объем пирамиды.

404. Основанием пирамиды служит прямоугольник, две боковые грани ее перпендикулярны основанию, две другие боковые грани образуют с основанием углы α и β соответственно. Определить объем пирамиды, если длина наибольшего из боковых ребер равна l.

405. Основанием пирамиды служит ромб со стороной a и острым углом β. Двугранный угол при основании равен α. Найти объем и полную поверхность пирамиды.

406. Две треугольные пирамиды имеют общим основанием равнобедренный прямоугольный треугольник. Высота одной из них проходит через вершину прямого угла, другой—через середину гипотенузы треугольника основания. Высоты пирамид равны между собою и равны высоте h, опущенной в треугольнике основания из вершины прямого угла. Найти объемы тех частей пирамид, которые получаются после удаления их общей части.

407. Объем правильной треугольной призмы равен V, угол между диагоналями двух граней, проведенными из одной и той же вершины, равен α. Найти сторону основания призмы.

408. Через сторону основания правильной треугольной призмы проведена плоскость под углом α к плоскости основания. Определить площадь образовавшегося треугольного сечения, если объем пирамиды, отсеченной плоскостью от призмы, равен V.

409. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник с катетами a и b. Боковые грани призмы пересечены плоскостью так, что в сечении получился правильный треугольник. Найти его сторону и угол между плоскостью сечения и плоскостью основания.

410. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ с ребром a проведено сечение через середины ребер AD и $B'C'$ и вершины A' и C. Найти его площадь.

411. Доказать, что две плоскости, проходящие через концы двух троек ребер куба, сходящихся в концах одной диагонали куба, рассекают эту диагональ на три равные части.

412. В усеченном конусе длина диагонали осевого сечения равна a, образующая составляет с плоскостью основания угол α и равна b. Определить боковую поверхность этого конуса.

413. В треугольнике даны стороны b и c и угол между ними α. Этот треугольник вращается около оси, которая проходит вне его через вершину угла α и равно наклонена к сторонам b и c. Определить объем тела вращения.

414. Боковая поверхность конуса, будучи развернута на плоскость, представляет собой круговой сектор с углом α и хордой a. Определить объем конуса.

415. В правильную треугольную пирамиду вписан шар. Найти радиус шара, если длина стороны основания пирамиды равна l и высота пирамиды равна h.

416. Найти радиус вписанного в треугольную пирамиду шара, если все ее углы при вершине прямые, а боковые ребра равны a, b, c.

417. В шаре радиуса R из точки его поверхности проведены три равные хорды под углом α друг к другу. Определить их длину.

418. В правильную четырехугольную пирамиду, боковое ребро которой наклонено к плоскости основания под углом α, вписаны два шара, один из которых касается боковых граней и основания пирамиды, а другой также касается боковых граней пирамиды и касается нижнего шара. Найти отношение объемов этих шаров.

419. Под каким углом наклонена образующая конуса к основанию, если полная поверхность конуса в два раза больше поверхности вписанного в него шара?

420. В пустой конус с углом в осевом сечении равным 2α, обращенный вершиной вниз, уложен шар радиуса R и налита вода, уровень которой касается шара сверху (вода заполняет и ту часть конуса, которая находится под шаром). Найти высоту воды в конусе до и после того, как шар будет из него вынут.

421. Отношению высоты конуса к радиусу описанного вокруг него шара равно k. Найти отношение объемов этих тел. Выяснить, при каких k задача имеет смысл.

422. В шар радиуса R вписан конус с углом α при вершине в осевом сечении конуса. Определить объем и полную поверхность конуса.

423. В усеченный конус, образующая которого имеет длину l и составляет с основанием угол α, вписана сфера. Найти объем и площадь боковой поверхности конуса, окружность основания которого совпадает с окружностью касания сферы и усеченного конуса, а вершина находится в центре сферы.

424. Сфера, центр которой находится в вершине конуса, касается его основания. Найти угол при вершине в осевом сечении конуса, если сфера делит конус на части равных объемов.

425. В сферу радиуса R вписан конус, осевое сечение которого является прямоугольным треугольником. В конус вписана вторая сфера, а в эту сферу — параллелепипед, стороны которого относятся между собою, как $1:2:3$. Найти поверхность параллелепипеда.

426. Шар касается четырех ребер куба, принадлежащих одной его грани, и касается противоположной грани. Найти отношение объема куба к объему шара.

427. Определить ребра правильной треугольной призмы, зная, что радиус R описанного около нее шара, проведенный через вершину призмы, составляет угол α с боковой гранью, содержащей эту вершину.

428. Определить радиусы двух шаров, которые, пересекаясь, образуют двояковыпуклую линзу, если известно, что толщина линзы $2a$, полная поверхность ее S, а диаметр $2R$.

429. Вокруг куба описан цилиндр так, что диагональ куба служит осью цилиндра. Площадь диагонального сечения куба равна S. Найти полную поверхность цилиндра.

430. Найти объем цилиндра, вписанного в конус, если высота конуса H, угол между основанием и образующей α, а осевое сечение цилиндра представляет собой квадрат.

431. Ось прямого кругового цилиндра радиуса r перпендикулярна диагонали ромба длиною d. Стороны ромба, равные a, касаются боковой поверхности цилиндра. Определить угол α между осью цилиндра и плоскостью ромба. При каких соотношениях между величинами r, d и a задача имеет решение?

432. Прямая, соединяющая середины скрещивающихся ребер правильного тетраэдра, служит осью цилиндра, окружности оснований которого касаются граней тетраэдра в их центрах. Найти отношение объема цилиндра к объему тетраэдра.

РАЗДЕЛ IV

ОБРАЗЦЫ ВАРИАНТОВ ПИСЬМЕННЫХ РАБОТ

Вариант 1

433. Из котлована, в который прибывает каждый час m *м*³ воды и по отводящей трубе вытекает n *м*³ воды, два насоса начали откачивать воду, когда в нем было N *м*³ воды. Производительность каждого насоса a *м*³ в час, а стоимость одного часа работы r руб. Сколько времени до осушения котлована работали оба насоса одновременно и сколько времени работал только один из них, если было затрачено на осушение R руб.? Указать условия работы с наименьшими затратами.

434. Найти все вещественные решения уравнения:

$$x^2 = 2|x-a| - 2|x-2|.$$

435. Решить уравнение:

$$5a \operatorname{ctg}(\pi - x) + b(\cos x + \sin x)(\operatorname{cosec} x - \sec x) = 4a.$$

436. В круг радиуса R вписаны три равных круга, касательных друг к другу. Вычислить площадь криволинейной фигуры, ограниченной этими тремя кругами.

437. Три шара радиуса R касаются друг друга и заданной плоскости. Найти радиус шара, который касается всех трех шаров и плоскости.

Вариант 2

438. Аппарат весом P *кг*, снабженный реактивным двигателем, работающим на двух режимах, при которых развивается сила тяги F_1 и F_2 соответственно на первом и втором режиме, остановили через t *сек* после включения двигателя. Сколько времени работал двигатель на первом режиме и сколько на втором, если аппарат находился в свободном падении в течение τ *сек*?

Найти условия работы двигателя, при которых аппарат будет остановлен в кратчайший срок, если выделенного на торможение запаса горючего хватает на τ_1 *сек* работы на первом режиме или на τ_2 *сек* работы на втором режиме и если $F_1 > F_2 > P$ и $\tau_1 < \tau_2$. Весом израсходованного горючего пренебречь.

439. Найти все вещественные решения уравнения:

$$x\sqrt{x} + \sqrt{x^3 - 2} = a.$$

440. Решить уравнение:

$$1 - \sin x (m \cos x + n \sin x) + \\ + \cos x (n \cos x - m \sin x) = 2 \cos^2 (x - a).$$

441. На диаметре полукруга радиуса R построен правильный треугольник. Вычислить площадь его части вне полукруга.

442. n равных конусов с общей вершиной касаются друг друга и заданной плоскости. Найти угол в осевом сечении этих конусов.

Вариант 3

443. Пассажир, опоздавший на свой поезд, решил сначала догнать его на такси, однако через некоторое время пересел на автобус, заплатив за билет A руб., и прибыл на одну из станций одновременно с поездом. Между тем он обнаружил, что если бы продолжал ехать на такси, то догнал бы поезд на τ часов раньше, истратив при этом на B руб. меньше. Какова скорость поезда, если скорость такси $v_1 \frac{\text{км}}{\text{час}}$, автобуса $v_2 \frac{\text{км}}{\text{час}}$, а стоимость проезда одного километра на такси a руб. $(v_2 < v_1)$?

444. Уравнение $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ имеет три различных корня a, $2b$, $3c$. Найти их.

445. Пусть $\cos\alpha = \frac{a}{b+c}$, $\cos\beta = \frac{b}{a+c}$, $\cos\gamma = \frac{c}{a+b}$. Доказать, что

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} = 1.$$

446. Определить высоту равнобедренного треугольника, у которого угол при основании равен α, а разность между радиусами описанной и вписанной окружностей равна d.

447. Развертка боковой поверхности усеченного конуса с образующей, равной l, представляет собой часть кругового кольца с центральным углом φ. Определить радиусы оснований этого усеченного конуса, если его полная поверхность совпадает по величине с площадью полного кругового кольца. При каких значениях угла φ задача имеет единственное решение?

Вариант 4

448. По двум взаимно-перпендикулярным прямым начали двигаться два тела, находящиеся в начальный момент на одинаковом расстоянии b от точки пересечения прямых. Через сколько времени расстояние между телами уменьшится втрое, если они движутся с постоянными ускорениями без начальной скорости, причем ускорение одного из них a вдвое больше другого?

449. Найти все значения x, при которых выполняется неравенство:

$$x + 4a \geqslant 5\sqrt{ax}.$$

450. Решить уравнение:

$$\sin x + \cos x + \sin x \cdot \cos x = 1.$$

451. Объем правильной треугольной призмы равен V, угол между диагоналями двух боковых граней, проведенными из одной вершины, равен α. Найти высоту призмы.

452. Для каких вещественных x определена функция

$$y = \log_{\frac{1}{2}} [\log_{\frac{1}{2}} (-x) - 1]\ ?$$

Вариант 5

453. Два тела, расстояние между которыми h, начинают движение навстречу друг другу; первое тело движется с постоянным ускорением $a > 0$ и начальной скоростью v, а второе тело движется с некоторой постоянной скоростью. Их встреча происходит на середине пути. Найти скорость второго тела.

454. Решить неравенство:

$$\log_{\frac{1}{2}} x - \log_{\frac{1}{2}} (x-1) > \log_{\frac{1}{2}} (x+1).$$

455. Решить уравнение:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin^4 2x + \cos^4 2x.$$

456. В основании пирамиды лежит ромб со стороной a и острым углом α. Каждый из двугранных углов при основании равен φ. Определить объем шара, вписанного в эту пирамиду.

457. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{\log_2 (4 - x^2)}.$$

Вариант 6

458. Две машины выезжают одновременно навстречу друг другу. Первая идет из A в B, вторая из B в A. Встретившись на расстоянии m *км* от A, они доезжают до конечного пункта и, не останавливаясь, поворачивают обратно. Вторая встреча происходит на расстоянии n *км* от B. Определить расстояние между пунктами A и B.

459. Решить неравенство:

$$x^2 + (x+1)^2 < \frac{15}{x^2 + x + 1}.$$

460. Решить уравнение:

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} = -\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}.$$

461. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с боковой стороной a и углом при вершине α. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом β. Найти объем пирамиды.

Часть вторая

РЕШЕНИЯ, УКАЗАНИЯ, ОТВЕТЫ

РАЗДЕЛ I

АЛГЕБРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Рациональные уравнения

1. Разделив обе части уравнения на $x^2 \neq 0$, получим:

$$x^2 - 2x - 1 - 2 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0,$$

или

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0.$$

Полагая $x + \frac{1}{x} = y$, получим:

$$y^2 - 2y - 3 = 0; \; y_1 = -1, \quad y_2 = 3.$$

Ответ: $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, $\quad x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$.

2. Приведя уравнение к виду

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 6\left(x + \frac{1}{x}\right) - 7 = 0$$

и применяя подстановку $x + \frac{1}{x} = y$, получим:

$$y^3 - 3y^2 + 3y - 1 = 0; \quad y_{1,2,3} = 1.$$

Ответ: $x_{1,2,3} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$, $x_{4,5,6} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$.

3. Заметим, что уравнение может быть преобразовано так:

$$2x^8 - 9x^7 + 20x^6 - 33x^5 + 46x^4 - 33 \cdot 2x^3 +$$
$$+ 20 \cdot 2^2x^2 - 9 \cdot 2^3x + 2 \cdot 2^4 = 0.$$

Разделим обе части уравнения на $x^4 \neq 0$ и запишем уравнение в виде:

$$2\left(x^4+\frac{16}{x^4}\right)-9\left(x^3+\frac{8}{x^3}\right)+20\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)-$$
$$-33\left(x+\frac{1}{x}\right)+46=0.$$

Применяя подстановку

$$x+\frac{2}{x}=y,$$

получим:

$$2(y^4-8y^2+8)-9(y^3-6y)+20(y^2-4)-33y+46=0,$$
$$2y^4-9y^3+4y^2+21y-18=0.$$

Решая последнее уравнение, получим:

$$y_1=1,\ y_2=2,\ y_3=3,\ \ y_4=-\frac{3}{2}.$$

Ответ: $x_1=1,\ x_2=2,\ x_{3,4}=1\pm i,$

$$x_{5,6}=\frac{1\pm i\sqrt{7}}{2},\quad x_{7,8}=\frac{-3\pm i\sqrt{23}}{4}.$$

4. Приведем уравнение к виду

$$(m^2-1)\,x=2m^2+3m+1. \qquad (*)$$

Если $|m| \neq 1$, то уравнение имеет единственное решение

$$x=\frac{2m^2+3m+1}{m^2-1}=\frac{2m+1}{m-1}. \qquad (**)$$

Особые значения параметра:

1. Если $m=1$, то исходное уравнение и ему равносильное (*) противоречивы.

2. Если $m=-1$, то уравнение тождественно. Ошибкой будет подставить $m=-1$ в формулу (**): получим $x=-\frac{1}{2}$, что не является корнем уравнения (*).

5. О. Д. З. $x \neq a$; $x \neq b$; $|a| \neq |b|$.

Разделив левую часть уравнения почленно на знаменатель, получим:

$$\frac{a-x}{x-b}-\frac{x-b}{a-x}=\frac{4ab}{a^2-b^2}.$$

Обозначая $\frac{a-x}{x-b}=t$, получим:

$$t-\frac{1}{t}=\frac{4ab}{a^2-b^2} \text{ или } t^2-\frac{4ab}{a^2-b^2}\,t-1=0,$$

откуда

$$t_1=\frac{a+b}{a-b}, \quad t_2=\frac{b-a}{a+b}.$$

1. $\frac{a-x}{x-b}=\frac{a+b}{a-b}$, $x_1=\frac{a^2+b^2}{2a}$ $a\neq 0$.

2. $\frac{a-x}{x-b}=\frac{b-a}{a+b}$, $x_2=\frac{a^2+b^2}{2b}$ $b\neq 0$.

§ 2. Иррациональные уравнения

12. О. Д. З. $x>3$.

Уединим один радикал:

$$\sqrt{2x-6}=5-\sqrt{x+4}.$$

Уточняем О. Д. З.:

$$5-\sqrt{x+4}\geqslant 0,\ 5\geqslant\sqrt{x+4},$$
$$25\geqslant x+4,\ x\leqslant 21.$$

Итак,

$$3<x\leqslant 21;$$

$$2x-6=25-10\sqrt{x+4}+x+4;$$

$$10\sqrt{x+4}=35-x;$$

$$x^2-170x+825=0; \quad x_1=5$$

$$(x_2=165 \text{ вне О. Д. З.}).$$

Ответ: $x=5$.

13. О. Д. З. $3x+1\geqslant 0$, $5x+4\geqslant 0$, т. е. $x>-\frac{1}{3}$.

$\sqrt{5x+4}=5-\sqrt{3x+1}$, $5-\sqrt{3x+1}\geqslant 0$, т. е. $x\leqslant 8$.

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$5\sqrt{3x+1}=11-x,$$

$$11-x>0 \text{ всегда при } x\leqslant 8.$$

Возведем еще раз в квадрат обе части уравнения. Получим:

$$x^2-97x+96=0;$$

$$x_1=1 \qquad (x_2=96 \text{ — вне О. Д. З.}).$$

Ответ: $x=1$.

14. О. Д. З. $-1 < x < 0$; $x > 1$.

Перенесем 1 в правую часть и возведем обе части уравнения в квадрат. Получим:

$$x + 1 + \frac{x-1}{x} - 2\sqrt{\frac{x^2-1}{x}} = 1 \ (x > 0),$$

или

$$\frac{x^2-1}{x} - 2\sqrt{\frac{x^2-1}{x}} + 1 = 0;$$

$$\left(\sqrt{\frac{x^2-1}{x}} - 1\right)^2 = 0; \quad \frac{x^2-1}{x} = 1;$$

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Ответ: $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

15. Преобразуем уравнение к виду:

$$\sqrt[5]{3+x}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{x}\right) = \frac{64}{3}\sqrt[5]{x};$$

$$\sqrt[5]{3+x} \cdot \frac{x+3}{3x} = \frac{64}{3}\sqrt[5]{x}; \quad \frac{(3+x)^{\frac{6}{5}}}{x^{\frac{6}{5}}} = 64;$$

$$\left(\frac{3+x}{x}\right)^{\frac{6}{5}} = 2^6; \quad \left|\frac{3+x}{x}\right| = 2^5 = 32.$$

$$1. \ \frac{3+x}{x} = 32; \quad x_1 = \frac{3}{31}.$$

$$2. \ \frac{3+x}{x} = -32; \quad x_2 = -\frac{1}{11}.$$

16. Положив

$$\sqrt{2x-5} = z \geqslant 0,$$

получим:

$$\sqrt{z^2 + 2z + 1} + \sqrt{z^2 + 6z + 9} = 14;$$

отсюда $z + 1 + z + 3 = 14$ и $z = 5$. Решив уравнение

$$\sqrt{2x-5} = 5,$$

находим:

$$x = 15.$$

23. О. Д. З. при m четном $|x| < 1$,
при m нечетном x — любое число.
Так как $|x| = 1$ не является корнем уравнения, то

$$\sqrt[m]{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = 1.$$

Пусть

$$\sqrt[m]{\frac{1+x}{1-x}}=t.$$

Решая уравнение $t-\frac{1}{t}=1$, получим:

$$t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

При m четном

$\sqrt[m]{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (корень берется арифметический).

$$x=\frac{(1+\sqrt{5})^m-2^m}{(1+\sqrt{5})^m+2^m}.$$

При m нечетном

$$x=\frac{(1\pm\sqrt{5})^m-2^m}{(1\pm\sqrt{5})^m+2^m}.$$

24. Левая часть уравнения является неполным квадратом суммы $(\sqrt[3]{x+a}+\sqrt[3]{x-a})$. Умножая обе части на разность оснований, получим:

$$x+a-(x-a)=\sqrt[3]{a^2}\ (\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{x-a}),$$

$$2\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{x-a}.$$

Возведя обе части уравнения в куб, после преобразований получим:

$$\sqrt[3]{a^2}=-\sqrt[3]{x^2-a^2},$$

откуда $x=0$.

§ 3. Показательно-логарифмические уравнения

29. Имеем:

$$6^{x+1}+3^{x+1}=3^{x+2}-6^x+3^x.$$

Разделив обе части уравнения на $3^x\neq 0$, получим:

$$2^x=1,\text{ откуда } x=0.$$

30. Ответ: $x=\frac{1}{2}$, $\quad x=\frac{1}{4}$.

31. Преобразуем данное уравнение так:

$$2^{-\frac{2}{x}}+2^{-\frac{1}{x}}\cdot 3^{-\frac{1}{x}}=3^{-\frac{2}{x}};$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{2}{x}}-\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{x}}-1=0.$$

Обозначая $\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{x}} = z$ $(z > 0)$, получим:

$$z^2 - z - 1 = 0,$$

$$z_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \left(z_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0\right),$$

или

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{x}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

откуда

$$x = \frac{\lg 3 - \lg 2}{\lg 2 - \lg(1+\sqrt{5})}.$$

32. Разделив обе части уравнения на 9^x, получим:

$$8\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^x + 1 = \left(\frac{6}{9}\right)^x\cdot 6,$$

$$8\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 6\left(\frac{2}{3}\right)^x + 1 = 0.$$

Решая квадратное уравнение относительно $\left(\frac{2}{3}\right)^x$, получим:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x_1} = \frac{1}{4}; \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{x_2} = \frac{1}{2},$$

откуда

$$x_1 = \frac{2\lg 2}{\lg\frac{3}{2}}; \quad x_2 = \frac{\lg 2}{\lg\frac{3}{2}}.$$

33. Перепишем уравнение в следующем виде:

$$(3^{2x} + 3^{-2x} - 2) + 3(3^{-x} - 3^x) - 4 = 0.$$

Обозначая $y = 3^{-x} - 3^x$, получим:

$$y^2 + 3y - 4 = 0, \text{ т. е. } y_1 = -4, \ y_2 = 1.$$

Далее имеем:

1) $3^{-x} - 3^x + 4 = 0$; $\quad 3^{2x} - 4\cdot 3^x - 1 = 0.$

Таким образом,

$$3^x = 2 + \sqrt{5}.$$

2) $3^{-x} - 3^x - 1 = 0$; $\quad 3^x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1+4}),$

откуда

$$3^x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Ответ: $x_1 = \log_3(2+\sqrt{5})$; $x_2 = \log_3\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

34. Учтем, что $\lg 0,5 = \lg 5 - 1$.

Уравнение принимает вид:

$3 \lg x = 12 - 13 \lg 5$ или $\lg x = \lg \frac{10^4}{5^{\frac{13}{3}}}$,

откуда

$$x = \frac{16}{\sqrt[3]{5}}.$$

35. О. Д. З. $x < 2$, $x \neq 1$.

$$\lg(56 - x^3) = \lg(2 - x)^3,$$
$$56 - x^3 = (2 - x)^3,$$
$$x^2 - 2x - 8 = 0,$$
$$x_1 = -2 \ (x_2 = 4 \text{ вне О. Д. З.})$$

Ответ: $x = -2$.

36. О. Д. З. $x \geqslant 1$.

Уравнение сводится к виду:

$$-2 \lg x + 5 \sqrt{\lg x} - 2 = 0.$$

Обозначая $\sqrt{\lg x} = z \geqslant 0$, получим:

$$2z^2 - 5z + 2 = 0; \quad z_1 = 2; \ z_2 = \frac{1}{2}.$$

Имеем два уравнения:

$$\sqrt{\lg x} = 2 \text{ и } \sqrt{\lg x} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда:

$$x_1 = 10^4; \quad x_2 = 10^{\frac{1}{4}}.$$

Замечание: Необходима проверка или обоснование равносильности преобразований.

37. $\lg(1 - 4^{-1} \cdot 2^{\sqrt{x}}) = \lg \frac{\sqrt{2^{\sqrt{x}} + 2}}{4}$.

$$4 - 2^{\sqrt{x}} = \sqrt{2^{\sqrt{x}} + 2}.$$

Обозначая $2^{\sqrt{x}} = z > 0$, получим:

$$4 - z = \sqrt{z + 2}, \quad z < 4,$$
$$z^2 - 9z + 14 = 0; \ z_1 = 2 \ (z_2 = 7).$$

Итак, $2^{\sqrt{x}} = 2$, отсюда $x = 1$.

38. О. Д. З. $|x| < 1$.

Переходя в данном уравнении к основанию $\frac{1}{2}$, получим:

$$\log_{\frac{1}{2}} [\sqrt{1-x^2}\,(1-x)] = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4}\sqrt{1-x^2}\right),$$

или

$$\sqrt{1-x^2}\left(\frac{3}{4} - x\right) = 0;\ \sqrt{1-x^2} \neq 0;\ x = \frac{3}{4}.$$

39. О. Д. З. $x,\ 3x,\ 9x \neq 1,\ x > 0$.

$$\frac{2}{\lg_3 x} + \frac{1}{\lg_3 3x} + \frac{3}{\lg_3 9x} = 0;$$

$$6\lg_3^2 x + 11\lg_3 x + 4 = 0;$$

$$x_1 = \frac{1}{3\sqrt[3]{3}};\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

40. Упростим уравнение:

$$2\log_2|x+1| + \log_2|x+1| = 6,$$

$$|x+1| = 4.$$

а) $x + 1 > 0;\quad x + 1 = 4;\quad x_1 = 3;$

б) $x + 1 < 0;\quad -x - 1 = 4;\quad x_2 = -5.$

41. Так как уравнение решается в вещественной области, то

$$\begin{cases} \log_x \sqrt{2x} > 0, \\ x > 0;\quad x \neq 1, \\ \log_2 x < 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим: $0 < x < \frac{1}{2}$. Возведя обе части уравнения в квадрат, получим после простых преобразований:

$$\log_2^2 x + \log_2 x - 2 = 0.$$

Ответ: $x = \frac{1}{4}$.

42. Ответ: $x_1 = 1;\ x_2 = a^{\frac{1}{\pi}}$.

43. Имеем

$$2 \cdot 9^{2\log_{25} x} + 6 = 9^{\log_{25} x}(9 - 1)$$

или

$$9^{2\log_{25} x} - 4 \cdot 9^{\log_{25} x} + 3 = 0.$$

Обозначая $9^{\log_{25} x} = z$, получим;

$$z^2 - 4z + 3 = 0; \quad z_1 = 3; \quad z_2 = 1$$

или

а) $9^{\log_{25} x} = 3; \quad 2\log_{25} x = 1; \quad x_1 = 5;$

б) $9^{\log_{25} x} = 1; \quad \log_{25} x = 0; \quad x_2 = 1;$

44. О. Д. З. $x > 0$, $x \neq 1$.

Имеем:

$$\log_3 (3 + \sqrt{3 + x}) = 2 \log_3 x.$$

Тогда

$$3 + \sqrt{3 + x} = x^2.$$

$$\sqrt{3 + x} = x^2 - 3.$$

Обозначим $x^2 - 3 = y$. Тогда

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - 3 = y \\ 3 + x = y^2 \end{array}\right\} \quad \text{или} \quad \left.\begin{array}{l} x^2 - 3 = y \\ y^2 - 3 = x \end{array}\right\}.$$

Имеем:

$$x^2 - y^2 = y - x,$$

$$(x - y)\ (x + y + 1) = 0.$$

Решение последнего уравнение разбивается на два случая:

1) $x = y$,

$$x^2 - x - 3 = 0,$$

$x_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$ $\left(x_2 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} < 0\right.$ не подходит по О. Д. З.);

2) $x + y + 1 = 0$,

$$x^2 + x - 2 = 0,$$

$$x_1 = 1; \quad x_2 = -2$$

(оба корня не подходят по О. Д. З.).

Ответ: $x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$.

45. О. Д. З. $x > 1$.

$$3^{\log_3 (x^2-1) - \lg_3 (x+1)} = \sqrt{2(x-1)};$$

$$3^{\log_3 \frac{x^2-1}{x+1}} = \sqrt{2(x-1)};$$

$$x - 1 = \sqrt{2(x-1)};$$

$$(x - 1)\ (x - 3) = 0;$$

$x_1 = 1$ не подходит по О. Д. З.; $x_2 = 3$.

Ответ: $x = 3$.

46. О. Д. З. $|x| < 1$.

Перепишем уравнение в виде:

$$\frac{1}{2}\lg(1+x)(1-x)^3 = \frac{1}{2}\lg(1-x^2)\cdot 100^2,$$

или

$$(1+x)(1-x)^3 = 100^2(1-x^2).$$

Сокращая на $1-x^2 \neq 0$, получим:

$$(1-x^2) = 100^2 \text{ или } |1-x| = 100.$$

Так как по О. Д. З. $|x| < 1$, то $|1-x| = 1-x$ и $1-x=100$, $x = -99$ (не подходит по О. Д. З.).

Ответ: Решений нет.

47. О. Д. З. $x \neq 0$.

1. Пусть $a \cdot b > 0$. Тогда, разделив обе части уравнения на $(a \cdot b)^{\frac{1}{x}}$, получим:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{x}} = m \quad (m > 0).$$

Введем подстановку

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{x}} = t \quad (t > 0);$$

имеем:

$$t + \frac{1}{t} = m; \quad t_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{m^2-4}}{2};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{m \pm \sqrt{m^2-4}}{2}. \quad (*)$$

Здесь правая часть положительна и вещественна при $m \geqslant 2$.

а) $m > 2$.

Логарифмируем обе части уравнения

$$\frac{1}{x}\lg\frac{a}{b} = \lg(m \pm \sqrt{m^2-4}) - \lg 2;$$

$$x = \frac{\lg a - \lg b}{\lg(m \pm \sqrt{m^2-4}) - \lg 2} \quad (a \neq b).$$

б) $m = 2$.

Непосредственно из (*) получим

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{x}} = 1,$$

что возможно при $a = b \neq 0$ и любом x с учетом О. Д. З.

2. Пусть $a \cdot b = 0$.

а) $a = b = 0$—уравнение обращается в тождество при $x > 0$;

б) $a = 0$, $b \neq 0$ или $a \neq 0$, $b = 0$ — решений нет.

Ответ: 1. При $m > 2$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$

$$x_{1,2} = \frac{\lg a - \lg b}{\lg (m \pm \sqrt{m^2 - 4}) - \lg 2}.$$

2. При а) $m = 2$, $a = b \neq 0$ x — любое число;

б) $a = b = 0$, m — любое число, x — любое положительное число.

48. О. Д. З. $0 < a < 1$.

Разделив обе части уравнения на $\left(\frac{1 + a^2}{2a}\right)^x \neq 0$, получим равносильное уравнение:

$$\left(\frac{1 - a^2}{1 + a^2}\right)^x + \left(\frac{2a}{1 + a^2}\right)^x = 1.$$

Полагая

$$\frac{2a}{1 + a^2} = \sin z,$$

убедимся, что

$$\frac{1 - a^2}{1 + a^2} = \cos z.$$

Итак, имеем:

$$(\sin z)^x + (\cos z)^x = 1.$$

Рассмотрим левую часть полученного уравнения с функциональной точки зрения. Из О. Д. З. следует

$$0 < z < \frac{\pi}{2}.$$

В этом интервале функция

$$f(x) = (\sin z)^x + (\cos z)^x$$

монотонно убывает и, следовательно, каждое значение принимает не более одного раза. Но при $x = 2$ функция принимает значение 1, поэтому $x = 2$ — единственный корень данного уравнения.

49. Непосредственно из вида уравнения получим

$$m > 0; \quad 2 \cdot 3^x - m \cdot 3^x + \frac{m}{2} > 0; \quad x + \log_3 \sqrt{2} > 0. \tag{1}$$

Обозначая

$$3^x = y, \quad x = \log_3 y,$$

после упрощений получим:

$$(2 - m)\, y + \frac{m}{2} = 2y^2. \tag{2}$$

Условия (1) переписываются ледующим образом:

$$m > 0; \quad (2-m)y + \frac{m}{2} > 0; \quad \sqrt{2}\,y > 1. \tag{1'}$$

Решая уравнение (2), получим:

$$y_{1,2} = \frac{2-m \pm \sqrt{4+m^2}}{4}.$$

Для выполнения условия $y > \frac{1}{\sqrt{2}}$ необходимо выполнение неравенства:

$$\pm\sqrt{4+m^2} > m + 2(\sqrt{2}-1).$$

Учитывая, что $m > 0$, рассматриваем только положительный корень:

$$4 + m^2 > m^2 + 4m(\sqrt{2}-1) + 4(\sqrt{2}-1)^2,$$

т. е. $m < 2$.

Так как при

$$0 < m < 2$$

условие

$$(2-m)y + \frac{m}{2} > 0$$

выполнено, окончательно получим:

$$x = \log_3 \frac{2-m+\sqrt{4+m^2}}{4} \quad \text{при } 0 < m < 2.$$

§ 4. Уравнения с несколькими неизвестными

52. Очевидно $x > 1$. Перепишем уравнение в виде

$$x^2 - 1 = \frac{y^3 z}{x^3}.$$

Естественно, что одно из чисел y^3 и z должно делиться на x^3. Но z не делится на x^3, т. к. z простое число, а $x > 1$. Значит, y^3 должно делиться на x^3. Но это возможно только при $y = x$, т. к. y простое число, а $x > 1$. Тогда будем иметь

$$x^2 - 1 = z \text{ или } (x-1)(x+1) = z.$$

Последнее равенство возможно только тогда, когда один из множителей $(x-1)$ и $(x+1)$ равен единице. Так как $x > 1$, возможно лишь $x - 1 = 1$, т. е. $x = 2$. Тогда $z = 3$ и $y = 2$.

53. 1. Пусть x, y и z — длины ребер. Тогда

$$2xy + 2yz + 2zx = 4(x+y+z)$$

или

$$xy + yz + zx = 2(x+y+z). \tag{1}$$

Пусть, для определенности,

$$x \leqslant y \leqslant z. \qquad (2)$$

Тогда из (1) получим:

$$z = \frac{2x + 2y - xy}{x + y - 2}$$

(случай $x = y = 1$ невозможен, что очевидно определяется подстановкой в уравнение (1)).

С учетом (2), получим:

$$\frac{2x + 2y - xy}{x + y - 2} \geqslant y.$$

Так как $x + y - 2 > 0$, после упрощений получим:

$$y^2 - 2(2 - x)y - 2x \geqslant 0.$$

Решая это неравенство относительно y, получим:

$$y \leqslant 2 - x + \sqrt{x^2 - 2x + 4}. \qquad (3)$$

Но $x \leqslant y$ (2), следовательно,

$$x \leqslant 2 - x + \sqrt{x^2 - 2x + 4} \text{ или } 2x - 2 \leqslant \sqrt{x^2 - 2x + 4}.$$

Так как $x \geqslant 1$, после возведения в квадрат и упрощения получится $x \leqslant 2$.

Пусть $x = 1$. Тогда из (3) получим: $y \leqslant 1 + \sqrt{3}$, т. е. $y = 2$, $z = 4$. Аналогично при $x = 2$ получим: $y = 2$, $z = 2$.

Ответ: 1, 2, 4 или 2, 2, 2.

53. 2. Пусть x, y и z — длины ребер. Тогда

$$xyz = 4(x + y + z). \qquad (1)$$

Перепишем уравнение (1) в виде

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz} = \frac{1}{4}.$$

Пусть для определенности $x \leqslant y \leqslant z$, тогда $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y} \geqslant \frac{1}{z}$.

Заменяя в уравнении (2) $\frac{1}{y}$ и $\frac{1}{z}$ на $\frac{1}{x}$, получим очевидно

$\frac{3}{x^2} \geqslant \frac{1}{4}$, откуда $x \leqslant 3$.

1. Пусть $x = 1$. Из (1) получим: $yz - 4y - 4z = 4$, или $(y - 4)(z - 4) = 20$. Возможны следующие случаи.

а) $y - 4 = 1$ и $z - 4 = 20$, т. е. $y = 5$ и $z = 24$;
б) $y - 4 = 2$ и $z - 4 = 10$, т. е. $y = 6$ и $z = 14$;
в) $y - 4 = 4$ и $z - 4 = 5$, т. е. $y = 8$ и $z = 9$.

2. Пусть $x=2$. Уравнение (1) принимает вид $(y-2)(z-2)=8$. Возможны следующие случаи:

а) $y-2=1$ и $z-2=8$, т. е. $y=3$ и $z=10$;

б) $y-2=2$ и $z-2=4$, т. е. $y=4$ и $z=6$.

3. Пусть $x=3$. Из (1) получим: $z=\frac{4(3+y)}{3y-4}$. В этом случае решений нет, т. к. при $y=3$ получим: $z=4,8$, а если $y>3$, то $z<4$.

Ответ: 1, 5, 24; 1, 6, 14; 1, 8, 9; 2, 3, 10; 2, 4, 6.

§ 5. Системы уравнений

56. Ответ: $x_1=y_1=-1$; $x_2=y_2=1{,}5$; $x_3=\frac{\sqrt{21}-1}{4}$,

$$y_3=\frac{-1-\sqrt{21}}{4};\quad x_4=\frac{-\sqrt{21}-1}{4},\quad y_4=\frac{-1+\sqrt{21}}{4}.$$

57. С помощью первой связи „исключаем" xy из третьей.

$$xz=yz=ac.$$

Вычитая полученное выражение из второго уравнения, получим:

$$\left.\begin{aligned} xy&=b-ac\\ x+y&=a(b-ac)\end{aligned}\right\};$$

$$z=\frac{c}{xy}=\frac{c}{b-ac}.$$

Следовательно,

$$x=-\frac{a(b-ac)}{2}\pm\frac{\sqrt{a^2(b-ac)^2-4(b-ac)}}{2};$$

$$y=-\frac{a(b-ac)}{2}\mp\frac{\sqrt{a^2(b-ac)^2-4(b-ac)}}{2};$$

$$z=\frac{c}{b-ac}.$$

58. Ответ: 1) $x=\frac{a^2-b^2}{a}$,

$y=\frac{a^2+b^2\pm\sqrt{(a^2-b^2)^2-4a^2b^2}}{2a}$ при $a\neq 0$ и $(a^2-b^2)^2\geqslant 4a^2b^2$;

2) если $a=b$, то бесчисленное множество решений:

$$x\leqslant 0,\quad y=x.$$

59. Пусть

1) $x > 0,\ y > 0,$

$$x = 3 - 2y.$$

$$2(2 - 2y)^2 + (y - 2)^2 = 1,$$

$$y_1 = 1; \quad x_1 = 1,$$

$$y_2 = \frac{11}{9}; \quad x_2 = \frac{5}{9}.$$

$$\left.\begin{aligned} &2)\ x < 0,\ y > 0 \\ &3)\ x > 0,\ y < 0 \\ &4)\ x < 0,\ y < 0 \end{aligned}\right\}.\ \text{Решения нет!}$$

60. Решение системы распадается на четыре случая:

1) $x \geqslant 0, \quad y \geqslant 1$:

$$\begin{cases} x + 3y = 7, \\ 2x + 2y = 5. \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{4}; \quad y = \frac{9}{4}.$$

2) $x \geqslant 0,\ y < 1$:

$$\begin{cases} x + 3y = 7,\ x = 7 - 3y, \\ 2x - 2y = 1,\ 8y = 13. \end{cases}$$

$y > 1$ — противоречие условию!

3) $x < 0,\ y \geqslant 1$:

$$\begin{cases} -x + 3y = 7, \quad x = 3y - 7, \\ 2x + 2y = 5,\ 8y = 19;\ x = \dfrac{1}{8}. \end{cases}$$

$x > 0$ — противоречие условию!

4) $x < 0,\ y < 1$:

$$\begin{cases} -x + 3y = 7, \quad x = 3y - 7, \\ 2x - 2y = 1,\ 4y = 13;\ y = \dfrac{13}{4}. \end{cases}$$

$y > 1$ — противоречие условию!

Ответ: $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{9}{4}$.

61. Рассмотрим четыре случая:

$$1)\ \left.\begin{aligned} x + y \geqslant 0 \\ x - y \geqslant 0 \end{aligned}\right\},$$

тогда из (1) $x+y=x-y+a$, т. е. $y=\frac{a}{2}$;

из (2) $x-y=x+y+b$, т. е. $y=-\frac{b}{2}$,

что возможно, если $a=-b$. В этом случае $x \geqslant |y|$.

2) $\left.\begin{array}{l} x+y \geqslant 0 \\ x-y \leqslant 0 \end{array}\right\}$,

тогда из (1) $x+y=x-y+a$, т. е. $y=\frac{a}{2}$,

из (2) $-x+y=x+y+b$, т. е. $x=-\frac{b}{2}$,

следовательно, решение в этом случае существует, если

$$\left.\begin{array}{r} a-b \geqslant 0 \\ -a-b \leqslant 0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{r} a-b \geqslant 0 \\ a+b \geqslant 0 \end{array}\right\}, \ a \geqslant |b|;$$

3) $\left.\begin{array}{l} x+y \leqslant 0 \\ x-y \leqslant 0 \end{array}\right\}$,

тогда из (1) $-x-y=x-y+a$, т. е. $x=-\frac{a}{2}$,

из (2) $-x+y=x+y+b$, т. е. $x=-\frac{b}{2}$,

что возможно, если $a=b$. В этом случае $|y| \leqslant -x$.

4) $\left.\begin{array}{l} x+y \leqslant 0 \\ x-y \geqslant 0 \end{array}\right\}$,

тогда из (1) $-x-y=x-y+a$, т. е. $x=-\frac{a}{2}$,

из (2) $x-y=x+y+b$, т. е. $y=-\frac{b}{2}$,

следовательно, решение в этом случае существует, если

$$\left.\begin{array}{r} a+b \geqslant 0 \\ b-a \geqslant 0 \end{array}\right\}, \ b \geqslant |a|.$$

Ответ: $y=\frac{a}{2}=-\frac{b}{2}$ при $a=-b$, $x \geqslant |y|$,

$y=\frac{a}{2}$; $x=-\frac{b}{2}$ при $a \geqslant |b|$,

$x=-\frac{a}{b}=-\frac{b}{2}$ при $a=b$, $|y| \leqslant -x$,

$x=-\frac{a}{2}$, $y=-\frac{b}{2}$ при $b \geqslant |a|$.

62. $\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{27}}(3^{-1})} = 3.$

Из первого уравнения:

$$x + y = 3 \cdot 2^{x-y}.$$

Подставляя во второе уравнение системы, получим:

$$3^{\frac{1}{x-y}} = 3^{\frac{1}{2}},$$

откуда

$$x - y = 2.$$

Решая систему

$$\begin{cases} x - y = 2, \\ x + y = 12, \end{cases}$$

получим:

$$x = 7, \quad y = 5.$$

63. Из второго уравнения системы следует: $y = \frac{1}{x^2}$. Подставляя это выражение в первое уравнение, получаем:

$$x^{x+y} = x^{2\,(y-x)}.$$

Возможны два случая:

1) $x = 1$, тогда и $y = 1$.

2) $x \neq 1$, тогда $x + y = 2(y - x)$; $y = 3x$,

и, подставляя во второе уравнение системы, находим:

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \quad y = \sqrt[3]{9}.$$

Ответ:

$$x_1 = 1, \ y_1 = 1; \ x_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \quad y = \sqrt[3]{9}.$$

64. О. Д. З. $x > 0$; $y > x$. Потенцируя, получим:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ y - x = xy, \end{cases}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}; \quad y = \frac{-1 \mp \sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: $x = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}, \quad y = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$

65. О. Д. З. $x > 1$, $y < 1$. Перепишем первое уравнение, используя соотношение $\log_a b = \log_{a^n} b^n$:

$$\log_3 \left(\log_2 x \cdot \frac{1}{\log_2 \frac{1}{y}} \right) = \log_3 3.$$

Отсюда

$$\log_2 x = 3\log_2 \frac{1}{y}.$$

Наша система принимает вид:

$$\begin{cases} xy^3 = 1, \\ xy^2 = 4, \end{cases}$$

откуда

$$x = 64, \quad y = \frac{1}{4}.$$

66. Перепишем систему в виде:

$$\begin{cases} \log_a x + \frac{1}{2}\log_a y + \frac{1}{2}\log_a z = d, \\ \log_c y + \frac{1}{2}\log_c z + \frac{1}{2}\log_c x = d, \\ \log_b z + \frac{1}{2}\log_b x + \frac{1}{2}\log_b y = d. \end{cases}$$

Потенцируя, будем иметь:

$$\begin{cases} x\sqrt{yz} = a^a, \\ y\sqrt{xz} = c^d, \\ z\sqrt{xy} = b^d. \end{cases}$$

Перемножая левые и правые части, получим:

$$(xyz)^2 = (abc)^d.$$

Подставляя в первое уравнение, находим:

$$x(abc)^{\frac{d}{2}} = a^{2d}.$$

Ответ:

$$x = a\left(\frac{a}{bc}\right)^{\frac{d}{2}},$$

$$y = c\left(\frac{c}{ab}\right)^{\frac{d}{2}}, \quad z = b\left(\frac{b}{ac}\right)^{\frac{d}{2}}.$$

67. Обозначая

$$\log_x y = \alpha,$$

$$\log_{\frac{x}{y}} xy = \beta,$$

имеем:

$$\beta = \frac{1+\alpha}{1-\alpha}.$$

Первое уравнение перепишется следующим образом:

$$\left(-\frac{1}{\alpha}-\alpha\right)\left(\beta-\frac{1}{\beta}\right)=\frac{20}{3} \text{ или } -\frac{1+\alpha^2}{\alpha}\cdot\frac{4\alpha}{1-\alpha^2}=\frac{20}{3},$$

откуда $\alpha=\pm 2$.

$$\log_x y=\pm 2;\ x^2=y \text{ или } x^2=\frac{1}{y}.$$

1) $x^2=y$.

Тогда $2y=a$, $y=\frac{a}{2}$, $x=\sqrt{\frac{a}{2}}$.

2) $x^2=\frac{1}{y}$; $\frac{1}{y}+y=a$; $y^2-ay+1=0$.

Тогда $y=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-1}$; $x=\dfrac{1}{\sqrt{\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-1}}}$.

Ответ:

1) $a\leqslant 0$ — решений нет.

2) $0<a<2$ — одно решение $\left(y=\frac{a}{2},\quad x=\sqrt{\frac{a}{2}}\right)$.

3) $a=2$ — решений нет.

4) $a>2$ — три решения $\left(y=\frac{a}{2},\quad x=\sqrt{\frac{a}{2}};\right.$

$$\left.x=\sqrt{\frac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}},\quad y=\frac{a\mp\sqrt{a^2-4}}{2}\right).$$

§ 6. Рациональные неравенства

76. О. Д. З. $x\neq -1$.

$$\frac{(x+1)(x+4)}{(x+1)(x^2-x+1)}\geqslant 1.$$

Сокращая на $(x+1)\neq 0$, получим

$$\frac{-x^2+2x+3}{x^2-x+1}\geqslant 0$$

или, т. к. знаменатель положителен при всех x,

$$x^2-2x-3\leqslant 0.$$

С учетом О. Д. З. получим:

$$-1<x\leqslant 3.$$

77. О. Д. З. $|x| \neq 1$.

$$\frac{(x-1)(x-6)}{(x-1)(x+1)} < -1.$$

Сокращая на $(x-1) \neq 0$, получим:

$$\frac{x-6}{x+1} + 1 < 0 \text{ или } \frac{2x-5}{x+1} < 0,$$

т. е.

$$2(x+1)\left(x-\frac{5}{2}\right) < 0.$$

Ответ: $-1 < x < 1,\ 1 < x < \frac{5}{2}$.

78. О. Д. З. $x \neq -2$.

1. Если $x^3 + 8 > 0$, т. е. $x > -2$, то

$$x^3 + 15 < 2(x^3 + 8);$$
$$x^3 > -1,\ x > -1.$$

2. Если $x^3 + 8 < 0$, т. е. $x < -2$, то

$$x^3 + 15 > 2(x^3 + 8),$$
$$x^3 < -1,\ x < -1.$$

Ответ: $x < -2$ и $x > -1$.

79. О. Д. З. $a \neq 1$.

$$\frac{x(1-a)-a}{1-a} < \frac{a-x}{a-1}.$$

1. $a < 1$

Умножая обе части уравнения на $(1-a) > 0$, получим:

$$x(1-a) - a < x - a,$$

откуда

$$-ax < 0,$$

т. е. если

а) $a < 0$, то $x < 0$,
б) $a > 0$, то $x > 0$,
в) $a = 0$, то решений нет.

2. $a > 1$.

Умножая обе части уравнения на $(a-1) > 0$, получим:

$$a - x(1-a) < a - x,$$

откуда

$$-ax > 0,$$

т. е. $x < 0$, т. к. $a > 1$.

Ответ: Если $a < 0$ или $a > 1$, то $x < 0$; если $0 < a < 1$, то $x > 0$; если $a = 0$, то решений нет (рис. 31).

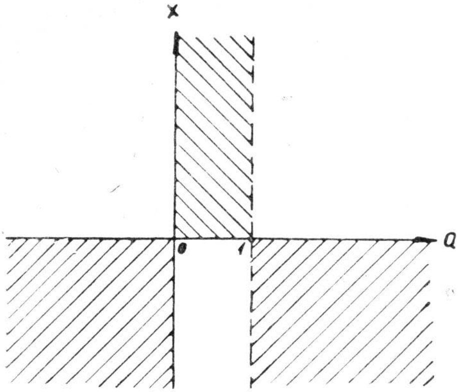


Рис. 31.

80. О. Д. З. $|a| \neq |b|$.

$$\frac{x(a-b)-a(a+b)}{a^2-b^2} > < \frac{x(a+b)-b(a-b)}{a^2-b^2}.$$

1. $|a| > |b|$.

Умножая обе части неравенства на $(a^2-b^2) > 0$, получим:

$$x(a-b)-a(a+b) > < x(a+b)-b(a-b),$$

откуда

$2bx < -(a^2+b^2)$, т. е. если

а) $b<0$, то $x > -\frac{a^2+b^2}{2b}$;

б) $b>0$, то $x < -\frac{a^2+b^2}{2b}$;

с) $b=0$, то решений нет.

2. $|a| < |b|$.

Умножая обе части неравенства на $(a^2-b^2) < 0$, получим:

$$x(a-b)-a(a+b) < x(a+b)-b(a-b),$$

откуда

$$2bx > -(a^2+b^2),$$

т. е. если

а) $b<0$, то $x < -\frac{a^2+b^2}{2b}$;

б) $b>0$, то $x > -\frac{a^2+b^2}{2b}$;

с) $b \neq 0$ вследствие предположения $|a| < |b|$.

Ответ: Если $b>0$, $|a| > b$ или $b<0$, $|a| < -b$, то $x < -\frac{a^2+b^2}{2b}$; если $b<0$, $|a| > |b|$ или $b>0$, $|a| < b$, то $x > -\frac{a^2+b^2}{2b}$; если $b=0$, то решений нет.

81. Преобразуем систему, приведем ее к виду

$$\left.\begin{aligned}(m-1)x &> 2m-3\\ (m+4)x &> 4m+1\end{aligned}\right\}. \qquad (*)$$

1. $m>1$, тогда

$$\left.\begin{aligned}x &> \frac{2m-3}{m-1}\\ x &> \frac{4m+1}{m+4}\end{aligned}\right\}.$$

Далее необходимо выяснить знак неравенства

$$\frac{2m-3}{m-1} \vee \frac{4m+1}{m+4}.$$

Имеем

$$\frac{2m-3}{m-1} - \frac{4m+1}{m+4} \vee 0,$$

или

$$\frac{-2m^2+8m-11}{(m-1)(m+4)} \vee 0.$$

$(-2m^2+8m-11) < 0$ при всех значениях m; $(m-1)(m+4)>0$ по исходному предположению $m>1$. Итак, в этом случае

$$\frac{2m-3}{m-1} < \frac{4m+1}{m+4}.$$

т. е.

$$x > \frac{4m+1}{m+4}.$$

Аналогично

2. При $-4 < m < 1$

$$\frac{4m+1}{m+4} < x < \frac{2m-3}{m-1}.$$

3. При $m < -4$

$$x < \frac{2m-3}{m-1}.$$

Далее необходимо исследовать еще два случая:

4. $m=1$, тогда из второго уравнения системы (*) имеем $x>1$.

5. $m=-4$, тогда из первого уравнения системы (*) имеем $x < \frac{11}{5}$.

§ 7. Иррациональные неравенства

88. О. Д. З. $x>0$, $x \neq 4$.

Данное неравенство равносильно следующему:

$$\frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} < 0,$$

или

$$(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2) < 0,$$

или, так как $\sqrt{x}>0$,

$$(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)<0,$$

т. е.

$$1<\sqrt{x}<2.$$

Окончательно имеем:

$$1<x<4.$$

89. О. Д. З. $x \geqslant -a$.

1. Если $x+1<0$, т. е. $x<-1$, то, с учетом О. Д. З.,

$$-a \leqslant x<-1,$$

что возможно при $a>1$.

2. Если $x+1=0$, то $x=-1$, что, с учетом О. Д. З., возможно лишь при $x>-a$.

3. Если $x+1>0$, т. е. $x>-1$, то, возведя обе части неравенства в квадрат, получим:

$$4x+4a>x^2+2x+1,$$

$$x^2-2x-(4a-1)<0,$$

$$1-2\sqrt{a}<x<1+2\sqrt{a}.$$

Полученный результат необходимо согласовать с нашими предположениями относительно a и x:

$$\begin{cases} 1-2\sqrt{a}<x<1+2\sqrt{a}, \\ x>-1. \\ x \geqslant -a, \\ a>0. \end{cases}$$

а) При $a>1$ получим $-1 \leqslant x<1+2\sqrt{a}$.

б) При $0<a \leqslant 1$ получим $1-2\sqrt{a}<x<1+2\sqrt{a}$.

Ответ: При $0<a \leqslant 1$ $1-2\sqrt{a}<x<1+2\sqrt{a}$;

при $a>1$ $-a \leqslant x<1+2\sqrt{a}$ (рис. 32).

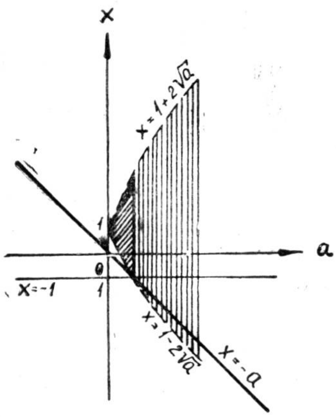


Рис. 32.

90. О. Д. З. $x \geqslant b^2$ $(b \neq 0)$; $x>0$ $(b=0)$.

1. При $b<0$ имеем по О. Д. З.: $x \geqslant b^2$.

2. При $b>0$, после возведения в квадрат, получим:

$$2x-b^2+2\sqrt{x(x-b^2)}>4b^2,$$

$$2\sqrt{x(x-b^2)}>5b^2-2x. \qquad (*)$$

а) При $5b^2-2x \leqslant 0$ $x \geqslant \frac{5b^2}{2}$.

б) При $5b^2-2x>0$, т. е. $x<\frac{5b^2}{2}$, после возведения в квадрат (*), получим:

$$x>\frac{25b^2}{16}.$$

Ответ: При $b<0$ $x\geqslant b^2$.
При $b=0$ $x>0$.
При $b>0$ $x>\frac{25b^2}{16}$.

§ 8. Показательно-логарифмические неравенства

91. Приведем данное неравенство к виду

$$\frac{1}{2^x}+2^{x+1}\leqslant 3.$$

Далее имеем:

$$1+2^{2x}\cdot 2-3\cdot 2^x\leqslant 0,$$
$$\frac{1}{2}\leqslant 2^x\leqslant 1,$$
$$-1\leqslant x\leqslant 0.$$

92. Приведем данное неравенство к виду

$$3^{x-\frac{1}{2}}(3+1)\geqslant 4^{x-\frac{1}{2}}(4-1)$$

или

$$3^{x-\frac{3}{2}}\geqslant 4^{x-\frac{3}{2}},$$

т. е.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-\frac{3}{2}}\geqslant 1.$$

Очевидно,

$$x\leqslant\frac{3}{2}.$$

93. О. Д. З. $x>0$.

Приведем данное неравенство к виду

$$\log_{\frac{1}{2}}x^2>\log_{\frac{1}{2}}\frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}},$$

или

$$x^2<2x+3.$$

Решая последнее неравенство, получим:

$$-1 < x < 3$$

и с учетом О. Д. З. имеем окончательно

$$0 < x < 3.$$

94. О. Д. З. $0 < x < 2,\ 2 < x < 3.$

1. $0 < x < 2.$

Будем иметь:

$$x < \frac{1}{3-x} \text{ или } x^2 - 3x + 1 > 0,$$

т. е.

$$x < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ и } x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

С учетом предположения $0 < x < 2$, будем иметь:

$$0 < x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

2. $2 < x < 3.$

Будем иметь:

$$x > \frac{1}{3-x} \text{ или } x^2 - 3x + 1 < 0,$$

т. е.

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

С учетом предположения $2 < x < 3$, будем иметь:

$$2 < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: $0 < x < \frac{3-\sqrt{5}}{2};\ 2 < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$

95. О. Д. З. $x > 0;\ x \neq 1; \frac{1}{2};\ \frac{1}{4}.$

Приведем неравенство к виду

$$\frac{1}{\log_2 x\,(\log_2 x + 1)} > \frac{1}{\log_2^2 x + 4\log_2 x + 4},$$

или

$$\log_2^2 x + \log_2 x < \log_2^2 x + 4\log_2 x + 4,$$

$$3\log_2 x + 4 > 0;\ x > 2^{-\frac{4}{3}}.$$

Ответ: $x > 2^{-\frac{4}{3}}$, но $x \neq 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4}.$

96. Должно выполняться:

$$\frac{x-1}{x+1} > 0; \ |x| > 1.$$

Кроме того,

$$\log_3 \frac{x-1}{x+1} > 0; \quad \frac{x-1}{x+1} > 1; \ x < -1.$$

Перепишем основное неравенство, используя тождество:

$$\log_a b = \log_{a^n} b^n,$$

$$\log_2 \log_3 \frac{x-1}{x+1} < \log_2 \frac{1}{\log_3 \frac{x-1}{x+1}},$$

отсюда (т. к. основание логарифмов больше единицы)

$$\log_3 \frac{x-1}{x+1} < \frac{1}{\log_3 \frac{x-1}{x+1}},$$

или $\left(\text{т. к. } \log_3 \frac{x-1}{x+1} > 0\right)$

$$\log_3 \frac{x-1}{x+1} < 1; \quad \frac{x-1}{x+1} < 3$$

и $x < -2$.

Ответ: $x < -2$.

97. Должно быть: $x > 0$, $x \neq 1$. Перейдем в исходном неравенстве к одному основанию:

$$\log_3 x > \frac{1}{\log_3 x} - \frac{5}{2}.$$

Возможны два случая:

а) $\log_3 x > 0$, т. е. $x > 1$;
тогда

$$-\log_3^2 x > 1 - \frac{5}{2}\log_3 x.$$

Обозначим $\log_3 x = z$. Имеем: $z^2 - \frac{5}{2}z + 1 < 0$. Это неравенство выполняется при $\frac{1}{2} < z < 2$; $\frac{1}{2} < \log_3 x < 2$, $\sqrt{3} < x < 9$.

Аналогично получим:

б) $\log_3 x < 0$; $x < 1$.

$$z^2 - \frac{5}{2}z + 1 > 0; \ \log_3 x < \frac{1}{2}; \quad x < \sqrt{3},$$

$$\log_3 x > 2; \quad x > 9.$$

Ответ: $0 < x < 1$; $\sqrt{3} < x < 9$.

98. О. Д. З. $x > 2$; $a > 0$, $a \neq 1$.

Имеем:

$$\log_a x(x-2) > \log_a a.$$

1. $a > 1$.

$$x(x-2) > a;\quad x^2 - 2x - a > 0;$$

$$x < 1 - \sqrt{1+a};\qquad x > 1 + \sqrt{1+a}$$

и с учетом О. Д. З. в этом случае получим

$$x > 1 + \sqrt{1+a}.$$

2. $a < 1$.

$$x(x-2) < a,\ x^2 - 2x - a < 0;$$

$$1 - \sqrt{1+a} < x < 1 + \sqrt{1+a}.$$

С учетом О. Д. З. в этом случае получим: $2 < x < 1 + \sqrt{1+a}$.

Ответ: При $0 < a < 1$ $\quad 2 < x < 1 + \sqrt{1+a}$,

при $a > 1$ $\quad x > 1 + \sqrt{1+a}$ (рис. 33).

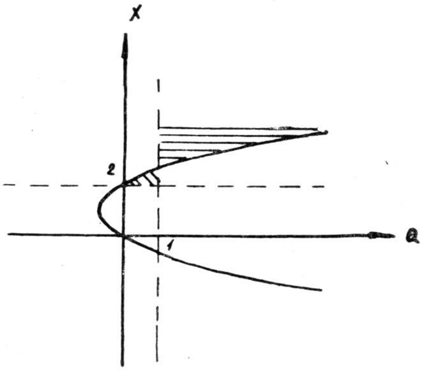


Рис. 33.

99. О. Д. З. $x > a$, $a > 0$, $a \neq 1$.

После преобразований получим:

$$\log_a (x^2 - a^2) > 0.$$

1. Если $a > 1$, то

$$x^2 - a^2 > 1,\quad x^2 > 1 + a^2$$

или, с учетом О. Д. З.,

$$x > \sqrt{1+a^2}.$$

2. Если $a < 1$, то

$$x^2 - a^2 < 1,\ x^2 < 1 + a^2$$

или, с учетом О. Д. З.,

$$a < x < \sqrt{1+a^2}.$$

Ответ: При $a > 1$ $x > \sqrt{1+a^2}$,

при $0 < a < 1$ $\quad a < x < \sqrt{1+a^2}$.

100. О. Д. З. $x > 0$, $x \neq 1$, $x \neq 1 - p$.

$$\frac{1}{\log_2 (x+p)} < \frac{2}{\log_2 x};\quad \frac{2}{\log_2 x} - \frac{1}{\log_2 (x+p)} > 0;$$

$$\frac{2\log_2 (x+p) - \log_2 x}{\log_2 x \cdot \log_2 (x+p)} > 0;$$

$$\frac{\log_2 \frac{(x+p)^2}{x}}{\log_2 x \cdot \log_2 (x+p)} > 0.$$

Решение нашего неравенства свелось к решению нескольких систем неравенств:

$$1.\ \left.\begin{array}{l} \log_2 \frac{(x+p)^2}{x} > 0 \\ \log_2 x > 0 \\ \log_2 (x+p) > 0 \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{l} (x+p)^2 > x \\ x > 1 \\ x > 1-p \end{array}\right\},$$

$$x^2 + x(2p-1) + p^2 > 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{(1-2p) \pm \sqrt{1-4p}}{2}.$$

В силу условия

$$0 < p < \frac{1}{4}$$

оба корня вещественные положительные

$$x > \frac{(1-2p)+\sqrt{1-4p}}{2} \text{ или } x > \frac{(1-2p)-\sqrt{1-4p}}{2}.$$

Так как оба корня меньше 1, то окончательно имеем:

$$x > 1.$$

$$2.\ \left.\begin{array}{l} \log_2 \frac{(x+p)^2}{x} < 0 \\ \log_2 x < 0 \\ \log_2 (x+p) > 0 \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{l} (x+p)^2 < x \\ x < 1 \\ x > 1-p \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{c} \frac{(1-2p)-\sqrt{1-4p}}{2} < x < \frac{(1-p)+\sqrt{1-4p}}{2} \\ 1-p < x < 1 \end{array}\right\},$$

Нетрудно проверить, что

$$1-p > \frac{(1-2p)+\sqrt{1-4p}}{2}.$$

Таким образом, в этом случае решений нет.

$$3.\ \left.\begin{array}{l} \log_2 \frac{(x+p)^2}{x} > 0 \\ \log_2 x < 0 \\ \log_2 (x+p) < 0 \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{l} (x+p)^2 > x \\ x < 1 \\ x < 1-p \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{c} x > \frac{(1-2p)+\sqrt{1-4p}}{2} \text{ или } x < \frac{(1-2p)-\sqrt{1-4p}}{2} \\ x < 1-p \end{array}\right\}.$$

Отсюда

$$\frac{(1-2p)+\sqrt{1-4p}}{2}<x<1-p$$

и

$$0<x<\frac{(1-2p)-\sqrt{1-4p}}{2}.$$

$$4.\ \left.\begin{array}{l}\log_2 \dfrac{(x+p)^2}{x}<0\\ \log_2 x>0\\ \log_2 (x+p)<0\end{array}\right\},\qquad \left.\begin{array}{l}x>1,\\ x<1-p\end{array}\right\}.$$

Система несовместна.

Ответ:

$$\frac{(1-2p)+\sqrt{1-4p}}{2}<x<1-p;$$

$$\frac{(1-2p)-\sqrt{1-4p}}{2}>x>0;$$

$$x>1.$$

§ 9. Доказательство неравенств

101. Пусть $\frac{a+b}{2}=x;\quad \sqrt{ab}=y.$

Воспользуемся неравенством:

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab};\ x\geqslant y;\ \frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy},$$

$$\frac{\frac{a+b}{2}+\sqrt{ab}}{2}\geqslant\sqrt{\frac{a+b}{2}\sqrt{ab}},$$

$$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4}\geqslant\sqrt{\frac{(a+b)\sqrt{ab}}{2}},$$

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^8\geqslant 64(a+b)^2ab.$$

102. Воспользуемся неравенством:

$$\frac{1}{k_2}=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k}<\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k-1}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}.$$

$$\frac{2}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}.$$

103. Обозначим $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=t$,

$$\frac{y^2}{x^2}+\frac{x^2}{y^2}-\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)=t_2-t-2.$$

Правая часть полученного выражения меньше 0 только при $-1<t<2$.

Но $t=2+\left(\sqrt{\frac{y}{x}}-\sqrt{\frac{x}{y}}\right)\geqslant 2.$

104. Для того, чтобы

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+4=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2-3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+2$$

было не отрицательно при любых вещественных x и y, необходимо и достаточно, чтобы при любых вещественных x и y выполнялось:

$$\text{или } \frac{x}{y}+\frac{y}{x}\leqslant 1, \text{ или } \frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 2.$$

1) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 2$; $\frac{x^2-2xy+y^2}{xy}\geqslant 0$, что верно, если $xy>0$.

2) Если же $xy<0$, то $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x^2+y^2}{xy}\leqslant 1$, что и требовалось доказать.

§ 10. Задачи на составление уравнений*

107. Пусть v_i — средняя скорость лыжника на i-том участке, v — средняя скорость на всей трассе. Тогда

$$\begin{cases}\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}=\frac{2}{a},\\ \frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_3}=\frac{2}{b},\\ \frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_3}=\frac{2}{v_2},\end{cases}\quad \text{откуда } \frac{1}{v}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_3}\right)=$$
$$=\frac{1}{v_2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

Замечание: Средняя скорость v на всем пути выражается через средние скорости v_i отдельных равных по длине участков пути следующим образом: $\frac{1}{v}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\right.$ $\left.+\ldots+\frac{1}{v_n}\right)$.

Ответ: $v=\frac{2ab}{a+b}$.

---

* В ответах к задачам физического содержания единицы измерения в случаях, когда они очевидны, не указаны.

108. Ответ:

$$v_1 = \frac{(2k+1)\,a}{3}; \quad v_{2,3} = \frac{(2k+1)\,a}{3}\left(1 \pm \sqrt{\frac{k-1}{k}}\right).$$

109. Пусть x — скорость третьего велосипедиста,
t — время, за которое он догнал первого.

Тогда

$$\frac{1}{2}a = t(x-a),$$

$$\frac{1}{2}b = \left(t + \frac{3}{2}\right)(x-b).$$

Из первого уравнения находим:

$$t = \frac{a}{2(x-a)}.$$

Подставляя это значение t во второе уравнение и решая относительно x, получаем:

$$x_{1,2} = \frac{1}{3}\left(a + 2b \pm \sqrt{a^2 - 5ab + 4b^2}\right).$$

Оба корня вещественны, ибо

$$a^2 - 5ab + 4b^2 = (4b-a)(b-a) \geqslant 0,$$

так как $b > a$. Если $x = \frac{1}{3}\left(a + 2b - \sqrt{(4b-a)(b-a)}\right)$, то $x < b$, так как $a < b$. Поэтому это значение x не является решением задачи.

Ответ: $x = \frac{1}{3}\left(a + 2b + \sqrt{(4b-a)(b-a)}\right)$.

110. Пусть I кран наполняет бассейн за x часов, II кран наполняет бассейн за y часов. Тогда за 1 час I кран наполняет $\frac{1}{x}$ часть бассейна, а II кран — $\frac{1}{y}$ часть бассейна. Задача сводится к решению системы:

$$\begin{cases} \frac{1}{k}\,y\,\frac{1}{x} + \frac{1}{k}\,x\,\frac{1}{y} = \frac{1}{n}, \\ \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)a = 1, \end{cases}$$

решая которую, получим:

$$x = \frac{a}{2n}\left(2n + k \mp \sqrt{k^2 - 4n^2}\right),$$

$$y = \frac{a}{2n}\left(2n + k \pm \sqrt{k^2 - 4n^2}\right).$$

Задача имеет решение, если $k \geqslant 2n$.

111. Задача сводится к решению системы:

$$\begin{cases} (m+t)v - tx = n, \\ (m+t)v - ptx = \dfrac{n}{3}, \end{cases}$$

где x — скорость мотоциклиста, t — время движения до „некоторого момента времени".

Ответ: $x = \dfrac{2nv}{n(3p-1) - 3mv(p-1)}$.

112. Ответ: $\dfrac{a(q-p)}{p}$ или a.

113. Ответ: $a^{\frac{p \pm \sqrt{p^2+4pq}}{2pq}}$.

114. Ответ: $a = 2\,\dfrac{м}{сек^2}$, $t = 10$ *сек*.

115. Пусть m_0 — начальное количество первого вещества, λ_1 и λ_2 — константы, соответствующие первому и второму веществам. Тогда начальное количество второго вещества равно $2m_0$. Пусть T_1, T_2 — периоды полураспада первого и второго вещества. Тогда, так как $m_0a^{-\lambda T} = \dfrac{m_0}{2}$, то есть $\lambda = \dfrac{1}{T}\log_a 2$, то $\lambda_1 = \dfrac{1}{T_1}\log_a 2$, $\lambda_2 = \dfrac{1}{T_2}\log_a 2$. Следовательно, $\lambda_2 = 2\lambda_1$.

Итак,

$$m_0a^{-\lambda_1\cdot 20} + 2m_0e^{-2\lambda_1\cdot 20} = \frac{1}{8}(m_0 + 2m_0)$$

или

$$16(a^{-20\lambda_1})^2 + 8a^{-20\lambda_1} - 3 = 0,$$

$$a^{-20\lambda_1} = \frac{-4 \pm 8}{16}.$$

1) $a^{-20\lambda_1} = \dfrac{1}{4}$, 2) $a^{-20\lambda_1} = -\dfrac{3}{4}$ — решений нет.

$20\lambda_1 = 2,$

$\lambda_1 = \dfrac{1}{10}.$

Ответ: $T_1 = 10$, $T_2 = 5$.

116. Пусть x — путь со вторым мячом, X — весь путь пловца. Так как пути, проделанные с каждым из мячей, равны, то

$$X = 4x - l.$$

Пусть c — скорость реки, u — скорость пловца. Тогда

$$\frac{x-l}{c}=\frac{2x-l}{u+c}+\frac{x}{u-c}.$$

Ответ: $x=l\frac{k-1}{k-3}$, $X=\frac{3k-1}{k-3}l$.

117. Обозначим через t время (в часах) от момента сообщения до прибытия по расписанию (без опоздания) первого поезда, а через v — искомую скорость.

Очевидно, первый машинист был оповещен за $v\left(t+\frac{t_1}{60}\right)$ *км* от Ленинграда, а второй — за $v\left(t+1+\frac{t_2}{60}\right)$ *км*. С другой стороны, эти расстояния равны соответственно $(v+v_1)\,t$ и $(v+v_2)\,(t+1)$, так как после увеличения скорости поезда прибыли без опоздания.

Решая систему

$$\left.\begin{aligned} v\left(t+\frac{t_1}{60}\right)&=(v+v_1)\,t\\ v\left(t+1+\frac{t_2}{60}\right)&=(v+v_2)\,(t+1)\end{aligned}\right\},$$

получим: $v=\dfrac{60v_1v_2}{v_1t_2-v_2t_1}$.

118. Обозначим: x — количество меди в сплаве,
y — количество цинка в сплаве.

По условию,

$$x+y=a.$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{Потеря веса меди } \frac{xp}{100}\\ &\text{Потеря веса цинка } \frac{yq}{100}\end{aligned}\right\}. \text{ Общая потеря веса } \frac{px}{100}+\frac{qy}{100}=b.$$

Решая систему

$$\begin{cases} x+y=a,\\ pk+qy=100b,\end{cases}$$

получим:

$$x=\frac{aq-100b}{q-p},\quad y=\frac{100b-ap}{q-p}.$$

Задача имеет решение, если выполнены условия: 1) $aq>100b>ap$ при $q>p$, 2) $ap>100b>aq$ при $q<p$.

119. Ответ: $\frac{c(b-d)}{b-a}T$, $\frac{c(d-a)}{(b-a)}T$.

120. Пусть $\alpha\ \frac{г}{литр}$ — концентрация раствора в первом сосуде,

$\beta\ \frac{г}{литр}$ — концентрация раствора во втором сосуде,

$x_л$ — количество раствора в первом сосуде,

$y_л$ — количество раствора во втором сосуде.

По условию,

$$\begin{cases} x+m=y, \\ \dfrac{(x-n)\alpha+n\beta}{x}=\dfrac{(y-n)\beta+n\alpha}{y}. \end{cases}$$

Подставляя выражение y через x во второе уравнение, получим:

$$(\alpha-\beta)x^2+(m-2n)\ (\alpha-\beta)x-mn(\alpha-\beta)=0,$$

откуда

$$x_{1,2}=\frac{2n-m\pm\sqrt{m^2+4n^2}}{2}.$$

По условию, $x>0$. Этому условию удовлетворяет лишь

$$x=\frac{2n-m+\sqrt{m^2+4n^2}}{2}.$$

Ответ: $x=\dfrac{2n-m+\sqrt{m^2+4n^2}}{2}$,

$y=\dfrac{2n+m+\sqrt{m^2+4n^2}}{2}$.

121. Ответ: $a\dfrac{\sqrt{p}}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}$ *л*.

122. Пусть требуется взять $x_г$ первого раствора, $y_г$ второго раствора.

Пусть в 1 *г* первого раствора содержится α весовых частей йода. Тогда, по условию, $\frac{\alpha}{1-\alpha}=p$, откуда $\alpha=\frac{p}{p+1}$.

Итак, в 1 *г* первого раствора содержится $\frac{p}{p+1}$ *г* йода и $\frac{1}{p+1}$ *г* спирта. Аналогично, в 1 *г* второго раствора содержится $\frac{q}{q+1}$ *г* йода и $\frac{1}{q+1}$ *г* спирта.

По условию задачи,

$$\frac{\frac{p}{p+1}x+\frac{q}{q+1}y}{\frac{x}{p+1}+\frac{y}{q+1}}=r,$$

откуда искомая величина

$$\frac{x}{y}=\frac{r-q}{p-r}\cdot\frac{p+1}{q+1}.$$

Задача имеет решение, если $\frac{x}{y}>0$, то есть $q<r<p$ или $p<r<q$.

123. После прохождения через первый фильтр в воздухе останется:

$$a-ak=a(1-k)\ \%\ CO_2,$$

через второй фильтр

$$a(1-k)-ka(1-k)=a(1-k)^2\ \%\ CO_2 \text{ и т. д.}\ldots,$$

через m-ый фильтр

$$a(1-k)^m.$$

По условию, $a(1-k)^m \leqslant b$, откуда

$$m \geqslant \log_{1-k}\frac{b}{a}. \qquad (*)$$

Ответ: m — наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству (*).

124. Указание: Задача решается аналогично предыдущей.

Ответ: $k=\left(1-\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)\frac{n}{T}$.

125. Ответ: 20 %; 0,1.

126. Введем обозначения:

x — скорость эскалатора,

v — скорость пассажира при движении вверх по неподвижному эскалатору,

$1{,}35\ v$ — скорость пассажира при движении вниз по неподвижному эскалатору.

Решение задачи сводится к решению системы

$$\begin{cases}\dfrac{10}{x+v}+\dfrac{10}{1{,}35\ v-x}=73,\\[2mm] \dfrac{10}{1{,}35\ v-x}+\dfrac{10}{v-x}=262.\end{cases}$$

Ответ: $\approx 0{,}33\ \frac{м}{сек}$.

127. Ответ: $(n-1)$ рыбаков.

128. Пусть x и y — стороны прямоугольника. Тогда, по условию,

$$2(x+y)=xy$$

или

$$2x+2y-xy=0.$$

$$x=\frac{2y}{y-2}=2+\frac{4}{y-2}.$$

4 делится на $(y-2)$ лишь в трех случаях:

1) $y=6$, тогда $x=3$;
2) $y=4$, тогда $x=4$;
3) $y=3$, тогда $x=6$.

Существенно различных прямоугольников два.

Ответ: 6 и 3; 4 и 4.

129. Пусть x — число монет,
y — сторона квадрата.
Тогда $y+2$ — сторона треугольника.

Составим уравнение:

$$x=y^2=\frac{(y+2)(y+3)}{2},$$

т. е.

$$y^2-5y-6=0.$$

Ответ: 180 коп.

130. 1 способ. С точки зрения наблюдателя, условно помещенного на флягу, пловец удаляется от фляги и приближается к ней с одной и той же скоростью v (v — скорость пловца в стоячей воде).

Отсюда очевидно, что догонял пловец флягу то же время, что и удалялся от нее, т. е. $\frac{1}{3}$ часа.

Фляга проплыла 2 *км* со скоростью x, равной течению реки. Таким образом, имеем:

$$\frac{2}{3}x=2, \text{ т. е. } x=3\left(\frac{км}{час}\right).$$

2 способ. Пусть x — скорость реки,
v — скорость пловца в стоячей воде.
Тогда

$\frac{1}{3}(v-x)$ — расстояние, пройденное пловцом от Кировского моста до места обнаружения пропажи,

$\dfrac{2+(v-x)\frac{1}{3}}{v+x}$ — время, которое пловец плыл по течению.

Все время T, которое плыл пловец до встречи с флягой, выражается равенством

$$T=\frac{2+(v-x)\cdot\frac{1}{3}}{v+x}+\frac{1}{3}.$$

По условию задачи, очевидно

$$T=\frac{2}{x}.$$

Поэтому

$$\frac{2+(v-x)\cdot\frac{1}{3}}{v+x}+\frac{1}{3}=\frac{2}{x},$$

или

$$vx-x^2+6x+vx+x^2=6v+6x,$$
$$2vx=6v.$$

Сокращая на $2v$ $(v\neq 0)$, находим

$$x=3\left(\frac{км}{час}\right).$$

131. Так как время прибытия туристов определяется по последнему, то оптимальным случаем будет тот, когда туристы прибудут в B одновременно*, а для этого каждый из них должен $\frac{s}{2}$ пройти и $\frac{s}{2}$ проехать, затратив при этом

$$\frac{s}{2v}+\frac{s}{6v}=\frac{2}{3}\frac{s}{v}\text{ (ед. времени)}.$$

132. Обозначая через t_1, t_2, t_3 и t_4 скорости звука в первом, втором, третьем и новом стержнях соответственно, получим:

$$\begin{cases} t_1+t_2+t_3=t, \\ t_2+t_3=\frac{1}{2}t_1, \\ t_1+t_4+t_3=T, \\ t_1+t_4=2t_3. \end{cases}$$

Решая составленную систему, получим:

$$t_4=\frac{2}{3}(T-t).$$

Задача имеет смысл при $T>t$.

133. Ответ: 4 дня.

---

* Доказательство представляем читателю.

134. Ответ: 15 *дм* и 32,5 *дм*.

135. Ответ: 3 часа и 6 часов.

136. Пусть t_1 — время работы первого насоса (в часах), t_2 — время работы второго насоса (в часах).

Тогда

$$\begin{cases} a_1t_1 + a_2t_2 = n, \\ r_1t_1 + r_2t_2 = R, \end{cases}$$

откуда

$$t_1 = \frac{nr_2 - a_2R}{a_1r_2 - a_2r_1},$$

$$t_2 = \frac{a_1R - nr_1}{a_1r_2 - a_2r_1}.$$

Если в оптимальном случае t_1 и t_2 — время работы первого и второго насосов соответственно, то

$$\begin{cases} a_1t_1^* + a_2t_2^* = n, \\ r_1t_1^* + r_2t_2^* \leqslant R. \end{cases}$$

Решая эту систему (способом алгебраического сложения) и учитывая, что a_1, a_2, r_1, $r_2 > 0$, получим:

1. Если $a_1r_2 - a_2r_1 > 0$, т. е. $\frac{r_1}{a_2} < \frac{r_2}{a_2}$ $\left(\frac{r}{a}\right.$ — стоимость откачки 1 $\left.м^3\right)$, то

$$t_1^* \geqslant \frac{nr_2 - a_2R}{a_1r_2 - a_2r_1} = t_1,$$

$$t_2^* \leqslant \frac{a_1R - nr_1}{a_1r_2 - a_2r_1} = t_2,$$

т. е. t_1^* необходимо максимально, а t_2^* — минимально. Таким образом,

1а) если $a_1 \geqslant \frac{n}{24}$, то $\begin{cases} t_1^* = \frac{n}{a_1}, \\ t_2^* = 0, \end{cases}$

1б) если $a_1 < \frac{n}{24}$, то в предположении, что $a_1 + a_2 \geqslant \frac{n}{24}$,

$$\begin{cases} t_1^* = 24, \\ t_2^* = \frac{n - 24a_1}{a_2}. \end{cases}$$

2. Если $a_1r_2 - a_2r_1 < 0$, то решение аналогично решению 1 и получается из него заменой a_1 на a_2 и r_1 на r_2.

3. Если $a_1r_2 - a_2r_1 = 0$ $\left(\text{т. е. } \frac{r_1}{a_1} = \frac{r_2}{a_1}\right)$, то насосы одинаково выгодны в работе, и если $\frac{n}{a_1} < 24$ или $\frac{n}{a_2} < 24$, то может

работать соответственно первый или второй насос. Если же и $\frac{n}{a_1} > 24$, и $\frac{n}{a_2} > 24$, а $\frac{n}{a_1+a_2} < 24$, то

$$t_1^* + t_2^* = \frac{n}{a_1 + a_2}.$$

137. Введем обозначения: x — искомое расстояние,
t — искомое время.

Тогда время транспортирования второго понтона $t = \frac{x}{v+u}$ (*), время его самостоятельного движения $\frac{l-x}{u}$ (час). Все время движения второго понтона:

$$\frac{x}{x+u} + \frac{l-x}{u}. \qquad (1)$$

До встречи буксира с первым понтоном с момента начала движения пройдет $\frac{2x}{v+u}$ * (час). За это время первый понтон пройдет $\frac{2ux}{v+u}$ (*км*), и ему останется пройти $l - \frac{2ux}{v+u}$ (*км*). Это расстояние буксир с первым понтоном преодолеет за $\left(l - \frac{2ux}{v+u}\right) \cdot \frac{1}{v+u}$ (час). Тогда все время движения первого понтона

$$\frac{2x}{v+u} + \left(l - \frac{2ux}{v+u}\right) \cdot \frac{1}{v+u}. \qquad (2)$$

По условию задачи, (1) = (2). Приравнивая (1) и (2) и подставляя найденное значение x в (*), получим: $t = \frac{3l}{3u+v}$.

138. Пусть $x_{кг}$ — запас горючего,
$y_{кг}$ — количество горючего, истраченного при скорости реки u,
$l_{км}$ — путь вверх по течению реки,
$a_1, a_2 \frac{кг}{час}$ — расход горючего на скоростях v_1, v_2 соответственно.

Тогда

(1) $l = \frac{y}{a_1}(v_1 - u) = \frac{y}{a_1}(v_2 - u)$ при скорости реки $u \frac{км}{час}$,

(2) $l + \frac{x}{a_1}(v_1 - ku) = \frac{x-A}{a_2}(v_2 - ku)$ при скорости реки $ku \frac{км}{час}$.

---

* См. задачу 130 (1 способ).

Разделив (1) на (2), получим:

$$x\frac{v_1-ku}{v_1-u}=(x-A)\frac{v_2-ku}{v_2-u}.$$

Ответ: $x=\frac{(v_2-ku)(v_1-u)}{(k-1)(v_2-v_1)u}A.$

139. Ответ: Если $\frac{p_1}{v_1-c}-\frac{p_2}{v_2-c}>0$ и $p\geqslant\frac{p_2l}{v_2-c}$, то

$$t_1=\min\left(\frac{l}{v_1-c},\ T\right).$$

Если $\frac{p_1}{v_1-c}-\frac{p_2}{v_2-c}\leqslant 0$ и $p\geqslant\frac{p_1l}{v_1-c}$, то $t_1=\frac{l}{v_1-c}$.

140. Пусть x — время поездки на такси,
u — средняя скорость поезда.

Тогда $\frac{A}{a_2}$ — расстояние, пройденное на автобусе, а $\frac{A}{a_2v_2}$ — время поездки на автобусе; v_i-u — относительная скорость такси или автобуса по отношению к поезду.

По условию задачи,

$$(v_1-u)x+(v_2-u)\frac{A}{a_2v_2}=ut. \qquad (1)$$

На такси пассажир проехал v_1x (*км*) и истратил a_1v_1x (руб.). Если бы он продолжал ехать на такси, то истратил бы a_1v_1x+A-B (руб.), при этом поездка заняла $\frac{ut}{v_1-u}$ часов. Следовательно,

$$a_1v_1x+A-B=\frac{ut}{v_1-u}v_1a_1. \qquad (2)$$

Решая систему уравнений (1) и (2), получим:

$$x=\frac{a_1A-a_2(A-B)}{a_1A(v_1-v_2)}v_2t-\frac{A-B}{a_1v_1},$$

$$u=\frac{a_1A-a_2(A-B)}{Aa_1v_1-a_2v_2(A-B)}v_1v_2.$$

141. Пусть l_1, l_2 — длины поездов, v_1, v_2 — их скорости. Искомое отношение $\frac{v_2}{v_1}$ обозначим через x.

Тогда из условия задачи получим:

$$\begin{cases}\dfrac{l_1+l_2}{v_1+v_2}=t,\\[2mm] \dfrac{l_2-l_1}{v_2+v_1}=\tau,\\[2mm] \dfrac{l_1}{v_1}-\dfrac{l_2}{v_2}=\theta,\end{cases}\qquad \begin{matrix}l_1,\ l_2,\ v_1\ v_2>0,\\ t>\tau.\end{matrix}$$

Учитывая также, что $x = \frac{v_2}{v_1}$, можно исключить три из величин v_1, v_2, l_1, l_2, при этом получается однородное уравнение относительно четвертой, на которую можно сократить. В результате получаем:

$$x^2(t-\tau) - 2x(\tau+\theta) - (t+\tau) = 0.$$

Следовательно, $x_{1,2} = \frac{\tau + \theta \pm \sqrt{t^2+\theta^2+2\tau\theta}}{t-\tau}$. Второй корень отрицателен, т. к. $\tau < t$.

Ответ: $x = \frac{\tau+\theta+\sqrt{t^2+\theta^2+2\tau\theta}}{t-\tau}$.

142. Пусть $v_1 \frac{м}{сек}$ — скорость 1-ой модели при безветренной погоде,

$v_2 \frac{м}{сек}$ — скорость 2-ой модели при безветренной погоде,

t_1 *сек* — время полета 1-ой модели,

t_2 *сек* — время полета 2-ой модели.

Тогда $(v_1 - u)t_1$ — дальность полета 1-ой модели,

$(v_2 - u)t_2$ — дальность полета 2-ой модели,

$$t = t_2 - t_1 \text{ и } l = (v_1 - u)t_1 - (v_2 - u)t_2,$$
$$l = v_1t_1 - v_2t_2 + ut.$$

При безветренной погоде разность между дальностью полета 1-ой и 2-ой модели равна

$$x = v_1t_1 - v_2t_2 = l - ut.$$

Таким образом, $x > 0$, если $u < \frac{l}{t}$;

$x < 0$, если $u > \frac{l}{t}$;

$x = 0$, если $u = \frac{l}{t}$.

Ответ: Если $u < \frac{l}{t}$, то большее расстояние пролетит 1-ая модель; если $u > \frac{l}{t}$, то — 2-ая модель; если $u = \frac{l}{t}$, то обе модели пролетят одинаковое расстояние.

143. Пусть A_1 — сумма, истраченная на такси;

A_2 — сумма, истраченная на автобус;

$\frac{A_i}{a_i}$ — соответственно проделанный путь;

$\frac{A_i}{a_i v_i}$ — время поездки.

По условию задачи,

$$\begin{cases} 0 \leqslant A_1, \\ 0 \leqslant A_2, \\ A_1 + A_2 \leqslant A, \\ (v_1 - u)\dfrac{A_1}{v_1 a_1} + (v_2 - u)\dfrac{A_2}{v_2 a_2} = ut. \end{cases}$$

Обозначим для краткости $b_i = \dfrac{v_i - u}{a_i v_i}$ — расстояние, на которое можно приблизиться к велосипедисту на такси ($i = 1$), на автобусе ($i = 2$), заплатив один рубль.

$$A_2 = \frac{ut}{b_2} = \frac{b_1}{b_2} A_1.$$

Исключая A_2, получим:

$$\begin{cases} 0 \leqslant A_1, \\ 0 \leqslant \dfrac{ut}{b_2} - \dfrac{b_1}{b_2} A_1, \text{ или } A_1 \leqslant \dfrac{ut}{b_1}, \\ A_1\left(1 - \dfrac{b_1}{b_2}\right) \leqslant A - \dfrac{ut}{b_2}, \text{ или } A_1(b_2 - b_1) \leqslant Ab_2 - ut. \end{cases}$$

1. $b_2 - b_1 > 0$ (т. е. выгоднее ехать на автобусе), тогда

$$\begin{cases} 0 \leqslant A_1 \leqslant \dfrac{ut}{b_1}, \\ A_1 \leqslant \dfrac{Ab_2 - ut}{b_2 - b_1}. \end{cases}$$

Эта система совместна, если $\dfrac{Ab_2 - ut}{b_2 - b_1} \geqslant 0$, т. е. $Ab_2 - ut \geqslant 0$, тогда

$$A_1 = \min\left(\frac{ut}{b_1}, \quad \frac{Ab_2 - ut}{b_2 - b_1}\right).$$

2. $b_1 - b_2 < 0$ (т. е. выгоднее ехать на такси), тогда

$$\begin{cases} 0 \leqslant A_1 \leqslant \dfrac{ut}{b_1}, \\ A_1 \geqslant \dfrac{Ab_2 - ut}{b_2 - b_1}. \end{cases}$$

Эта система совместна, если $\dfrac{Ab_2 - ut}{b_2 - b_1} \leqslant \dfrac{ut}{b_1}$, т. е. $Ab_1 \geqslant ut$, тогда $A_1 = \dfrac{ut}{b_1}$.

3. $b_1 = b_2$ (автобус и такси равноценны), тогда

$$\begin{cases} Ab_2 - ut \geqslant 0, \\ 0 \leqslant A_1 \leqslant \dfrac{ut}{b_1}. \end{cases}$$

Таким образом, при

$$A \geqslant \frac{ut}{b_1}, \ A_1 = \frac{ut}{b_1}.$$

Ответ: Если $b_2 > b_1$ и $A \geqslant \dfrac{ut}{b_2}$,

$$\text{то } A_1 = \min\left(\frac{ut}{b_1}, \ \frac{Ab_2 - ut}{b_2 - b_1}\right),$$

$$\text{если } b_2 \leqslant b_1 \text{ и } A \geqslant \frac{ut}{b_1},$$

$$\text{то } A_1 = \frac{ut}{b_1}.$$

В остальных случаях поручение выполнить нельзя.

144. Пусть за выигрыш начисляется a очков,
x — количество очков, набранных последней командой,
n — число команд, целое; $a, \ x, \ n > 0$.

Тогда общее число разыгранных очков равно, с одной стороны, $a\dfrac{n(n-1)}{2}$ $\left(\text{где } \dfrac{n(n-1)}{2} - \text{число встреч}\right)$; с другой стороны, так как очки распределились в арифметической прогрессии, то, обозначив ее разность через d, получим $nx + d\dfrac{n(n-1)}{2}$, но $d = ka$, где $k > 0$ — целое число, так что

$$nx + ka\frac{n(n-1)}{2} = a\frac{n(n-1)}{2}.$$

Таким образом,

$$nx = (1-k)a\frac{n(n-1)}{2}, \text{ т. е. } \frac{x}{a} = (1-k)\frac{n-1}{2},$$

откуда для k две возможности: $k = 1$, $k = 0$. Следовательно,

$$\text{либо } x = 0, \text{ либо } x = a\frac{n-1}{2}.$$

145. Пусть x — искомое время и t — время полета на первом режиме. По условию задачи,

$$h = \frac{a_1 t^2}{2},$$

откуда

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a_1}}.$$

Начальная скорость ракеты при полете на втором режиме будет равна v_0.

$$v_0 = a_1 t \text{ или } v_0 = \sqrt{2ha_1}.$$

По условию задачи, получим:

$$h = \sqrt{2ha_1} \cdot x + \frac{a_2 x^2}{2}$$

или

$$a_2 x^2 + 2\sqrt{2ha_1} x - 2h = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{-2\sqrt{2ha_1} \pm \sqrt{8ha_1 + 8ha_2}}{2a_2}.$$

Так как необходимо $x > 0$, то

$$x = \frac{\sqrt{2h}\,(\sqrt{a_1 + a_2} - \sqrt{a_1}}{a^2}.$$

146. Обозначая скорость велосипедиста на первом круге v, получим:

$v + a$ — скорость велосипедиста на втором круге;

$\frac{s}{2v}$ — время, затраченное велосипедистом на прохождение половины круга от точки, диаметрально противоположной старту, до точки старта;

$\frac{s}{2(v+a)}$ — время, затраченное велосипедистом на прохождение круга от точки старта до диаметрально противоположной ей точки (второй круг).

По условию задачи, имеем:

$$\frac{s}{2v} + \frac{s}{2(v+a)} = t.$$

Решая уравнение относительно v и выбирая положительное значение v, получим:

$$v = \frac{s - at + \sqrt{s^2 + a^2t^2}}{2t}.$$

Замечание: Задача имеет смысл, и v выражается тем же соотношением при $a \leqslant 0$.

147. Пусть s — весь путь в один круг,

x — начальная скорость первого велосипедиста.

По условию задачи, составляем уравнение:

$$\frac{5s}{2} = \frac{s}{x} + \frac{s}{a+x} + \frac{s}{2a+x}$$

или, после преобразований,

$$x^2 - 3ax - 6a^2 = 0.$$

Решая последнее уравнение, получим

$$x_{1,2}=\frac{a}{2}(3\pm\sqrt{33});$$

так как $x>0$, по условию, окончательно имеем:

$$v_1=\frac{a}{2}(3+\sqrt{33}).$$

148. Пусть корабль и частица столкнулись, и расстояние от частицы до точки A в момент ее обнаружения равно x. Тогда за одно и то же время t корабль прошел до точки A расстояние $s=v_1t+\frac{at^2}{2}$, а частица — расстояние $x=v_2t$.

Решая относительно t систему

$$\left.\begin{aligned} s&=v_1t+\frac{at^2}{2}\\ x&=v_2t \end{aligned}\right\}$$

и подставляя полученное

$$t=\frac{-v_1+\sqrt{v_2+2as}}{a}$$

во второе уравнение системы, получим:

$$x=v_2\frac{\sqrt{v_1^2+2as}-v_1}{a}.$$

Ответ: Искомое расстояние должно быть больше, чем

$$v_2\frac{\sqrt{v_1^2+2as}-v_1}{a}.$$

§ 14. Разные задачи

251. 1. Пусть корень уравнения $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь ($n\neq 0$; 1). Тогда он должен удовлетворять уравнению $\frac{m^2}{n^2}+a\frac{m}{n}+1=0$ или $\frac{m^2}{n}+am+n=0$.

Так как $(am+n)$ — целое, а $\frac{m^2}{n}$ — дробь, то предположение неверно.

2. Пусть корень уравнения m — целое число. Тогда: $m^2+am+1=0$ или $m+a+\frac{1}{m}=0$.

Так как $(m+a)$ — целое, а $\frac{1}{m}$ — дробь, ибо $|a|\neq 2$ то предположение неверно.

252. По теореме Виета,

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2&=2-p\\ x_1\cdot x_2&=p-3\end{aligned}\right\},\quad \left.\begin{aligned}(x_1+x_2)^2&=4-4p+p^2\\ 2x_1\cdot x_2&=2p-6\end{aligned}\right\}.$$

$$x_1^2+x_2^2=p^2-6p+10=(p-3)^2+1.$$

Ответ: $\min\,(x_1^2+x_2^2)=1$ при $p=3$.

253. Допустим, что данное равенство есть уравнение. Непосредственно видно тогда, что корнями его будут a, b и c.

Рассматриваемое уравнение есть уравнение второй степени. Так как число корней превышает степень уравнения, то уравнение является тождеством.

254. Корни будут рациональными, если дискриминант — полный квадрат

$$D=(1-2k)^2-4k(k-2)=4k+1=\left(\frac{m}{n}\right)^2,$$

где m и n — любые вещественные числа, но $n\neq 0$.

Из последнего равенства получим:

$$k=\frac{m^2-n^2}{4n^2}.$$

Очевидно, что условие вещественности корней при таком k выполняется всегда.

255. По виду второго уравнения устанавливаем, что

$$y>0,\ yx-x=x(y-1)>0,\ y=yx-x,\ \text{т. е. } y=\frac{x}{x-1}.$$

Предположим, что

$$y>\frac{1}{2}. \tag{1}$$

Тогда из первого уравнения получим

$$x^2+x+1<1,$$

т. е.

$$-1<x<0. \tag{2}$$

Переписывая (1) в виде

$$\frac{x}{x-1}>\frac{1}{2},$$

получим

$$\frac{x+1}{x-1}>0,\ \text{т. е. } |x|>1,$$

что противоречит (2).

Пусть теперь

$$0<y<\frac{1}{2}. \tag{3}$$

Тогда из первого уравнения следует

$$x > 0 \text{ или } x < -1. \qquad (4)$$

Но при $x > 0$, из условия $x(y-1) > 0$, следует $y > 1$, что противоречит (3), а при $x < -1$ не выполняется условие

$$y = \frac{x}{x-1} < \frac{1}{2}.$$

Таким образом, система решений не имеет.

256. Обозначим

$$\frac{x-2}{x+1} = t; \qquad (1)$$

тогда

$$x = \frac{t+2}{1-t}, \qquad (2)$$

и, подставляя (1) и (2) в исходное равенство, получим:

$$2f(t) + f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{t+2}{1-t}. \qquad (3)$$

Заменяя в (3) t на $\frac{1}{t}$, получим:

$$2f\left(\frac{1}{t}\right) + f(t) = \frac{1+2t}{t-1}. \qquad (4)$$

Решая совместно (3) и (4), получим:

$$f(t) = \frac{4t+5}{3(1-t)},$$

или

$$f(x) = \frac{4x+5}{3(1-x)}.$$

257. 1. Умножая обе части равенства на $(x-1)$, получим:

$$\frac{1}{x+1} = A + \frac{B(x-1)}{x+1}.$$

Последнее равенство, будучи тождеством, справедливо при любых значениях x, в том числе и при $x = 1$.

Подставляя это значение x в полученное равенство, будем иметь:

$$A = \frac{1}{2}.$$

Аналогично, умножая обе части исходного равенства на $(x+1)$ и подставляя $x = -1$, получим:

$$B = -\frac{1}{2}.$$

2. Выполним те же действия, что и в предыдущем примере.

а) Умножая обе части равенства на x^2, получим:

$$\frac{1}{x-1} = A + Bx + \frac{Cx^2}{x-1}.$$

Полагая $x=0$, будем иметь:

$$A=-1.$$

б) Умножая обе части равенства на $(x-1)$, получим:

$$\frac{1}{x^2}=\frac{A(x-1)}{x^2}+\frac{B(x-1)}{x}+C.$$

Полагая $x=1$, найдем:

$$C=1.$$

в) С учетом найденных значений A и B будем иметь:

$$\frac{1}{x^2(x-1)}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x-1}=\frac{B}{x}$$

или

$$-\frac{1}{x}=\frac{B}{x};\ B=-1.$$

3. а) Умножая обе части равенства на $(x+1)$, получим:

$$\frac{1}{x^2-x+1}=A+\frac{(Bx+C)\ (x+1)}{x^2-x+1}.$$

Полагая $x=-1$, найдем:

$$A=\frac{1}{3}.$$

б) Подставляя найденное значение A, преобразуем левую часть исходного равенства:

$$\frac{1}{x^3+1}-\frac{1}{3(x+1)}=\frac{3-x^2+x-1}{3(x+1)\ (x^2-x+1)}=\frac{2-x^2+x}{3(x+1)\ (x^2-x+1)}=$$

$$=-\frac{(x-2)\ (x+1)}{3(x+1)\ (x^2-x+1)}=\frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}.$$

Итак,

$$\frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}=\frac{Bx+C}{x^2-x+1};$$

т. е.

$$B=-\frac{1}{3};\quad C=\frac{2}{3};$$

259. Ответ: $(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2=a_1^2=a_2^2+\ldots+a_n^2+$

$$+2\sum_{i=2}^{n}a_1a_i+2\sum_{i=3}^{n}a_2a_i+\ldots+2a_{n-1}a_n.$$

РАЗДЕЛ II

ТРИГОНОМЕТРИЯ

§ 2. Тригонометрические уравнения

276. Указание. Уравнение сводится к квадратному относительно функции $\sin x$.

Ответ: $x_k^{(1)} = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$; $x_k^{(2)} = \frac{\pi}{6}(-1)^k + k\pi$*.

277. Указание. Уравнение сводится к квадратному относительно функции $\sin 2x$, один из корней > 1.

Ответ: $x_k = \frac{(-1)^k}{2} \arcsin(2 - \sqrt{2}) + \frac{k\pi}{2}$.

278. $\sin x \cdot \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x) = \frac{1}{16}$,

$$\sin 2x \cdot \cos 2x = -\frac{1}{8},$$

$$\sin 4x = -\frac{1}{4}.$$

Ответ: $x_k = \frac{1}{4}\left[(-1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{4} + k\pi\right]$.

279. Преобразуем данное уравнение:

$$6\cos^2 x \cdot \sin^2 x - (\sin^4 x + \cos^4 x) = \cos x$$

или

$$8\cos^2 x \cdot \sin^2 x - 1 = \cos x,$$

$$2\sin^2 2x - 1 = \cos x, \quad -\cos 4x = \cos x,$$

$$-2\cos\frac{5x}{2} \cdot \cos\frac{3x}{2} = 0.$$

Ответ: $x_k^{(1)} = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}$, $\quad x_k^{(2)} = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$.

---

* Здесь и в дальнейшем k — любое целое число, если нет специальных оговорок.

280. Указание. Уравнение сводится к квадратному относительно функции $\cos 6x$, один из корней > 1.

Ответ: $x_k = \frac{k\pi}{3}$.

281. Имеем: $\frac{1}{\cos^4 x} - \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} = 7$

или

$$1 - \sin^4 x = 7 \cos^4 x, \quad \cos x \neq 0.$$

Далее: $\cos^2 x (2 - \cos^2 x) = 7 \cos^4 x$,

$$\cos^2 x (2 - 8 \cos^2 x) = 0, \quad 2 - 8 \cos^2 x = 0.$$

Ответ: $x_k = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$.

282. Указание. Необходимо перейти в уравнении к аргументу x, используя известные соотношения:

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x,$$
$$\sin 3x = 3 \cos^2 x \cdot \sin x - \sin^3 x.$$

Получим:

$$(\cos^2 x - \sin^2 x)^3 = \cos^3 2x = 0.$$

Ответ: $x_k = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$.

283. Разлагая по разности квадратов, получим:

$$\cos x (5 \sin x - \cos x)\ (6 + 5\ \sin x \cos x - \cos^2 x) = 0.$$

а) $\cos x = 0$, $x_k^{(1)} = k\pi + \frac{\pi}{2}$.

б) $5\ \sin x - \cos x = 0$.

$5\ \operatorname{tg} x - 1 = 0$,

$x_k^{(2)} = k\pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{5}$.

в) $6 + 5\ \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 0$ — уравнение сводится к однородному уравнению вида:

$$6 \operatorname{tg}^2 x + 5 \operatorname{tg} x + 5 = 0.$$

Здесь $D < 0$, следовательно, уравнение корней не имеет.

Ответ: $x_k^{(1)} = k\pi + \frac{\pi}{2}$,

$x_k^{(2)} = k\pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{5}$.

284. Имеем: $\sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 - 1$.
Обозначая $\sin x + \cos x = y$, получим:

$$5(y^2 - 1) + y = 1 \text{ или } 5y^2 + y - 6 = 0,$$
$$y_1 = 1, \ y_2 = -1,2.$$

а) $\sin x + \cos x = 1$, $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$x_k^{(1)} \frac{\pi}{4}[(-1)^k - 1] + k\pi.$$

При k четном $x_n^{(1)} = 2n\pi$.

При k нечетном $x_n^{(2)} = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, n — любое целое число.

б) $\sin x + \cos x = -1,2$, $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -0,6\sqrt{2}$,

$x_k^{(3)} = -\frac{\pi}{4} + (-1)^k \arcsin(-0,6\sqrt{2}) + k\pi$.

Ответ: $x_k^{(1)} = 2k\pi$,

$x_k^{(2)} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$,

$x_k^{(3)} = -\frac{\pi}{4} + (-1)^k \arcsin(-0,6\sqrt{2}) + k\pi$.

285. Имеем: $\sin 2x = 1 - (\sin x - \cos x)^2$.
Обозначая $\sin x - \cos x = y$, получим:

$$5(1 - 1 + y^2) - 16y + 3 = 0 \text{ или } 5y^2 - 16y + 3 = 0,$$
$$y_1 = 3, \ y_2 = \frac{1}{5}.$$

а) $\sin x - \cos x = 3$.
Уравнение решений не имеет, так как необходимо:

$$|\sin x - \cos x| \leqslant \sqrt{2}.$$

б) $\sin x - \cos x = \frac{1}{5}$, $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{10}$,

$$x_k = \frac{\pi}{4} + (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{2}}{10} + k\pi.$$

286. Имеем:

(1) $(1 + \sqrt{3})\sin 2x + (1 - \sqrt{3})\cos 2x = 1 + \frac{\sin 2x - \cos 2x \cdot \sqrt{3}}{\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x}$

или

(2) $[(1 + \sqrt{3}) \sin 2x + (1 - \sqrt{3}) \cos 2x]\ [\cos 2x +$
$+ \sqrt{3} \sin 2x - 1] = 0.$

Уравнения (1) и (2) равносильны, так как корни уравнения $\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x=0$ не являются корнями уравнения (2).

а) $(1+\sqrt{3})\sin 2x+(1-\sqrt{3})\cos 2x=0$,

$\operatorname{tg} 2x=2-\sqrt{3}$,

$$x_k^{(1)}=\frac{k\pi}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2-\sqrt{3})=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{24}.$$

б) $\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x-1=0$,

$1-2\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-1=0$,

$2\sin x(\sqrt{3}\cos x-\sin x)=0$,

$\sin x=0$, $x_k^{(2)}=k\pi$.

$\sqrt{3}\cos x-\sin x=0$, $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$,

$$x_k^{(3)}=k\pi+\frac{\pi}{3}.$$

287. Имеем: $\sin 2x=(\sin x+\cos x)^2-1$.

Обозначая $\sin x+\cos x=y$, получим:

$$\sqrt{2}(y^2-1)+3y=4\sqrt{2} \text{ или } y^2+\frac{3\sqrt{2}}{2}y-5=0,$$

$$y_1=-\frac{5\sqrt{2}}{2},\ y_2=\sqrt{2}.$$

а) $\sin x+\cos x=-\frac{5\sqrt{2}}{2}<-\sqrt{2}$, что невозможно,

б) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$, $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$,

$$x_k=\frac{\pi}{4}+2k\pi.$$

288. $3\sin x(1+\cos x)-\cos x-1=0$,

$(1+\cos x)(3\sin x-1)=0$.

Ответ: $x_k^{(1)}=(2k+1)\pi$,

$$x_k^{(2)}=k\pi+(-1)^k\arcsin\frac{1}{3}.$$

289. Указание. Так как $\sin^4 x+\cos^4 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$, то уравнение приводится к квадратному относительно функции $\sin 2x$.

Ответ: $x_k^{(1)}=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x_k^{(2)}=\frac{\pi k}{2}+(-1)^k\frac{\pi}{12}$.

290. $\sin x\sin 2x\sin 3x=\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x$,

$$\sin 2x(2\sin x\sin 3x-\cos 2x)=0,$$

$$\sin 2x(\cos 2x-\cos 4x-\cos 2x)=0,$$
$$\sin 2x\cos 4x=0.$$

Ответ: $x_k^{(1)}=\frac{k\pi}{2}$, $\quad x_k^{(2)}=\frac{(2k+1)\pi}{8}$.

291. $\frac{1}{2}\left[\sin\left(4x-\frac{\pi}{18}\right)+\sin\frac{\pi}{6}\right]=-\frac{1}{4}$,

$$\sin\left(4x-\frac{\pi}{18}\right)=-1.$$

Ответ: $x_k=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{9}$.

292. Преобразуя произведение в сумму, получим:

$$\frac{1}{2}(\cos x+\cos 5x)=\frac{1}{2}(\cos x+\cos 11x),$$
$$\cos 5x=\cos 11x.$$

Ответ: $x_k^{(1)}=\frac{k\pi}{8}$, $x_k^{(2)}=\frac{k\pi}{3}$.

293. Преобразуем левую часть:

$$1+\frac{2\sin x(\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x)}{\sin x}=$$
$$=1+\frac{\sin 3x-\sin x+\sin 5x-\sin 3x+\sin 7x-\sin 5x}{\sin x}=$$
$$=1+\frac{\sin 7x-\sin x}{\sin x}=\frac{\sin 7x}{\sin x}.$$

Ответ: $x_k=\frac{k\pi}{7}$ ($k\neq 7n$, n — любое целое).

294. Преобразуем уравнение:

$$\frac{1}{2}(1+\cos 2x+1+\cos 4x+1+\cos 6x+1+\cos 8x)=2,$$
$$\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x+\cos 8x=0,$$
$$2\cos 5x\cos x+2\cos 5x\cos 3x=0,$$
$$\cos 5x(\cos 3x+\cos x)=0,$$
$$\cos 5x\cos 2x\cos x=0.$$

Ответ: $x_k^{(1)}=\frac{\pi}{10}(2k+1)$,

$x_k^{(2)}=\frac{\pi}{4}(2k+1)$,

$x_k^{(3)}=\frac{\pi}{2}(2k+1)$.

295. $2\sin 2x\cos x+\sin 2x=2\cos^2 x+\cos x,$

$\sin 2x(2\cos x+1)=\cos x(2\cos x+1),$

$(2\cos x+1)\ (2\sin x-1)\cos x=0.$

Ответ: $x_k^{(1)}=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3},$

$x_k^{(2)}=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{6},$

$x_k^{(3)}=k\pi+\frac{\pi}{2}.$

296. Преобразуем левую часть:

$$\cos^4 x+\cos^4\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2+$$

$$+\left(\frac{1+\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)^2=\frac{3+2\cos 2x+2\sin 2x}{2}.$$

Уравнение принимает вид:

$$\cos 2x+\sin 2x+1=0$$

или

$2\cos x\sin x+2\cos^2 x=0,$

$\cos x(\sin x+\cos x)=0.$

Ответ: $x_k^{(1)}=\frac{\pi}{2}(2k+1),$

$x_k^{(2)}=k\pi-\frac{\pi}{4}.$

297. $\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^5+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^5=\frac{29}{16}\cos^4 2x,$

$$\frac{2+20\cos^2 2x+10\cos^4 2x}{32}=\frac{29}{16}\cos^4 2x,$$

$$24\cos^4 2x-10\cos^2 2x-1=0,\ \cos^2 2x=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4x=\frac{1}{2},\ \cos 4x=0.$$

Ответ: $x_k=\frac{2k+1}{8}\pi.$

298. Имеем:

$$\left|\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right|=\frac{4}{\sqrt{3}},$$

т. е.

$$\left|\frac{2}{\sin 2x}\right|=\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

а) Если $\sin 2x > 0$,

то $\frac{2}{\sin 2x} = \frac{4}{\sqrt{3}}$, $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_k^{(1)} = \frac{k\pi}{2} + (-1)^k \frac{\pi}{6}$.

б) Если $\sin 2x < 0$,

то $-\frac{2}{\sin 2x} = \frac{4}{\sqrt{3}}$, $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_k^{(2)} = \frac{k\pi}{2} - (-1)^k \frac{\pi}{6}$.

Ответ: $x_k = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6}$.

299. Указание. Воспользоваться соотношением

$$a \sin x + b \cos x = A \sin (x + \varphi).$$

Ответ: $x_k^{(1)} = \frac{k\pi}{2} - \frac{\varphi}{4}$,

$$x_k^{(2)} = k\pi + \frac{\pi + \varphi}{2},$$

где угол φ определяется из условий:

$$\sin \varphi = \frac{5}{13}, \quad \cos \varphi = -\frac{12}{13}.$$

300. О. Д. З.

$$\pi \operatorname{ctg} x \neq \frac{\pi}{2}(2n + 1),$$

$$\operatorname{ctg} x \neq n + \frac{1}{2},$$

$$\pi \operatorname{tg} x \neq \pi m,$$

$$\operatorname{tg} x \neq m,$$

где n, m — целые числа.

$$\pi \operatorname{ctg} x = \frac{\pi}{2} - \pi \operatorname{tg} x + \pi k, \qquad (*)$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{2} - \operatorname{tg} x + k, \qquad (k \text{ — целое число})$$

$$\operatorname{tg}^2 x - \left(k + \frac{1}{2}\right) \operatorname{tg} x + 1 = 0$$

(здесь пользуемся тем, что $\operatorname{tg} x = 0$ и $\operatorname{ctg} x = 0$ не являются решениями (*)).

$$\operatorname{tg}_{1,2} x = \frac{(2k + 1) \pm \sqrt{4k^2 + 4k - 15}}{4},$$

$$4k^2 + 4k - 15 \geqslant 0; \quad k_{1,2} = \frac{-2 \pm 8}{4}.$$

Теперь необходимо исключить целые k, лежащие в корневом промежутке $\left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$$k \neq -2, \; -1, \; 0, \; 1.$$

Заметим далее, что если одна из частей исходного уравнения обращается в бесконечность, то и вторая должна быть бесконечностью, т. е. достаточно проверить, что $\operatorname{tg} x \neq m$, где m — целое.

Чтобы k было целым, необходимо, чтобы $m = \pm 2$.

При этом получаем: $k = 2$, $k = -3$.

При таких k имеем:

$$k = 2 \qquad (\operatorname{tg} x)_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4}; \; (\operatorname{tg} x)_1 = 2 \text{ (не подходит)};$$

$$(\operatorname{tg} x)_2 = \frac{1}{2};$$

$$k = -3 \qquad (\operatorname{tg} x)_{1,2} = \frac{-5 \pm 3}{4}; \quad (\operatorname{tg} x)_1 = -2 \quad \text{(не подходит)};$$

$$(\operatorname{tg} x)_2 = -\frac{1}{2}.$$

Ответ:

$$x_{k,n} = \pi n + \operatorname{arctg} \frac{(2k+1) \pm \sqrt{4k^2 + 4k - 15}}{4},$$

где n — целое, k — целое, не равное $0, \pm 1, \pm 2, -3$,

$$x_n = \pi n \pm \operatorname{arctg} \frac{1}{2}, \text{ где } n \text{ — целое.}$$

301. Указание. Главное в этом примере исследование, которое проводится аналогично предыдущей задаче.

Ответ: $x_{k,n} = n\pi + \operatorname{arctg} \dfrac{1 + 2k \pm \sqrt{(1+2k)^2 - 64}}{4}$,

$$x_n = \pi n \pm \operatorname{arctg} 8,$$

где n — любое целое число, k — все целые числа, кроме 0, ± 1, ± 2, ± 3, -4 и $+8$.

302. Имеем:

$$2 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x - 3 \sin^2 x = a$$

или

$$2 \operatorname{tg} x + 3 - 3 \operatorname{tg}^2 x = a (1 + \operatorname{tg}^2 x),$$

$$\operatorname{tg}^2 x (a + 3) - 2 \operatorname{tg} x + (a - 3) = 0,$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1 \pm \sqrt{10 - a^2}}{a + 3}.$$

Решение возможно, если $|a| \leqslant \sqrt{10}$.

$$x_k^{(1)} = k\pi + \operatorname{arctg} \frac{1 \pm \sqrt{10 - a^2}}{a + 3}.$$

Особый случай: $a = -3$.
Исходное уравнение принимает вид:

$$\sin 2x + 3 \cos 2x = -3.$$

Переходя к аргументу x, получим:

$$\cos x (\sin x + 3 \cos x) = 0.$$

$$x_k^{(2)} = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad x_k^{(3)} = k\pi + \operatorname{arctg}(-3).$$

Ответ: При $|a| \leqslant \sqrt{10}$ $(a \neq -3)$

$$x_k^{(1)} = k\pi + \operatorname{arctg} \frac{1 \pm \sqrt{10 - a^2}}{a + 3}.$$

При $a = -3$ $x_k^{(2)} = k\pi + \frac{\pi}{2}$;

$$x_k^{(3)} = k\pi + \operatorname{arctg}(-3).$$

При $|a| > \sqrt{10}$ решений нет.

303. Перейдем к аргументу $2x$ с помощью соотношения:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = \\ = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x.$$

Получим после равносильных преобразований:

$$\sin^2 2x - 2 \sin 2x - 2(a + 1) = 0,$$

$$(\sin 2x)_1 = 1 + \sqrt{3 + 2a},$$

$$(\sin 2x)_2 = 1 - \sqrt{3 + 2a}.$$

а) $\sin 2x = 1 + \sqrt{3 + 2a} \leqslant 1$.

Это возможно лишь при $3 + 2a = 0$, $a = -\frac{3}{2}$.

Тогда

$$x_k^{(1)} = k\pi + \frac{\pi}{4}.$$

б) $\sin 2x = 1 - \sqrt{3 + 2a}$.

Должны одновременно выполняться неравенства:

$$3 + 2a \geqslant 0, \quad |1 - \sqrt{3 + 2a}| \leqslant 1.$$

Отсюда

$$-\frac{3}{2} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}.$$

Ответ: При $-\frac{3}{2} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$

$$x_k = \frac{1}{2}\left[k\pi + (-1)^k \arcsin\left(1 - \sqrt{3+2a}\right)\right].$$

При $a < -\frac{3}{2}$ и $a > \frac{1}{2}$ решений нет.

304. Указание. Уравнение сводится к квадратному относительно функции $\cos 2x$. Исследование решения производится, как в предыдущих примерах.

Ответ: $x_k = k\pi \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{-\cos 2a \pm \sqrt{\cos^2 2a + 4\cos 2a}}{2}$

при условии $k\pi + \frac{\pi}{6} \leqslant a \leqslant k\pi + \frac{11\pi}{2}$.

305. О. Д. З.: $\cos(x-\alpha) \neq 0$; $x \neq \alpha + \frac{\pi}{2}(2m+1)$.

Запишем уравнение в виде:
$(1+k)\cos x \cos(2x-\alpha) = \cos(x-\alpha) + k\cos 2x \cos(x-\alpha)$.

Преобразуя произведение в сумму, получим:

$$k\,|\cos(x-\alpha) - \cos(x+\alpha)| = \cos(x-\alpha) - \cos(3x-\alpha)$$

или

$$k \sin x \sin\alpha = \sin(2x-\alpha)\sin x,$$
$$\sin x\,|\sin(2x-\alpha) - k\sin\alpha| = 0.$$

а) $\sin x = 0$, $x_n^{(1)} = n\pi$, при $\alpha \neq n\pi - \frac{\pi}{2}(2m+1)$,

б) $\sin(2x-\alpha) = k\sin\alpha$.

тогда

$$x_n^{(2)} = \frac{\alpha}{2} + (-1)^r \cdot \frac{1}{2} \arcsin(k \sin\alpha) + \frac{\pi n}{2},$$

что возможно при $|k\sin\alpha| \leqslant 1$, с учетом О. Д. З.

306. Уравнение сводится к квадратному относительно функции $\cos 2x$:

$$2a\cos^2 2x + \cos 2x - 2a = 0.$$

Отсюда:

$$(\cos 2x)_1 = \frac{-1 + \sqrt{1+16a^2}}{4a},$$

$$(\cos 2x)_2 = \frac{-1 - \sqrt{1+16a^2}}{4a}.$$

а) $\cos 2x = \dfrac{-1+\sqrt{1+16a^2}}{4a}$.

$1+16a^2 > 0$ всегда, кроме того должно быть:

$$\left|\frac{-1+\sqrt{1+16a^2}}{4a}\right| \leqslant 1.$$

Решая неравенство обычным образом, получим:

a — любое число, не равное нулю.

б) $\cos 2x = \dfrac{-1-\sqrt{1+16a^2}}{4a}$.

Неравенство $\left|\dfrac{-1-\sqrt{1+16a^2}}{4a}\right| \leqslant 1$ не выполняется ни при каких a.

Особый случай: $a=0$.

Исходное уравнение принимает вид:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2},$$

$$x_k^{(2)} = k\pi \pm \frac{\pi}{4}.$$

Ответ: При a любом, но не равном нулю,

$$x_k^{(1)} = k\pi \pm \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{\sqrt{1+16a^2}-1}{4a}\right).$$

При $a=0$ $\quad x_k^{(2)} = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$.

307. Имеем:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \\ = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x,$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) = \\ = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x.$$

Таким образом, уравнение можно переписать в виде:

$$1 - 3\sin^2 x \cos^2 x = a(1 - 2\sin^2 x \cos^2 x),$$

т. е.

$$\sin^2 x \cos^2 x = \frac{a-1}{2a-3},$$

$$\sin^2 2x = 4\frac{a-1}{2a-3},$$

что имеет смысл при

$$0 \leqslant 4\frac{a-1}{2a-3} \leqslant 1.$$

Решение этого неравенства дает

$$\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 1.$$

Особый случай: $a = \frac{3}{2}$.

Уравнение приводится к виду:

$$1 - 3\sin^2 x \cos^2 x = \frac{3}{2} - 3 \sin^2 x \cos^2 x,$$

т. е.

$$1 = \frac{3}{2},$$

что невозможно.

Ответ: При $\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 1$ $\quad x_k = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{1}{2} \arcsin\left(2\sqrt{\frac{a-1}{2a-3}}\right)$.

При $a < \frac{1}{2}$ и $a > 1$ решений нет.

308. Имеем:

$$\sin x \cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\cos x + \sin x - m\sin\frac{x}{2} = 0,$$

$$\sin x\left(1 + \cos\frac{x}{2}\right) + \sin\frac{x}{2}(\cos x - m) + 0,$$

$$\sin\frac{x}{2}\left[2\cos\frac{x}{2} + 4\cos^2\frac{x}{2} - 1 - m\right] - 0.$$

1) $\sin\frac{x}{2} = 0, \quad x_k^{(1)} = 2k\pi.$

2) $4\cos^2\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2} - (1 + m) = 0,$

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5+4m}}{4}.$$

а) $\cos\frac{x}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5+4m}}{4}$.

Должны одновременно выполняться неравенства:

$$\begin{cases} 5 + 4m \geqslant 0, \\ \left|\frac{-1+\sqrt{5+4m}}{4}\right| \leqslant 1. \end{cases}$$

Решая эту систему неравенств обычным образом, получим:

$$-\frac{5}{4} \leqslant m \leqslant 5.$$

При этом условии $x_k^{(2)} = 4k\pi \pm 2 \arccos \frac{-1 + \sqrt{5 + 4m}}{4}$.

б) $\cos \frac{x}{2} = \frac{-1 - \sqrt{5 + 4m}}{4}$.

Должны одновременно выполняться неравенства:

$$\begin{cases} 5 + 4m \geqslant 0, \\ \left| \frac{-1 - \sqrt{5 + 4m}}{4} \right| \leqslant 1. \end{cases}$$

Отсюда

$$-\frac{5}{4} \leqslant m \leqslant 1.$$

При этом условии $x_k^{(3)} = 4k\pi \pm 2 \arccos \frac{-1 - \sqrt{5 + 4m}}{4}$.

Ответ: При $-\frac{5}{4} \leqslant m \leqslant 1$ $\quad x_k^{(1)} = 2k\pi$,

$x_k^{(2,3)} = 4k\pi \pm 2 \arccos \frac{-1 \pm \sqrt{5 + 4m}}{4}$.

При $1 < m \leqslant 5$ $x_1 = 2k\pi$,

$x_k^{(2)} = 4k\pi \pm 2 \arccos \frac{-1 + \sqrt{5 + 4m}}{4}$.

При $m > 5$, $m < -\frac{5}{4}$ $x = 2k\pi$.

309. Имеем:

$$a \sin 2x - b \cos 2x + \sqrt{a^2 + b^2} \sin 6x = 0.$$

Используя известное соотношение:

$$a \sin x + b \cos x = A \sin (x + \varphi),$$

где

$$A = \sqrt{a^2 + b^2},$$

а угол φ определяется из условий:

$$\sin \varphi = \frac{b}{A}, \ \cos \varphi = \frac{a}{A}, \text{ т. е. } \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a},$$

получим:

$$\sin (2x - \varphi) - \sin 6x = 0,$$

$$\sin \frac{4x + \varphi}{2} \cos \frac{8x - \varphi}{2} = 0.$$

$$x_k^{(1)} = \frac{\pi k}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{b}{a}, \quad x_k^{(2)} = \frac{2k + 1}{8} \pi + \frac{1}{8} \operatorname{arctg} \frac{b}{a}.$$

310. Имеем:

$$\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin x \cos x} = a. \qquad (1)$$

Отсюда

$$\sin x + \cos x + 1 = a \sin x \cos x. \qquad (2)$$

В уравнении (2) могут появиться посторонние корни вида $x_k = k\pi$ и $x_k = k\pi + \frac{\pi}{2}$, их мы потом исключим. Преобразуем уравнение (2):

$$\sin x + \cos x + 1 = \frac{a}{2}[(\sin x + \cos x)^2 - 1].$$

Обозначая $\sin x + \cos x = y$, получим:

$$\frac{a}{2} y^2 - y - \left(\frac{a}{2} + 1\right) = 0,$$

$$y_1 = -1, \ y_2 = \frac{a+2}{a}.$$

а) $\sin x + \cos x = -1,$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \ x_k = k\pi - [(-1)^k + 1]\frac{\pi}{4}.$$

При k четном $x = k\pi - \frac{\pi}{2}$. Это решение подлежит исключению.

При k нечетном $x = k\pi$, что также исключается.

$$\text{б) } \sin x + \cos x = \frac{a+2}{a}.$$

Установим, при каких a это уравнение имеет в качестве решения $\sin x = 0$ или $\cos x = 0$.

Если $\sin x = 0$, то $\cos x = \pm 1$, если $\cos x = 0$, то $\sin x = \pm 1$ и, следовательно, надо исключить те a, для которых $\frac{a+2}{a} = \pm 1$. Легко видеть, что это $a = -1$.

При $a = -1$ уравнение не имеет решений.

При $a \neq -1$ имеем:

$$\sin x + \cos x = \frac{a+2}{a},$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a+2}{a\sqrt{2}}.$$

$x_k = -\frac{\pi}{4} + (-1)^k \arcsin\frac{a+2}{a\sqrt{2}} + k\pi$, что возможно лишь при $\left|\frac{a+2}{a\sqrt{2}}\right| \leqslant 1$, т. е. $a \leqslant -2(\sqrt{2} - 1)$ и $a \geqslant 2(\sqrt{2} + 1)$.

311. Из второго уравнения, используя первое, находим:

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{4}.$$

Исходная система привелась к равносильной:

$$\left.\begin{aligned} \cos x \cdot \cos y &= \frac{1}{4}, \\ \sin x \cdot \sin y &= \frac{3}{4}. \end{aligned}\right\}$$

Складывая почленно уравнения этой системы, а затем вычитая их, получим новую систему, равносильную данной:

$$\left.\begin{aligned} \cos(x-y) &= 1, \\ \cos(x+y) &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда:

$$\left.\begin{aligned} x-y &= 2k\pi, \\ x+y &= 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}\right\}$$

$$x_{k,\,n} = (k+n)\,\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad y_{k,\,n} = (k-n)\,\pi \pm \frac{\pi}{3},$$

k, n — любые целые числа.

312. Преобразуем первое уравнение системы:

$$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 2y}{2} = \frac{3}{4},$$

$$\cos 2x + \cos 2y = \frac{1}{2}, \quad \cos(x+y)\cdot\cos(x-y) = \frac{1}{4},$$

$\cos 75^\circ \cdot \cos(x-y) = \frac{1}{4}$ (использовали второе уравнение),

$$\cos(x-y) = \frac{1}{4\cos 75^\circ} = \frac{1}{4\sin 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ}{4\sin 15^\circ \cos 15^\circ} =$$

$$= \frac{\cos 15^\circ}{2\sin 30^\circ} = \cos 15^\circ.$$

Итак, $\cos(x-y) = \cos 15^\circ$. Исходная система имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} x-y &= 360^\circ \cdot k \pm 15^\circ, \\ x+y &= 75^\circ. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда:

$$\left.\begin{aligned} x_k^{(1)} &= \pi k + \frac{\pi}{4} = (4k+1)\frac{\pi}{4}, \\ y_k^{(1)} &= -\pi k + \frac{\pi}{6} = (1-6k)\frac{\pi}{6}; \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x_k^{(2)} &= \pi k + \frac{\pi}{6} = (6k+1)\frac{\pi}{6}, \\ y_k^{(2)} &= -\pi k + \frac{\pi}{4} = (1-4k)\frac{\pi}{4}. \end{aligned}\right\}$$

313. Разделим первое уравнение на второе:

$$\operatorname{tg} x = \frac{a}{b} \quad (\cos x \neq 0,\ \cos y \neq 0,\ \text{т. к. } a \neq 0,\ b \neq 0).$$

Тогда

$$x_k = \operatorname{arctg}\frac{a}{b} + k\pi =$$

$$= \arcsin\left(\frac{\frac{a}{b}}{\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}}\right) + k\pi = \arcsin\frac{a\,|b|}{b\sqrt{a^2+b^2}} + k\pi.$$

Из первого уравнения находим

$$\cos y = \begin{cases} (-1)^k\sqrt{a^2+b^2} & \text{при } b > 0, \\ (-1)^{k+1}\sqrt{a^2+b^2} & \text{при } b < 0. \end{cases}$$

Таким образом, если $\sqrt{a^2+b^2} \leqslant 1$, то

$$y_{k,n} = \pm\arccos\left[(-1)^k\sqrt{a^2+b^2}\right] + 2n\pi \text{ при } b > 0$$

или

$$y_{k,n} = \pm\arccos\left[(-1)^{k+1}\sqrt{a^2+b^2}\right] + 2n\pi \text{ при } b < 0.$$

Если $\sqrt{a^2+b^2} > 1$, то система не имеет решений.

Ответ: 1) если $a^2+b^2 \leqslant 1$, то $x_k = \operatorname{arctg}\frac{a}{b} + \pi k$,

$$y_{k,n} = \pm\arccos\left[(-1)^k\frac{|b|}{b}\sqrt{a^2+b^2}\right] + 2n\pi,$$

2) если $a^2+b^2 > 1$, то решений нет.

§ 3. Разные задачи

314. Ответ: $\pi(2k+1) < x \leqslant \frac{11}{6}\pi + 2\pi k$, $2\pi k < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi k$.

315. Имеем:

$$2k\pi + \frac{\pi}{3} \leqslant \frac{4\pi}{3}\cos\pi x \leqslant \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$\frac{3k}{2} + \frac{1}{4} \leqslant \cos\pi x \leqslant \frac{1}{2} + \frac{3k}{2}.$$

Пределы изменения для k выбираются из условия $|\cos\pi x| \leqslant 1$.

Получаем $-1 \leqslant k \leqslant 0$, где k — целое число:

1) при $k=0\ \frac{1}{4} \leqslant \cos \pi x \leqslant \frac{1}{2}$,

отсюда

$$2\pi n+\frac{\pi}{3} \leqslant \pi x \leqslant 2\pi n+\arccos\frac{1}{4};$$

2) при $k=-1-\frac{5}{4} \leqslant \cos \pi x \leqslant -1$,

отсюда

$$\cos \pi x=-1,\ \pi x=\pi+2\pi n,\quad x_k^{(1)}=1+2n.$$

Ответ: $x_n^{(1)}=1+2n,\quad 2n+\frac{1}{3} \leqslant x_n^{(2)} \leqslant 2n+\frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{4}$,

где n — любое целое число.

316. Выразив $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, будем иметь:

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sqrt{7}}{2},$$

откуда

$$(\sqrt{7}+2)\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\sqrt{7}-2=0.$$

Решив это уравнение, найдем:

$$\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)_1=\frac{3}{\sqrt{7}+2}=\sqrt{7}-2,$$

$$\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)_2=\frac{1}{\sqrt{7}+2}=\frac{\sqrt{7}-2}{3}.$$

Так как $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}-1$, а по условию

$0<\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}<\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$, то решение $\sqrt{7}-2$ следует отбросить.

Ответ: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{7}-2}{3}$.

317. Имеем:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}<\frac{1}{\sqrt{2}},\\&-\frac{\pi}{3}<\alpha<-\frac{\pi}{4},\\&-\frac{5\pi}{3}<5\alpha<-\frac{5\pi}{4}\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Cos 5α равен вещественной части разложения

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^5 = \cos 5\alpha = i\sin 5\alpha.$$

Поэтому

$$\cos 5\alpha = \cos^5\alpha - 10\cos^3\alpha\sin^2\alpha + 5\cos\alpha\cdot\sin^4\alpha =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^5 - 10\,\frac{2}{3(\sqrt{3})^3} + \frac{5\cdot 4}{9\sqrt{3}} = \frac{1}{9\sqrt{3}}.$$

Так как $\cos 5\alpha > 0$, то ввиду (1) угол 5α расположен в 1 четверти. При этом

$$\operatorname{tg} 5\alpha = \sqrt{\sec^2 5s - 1} = 11\sqrt{2}.$$

318. Имеем:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cdot\cos^2 x =$$

$$= 1 - \frac{\sin^2 2x}{2},$$

$$\sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 - 1 = a^2 - 1.$$

Следовательно,

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{(a^2-1)^2}{2} = \frac{1 + 2a^2 - a^4}{2}.$$

319. Возведем оба равенства в квадрат и сложим их почленно:

$$\left.\begin{aligned} &\cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cdot\cos\beta + \cos^2\beta = a^2, \\ &\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\sin\beta + \sin^2\beta = b^2; \end{aligned}\right\}$$

$$2 + 2\cos(\alpha - \beta) = a^2 + b^2,$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{a^2 + b^2}{2} - 1.$$

Перемножим теперь оба равенства:

$$\cos\alpha\cdot\sin\alpha + \cos\alpha\cdot\sin\beta + \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\beta\cdot\sin\beta = ab;$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}{2} = ab,$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + \beta)\cdot\cos(\alpha - \beta) = ab,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{ab}{1 + \cos(\alpha - \beta)} = \frac{2ab}{a^2 + b^2}.$$

320. Имеем:

$$\operatorname{tg}^2\alpha - a\operatorname{tg}\alpha + 1 = 0, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

Это возможно при $|a| \geqslant 2$.

а) $0 < \alpha < 45°$.

Тогда $\operatorname{tg}\alpha < 1$ и, следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} \quad (\text{т. к. } |a| \geqslant 2),$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 a} = \frac{\sqrt{a^2-4}}{a}.$$

б) $45° < \alpha < 90°$.

Тогда $\operatorname{tg}\alpha > 1$ и, следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2} \text{ (т. к. } |a| \geqslant 2),$$

$$\cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{a^2-4}}{a}.$$

321. Данное равенство представим так:

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2} = 0.$$

Ответ: Равенство возможно, если

либо $\alpha = 2k\pi$,
либо $\beta = 2k\pi$,
либо $\alpha+\beta = 2k\pi$.

322. Если $0° < \alpha < 45°$, то $0 < \operatorname{tg}\alpha < 1$. Имеем:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Знаменатель изменяется в пределах от 0 до 1. Следовательно,

$$\operatorname{tg} 2\alpha > 2\operatorname{tg}\alpha.$$

323. Определим m.

$$\operatorname{ctg}\left[m\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right] = \sqrt{3},\quad \operatorname{ctg}\frac{m}{2} = \sqrt{3}.$$

Следовательно, $m = \frac{\pi}{3}$. Определим при найденном m все решения исходного уравнения:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}\cos 2\pi x\right) = \sqrt{3},$$

$$\frac{\pi}{3}\cos 2\pi x = k\pi + \frac{\pi}{6},$$

$$\cos 2\pi x = 3k + \frac{1}{2}.$$

Так как должно быть $|\cos 2\pi x| \leqslant 1$, то $k = 0$,

$$\cos 2\pi x = \frac{1}{2}.$$

Отсюда:

$$2\pi x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3},$$

$$x_n = n \pm \frac{1}{6}.$$

324. $\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ = (\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ) -$

$$-(\operatorname{tg} 27^\circ + \operatorname{tg} 63^\circ) = \frac{1}{\cos 9^\circ \cdot \cos 81^\circ} - \frac{1}{\cos 27^\circ \cdot \cos 63^\circ} =$$

$$= \frac{2}{\sin 18^\circ} - \frac{2}{\sin 54^\circ} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \sin 18^\circ \cdot \sin 54^\circ}{\sin 18^\circ \cdot \sin 54^\circ} = 4.$$

325. $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma \cdot \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) =$

$$= \left(\text{т. к. } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta + \operatorname{ctg}(\alpha + \beta)\ (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) =$$

$$= \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta + \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) = 1.$$

326. Ответ: В правильном треугольнике.

327. Имеем:

$$\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c = \frac{1 - \cos 2a}{2} + \frac{1 - \cos 2b}{2} + 1 - \cos^2 c =$$

$$= 2 - \frac{\cos 2a + \cos 2b}{2} - \cos^2 c = 2 - \cos(a + b)\cos(a - b) -$$

$$- \cos^2[\pi - (a + b)] = 2 - \cos(a + b)\cos(a - b) - \cos^2(a + b) =$$

$$= 2 - \cos(a + b)[\cos(a - b) + \cos(a + b)] =$$

$$= 2 - \cos(\pi - c) \cdot 2\cos a \cdot \cos b = 2 + 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c.$$

Так как $2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c > 0$ (поскольку a, b и c острые углы), то

$$\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c > 2.$$

328. Имеем:

$$0 < A + B < \frac{\pi}{2} \text{ (т. к. угол } C \text{ — тупой)},$$

отсюда

$$0 < A < \frac{\pi}{2} - B = \frac{\pi}{2}.$$

Итак,

$$\operatorname{tg} A < \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B < 1 \quad (\operatorname{tg} B > 0).$$

329. Преобразуем выражение:
$\sin x - \cos^2 x - 1 = \sin^2 x + \sin x - 2 = \left(\sin x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}.$
Функция достигает минимума, когда

$$\sin x + \frac{1}{2} = 0,$$

т. е. при

$$x_k = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + k\pi.$$

330. Преобразуем выражение:

$$a\sin^2 x + b\sin x \cdot \cos x + c \cdot \cos^2 x =$$
$$= a \cdot \frac{1-\cos 2x}{2} + b \cdot \frac{\sin 2x}{2} + c\,\frac{1+\cos 2x}{2} =$$
$$= \frac{a+c}{2} + \frac{1}{2}[(c-a)\cos 2x + b\sin 2x] =$$
$$= \frac{a+c}{2} + \frac{c-a}{2}\left(\cos 2x + \frac{b}{c-a}\sin 2x\right) =$$
$$= \frac{a+c}{2} + \frac{c-a}{2}(\cos 2x + \operatorname{tg}\varphi \cdot \sin 2x) =$$
$$= \frac{c+a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + (c-a)^2}\cos(2x - \varphi).$$

Если $\cos(2x-\varphi) = 1$, то получим наибольшее значение, равное $\frac{c+a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{b^2+(c-a)^2}$, а при $\cos(2x-\varphi) = -1$ будем иметь наименьшее значение, равное

$$\frac{c+a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{b^2+(c-a)^2}.$$

331. Преобразуем выражение:
$y = 3\cos^2 x - 3\sqrt{3}\cos x + 4 = \left(\sqrt{3}\cos x - \frac{3}{2}\right)^2 + 4 - \frac{9}{4} =$

$$= \left(\sqrt{3}\cos x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}.$$

$$y_{\min} = \frac{7}{4},$$

когда

$$\sqrt{3}\cos x - \frac{3}{2} = 0,$$

т. е. при

$$x_k^{(1)} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

$$y_{\max} = \frac{7}{4} + \left(-\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right)^2 = 7 + 3\sqrt{3},$$

когда

$$\left|\sqrt{3}\cos x-\frac{3}{2}\right|$$

имеет наибольшее значение, т. е. при

$$x_k^2=2k\pi+\pi.$$

332. Возведем в куб обе части исходного уравнения:

$$2+3\sqrt[3]{1-\lg^2\operatorname{tg}x}\left(\sqrt[3]{1+\lg\operatorname{tg}x}+\sqrt[3]{1-\lg\operatorname{tg}x}\right)=8.$$

Выражение, стоящее в скобках, по условию, равно 2, откуда

$$\sqrt[3]{1-\lg^2\operatorname{tg}x}=1,$$

$$1-\lg^2\operatorname{tg}x=1,$$

т. е.

$$\lg\operatorname{tg}x=0;\ \operatorname{tg}x=1,$$

$$x_k=\frac{\pi}{4}+\pi k.$$

333. Преобразуем исходное уравнение к виду:

$$\sin^2 x+5\sin x\cdot\cos x+2=9^{\frac{1}{2}}.$$

Полученное уравнение разбивается на два:

1) $\sin^2 x+5\sin x\cdot\cos x+2=3.$

После преобразований получим:

$$\cos x(5\sin x-\cos x)=0.$$

а) $\cos x=0,$

$$x_k^{(1)}=\frac{\pi}{2}+\pi k;$$

б) $5\sin x-\cos x=0,$

$$\operatorname{tg}x=\frac{1}{5},$$

$$x_k^{(2)}=\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\pi k.$$

2) $\sin^2 x+5\sin x\cdot\cos x+2=-3.$

Здесь выражение, стоящее под знаком логарифма, оказывается отрицательным. Решать это уравнение не имеет смысла.

Ответ: $x_k^{(1)}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad x_k^{(2)}=\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\pi k.$

334. По свойствам логарифмов, имеем:

$$\operatorname{tg} x > 0; \ \sin x > 0;$$

$$\operatorname{tg} x \neq 1; \quad \sin x \neq 1,$$

откуда

$$2\pi k < x_k < \frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$

$$x_k \neq \frac{\pi}{4} = 2\pi k.$$

Переходя в правой части неравенства к основанию $\sin x$, получим:

$$\log_{\sin x} \operatorname{tg} x < \frac{2}{\log_{\sin x} \operatorname{tg} x} + 1.$$

Для упрощения дальнейших рассуждений используем подстановку:

$$\log_{\sin x} \operatorname{tg} x = y.$$

Тогда будем иметь:

$$y < \frac{2}{y} + 1; \ \frac{y^2 - y - 2}{y} < 0;$$

$$y(y+1)\ (y-2) < 0,$$

$$\text{т. е. } y < -1 \text{ и } 0 < y < 2.$$

Первый случай. $0 < \log_{\sin x} \operatorname{tg} x < 2.$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg} x < 1 \\ 1 > \sin x \cos x = \dfrac{\sin 2x}{2} \end{array}\right\} \operatorname{tg} x < 1; \quad 2\pi k < x_k^{(1)} < \frac{\pi}{4} + 2\pi k.$$

Второй случай.

$$\log_{\sin x} \operatorname{tg} x < -1; \ \operatorname{tg} x > \frac{1}{\sin x}.$$

$$\sin^2 x > \cos x;$$

$$\cos^2 x + \cos x - 1 < 0.$$

$$\frac{-\sqrt{5}-1}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad 0 < \cos x < \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

(т. к. $\cos x > 0$),

$$\arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi k < x_k^{(2)} < \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

Ответ:

$$2\pi k < x_k^{(1)} < \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$\arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi k < x_k^{(2)} < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

В силу того, что $\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2} > \frac{\pi}{4}$, эти решения существенно различны.

335. Для того, чтобы выражения, входящие в неравенство, имели смысл, необходимо выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} \frac{\cos 2x}{\sqrt{2}} > 0, \text{ т. е. } \cos 2x > 0, \\ \frac{\cos 2x}{\sqrt{2}} \neq 1, \\ \frac{\cos^2 2x - \sin^2 x}{2} > 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \cos 2x > 0, \\ \cos^2 2x - \sin^2 x > 0. \end{cases}$$

Потенцируя неравенство, получаем:

$$\cos^2 2x - \sin^2 x \geqslant \cos^2 2x \left(\text{т. к. } \frac{\cos 2x}{\sqrt{2}} < 1\right),$$

т. е. $\sin^2 x \leqslant 0$, что осуществляется в случае, если $\sin x = 0$. Тогда $\cos 2x = 1$. Подставляя в данное неравенство, имеем:

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{2} = 2,$$

т. е. неравенство удовлетворяется. Поэтому все значения x, при которых $\sin x = 0$, т. е. $x_k = \pi k$, являются решениями.

336. Обозначая

$$a^{\sin x} = y,$$

получим после преобразований:

$$\frac{2 - y(1+a)}{(1-y)(ay-1)} > 0; \quad \frac{(1+a)\left(\frac{2}{1+a} - y\right)}{a(1-y)\left(y - \frac{1}{a}\right)} > 0;$$

или

$$\left(y - \frac{2}{1+a}\right)(y-1)\left(y - \frac{1}{a}\right) > 0.$$

1. $a > 1$. Тогда вследствие того, что

$$\frac{1}{a} < \frac{2}{1+a} < 1,$$

имеем:

$$\frac{1}{a} < y < \frac{2}{1+a} \text{ и } y > 1;$$

т. е.

$$\frac{1}{a} < {}^{\sin x} < \frac{2}{1+a} \text{ и } a^{\sin x} > 1;$$

или

$$\log_a \frac{1}{a} < \sin x < \log_a \frac{2}{1+a} \text{ и } \sin x > 0;$$

$$2\pi k - \pi - \arcsin \log_a \frac{2}{1+a} < x_k^{(1)} < 2\pi k + \arcsin \log_a \frac{2}{1+a};$$

$$2\pi k < x_k^{(2)} < 2\pi k + \pi.$$

2. $a < 1$. Тогда

$$\frac{1}{a} > \frac{2}{1+a} > 1.$$

Имеем:

$$1 < y < \frac{2}{1+a} \text{ и } y > \frac{1}{a},$$

т. е.

$$1 < a^{\sin x} < \frac{2}{1+a} \text{ и } a^{\sin x} > \frac{1}{a}$$

или

$$0 > \sin x > \log_a \frac{2}{1+a} \quad \text{и} \quad \sin x < -1 \text{ (невозможно!)}$$

Итак, имеем:

$$2\pi k + \arcsin \log_a \frac{2}{1+a} < x_k^{(3)} < 2\pi k;$$

$$2\pi k + \pi < x_k^{(4)} < 2\pi k + \pi - \arcsin \log_a \frac{2}{1+a}.$$

337. Из второго неравенства после преобразований получим:

$$\sin^2 y\,(\pi - \operatorname{arctg} x) \leqslant 0.$$

Так как $\pi > \operatorname{arctg} x$ при любых x, то решением второго неравенства будет $\sin y = 0$.

Из первого неравенства видно, $x > 0$;

$$(\sin x)^{\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x}} \geqslant (\sin x)^{-2\cos y}$$

и, т. к. $\sin x < 1$, то

$$\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} \leqslant -2 \cos y$$

или

$$\frac{\log_2^2 x + 2\cos y \log_2 x + 1}{\log_2 x} \leqslant 0.$$

Заметим, что числитель последней дроби положителен всегда, кроме $\log_2 x = -\cos y$, т. е. $x = 2^{-\cos y}$. Тогда знаменатель $\log_2 x < 0$, т. е. $0 < x < 1$.

Ответ: $y_k^{(1)} = \pi k$ при $0 < x < 1$;

$y_k^{(2)} = (2k+1)\pi$ при $x = 2$.

338. Из первого уравнения системы имеем:

$$\log_{\sin 2x} x < 0, \quad 0 < \sin 2x < 1, \quad x > 1.$$

Из второго уравнения системы имеем:

$$x \leqslant 5;\ \log_2 \cos 2\pi x \geqslant 0,\ \cos 2\pi x \geqslant 1,\ 2\pi x = 2\pi k,\ x = k.$$

Таким образом, x — целое число из промежутка $(1,5)$ и, кроме того, $\sin 2x > 0$. Этому условию удовлетворяет только $x = 4$.

При этом x имеем

$$y^2 + y - 2 = 0,$$

откуда

$$y_1 = -2,\ y_2 = 1.$$

Ответ: $x = 4$; $y_1 = -2$; $y_2 = 1$.

339. Воспользуемся неравенством:

$$\sin x + \operatorname{tg} x > 2x \ \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

Применительно к задаче имеем:

$$\begin{cases} \sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha > 2\alpha, \\ \sin\beta + \operatorname{tg}\beta > 2\beta, \\ \sin\gamma + \operatorname{tg}\gamma > 2\gamma, \end{cases}$$

или

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma > 2(\alpha + \beta + \gamma) = 2\pi.$$

РАЗДЕЛ III

ГЕОМЕТРИЯ

§ 1. Задачи по планиметрии

345. Определим S_1 (рис. 34).

$$S_1 = \frac{1}{2} AM, AK \sin 60° = \frac{1}{2} AM \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

По теореме синусов

$$\frac{AM}{\sin\alpha} = \frac{AK}{\sin(120° - \alpha)}; \ AM = \frac{a \sin\alpha}{2\sin(120° - \alpha)};$$

$$S_1 = \frac{a^2\sqrt{3}\sin\alpha}{16\sin(120° - \alpha)}$$

Очевидно:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{S - S_1}{S_1} = \frac{1 - \dfrac{\sin\alpha}{4\sin(120° - \alpha)}}{4\sin(120° - \alpha)} = 2\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha + 1.$$

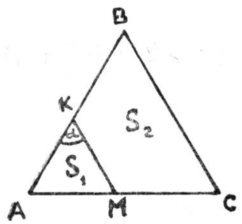


Рис. 34.

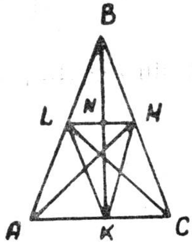


Рис. 35.

346. Пусть (рис. 35) $AC : AB = a : b$, тогда т. к. AM — биссектриса, то

$$\frac{BM}{CM} = \frac{b}{a} \text{ и } \frac{BC}{CM} = \frac{a+b}{a}; \ \frac{BC}{BM} = \frac{a+b}{b}.$$

Из подобия треугольников ABC и BLM имеем:

$$\frac{LM}{AC} = \frac{BM}{BC} = \frac{b}{a+b}.$$

Аналогично,

$$\frac{KN}{KB} = \frac{CM}{CB} = \frac{a}{a+b}.$$

Таким образом,

$$\frac{S_{ABC}}{S_{KLM}} = \frac{AC \cdot BK}{LM \cdot NK} = \frac{(a+b)^2}{ab}.$$

347. Имеем (рис. 36): $r\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2}{3} r\,\mathrm{tg}\,\beta$ или $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2}{3}\,\mathrm{tg}\,\beta$.

Из треугольника BCD

$$BC = 2r\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)},$$

$$AC = \frac{r}{\cos\beta},$$

$$\frac{BC}{AC} = 2\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = 2\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta} = \frac{4}{5}.$$

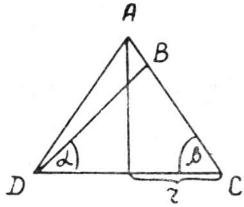


Рис. 36.

348. Из отношения площадей подобных треугольников BKL и ABC (рис. 37) имеем:

$$\frac{KL^2}{AC^2} = \frac{1}{2},$$

т. е.

$$KL = \frac{1}{\sqrt{2}} AC,$$

$$\frac{AK}{KB} = \frac{AC - KL}{KL} = \sqrt{2} - 1.$$

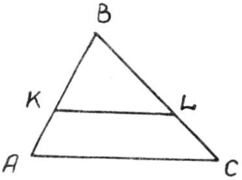


Рис. 37.

349. По условию (рис. 38),

$$2b = a + c. \qquad (1)$$

По теореме косинусов

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 120° = a^2 + ab + b^2. \quad (2)$$

Решая (1) и (2) совместно, находим:

$$b = \frac{5}{3}a, \quad c = \frac{7}{3}a,$$

откуда

$$a : b : c = 3 : 5 : 7.$$

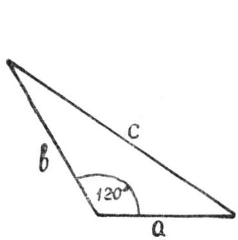


Рис. 38.

350. Соединим точки A и R, P и B, R и L. Обозначим

$$S_{MRC} = S_1, \quad S_{APR} = S_2, \quad S_{PQR} = S'.$$

В силу симметрии построения,

$$S_{MRC} = S_{QBL} = S_{APK} = S_1,$$
$$S_{APR} = S_{QRC} = S_{PQB} = S_2.$$

Так как $AM = 2MC$ по условию, а треугольники ARM и MRC имеют одинаковую высоту, то

$$S_{ARM} = 2S_1,$$
$$S_{KPB} = S_{QCL} = S_{ARM} = 2S_1,$$
$$S_{ABC} = 3S_{MBC} = 3(4S_1 + S_2) = S.$$

Будем теперь иметь:

$$S_{AQM} = 2S_{MQC};\ S' + S_2 + 2S_1 = 2(S_2 + S_1);$$
$$S' = S_2.$$
$$S_{ABM} = 2S_{MBC};\ S' + 5S_1 + 2S_2 = 2(4S_1 + S_2);$$
$$S_1 = \frac{S'}{3}.$$
$$S = 3\left(4\frac{S'}{3} + S'\right) = 7S';\ S = 7S'.$$

351. Пусть $\angle CBA = \alpha$ (рис. 39). По теореме синусов,

$$\frac{l}{\sin\angle BAC} = \frac{c}{\sin\angle BDC}.$$

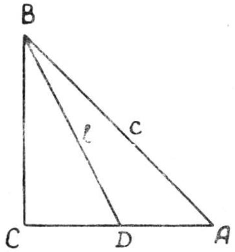


Рис. 39.

Далее имеем:

$$\frac{l}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{c}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)};\quad \frac{l}{\cos\alpha} = \frac{c}{\cos\frac{\alpha}{2}},$$

откуда

$$\cos\alpha = \frac{l^2 + l\sqrt{l^2 + 8c^2}}{4c^2}.$$

Проверим, что $\cos\alpha < 1$.

$$l^2(l^2 + 8c^2) < (4c^2 - l^2)^2 = 16c^4 - 8l^2c^2 + l^4,$$
$$16l^2 < 16c^2,\ l < c.$$

Будем иметь:

$$BC = c\cdot\cos\alpha = \frac{l^2 + l\sqrt{l^2 + 8c^2}}{4c};$$
$$AC = c\cdot\sin\alpha = \frac{1}{4c}\sqrt{16c^4 - 2l^4 - 8l^2c^2 - 2l^3\sqrt{l^2 + 8c^2}}.$$

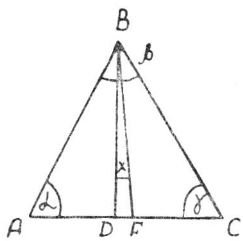


Рис. 40.

352. Пусть (рис. 40) углы треугольника α, β, γ.

$$\operatorname{tg} x = \frac{FD}{BD},$$
$$S_{ABC} = \frac{BD\cdot AC}{2} = \frac{BD^2\sin\beta}{2\sin\alpha\sin\gamma};$$

$$AC = \frac{BD \sin\beta}{\sin\alpha \sin\gamma} = AF + FC = 2(DC - FD);$$

$$DC - FD = \frac{BD \sin\beta}{2 \sin\alpha \sin\gamma}.$$

Определим DC из треугольника $BCD: DC = BD \operatorname{ctg}\gamma$,

$$FD = DC - \frac{BD \sin\beta}{2 \sin\alpha \sin\gamma} = \frac{BD \sin(\alpha - \gamma)}{2 \sin\alpha \cdot \sin\gamma},$$

$$\sin\beta = \sin(\alpha + \gamma).$$

Ответ:

$$x = \operatorname{arctg}\left[\frac{\sin(\alpha - \gamma)}{2 \sin\gamma \sin\alpha}\right].$$

353. Введем обозначения (рис. 41):

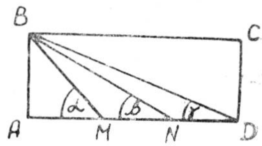


Рис. 41.

$$\angle AMB = \alpha,$$
$$\angle MNB = \beta,$$
$$\angle NDB = \gamma.$$

Из треугольника ABM:

$$\alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Из треугольников ABN и ADB:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{3}.$$

Далее

$$\operatorname{tg}(\beta + \gamma) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = 1.$$

Следовательно,

$$\beta + \gamma = \frac{\pi}{4}.$$

Ответ:

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}.$$

354. Пусть (рис. 42) $DM = 2m$. Тогда

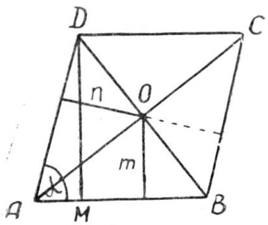


Рис. 42.

$$AD = \frac{2m}{\sin\alpha}, \quad AB = \frac{2n}{\sin\alpha}, \quad S = \frac{4mn}{\sin\alpha}.$$

По теореме косинусов, получим:

$$AC = \frac{2\sqrt{m^2 + n^2 + 2mn\cos\alpha}}{\sin\alpha},$$

$$BD = \frac{2\sqrt{m^2 + n^2 - 2mn\cos\alpha}}{\sin\alpha}.$$

355. Очевидно (рис. 43),

$$MS = \frac{n}{\sin x} = \frac{m}{\sin(60^\circ x)}; \quad \frac{n}{\sin x} = \frac{2m}{\sqrt{3}\cos x - \sin x},$$

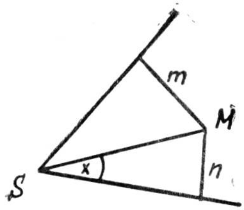


Рис. 43.

откуда

$$\operatorname{tg} x = \frac{n\sqrt{3}}{2m+n}, \quad \sin x = \frac{n}{2}\sqrt{\frac{3}{m^2+mn+n^2}};$$

$$MS = \frac{n}{\sin x} = 2\sqrt{\frac{m^2+mn+n^2}{3}}.$$

356. Ответ: $\frac{2}{3}S$.

357. Ответ: $\frac{|a-b|}{2}$.

358. Пусть (рис. 44) $OE = x$, $OF = y$, тогда

$\frac{x}{a-x} = \frac{BE}{EA}$ из треугольника ABD,

$\frac{x}{b-x} = \frac{EA}{BE}$ из треугольника ABC,

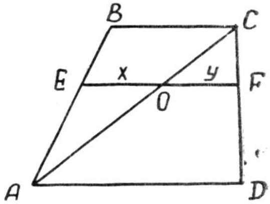


Рис. 44.

т. е.

$$\frac{x}{a-x} = \frac{b-x}{x}.$$

Следовательно, $x = \frac{ab}{a+b}$.

Аналогично, $y = \frac{ab}{a+b}$. Итак,

$$EF = x + y = \frac{2ab}{a+b}.$$

359. По условию задачи $\frac{S_1}{S_2} = \frac{m}{n}$ (рис. 45). Тогда

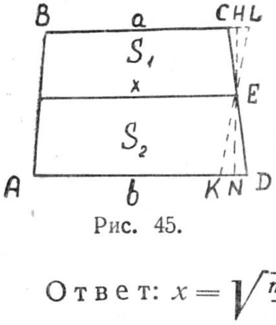


Рис. 45.

$$\frac{\frac{a+x}{2}\cdot HE}{\frac{b+x}{2}\cdot NE} = \frac{m}{n}.$$

Из подобия треугольников KED и CEL получим:

$$\frac{HE}{NE} = \frac{CF}{KD} = \frac{x-a}{b-x}; \quad \frac{(a+x)(x-a)}{(b+x)(b-x)} = \frac{m}{n}.$$

Ответ: $x = \sqrt{\frac{mb^2+na^2}{m+n}}$.

360. Ответ: $\sqrt{a^2+ab}$; $\sqrt{b^2+ab}$.

361. Обозначая (рис. 46) $AA' = a$, $OM = m$, $OA = x$, из подобия треугольников OAM и OAN получим:

$$AO^2 = ON \cdot OM, \text{ т. е. } x^2 = m\sqrt{x^2 - \frac{a^2}{4}},$$

$$x^4 - m^2x^2 + \frac{m^2a^2}{4} = 0,$$

$$x^2 = \frac{m^2 \pm \sqrt{m^4 - m^2a^2}}{2}$$

(оба значения подходят).

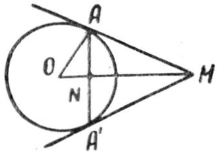


Рис. 46.

Ответ: $x_{1,2} = \sqrt{\frac{m^2 \pm \sqrt{m^4 - m^2a^2}}{2}}$.

362. Из треугольников $O_1O_2O_3$ и O_2OO_3 (рис. 47) находим, по теореме косинусов:

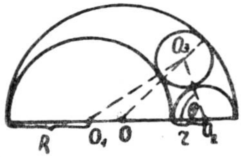


Рис. 47.

$$\cos\varphi \frac{(R+r)^2 + (r+x)^2 - (R+x)^2}{2(R+r)(r+x)},$$

$$\cos\varphi = \frac{R^2 + (r+x)^2 - (R+r-x)^2}{2R(r+x)}.$$

Приравнивая правые части приведенных равенств, находим:

$$x = \frac{Rr(R+r)}{r^2 + Rr + R^2}.$$

363. Пусть r — радиусы трех равных окружностей,
x — радиус малой окружности,
X — радиус большой окружности.

Так как (рис. 48) треугольник $A_1A_2A_3$ — равносторонний, а центр малой окружности O удален на одинаковое расстояние от A_1, A_2, A_3, то $x + r$ — есть радиус описанной около A_1, A_2, A_3 окружности, т. е.

$$x + r = \frac{2}{3}\frac{2r\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3}r\sqrt{3},$$

так что

$$x = r\,\frac{2\sqrt{3} - 3}{3}.$$

Аналогично

$$X = x + 2r = r\,\frac{2\sqrt{3} + 3}{3}.$$

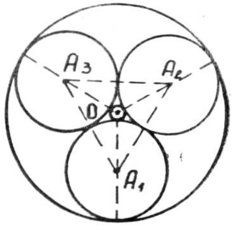


Рис. 48.

Ответ: $X : r : x = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} : 1 : \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

364. Ответ:

$$\sqrt{(a^2+b^2)\left(1 + 2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\right) + 2ab} - (a+b)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

365. По условию (рис. 49), $AB = a$. Пусть $OA = r$, $O_1B = R$. Из треугольника OO_1C:

$$OO_1 = R + r = \frac{a}{\cos\frac{\varphi}{2}},$$

$$OO_1^2 = OC^2 + O_1C^2, \text{ т. е. } (R + r)^2 = a^2 + (R - r)^2,$$

откуда

$$rR = \frac{a^2}{4}.$$

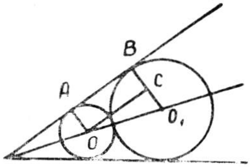


Рис. 49.

Решая систему

$$\begin{cases} R + r = \dfrac{a}{\cos\varphi}, \\ Rr = \dfrac{a^2}{4}, \end{cases}$$

получим:

$$r = \frac{a}{2}\left(\sec\frac{\varphi}{2} - \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right), \quad R = \frac{a}{2}\left(\sec\frac{\varphi}{2} + \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right).$$

366. Будем иметь (рис. 50)

$$LB = a - r; \ AM = AK = b - 3r;$$

$$BK = AB - AK = \sqrt{a^2 + b^2} + b - 3r;$$

$$O_1B^2 = LB^2 + LO_1^2 = O_1K^2 + BK^2,$$

или

$$(a - r)^2 + (3r)^2 = r^2 + (\sqrt{a^2 + b^2} - b + 3r)^2,$$

откуда

$$r = \frac{ab}{3a + b + \sqrt{a^2 + b^2}}.$$

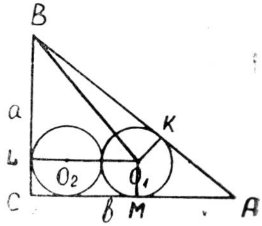


Рис. 50.

367. Из треугольника O_1O_2E (рис. 51):

$$O_2E = \sqrt{9r^2 - 4r^2} = r\sqrt{5}.$$

Из треугольника O_2O_1K: $O_2K = \sqrt{9r^2 - r^2} = r\sqrt{8}$. Очевидно,

$$O_2K = MF = r\sqrt{8}.$$

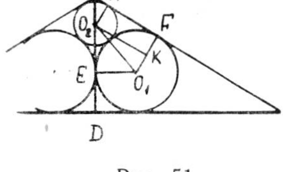


Рис. 51.

Из треугольника O_2CM: $O_2C^2 = CM^2 + r^2$ или

$$(CE - O_2E)^2 = (CF - MF)^2 + r^2.$$

Пусть $CE = CF = x$, тогда

$$(x - r\sqrt{5})^2 = (x - r\sqrt{8})^2 + r^2.$$

Решая последнее уравнение, получим:

$$x = \frac{2r}{2\sqrt{2} - \sqrt{5}}.$$

Итак,

$$CD = CE + ED = \frac{2r}{2\sqrt{2} - \sqrt{5}} + 2r =$$
$$= \frac{2r}{3}(3 + \sqrt{5} + 2\sqrt{2}).$$

368. $DO = a$: $AN = NC$; $BF = FE$ (рис. 52). Из треугольника $DNO : NO = a \sin \alpha$ ($\alpha = < ADO$), из треугольника ANO:

$$NA = \sqrt{OA^2 - NO^2} = \sqrt{R^2 - a^2 \sin^2 \alpha}.$$

Из треугольника $ODF : FO = a \cos \alpha$, из треугольника OEF:

$$FE = \sqrt{OE^2 - OF^2} = \sqrt{R^2 - a^2 \cos^2 \alpha},$$
$$S_{ABCE} = \frac{BE \cdot AC}{2} = \frac{4FE \cdot NA}{2} = \sqrt{4R^2(R^2 - a^2) + a^4 \sin^2 2\alpha}.$$

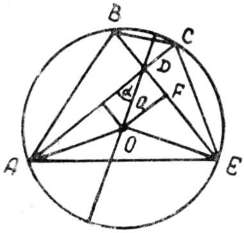


Рис. 52.

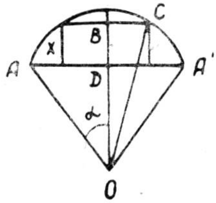


Рис. 53.

369. Пусть (рис. 53) x — высота прямоугольника; тогда $2x$ — его основание.

Из треугольника OBC:

$$x^2 + BO^2 = R^2,$$

но

$$BO = x + OD = x + R \cos \alpha.$$

Таким образом,

$$x^2 + (x + R \cos \alpha)^2 = R^2,$$

т. е.

$$2x^2 + 2Rx \cos \alpha - R^2 \sin^2 \alpha = 0$$

и

$$x = \frac{1}{2}\left(-R \cos \alpha \pm \sqrt{R^2 \cos^2 \alpha + 2R^2 \sin^2 \alpha}\right) =$$
$$= \frac{R}{2}(-\cos \alpha \pm \sqrt{1 + \sin^2 \alpha}).$$

Так как, $x > 0$, то знак „минус" должен быть отброшен, т. е.

$$x = \frac{R}{2}(\sqrt{1 + \sin^2 \alpha} - \cos \alpha).$$

Далее, площадь прямоугольника

$$2x^2 = R^2 (1 - \cos\alpha \sqrt{1 + \sin^2\alpha}),$$

площадь сектора αR^2, площадь сегмента $\alpha R^2 - \frac{R^2}{2}\sin 2\alpha$. Таким образом, искомое отношение площадей равно

$$\frac{\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha}{1 - \cos\alpha\sqrt{1 + \sin^2\alpha}}.$$

370. Заштрихованная площадь (рис. 54), по условию, равна S. Обозначим искомую сторону треугольника a. Тогда радиус окружности $\frac{a}{3}$. Высота треугольника равна $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, следовательно, $OD = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, откуда $\frac{OD}{OE} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Поэтому $\angle DEO = 60^\circ$. Аналогично получим $\angle KFO = 60^\circ$. Так как $\angle ECF = 60^\circ$, то $OF \parallel EC$ и $OE \parallel FC$. Таким образом, четырехугольник $OFCE$ — ромб со стороной $\frac{a}{3}$ и углом 60° при вершине.

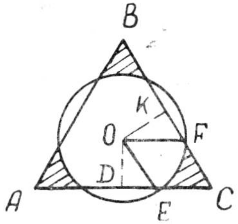


Рис. 54.

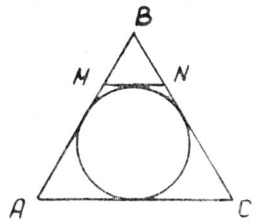


Рис. 55.

Вычитая площадь сектора, равную $\frac{1}{6}\pi\left(\frac{a}{3}\right)^2$, из площади ромба $\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{a}{3}\right)^2$, получаем площадь, равную по условию задачи $\frac{S}{3}$, т. е.

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{a}{3}\right)^2 - \frac{1}{6}\pi\left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{S}{3},$$

откуда

$$a = 3\sqrt{\frac{2S}{3\sqrt{3} - \pi}}.$$

371. Как известно, $r = \frac{S}{p}$. По условию задачи, $S = ah$. Далее имеем (рис. 55):

$$p + a = \sqrt{h^2 + a^2}, \quad r = \frac{a}{h}(\sqrt{h^2 + a^2} - a).$$

Из подобия треугольников ABC и MBN получим:

$$\frac{h-2r}{h}=\frac{MN}{2a},$$

откуда

$$MN=2a\left(1-\frac{2r}{h}\right).$$

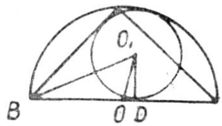


Рис. 56.

372. Введем обозначения (рис. 56):

$$O_1D=r,\ O_1B=x\ (O_1D\perp DB).$$

Из треугольника BO_1D получим:

$$x=\frac{r}{\sin 22°30'}. \qquad (1)$$

Из треугольника BO_1O следует:

$$(R-r)^2=R^2+x^2-2Rx\cos 22°30'. \qquad (2)$$

Подставляя (1) в (2), получим после упрощений:

$$r=2R(3\sqrt{2}-4).$$

373. Ответ: $\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{3\alpha}{2}}$.

374. Ответ: $\sqrt{R^2-2Rr}$.

375. В описанном четырехугольнике (рис. 57) суммы противолежащих сторон равны между собой, поэтому сумма оснований трапеции равна $2l$.

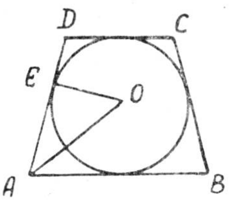


Рис. 57.

Рассмотрим треугольник AOD. Так как центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис, то

$$\angle DAO+\angle AOD=\frac{\angle DAB}{2}+\frac{\angle ADC}{2}=\frac{\pi}{2},$$

следовательно, этот треугольник прямоугольный. Отрезок OE, равный радиусу вписанной окружности, есть высота, опущенная из вершины прямого угла, и значит

$$OE^2=AE\cdot DE=\frac{a}{2}\cdot\frac{2l-a}{2}.$$

Высота трапеции равна диаметру вписанной окружности

$$2OE=\sqrt{a(2l-a)}.$$

Искомая площадь равна:

$$l\sqrt{a(2l-a)}.$$

376. Ответ: $\frac{\pi}{6}$.

377. Ответ: $\frac{a}{2}$.

378. Воспользуемся теоремой косинусов (рис. 58):

$$a^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \cdot \cos 36°.$$

. . . .

. . . .

$$a^2 = x_1^2 + x_5^2 - 2x_1x_5 \cos(180° - 36°) =$$
$$= x_1^2 + x_5^2 - 2x_1x_5 \cos\ 36°.$$

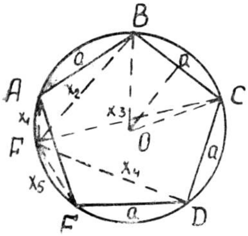


Рис. 58.

Из треугольника OBC

$$\frac{a}{2} = R \sin 36°;\ R = 1;\ a = 2 \sin 36°,$$

$$2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2) = 5a^2 + 2\cos 36°(x_1x_2 + x_2x_3 +$$
$$+ x_3x_4 + x_4x_5 - x_5x_1).$$

Обозначим

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = z,$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 - x_5x_1 = y.$$

Учитывая, что

$$2\ \cos 36° \cdot y = 2 \operatorname{ctg} 36° \sin 36°\, y,$$

получим:

$$2 \operatorname{ctg} 36° (x_1x_2 \sin 36° + \dots - x_5x_1 \sin 36°)\ 2 \operatorname{ctg} 36° \cdot 2S.$$

Подставляя в (*), получим:

$$2z = 5a^2 + 4 \operatorname{ctg} 36° \cdot S,$$
$$a^2 = 4 \sin^2 36°,$$

$$S = 5\frac{R^2 \sin 72°}{2} = 5 \sin 36° \cos 36°,$$

$$2z = 5 \cdot 4 \sin^2 36° + 4 \operatorname{ctg} 36° \cdot 5 \cdot \sin 36° \cos 36° = 20,$$
$$z = 10.$$

379. Из треугольников (рис. 59) ABM и AMC:

$$CM = 2R \sin\alpha\ (\alpha = \angle MAC),$$

$$BM = 2R \sin(60° - \alpha),$$
$$AM = 2R \sin(60° + \alpha).$$

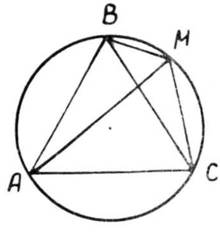


Рис. 59.

Далее имеем:

$$BM + CM = 2R \sin(60° - \alpha) + 2R \sin\alpha =$$
$$= 2R[\sin(60° - \alpha) + \sin\alpha] = 4R \sin 30° \cdot \cos(30° - \alpha) =$$
$$= 2R \sin(60° + \alpha) = AM.$$

380. Обозначим (рис. 60)

$$CB=\bar{a};\ CA=\bar{b};\ AB=\bar{c}.$$

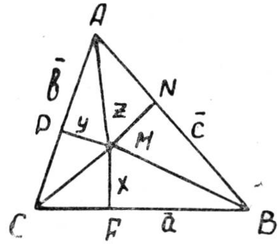


Рис. 60.

Тогда

$$x\bar{a}+y\bar{b}+z\bar{c}=2S$$

и далее

$$x\cdot\frac{2S}{a}+y\,\frac{2S}{b}+z\,\frac{2S}{c}=2S$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

381. Требуется доказать: $x^2=ac-a'c'$ (рис. 61). По свойству биссектрисы $\frac{a^1}{c'}=\frac{a}{c}$.

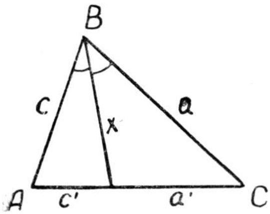


Рис. 61.

По теореме косинусов

$$a'^2=a^2+x^2-2ax\cos\frac{B}{2},$$

$$c'^2=c^2+x^2-2cx\cos\frac{B}{2}.$$

Получим:

$$\frac{a}{c}=\frac{a^2+x^2-a'^2}{c^2+x^2-c'^2},$$

$$x^2=\frac{a^2c-a'^2c-ac^2+ac'^2}{a-c}=ac-a'c'.$$

383. Пусть ABC—вписанный в окружность треугольник (рис. 62), N — точка окружности, K, L и M — основания перпендикуляров. Соединим точку K с точкой L и точку M с точкой L. Все три точки окажутся лежащими на одной прямой, если будет $\angle ALK=\angle CLM$.

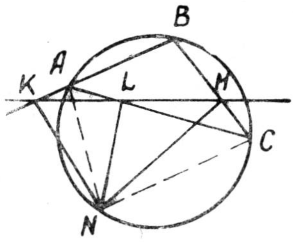


Рис. 62.

Равенство этих углов мы установим, доказав сперва, что,

$$\angle ALK=\angle CLM, \qquad (1)$$
$$\angle CLM=\angle CNM, \qquad (2)$$

и затем, что

$$\angle ANK=\angle CNM. \qquad (3)$$

Равенство (1) следует из того, что точки A, K, N и L лежат на окружности, построенной на отрезке AN как на диаметре. Таким образом обосновывается и равенство (2). Равенство же (3) вытекает из равенства углов KNM и ANC. Последние углы равны между собой, так как и один и другой в сумме с углом B дают 180°.

385. Пусть в треугольнике ABC (рис. 63) угол ACB прямой, CD — биссектриса этого угла, CE — высота, CF — медиана.

Так как $BF = CF$, то $\angle FBC = \angle FCB$. Угол CAB составляет $\frac{\pi}{2}$ в сумме как с углом ACE, так и с углом FBC; поэтому

$$\angle ACE = \angle FCB$$

и

$$\angle ECD = \angle ACD - \angle ACE = \angle BCD - \angle FCB = \angle FCD,$$

что и требовалось доказать.

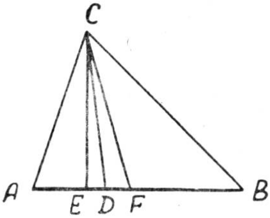


Рис. 63.

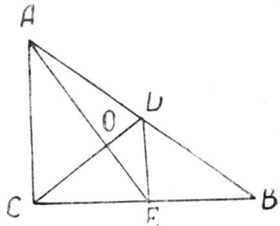


Рис. 64.

386. По условию задачи (рис. 64), имеем:

$$BD = AD;\ BE = EC;\ DC \perp AE.$$

Обозначим:

$$OD = x,\ OC = 2x,$$
$$OE = y,\ AO = 2y.$$

Тогда из треугольника $ODE: DE^2 = x^2 + y^2$,
из треугольника $OEC: EC^2 = 4x^2 + y^2$,
из треугольника $OAD: AD^2 = x^2 + 4y^2$,
из треугольника $BDE: DE^2 = BD^2 + BE^2 - 2BD \cdot BE \cdot \cos B$.
Далее имеем:

$$x^2 + y^2 = x^2 + 4y^2 + 4x^2 + y^2 - 2\sqrt{x^2 + 4y^2}\sqrt{4x^2 + y^2}\cos B,$$

$$\cos B = \frac{2(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + 4y^2}\sqrt{4x^2 + y^2}},$$

но

$$\sqrt{x^2 + 4y^2}\sqrt{4x^2 + y^2} \leqslant \frac{x^2 + 4y^2 + 4x^2 + y^2}{2} = \frac{5(x^2 + y^2)}{2}.$$

Поэтому

$$\cos B \geqslant \frac{2 \cdot 2(x^2 + y^2)}{5(x^2 + y^2)} = \frac{4}{5},$$

откуда

$$B \leqslant \arccos\frac{4}{5}.$$

387. Докажем (рис. 65), что $AM = AN$. Пусть $AM \neq AN$. Отложим $AK = AN$ и проведем $BK \parallel OC$. Тогда $\Delta ABK = \Delta ANC$ и, следовательно,

$$S_{OBC} = S_{OBAN} + S_{ANC} < S_{OMN} = S_{OBAN} + S_{ABK} + S_{BMK},$$

что невозможно!

Замечание: Возможны и другие способы доказательства.

388. Сторона a связывается (рис. 66) с b', c' и φ теоремой косинусов:

$$a^2 = b'^2 + c'^2 - 2b'c' \cos \varphi.$$

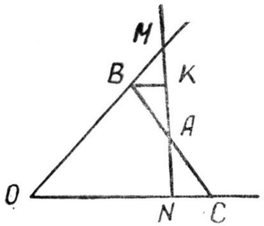


Рис. 65.

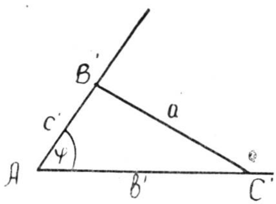


Рис. 66.

Учтем, что $b' + c' = S$. Тогда $c' = s - b'$ и, следовательно, $a^2 = b'^2 + (s - b')^2 - 2b'(s - b') \cos \varphi =$

$$= 2b'^2 (1 + \cos \varphi) - 2b's(1 + \cos \varphi) + s^2 =$$

$$= 2(1 + \cos \varphi) \left(b' - \frac{s}{2}\right)^2 + s^2 \frac{1 - \cos \varphi}{2}.$$

Следовательно, a^2 наименьшее, если $b = \frac{s}{2} = c$.

Ответ: Основание a наименьшее, если треугольник равнобедренный.

Замечание: Возможен вариант решения, использующий соотношение:

$$\frac{a + b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

389. Пусть d — расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей. Тогда

$$d^2 = R^2 + r^2 - r\sqrt{4R^2 + r^2} \geqslant 0.$$

Следовательно,

$$R^2 + r^2 \geqslant r\sqrt{4R^2 + r^2}; \; R^4 \geqslant 2R^2r^2; \; R \geqslant r\sqrt{2}.$$

§ 2. Задачи по стереометрии

390. Из треугольника BDS (рис. 67) имеем:

$$BC = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

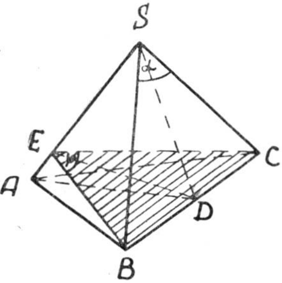


Рис. 67.

Из треугольника BES

$$BE = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\ \sin\alpha.$$

Далее находим:

$$DE = \sqrt{BE^2 - BD^2} = \sqrt{\frac{a^2\sin^2\alpha}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{a^2}{4}} = a\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}};$$

$$S_{BEC} = \frac{a}{2}\,DE = \frac{a^2}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{a^2}{2}\sqrt{\sin\left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)};$$

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{BD}{BE} = \frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}},$$

откуда

$$\varphi = 2\arcsin\frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

391. Ответ:

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1 + \sqrt{\frac{3(2m+n)}{n}}\right).$$

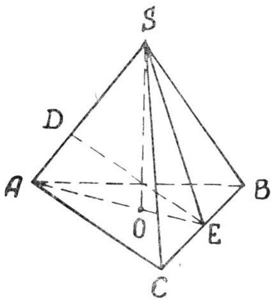


Рис. 68.

392. Если сторона основания пирамиды (рис. 68) $AB = a$, а высота $OS = H$, то объем пирамиды

$$V = \frac{a^2H}{4\sqrt{3}}.$$

Из прямоугольного треугольника AOS, в котором катет $AO = \frac{a}{\sqrt{3}}$, найдем длину ребра пирамиды:

$$AS = \sqrt{H^2 + \frac{a^2}{3}}.$$

В плоскости грани BSC из вершины S опустим высоту SE на сторону основания BC. Из прямоугольного треугольника BES найдем:

$$\frac{BE}{BS} = \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{H^2 + \frac{a^2}{3}}} = \sin\frac{\alpha}{2},$$

откуда

$$a^2 = \frac{12H^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

и, следовательно,

$$V = H^3 \frac{\sqrt{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Перпендикуляр ED, опущенный из точки E на ребро AS, по условию задачи, равен d. Из подобия прямоугольных треугольников ADE и AOS будем иметь:

$$\frac{ED}{AE} = \frac{OS}{AS} \text{ или } \frac{d}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{H}{\sqrt{H^2 + \frac{a^2}{3}}},$$

откуда

$$\frac{d}{H\sqrt{3}} = \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{H^2 + \frac{a^2}{3}}} = \sin\frac{\alpha}{2} \text{ и } H = \frac{d}{\sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Подставив это значение H в выражение для объема пирамиды, получим:

$$V = \frac{d}{3\sin\frac{\alpha}{2}\left(3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Преобразуем выражение, стоящее в знаменателе:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\left(3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = \sin\frac{\alpha}{2}\left(3\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\alpha + 2\cos^2\frac{\alpha}{2}\right) = \sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha + \cos\frac{\alpha}{2}\sin\alpha = \sin\frac{3\alpha}{2}.$$

Итак, объем пирамиды равен

$$\frac{d}{3\sin\frac{3\alpha}{2}}.$$

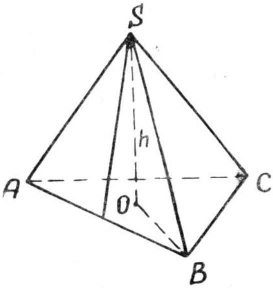


Рис. 69.

393. Сторона основания пирамиды равна $a = 2r\sin\alpha$ (рис. 69), боковое ребро $l = \frac{a}{2}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} = 2r\cos\frac{\alpha}{2}$. Далее имеем:

$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 2r\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin^2\alpha}{3}},$$

$$S_{\text{осн}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

$$V=\frac{1}{3}h\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{2}{3}r^2\sin^2\alpha\sqrt{3\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\alpha}.$$

394. Ответ: 656,25 *дм*.

395. Ответ: $S=a^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$; $V=\frac{a^3}{6}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1}$.

396. Пусть (рис. 70) $AB=BC=CD=AD=FE=a$.

$$\angle F_1FE=\angle SEF=\alpha,$$

$$\angle F_1EF=\angle SEF_1=\frac{\alpha}{2}.$$

Из треугольника FF_1E: $\angle FF_1E=\pi-\frac{3\alpha}{2}$. По теореме синусов,

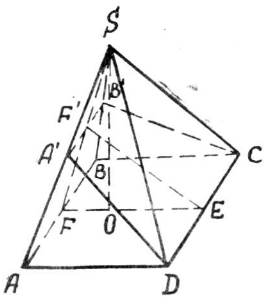


Рис. 70.

$$\frac{FE}{\sin\left(\pi-\frac{3}{2}\alpha\right)}=\frac{F_1F}{\sin\alpha}=\frac{FF_1}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

откуда

$$F_1E=\frac{a\sin\alpha}{\sin\frac{3}{2}\alpha},\quad FF_1=\frac{a\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{3\alpha}{2}}.$$

Из треугольника OSE: $SE=\frac{a}{2\cos\alpha}$,

из треугольника SDE: $\operatorname{tg}\angle SDE=\frac{SE}{DE}=\frac{1}{\cos\alpha}$,

$$\angle SDE=\angle A_1AF.$$

Рассматривая трапецию AA_1B_1B, найдем верхнее основание A_1B_1, равное $\frac{a\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{3\alpha}{2}}$.

Тогда искомая площадь равна:

$$S=\frac{A_1B_1+CD}{2}\cdot F_1E=\frac{a^2\sin^2\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{3}{2}\alpha}.$$

397. Ответ: $H=\frac{1}{2}\sqrt{S\sqrt{2}\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}}$.

398. Ответ: $S=\frac{|a^2-b^2|}{\cos\beta}$, $V=\frac{|a^3-b^3|}{b}\operatorname{tg}\beta$.

399. Так как сумма внутренних углов многоугольника равна $\pi(n-2)$, где n — число сторон, то в нашей задаче число сторон равно $n+2$.

Очевидно,

$$S_{бок} = (n+2)\, S_{грани} = (n+2)\, \frac{1}{2}\, a \sqrt{h^2 + b^2},$$

где a — сторона основания, а b — апофема основания (рис. 71). Далее имеем:

$$S_{оси} = (n+2)\, \frac{1}{2}\, ab;$$

$$\frac{S_{бок}}{S_{оси}} = \frac{\sqrt{h^2 + b^2}}{b} = k; \quad h^2 + b^2 = k^2 b^2;$$

$$b = \frac{h}{\sqrt{k^2 - 1}};$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2(n+2)}; \quad \frac{a}{2} = b \operatorname{ctg} \frac{\pi n}{2(n+2)};$$

$$a = \frac{2h}{\sqrt{k^2 - 1}} \operatorname{ctg} \frac{\pi n}{2(n+2)}.$$

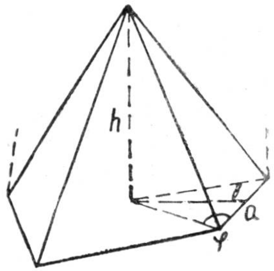


Рис. 71.

$$V_{пир} = \frac{1}{3}\, S_{оси} \cdot h = \frac{h^3 (n+2) \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{n+2}}{3(k^2 - 1)}.$$

400. По условию задачи, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} S_{оси} \cdot H\right) = \frac{1}{3} S_{сеч} \cdot h$, т. е.

$$\frac{S_{оси}}{S_{сеч}} = \frac{2h}{H} \cdot H_0 \; \frac{S_{оси}}{S_{сеч}} = \frac{H^2}{h^2} \text{ (рис. 72)},$$

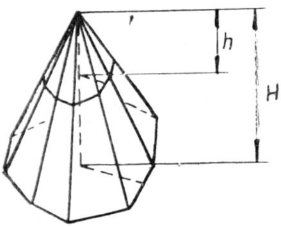


Рис. 72.

откуда $H^3 = 2h^3$, $H = h\sqrt[3]{2}$. Далее имеем:

$$\frac{S_{оси}}{S_{сеч}} = \sqrt[3]{4} \cdot S_{оси} = n \cdot S_{\Delta},$$

$$S_{\Delta} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} = \frac{a^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n},$$

$$S_{сеч} = \frac{S_{оси}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{na^2}{4\sqrt[3]{4}} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}.$$

401. По условию задачи,

$$V \text{ цилиндра} = \frac{3\pi}{n}\, V \text{ пирамиды}.$$

Подставляя значения объемов

$$V_{цил} = \pi R^2 H, \quad V_{пир} = \frac{1}{3} QH, \quad Q = n \cdot R^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$$

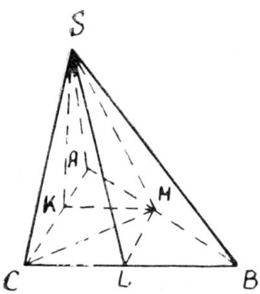


Рис. 73.

в первое равенство, после сокращения придем к соотношению

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}=1,$$

из которого $n=4$.

402. Ответ: $\dfrac{b^3\sin\alpha}{12\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}$.

403. Обозначим (рис. 73) $\angle BAC=\alpha$; $\angle ACB=90^\circ$, $AB=c$, тогда $AC=c\cdot\cos\alpha$, $BC=c\sin\alpha$. По условию задачи, $SM\perp_{\text{пл}}ABC$, $KM\perp AC$ и $LM\perp BC$; $\angle SLM=\angle SKM=\beta$, следовательно, $KM=LM$ и $KMLC$ — квадрат.

Чтобы найти высоту пирамиды, достаточно найти сторону квадрата, вписанного в основание.

Из треугольника AMC:

$$\frac{CM}{\sin\alpha}=\frac{AC}{\sin\left(\pi-\alpha-\frac{\pi}{4}\right)},\quad CM=\frac{c\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)},$$

следовательно,

$$KM=\frac{CM}{\sqrt{2}}=\frac{c\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)};\quad SM=KM\cdot\operatorname{tg}\beta.$$

Таким образом, объем пирамиды

$$V=\frac{1}{6}AC\cdot BC\cdot SM=\frac{c^3\sin^2 2\alpha}{24\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\operatorname{tg}\beta.$$

404. Обозначим (рис. 74) $AS=h$; $AS\perp_{\text{пл}}ABCD$.

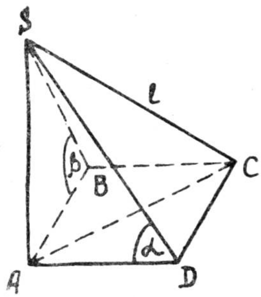


Рис. 74.

Из треугольника ASD:

$$AD=h\operatorname{ctg}\alpha;$$

из треугольника ASB:

$$AB=h\cdot\operatorname{ctg}\beta;$$

из треугольника ABC:

$$AC=\sqrt{AD^2+AB^2}=h\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta};$$

из треугольника ASC:

$$SC^2=AS^2+AC^2,\ \text{т. е. } l^2=h^2(1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta);$$

откуда

$$h=\frac{l}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta}}.$$

Искомый объем

$$V=\frac{1}{3}h\cdot AB\cdot AD=\frac{l^3\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}{3\left(1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

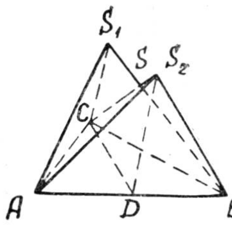


Рис. 75.

405. Ответ: $V=\frac{a^3}{6}\sin^2\beta\operatorname{tg}\alpha,$

$$S=a^2\sin\beta\,(1+\sec\alpha).$$

406. Пусть в треугольнике ABC угол ACB — прямой (рис. 75), $ABCS_1$ и $ABCS_2$ — пирамиды с высотами CS_1 и DS_2, равными высоте $CD=h$ треугольника основания. Общее значение объемов пирамид равно

$$\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot h=\frac{h^3}{3}.$$

Грань ABC_1 первой пирамиды отсекает от второй пирамиды их общую часть $ABCS$, являющуюся треугольной пирамидой с основанием ABC и высотой $\frac{h}{2}$. Объем общей части равен $\frac{h^3}{6}$. Искомые объемы равны между собой. Их величина:

$$\frac{h^3}{3}-\frac{h^3}{6}=\frac{h^3}{6}.$$

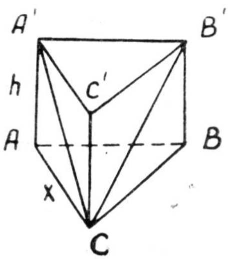


Рис. 76.

407. Используя обозначения, указанные на рисунке 76, получим:

$$V=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}\cdot h;\;\; A'C=B'C=\sqrt{h^2+x^2}.$$

Из треугольника $CA'B'$

$$x=\sqrt{h^2+x^2+h^2+x^2-2\left(h^2+x^2\right)\cos\alpha},$$

откуда

$$h=x\sqrt{\frac{2\cos\alpha-1}{2(1-\cos\alpha)}},\quad V=\frac{x\sqrt[3]{3}}{4}\sqrt{\frac{2\cos\alpha-1}{2(1-\cos\alpha)}},$$

$$x=\sqrt[3]{\frac{8\,V\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{8\,(2\cos\alpha-1)}}}.$$

Решение возможно при $\cos\alpha>\frac{1}{2}$, т. е. $\alpha<\frac{\pi}{3}$.

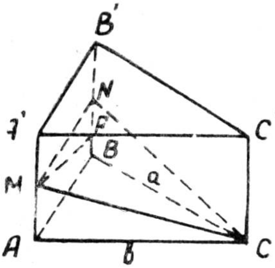


Рис. 77.

408. Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{\cos\alpha}\sqrt[3]{V^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}.$

409. Треугольник CMN — правильный (рис. 77).

$MF \perp BB'$; $MA = \sqrt{x^2 - b^2}$; $BN = \sqrt{x^2 - a^2}$;

$$NF = BN - MA = \sqrt{x^2 - a^2} - \sqrt{x^2 - b^2};$$

$MF = AB = \sqrt{a^2 + b^2}.$ Пусть $MN = x$.

Учитывая, что $MN^2 = MF^2 + NF^2$ и подставляя их выражения в предыдущее равенство, найдем x.

$$x = \sqrt{\frac{2}{3}\left(a^2 + b^2 + \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}\right)}.$$

Проекцией треугольника MNC является ABC.

$$\cos\varphi = \frac{S_{ABC}}{S_{MNC}} = \frac{ab\sqrt{3}}{a^2 + b^2 \pm \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}.$$

Так как $x > a$, $x > b$, то, оставляя знак „плюс“, получим:

$$\varphi = \arccos\frac{ab\sqrt{3}}{a^2 + b^2 + \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}.$$

410. По условию задачи (рис. 78),

$$A_1N = NC = CM = MA_1 = a\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Так как $A_1N \parallel MC$, то A_1MCN — ромб. Его диагональ $MN = a\sqrt{2}$, а диагональ A_1C есть диагональ куба, т. е. $A_1C = a\sqrt{3}$. Следовательно,

$$S_{A_1NCM} = \frac{1}{2} MN \cdot A_1C = a^2\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

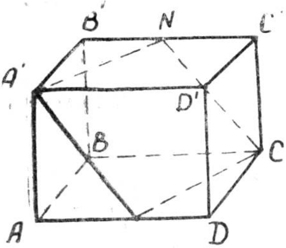


Рис. 78.

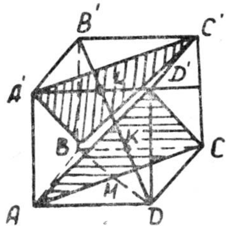


Рис. 79.

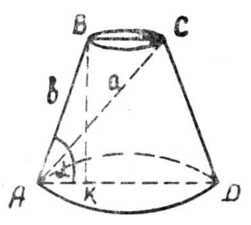


Рис. 80.

411. Указание. См. рис. 79.

412. Обозначим (рис. 80) $AD = 2r$, $BC = 2r$. Из треугольника ABC:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot CB \cdot \cos(\pi - \alpha),$$

т. е.

$$a^2 = b^2 + 4r^2 + 4br\cos\alpha,$$

или

$$4r^2 + 4b\cos\alpha \cdot r - (a^2 - b^2) = 0,$$

откуда

$$r = \frac{-b\cos\alpha + \sqrt{a^2 - b^2\sin^2\alpha}}{2}.$$

Из треугольника $ABK: AK = R - r = b\cos\alpha$. Поэтому

$$R = b\cos\alpha + r = \frac{b\cos\alpha \sqrt{a^2 - b^2\sin^2\alpha}}{2}.$$

Искомая площадь боковой поверхности

$$S = \pi(R + r)\,b = \pi b\sqrt{a^2 - b^2\sin^2\alpha}.$$

413. Очевидно (рис. 81),

$$V_{\text{тела вращения}} = V_{\text{усеченного конуса}} - V'_{\text{конуса}} - V''_{\text{конуса}}. \qquad (*).$$

Имеем:

$$OB = c\cos\frac{\alpha}{2},\ O_1C = b\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$OA = c\sin\frac{\alpha}{2},\ O_1A = b\sin\frac{\alpha}{2}.$$

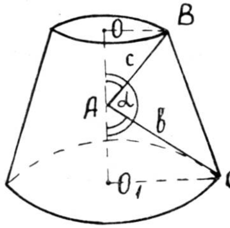


Рис. 81.

$$V_{\text{усеченного конуса}} = \frac{\pi}{3}(b + c)\sin\frac{\alpha}{2}\left(b^2\cos^2\frac{\alpha}{2} + \right.$$

$$\left. + c^2\cos^2\frac{\alpha}{2} + bc\cos^2\frac{\alpha}{2}\right), \qquad (1)$$

$$V'_{\text{конуса}} = \frac{\pi}{3}c\sin\frac{\alpha}{2}\,c^2\cos^2\frac{\alpha}{2}, \qquad (2)$$

$$V''_{\text{конуса}} = \frac{\pi}{3}b\sin\frac{\alpha}{2}\,b^2\cos^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (3)$$

Подставляя (1), (2), (3) в (*), получим:

$$V_x = \frac{1}{3}\pi bc(b + c)\sin\alpha \cdot \cos\frac{\alpha}{2}.$$

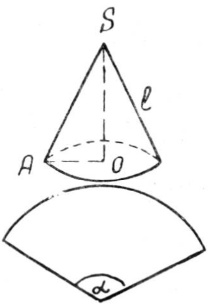


Рис. 82.

414. Введем обозначения (рис. 82):

$AO = r$ — радиус основания конуса,
$SO = h$ — высота конуса,
$SA = l$ — образующая конуса,
$AA' = a$ — хорда сектора с углом α.

Тогда

$$l = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}},$$

$$\smile AA' = \alpha l,\ r = AO = \frac{\alpha l}{2\pi};\quad h = \sqrt{l^2 - r^2}.$$

Объем конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\alpha^2 a^3 \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}{192\,\pi^2 \sin^3 \frac{\alpha}{2}}.$$

415. По условию задачи (рис. 83),

$$AD = \frac{l\sqrt{3}}{2};\ OD = \frac{l\sqrt{3}}{6};\ SD = \sqrt{h^2 + \frac{l^2}{12}}.$$

Пусть $x = KL$ — радиус шара.

Из подобия треугольников OSD и SKL получим:

$$\frac{x}{OD} = \frac{h - x}{SD}; \quad x = \frac{h \cdot OD}{SD + OD},$$

откуда

$$x = \frac{hl}{l + \sqrt{12h^2 + l^2}}.$$

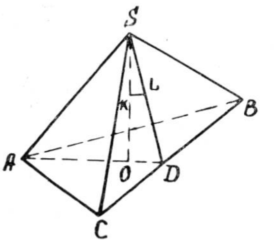


Рис. 83.

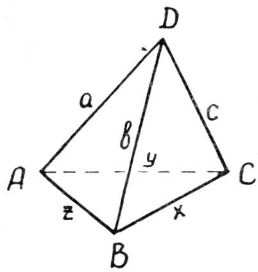


Рис. 84.

416. Как известно, радиус вписанного шара равен утроенному отношению объема пирамиды к ее полной поверхности (рис. 84)

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}abc.$$

Пусть:

$$x = \sqrt{b^2 + c^2}, \quad y = \sqrt{a^2 + c^2}, \quad z = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Имеем:

$$S_{ADB} = \frac{1}{2}ab;\ S_{BDC} = \frac{1}{2}bc;\ S_{ADC} = \frac{1}{2}ac.$$

Площадь треугольника ABC вычислим по формуле:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}xy\sin C.$$

Так как

$$\cos C = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2xy} = \frac{c^2}{xy},$$

то

$$\sin C = \frac{\sqrt{x^2y^2 - c^4}}{xy},$$

т. е.

$$\sin C = \frac{1}{xy}\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2a^2},$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}.$$

Итак,

$$r = 3\cdot\frac{V}{S} = \frac{abc}{ab + bc + ac + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}}.$$

417. Правильность пирамиды очевидна. По условию (рис. 85),

$$SB = SC = SA = x.$$

Из треугольника SDC:

$$SD = x\cos\frac{\alpha}{2},\ DC = x\sin\frac{\alpha}{2}\cdot$$

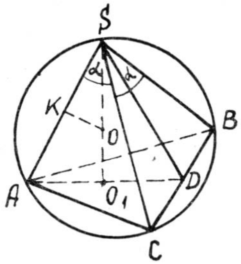


Рис. 85.

Из треугольника ABC:

$$DO_1 = \frac{DC\sqrt{3}}{3} = \frac{x\sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{2}}{3};$$

$$SO_1 = \sqrt{x^2\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{x^2}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Треугольники SOK и AO_1S подобны, следовательно,

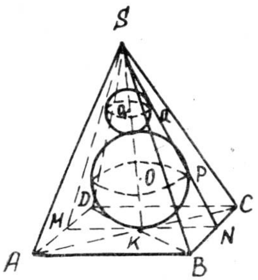


Рис. 86.

$$\frac{R}{x} = \frac{KS}{O_1S} = \frac{x}{2\sqrt{x^2\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{x^2}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}},$$

откуда

$$x^2 = 2Rx\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3}},$$

$$x = \frac{4R}{\sqrt{3}}\sqrt{\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}\ \left(\alpha < \frac{2\pi}{3}\right).$$

418. Обозначим (рис. 86) высоту пирамиды $SK = h$. Тогда $KB = h\operatorname{ctg}\alpha$; $KN = \frac{h\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{2}} = a$. Из подобия треугольников OO_1L и $SKN(O_1L \parallel SN)$: $\frac{SK}{KN} = \frac{O_1L}{OL}$. Обозначим

$$OP = R,\ O_1O = r.$$

Тогда

$$OO_1 = R + r;\ OL = R - r;\ O_1L = (R - r)\frac{h}{a}\cdot$$

Из треугольника OO_1L:

$$OO_1^2 = OL^2 + O_1L^2;\ (R + r)^2 = (R - r)^2 + (R - r)^2\frac{h^2}{a^2},$$

откуда

$$R + r = (R - r)\sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}};\ \frac{R}{r} + 1 = \left(\frac{R}{r} - 1\right)\frac{\sqrt{h^2 + a^2}}{a},$$

$$\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{h^2 + a^2} + a}{\sqrt{h^2 + a^2} - a} = \frac{\sqrt{2 + \operatorname{ctg}^2\alpha} + \operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{2 + \operatorname{ctg}^2\alpha} - \operatorname{ctg}\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{2 + \operatorname{ctg}^2\alpha} + \operatorname{ctg}\alpha)^2.$$

Искомое отношение:

$$\frac{R^3}{r^3} = \frac{1}{8}(\sqrt{2 + \operatorname{ctg}^2\alpha} + \operatorname{ctg}\alpha)^6.$$

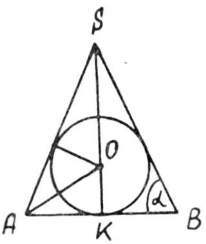


Рис. 87.

419. Введем обозначения (рис. 87):
$AK = a$ — радиус основания конуса;
$SA = l$ — образующая конуса;
$OK = R$ — радиус шара;
$\angle SBA = \alpha$ — угол наклона образующей конуса к основанию.
Площадь поверхности конуса

$$S_к = \pi a(a + l).$$

Площадь поверхности шара $S_ш = 4\pi R^2$.
Следовательно,

$$\pi a(a + l) = 8\pi R^2.$$

Найдем l, R через α и a.

$$R = a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2};\quad l = \frac{a}{\cos\alpha}\cdot$$

Таким образом,

$$a^2\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right) = 8a^2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2},$$

$$9\cos^2\alpha - 6\cos\alpha + 1 = 0,$$

$$\alpha = \arccos\frac{1}{3}.$$

420. Ответ:

$$h = r\sqrt{\frac{4}{\operatorname{tg}^2\alpha}\left[\frac{2\cos^6\alpha\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha\cos^2\alpha} - 1\right]};$$

$$H = \frac{2r\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha}.$$

421. Рассмотрим осевое сечение конуса (рис. 88). Пусть h — высота конуса,

R — радиус шара, описанного около конуса.

Тогда, по условию, $\frac{h}{R} = K$, т. е. $h = kR$.

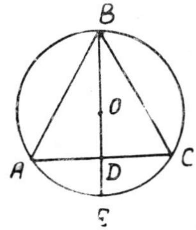


Рис. 88.

Выразим радиус r основания конуса через R; рассмотрев хорды AC и BE, получим:

$$BD \cdot DE = AD \cdot DC,$$

т. е.

$$r^2 = h(2R - h) = K(2 - k)R$$

(следовательно, $K < 2$).

$$V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3; \quad V_к = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi k^2 (2 - k) R^3.$$

Таким образом,

$$\frac{V_к}{V_ш} = \frac{1}{4} k^2 (2 - k)$$

(при $0 < k < 2$).

422. Ответ:

$$V = \frac{2}{3}\pi R^3 \sin^2\alpha \cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

$$S = 4\pi R^2 \sin\alpha \cos\frac{\alpha}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right).$$

423. Пусть (рис. 89)

$$CD = l, \quad \angle CDE = \alpha,$$

$$OM = OB = R = \frac{CE}{2} = \frac{l\sin\alpha}{2}.$$

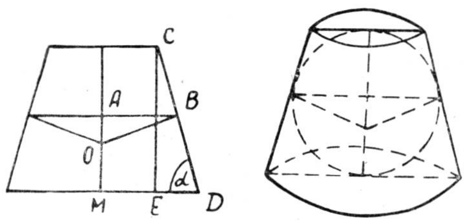


Рис. 89.

Из подобия треугольников AOB и CDE следует:

$$\frac{AO}{OB} = \frac{DE}{CE}, \quad AO = r\operatorname{ctg}\alpha \; (AB = r).$$

Из треугольника AOB следует:

$$OB^2 = AO^2 + AB^2; \quad l^2\frac{\sin^2\alpha}{4} = r^2 + r^2\operatorname{ctg}^2\alpha;$$

$$r^2 = \frac{l^2 \sin^4 \alpha}{4}, \quad r = \frac{l \sin^2 \alpha}{2};$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot AO = \frac{\pi l^3}{24} \sin^6 \alpha \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$S = \pi r \cdot OB = \frac{\pi l^2}{4} \sin^3 \alpha.$$

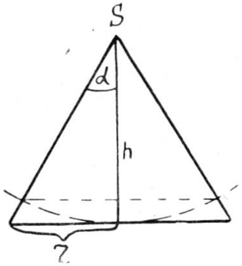


Рис. 90.

424. Пусть R — радиус сферы, 2α — угол при вершине. Тогда (рис. 90)

$r = R \operatorname{tg} \alpha$, и, следовательно, $V_{\text{кон}} = $

$$= \frac{1}{3}\pi r^3 \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

$h = r(1 - \cos\alpha)$, и, следовательно,

$$V_{\text{шар. сект.}} = \frac{2}{3}\pi r^3 (1 - \cos\alpha).$$

Таким образом,

$$\frac{v_{\text{кон}}}{V_{\text{сект}}} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{2(1 - \cos\alpha)} = 2,$$

т. е.

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = 4(1 - \cos\alpha).$$

Используя $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$, получим:

$$4\cos^2 \alpha - \cos\alpha - 1 = 0,$$

т. е.

$$\cos\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8}.$$

Так как $0 < \alpha < 90°$, то необходимо $\cos\alpha > 0$.

О т в е т:

$$\alpha = \arccos\frac{1 + \sqrt{17}}{8}.$$

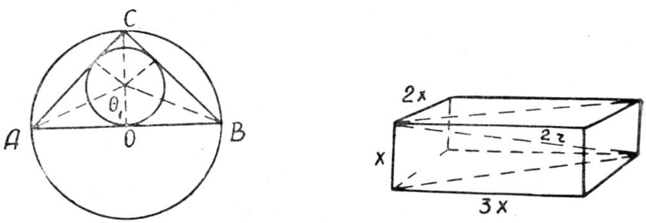


Рис. 91.

425. Пусть ABC — прямоугольный треугольник, являющийся сечением конуса (рис. 91). Если $AO = R$ — радиус, описанный вокруг конуса сферы, а $OO_1 = r$ — радиус вписанной в него сферы, то

$$AC = BC = R + r$$

и, следовательно,

$$2(R + r)^2 = 4R^2,$$

откуда

$$r = (\sqrt{2} - 1)\,R.$$

Если стороны параллелепипеда равны x, $2x$, $3x$, то (рис. 88)

$$x^2 + (2x)^2 + (3x)^2 = 4r^2 = 4\,(3 - 2\sqrt{2})\,R^2,$$

откуда

$$x^2 = 2\,\frac{3 - 2\sqrt{2}}{7}\,R^2.$$

Поверхность параллелепипеда равна

$$2\,(1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3)\,x^2 = 44\,\frac{3 - 2\sqrt{2}}{7}\,R^2.$$

426. Ответ: $\dfrac{V_{\text{к}}}{V_{\text{ш}}} = \dfrac{384}{125\,\pi}$.

427. Ответ: $a = 2\sqrt{3}\,R\sin\alpha$,

$$h = 4R\cos\alpha\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)}\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{6}\right).$$

428. Ответ:

$$r_{1,2} = \frac{\dfrac{s}{2\pi} \pm 2a\sqrt{\dfrac{s}{2\pi} - a^2 - r^2}}{2\left(a \pm \sqrt{\dfrac{s}{2\pi} - a^2 - r^2}\right)}.$$

429. Ответ: $\pi s\,\dfrac{6 + 2\sqrt{2}}{3}$.

430. Ответ: $V = 2\,\pi h^3\,\dfrac{1}{(\operatorname{tg}\alpha + 2)^3}$.

431. Ответ: $\sin\alpha = \dfrac{2rd}{\sqrt{(4a^2 - d^2)\,(d^2 - 4r^2)}}$.

432. Ответ: $\dfrac{\pi}{18}$.

РАЗДЕЛ IV

ОБРАЗЦЫ ВАРИАНТОВ ПИСЬМЕННЫХ РАБОТ

Вариант 1

433. За один час до начала работы насосов количество воды в котловане увеличивалось на $(m-n)$ $м^3$.

Так как оба насоса одинаковы, то можно определить лишь время t одновременной их работы и время τ работы только одного насоса из двух.

Тогда

$$\begin{cases} 2at + a\tau = N + (m-n)(t+\tau) \\ 2rt + r\tau = R \end{cases},$$

или

$$\begin{cases} (2a-m+n)\ t + (a-m+n)\tau = N \\ 2rt + r\tau = R. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{cases} t = \dfrac{Nr - R(a+n-m)}{r(m-n)} \\ \tau = \dfrac{(2a+n-m)R - 2rN}{r(m-n)} \end{cases} \text{при } 2a > m-n.$$

Определим теперь условия работы насосов с минимальными затратами.

Если t_0, τ_0 обеспечивают работу с минимальными затратами R_0, то

$$\begin{cases} (2a+n-m)t_0 + (a+n-m)\tau_0 = N \\ 2rt_0 + r\tau_0 = R_0 \leqslant R. \end{cases}$$

Тогда $t_0 = \dfrac{N}{2a+n-m} - \dfrac{a+n-m}{2a+n-m}\tau_0$ (из первого уравнения). Подставляя во второе, получим:

$$R_0 = \frac{2N}{2a+n-m} + \frac{m-n}{2a+n-m}\tau_0 \leqslant R.$$

Отсюда видно, что

а) при $m > n$ (т. е. если количество воды в котловане увеличивается) затраты тем меньше, чем меньше τ.

Следовательно, $\tau_0 = 0$, $t_0 = \frac{N}{2a+n-m}$, $R_0 = \frac{2N}{2a+n-m}$;

б) при $m < n$ (т. е. если количество воды в котловане уменьшается) очевидным образом получаем $t_0 = \tau_0 = 0$. Вода из котлована вытечет за время $\frac{N}{n-m}$. Затраты $R_0 = 0$;

в) при $m = n$ (т. е. количество воды в котловане не меняется со временем) затраты одинаковы, независимо от того, будут ли работать оба насоса одновременно или будет работать только один насос. Необходимое общее время работы $2t + \tau = \frac{N}{a}$. Затраты $R_0 = \frac{N}{a} r$.

434. Решение задачи распадается на два основных случая: $a < 2$ и $a \geqslant 2$.

$$x^2 = 2|x-a| - 2|x-2|. \qquad (*)$$

Первый случай: $a < 2$.

Искомое значение x может находиться в одном из трех интервалов: $x < a$; $a \leqslant x < 2$; $x \geqslant 2$.

1) $x < a$. В этом случае, в силу того, что $|x-a| = -x+a$; $|x-2| = -x+2$, уравнение принимает вид:

$$x^2 = 2a - 4.$$

Это уравнение может иметь вещественные решения при $a \geqslant 2$, следовательно, в рассматриваемом интервале вещественных решений нет.

2) $a \leqslant x < 2$. Имеем $|x-a| = x-a$; $|x-2| = -x+2$, поэтому уравнение принимает вид:

$$x^2 - 4x + 2a + 4 = 0.$$

Это уравнение может иметь вещественные решения при $a \leqslant 0$.

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-2a}.$$

Может быть пригодным только $x_1 = 2 - \sqrt{-2a}$, причем должно выполняться условие $a \leqslant x_1 < 2$, так что

$$a \leqslant x_1 = 2 - \sqrt{-2a} < 2.$$

Параметр a должен удовлетворять двум неравенствам:

$$2 - \sqrt{-2a} < 2,$$
$$2 - \sqrt{-2a} \geqslant a.$$

Последнее неравенство справедливо при любых a.

Таким образом, $x_1 = 2 - \sqrt{-2a}$ при $a < 0$ является корнем уравнения (*).

3) $x \geqslant 2$. $|x-a| = x-a$; $|x-2| = x-2$.

Исходное уравнение (*) принимает вид:

$$x^2 = -2a + 4.$$

Отсюда $x_{1,2} = \pm\sqrt{-2a+4}$. Оба значения x вещественны, т. к. $a < 2$. Решением уравнения (*) в рассматриваемом интервале может быть только $x_1 = \sqrt{-2a+4}$ (ибо $x_2 = -\sqrt{-2a+4} < 0$). Оно будет решением, если $x_1 \geqslant 2$, т. е. $\sqrt{-2a+4} \geqslant 2$. Это условие выполняется при $a \leqslant 0$.

Таким образом, $x_1 = \sqrt{-2a+4}$ при $a \leqslant 0$ является корнем уравнения (*).

Второй случай: $a \geqslant 2$.

Искомое значение x может находиться в одном из трех интервалов: $x < 2$, $2 \leqslant x < a$, $x \geqslant a$.

1) $x < 2$. Уравнение (*) примет вид:

$$x^2 = 2a - 4,$$

откуда $x_{1,2} = \pm\sqrt{2a-4}$ — вещественны. При этом $x_1 = \sqrt{2a-4}$ будет меньше 2, т. е. $\sqrt{2a-4} < 2$, если $a < 4$, так что $x_1 = \sqrt{2a-4}$ является решением уравнения (*) при $2 \leqslant a < 4$. Рассмотрим $x_2 = -\sqrt{2a-4}$. Очевидно, $x_2 < 2$ при всех $a \geqslant 2$.

Таким образом, в интервале $x < 2$ вещественными решениями уравнения (*) будут:

$$x_1 = \sqrt{2a-4}, \text{ если } 2 \leqslant a < 4,$$
$$x_2 = -\sqrt{2a-4}, \text{ если } a \geqslant 2.$$

2) $2 \leqslant x < a$. Уравнение (*) примет вид:

$$x^2 + 4x - 2a - 4 = 0.$$

Отсюда $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{8+2a}$ — вещественны. $x_1 = -2 + \sqrt{8+2a}$ лежит в интервале $2 \leqslant x < a$ при $a \geqslant 4$; $x_2 = -2 - \sqrt{8+2a} < 2$. Следовательно, x_2 не подходит.

Таким образом, в интервале $2 \leqslant x < a$ вещественным решением уравнения (*) будет:

$$x_1 = -2 + \sqrt{8+2a}, \text{ если } a \geqslant 4.$$

3) $x \geqslant a$. Уравнение (*) примет вид:

$$x^2 = 4 - 2a.$$

Это уравнение может иметь вещественные решения $x_{1,2} = \pm\sqrt{4-2a}$ только при $4 - 2a \geqslant 0$, т. е. при $a \leqslant 2$. Но в рассматриваемом случае $a \geqslant 2$. Поэтому $a = 2$, $x_{1,2} = 0$, следовательно, уравнение (*) в этом интервале решений не имеет.

Ответ: При $a \leqslant 0$ $x_1 = 2 - \sqrt{-2a}$ и $x_2 = \sqrt{-2a+4}$;
при $0 < a < 2$ решений нет;
при $2 \leqslant a < 4$ $x_{1,2} = \pm\sqrt{2a-4}$;
при $a \geqslant 4$ $x_1 = -\sqrt{2a-4}$ и $x_2 = -2 + \sqrt{8+2a}$.

435. О. Д. З. $x_k \neq \frac{\pi k}{k}$.

Преобразовывая данное уравнение, получим:

$$-5a \operatorname{ctg} x + b \operatorname{ctg} x - b \operatorname{tg} x = 4a,$$

$$b \operatorname{tg}^2 x + 4a \operatorname{tg} x + (5a - b) = 0,$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 5ab + b^2}}{b}.$$

Вещественные решения существуют, очевидно, если $b \leqslant a$ или $b \geqslant 4a$.

Таким образом:

1) При $b \neq 0$, $b \neq 5a$, $b \leqslant a$ или $b \geqslant 4a$

$$x_k = \operatorname{arctg} \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 5ab + b^2}}{b} + \pi k.$$

2) При $b = 0$, $a \neq 0$

$$\operatorname{ctg} x = -\frac{4}{5}; \quad x_k = -\operatorname{arcctg} \frac{4}{5} + \pi k.$$

3) При $b = 5a$, $a \neq 0$

$$5a \operatorname{tg}^2 x + 4a \operatorname{tg} x = 0, \quad \operatorname{tg} x \neq 0.$$

$$x_k = -\operatorname{arctg} \frac{4}{5} + \pi k.$$

4) При $a = 0$ $b = 0$ x — любое, с учетом О. Д. З.

436. Пусть r — радиус малых кругов, тогда (рис. 92.)

$$R = r + \frac{2}{3} \cdot 2r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = r\left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right),$$

т. е.

$$r = \frac{3R}{3 + 2\sqrt{3}} = \frac{3(2\sqrt{3} - 3)}{3} R = R(2\sqrt{3} - 3).$$

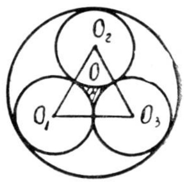


Рис. 92.

Искомая площадь $S = S_{O_1O_2O_3} - \frac{1}{2} S_{\text{мал. кр}} =$

$$= \frac{4r^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi r^2}{2} = r^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right) = R^2(2\sqrt{3} - 3)^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= R^2(21 - 12\sqrt{3})\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right).$$

437. Пусть (рис. 93) O_1, O_2, O_3 — центры трех больших шаров, O — центр малого шара, A_1, A_2, A_3 и A — проекции этих точек на плоскость. Если r — радиус малого шара, то $OO_1 = OO_2 = OO_3 = R + r$, а $A_1O_1 = A_2O_2 = A_3O_3 = R$ и $OA = r$. Кроме того, очевидно, что точка A есть центр правильного треугольника $A_1A_2A_3$, и стороны его равны $2R$.

Рассмотрим трапецию A_1O_1OA:

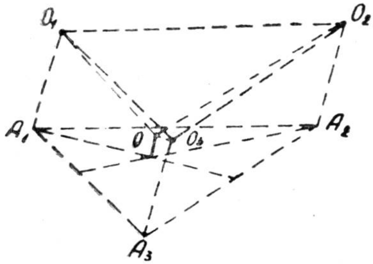


Рис. 93.

$$O_1O^2 = A_1A^2 + (OA_1 - O_1A)^2,$$

т. е., так как $A_1A = R\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

$$(R+r)^2 = \frac{4}{3}R^2 + (R-r)^2.$$

Следовательно,

$$(R+r)^2 - (R-r)^2 = \frac{4}{3}R^2,$$

т. е. $2R \cdot 2r = \frac{4}{3}R^2$, или $r = \frac{R}{3}$.

Ответ: $r = \frac{R}{3}$.

Вариант 2

438. Пусть t_1 — время работы на первом режиме, t_2 — время работы на втором режиме. Тогда

$$\begin{cases} (F_1 - P)\,t_1 + (F_2 - P)\,t_2 = P\tau, \\ t_1 + t_2 = t. \end{cases}$$

Решая систему, получаем:

$$t_1 = \frac{P\tau - (F_2 - P)\,t}{F_1 - F_2}, \quad t_2 = \frac{(F_1 - P)\,t - P\tau}{F_1 - F_2}.$$

По условию задачи $t_1 \geqslant 0$, $t_2 \geqslant 0$. Таким образом, первая часть задачи имеет решение, если τ и t удовлетворяют условиям:

$$P\tau - (F_2 - P)\,t \geqslant 0 \text{ и } (F_1 - P)\,t - P\tau \geqslant 0,$$

т. е.

$$\frac{P\tau}{F_1 - P} \leqslant t \leqslant \frac{P\tau}{F_2 - P}.$$

Найдем теперь условия работы, при которых аппарат будет остановлен в кратчайший срок, т. е. определим t_1 и t_2 так, чтобы t было минимальным.

Если горючего на торможение достаточно много, то

$$t = \frac{P\tau}{F_1 - P}, \text{ т. е. } t_1 = t \text{ и } t_2 = 0.$$

Учтем последнее условие:

$$\frac{1}{\tau_1}t_1+\frac{1}{\tau_2}t_2\leqslant 1.$$

Тогда

$$\frac{1}{\tau_1}\cdot\frac{P\tau-(F_2-P)\,t}{F_1-F_2}+\frac{1}{\tau_2}\cdot\frac{(F_1-P)\,t-Pt}{F_1-F_2}\leqslant 1,$$

т. е.

$$t\left[\frac{F_1-P}{F_1-F_2}\cdot\frac{1}{\tau_2}-\frac{F_2-P}{F_1-F_2}\cdot\frac{1}{\tau_1}\right]\leqslant 1-\frac{P\tau}{F_1-F_2}\left(\frac{1}{\tau_1}-\frac{1}{\tau_2}\right).$$

Обозначим для краткости выражение, стоящее в квадратных скобках, через B.

1) Если $B\geqslant 0$, то

$$t\leqslant\frac{1-\dfrac{P\tau}{F_1-F_2}\left(\dfrac{1}{\tau_1}-\dfrac{1}{\tau_2}\right)}{B}=A.$$

Тогда при выполнении условия

$$A\geqslant\frac{P\tau}{F_1-P}\ \text{или}\ \tau_1\geqslant\frac{P\tau}{F_1-P}$$

аппарат затормозить возможно и $t_1=\dfrac{P\tau}{F_1-P}$, а $t_2=0$.

2) Если $B\leqslant 0$, то

$$t\geqslant\frac{1-\dfrac{P\tau}{F_1-F_2}\left(\dfrac{1}{\tau_1}-\dfrac{1}{\tau_2}\right)}{B}=A.$$

Тогда при выполнении условия

$$A\leqslant\frac{P\tau}{F_2-P}\ \text{или}\ \tau_2\geqslant\frac{P\tau}{F_2-P}$$

аппарат затормозить возможно и $t=A$, откуда

$$t_1=\frac{(F_1-P)-P\dfrac{\tau}{\tau_1}}{(F_1-P)\dfrac{1}{\tau_2}-(F_2-P)\dfrac{1}{\tau_1}}\ \text{и}\ t_2=\frac{P\dfrac{\tau}{\tau_2}-(F_2-P)}{(F_1-P)\dfrac{1}{\tau_2}-(F_2-P)\dfrac{1}{\tau_1}}.$$

3) Если $B=0$, то последнее условие сводится к следующему ограничению:

$$1-\frac{P\tau}{F_1-F_2}\left(\frac{1}{\tau_1}-\frac{1}{\tau_2}\right)\geqslant 0,$$

т. е. $\left(\text{т. к. из } B=0 \text{ следует, что } \dfrac{1}{\tau_2}=\dfrac{F_2-P}{F_1-P}\cdot\dfrac{1}{\tau_1}\right)\ \tau_1\geqslant\dfrac{P\tau}{F_1-P}$ или, что эквивалентно предыдущему, $\tau_2\geqslant\dfrac{P\tau}{F_2-P}$. Таким образом, в этом случае $t_1=\dfrac{P\tau}{F_1-P}$, $t_2=0$.

439. $$x\sqrt{x}+\sqrt{x^3-2}=a. \qquad (*)$$

Левая часть уравнения определена при $x \geqslant \sqrt[3]{2}$, правая — при $a \geqslant 0$. Переписав (*) в виде

$$a-x\sqrt{x}=\sqrt{x^2-2},$$

получим еще одно ограничение: $a-x\sqrt{x} \geqslant 0$. Так как при этих ограничениях левая и правая части уравнения положительны, при возведении в квадрат получим равносильное уравнение:

$$a^2+x^3-2ax\sqrt{x}=x^3-2,$$

$$x\sqrt{x}=\frac{a^2+2}{2a},$$

$$x=\sqrt[3]{\left(\frac{a^2+2}{2a}\right)^2},$$

что является решением, если

$$a>0 \text{ и } x\sqrt{x} \leqslant a, \quad x \geqslant \sqrt[3]{2}, \quad \text{т. е. } \frac{a^2+2}{2a} \leqslant a, \ a \geqslant \sqrt{2}.$$

$$x \geqslant \sqrt[3]{2}; \ x\sqrt{x} \geqslant \sqrt{2}; \ \frac{a^2+2}{2a} \geqslant \sqrt{2}; \ (a-\sqrt{2})^2 \geqslant 0.$$

Последнее неравенство выполняется при любом a. Таким образом, при $a \geqslant \sqrt{2}$ $x=\sqrt[3]{\left(\frac{a^2+2}{2a}\right)^2}$, при $a<\sqrt{2}$ решений нет.

440. Преобразуем данное уравнение:

$$1-2m\sin x\cos x+n(\cos^2 x-\sin^2 x)=2\cos^2(x-a),$$

$$1-m\sin 2x+n\cos 2x=1+\cos(2x-2a),$$

$$-m\sin 2x+n\cos 2x=\cos 2x\cdot\cos 2a+\sin 2x\sin 2a,$$

$$\cos 2x(n-\cos 2a)=\sin 2x(m+\sin 2a).$$

Таким образом,

$$\text{при } m \neq -\sin 2a \ \operatorname{tg} 2x=\frac{n-\cos 2a}{m+\sin 2a},$$

т. е.

$$x_k^{(1)}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{n-\cos 2a}{m+\sin 2a}+\frac{\pi k}{2},$$

где k — любое целое число.

$$\left.\begin{array}{r}\text{При } m=-\sin 2a\\ n \neq \cos 2a\end{array}\right\} \cos 2x=0,$$

т. е.

$$x_k^{(2)}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},$$

где k — любое целое число.

При $m = -\sin 2a$, $n = \cos 2a$ x — любое число.

441. Так как углы треугольника $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ равны $\frac{\pi}{3}$, то (рис. 94) $\smile BE = \frac{2\pi}{3}$, $\smile AF = \frac{2n}{3}$. Следовательно,

$$\smile AE = \smile EF = \smile FB = \frac{\pi}{3};$$

$$\angle AOE = \angle EOF = \angle FOB = \frac{\pi}{3}$$

и

$$AE = EF = FB = R.$$

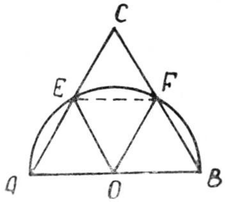


Рис. 94.

Таким образом, $EF = \frac{1}{2} AB$ и $EF \parallel AB$, т. е. EF — средняя линия треугольника ABC.

Пусть точка O—центр полукруга, тогда фигура $OECF$ — ромб площади $EF \cdot CO = \frac{1}{2} R^2 \sqrt{3}$. Площадь искомой фигуры равна площади ромба $OECF$ без площади сектора OEF:

$$S_{OECF} - S_{OEF} = \frac{1}{2} R^2 \sqrt{3} - \frac{\pi}{6} R^2 = R^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \right).$$

442. Пусть (рис. 95) $OA = l$, $OO_1 = H$, $O_1A = r$; $H \perp \{ N, A, C \}$.

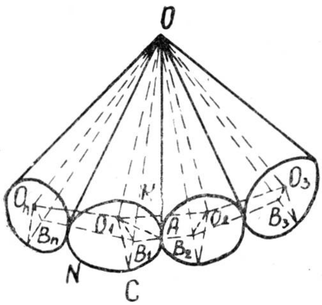


Рис. 95.

Тогда из треугольника OO_1A

$$H = l \cos \frac{\alpha}{2}; \; r = l \sin \frac{\alpha}{2};$$

$$O_1M = \frac{H \cdot r}{l} = l \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Из треугольника O_1CO или из треугольника OO_1A:

$$O_1B_1 = O_1M = l \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

O_1M является половиной стороны многоугольника B_1, $B_2 \ldots B_n$.

Радиус описанной окружности этого многоугольника равен

$$R_n = OB_1 = \sqrt{H^2 - O_1B_1^2} = l \cos \frac{\alpha}{2}.$$

$$\sin\frac{2\pi}{2n}=\frac{O_1M}{R_n}=\frac{l\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{l\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

$$\frac{\alpha}{2}=\operatorname{arctg}\left(\sin\frac{\pi}{n}\right).$$

Ответ: $2\operatorname{arctg}\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)$.

Вариант 3

443. Пусть u — скорость поезда, t_1 — время поездки на такси, t — время, на которое пассажир опоздал.

Если бы остаток времени после t_1 пассажир ехал на такси, то, истратив $A-B$ рублей, он проехал бы $\frac{A-B}{a}$ *км* за $\frac{A-B}{av_1}$ часов. Следовательно,

$$(v_1-u)\left(t_1+\frac{A-B}{av_1}\right)=ut$$

[(v_1-u) — относительная скорость такси относительно поезда].

С другой стороны, он ехал на автобусе $\frac{ut-(v_1-u)\,t_1}{v_2-u}$ час., что на τ часов больше, чем $\frac{A-B}{av_1}$, т. е.

$$\frac{A-B}{av_1}+\tau=\frac{ut-(v_1-u)\,t_1}{v_2-u}.$$

Решая систему

$$\begin{cases}(v_1-u)\left(t_1+\frac{A-B}{av_1}\right)=ut\\ \frac{A-B}{av_1}+\tau=\frac{ut-(v_1-u)\,t_1}{v_2-u}.\end{cases}$$

получим:

$$u=\frac{v_2-v_1}{\tau}\cdot\frac{A-B}{av_1}+v_2.$$

444. По условию задачи составим систему:

$$\begin{cases}a+2b+3c=a\\ 2ab+3ac+6bc=b\\ 6abc=c,\end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} 2b = -3c \\ b(6c-1) = 0 \\ c(6ab-1) = 0. \end{cases}$$

1) $b = 0$, тогда $c = 0$. Так как корни должны быть различны, то в этом случае решений нет.

2) $c = \frac{1}{6}$, тогда $b = -\frac{1}{4}$ (из первого уравнения) и

$a = -\frac{2}{3}$ (из третьего уравнения).

Ответ: $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{2}$.

Замечание: Возможен и другой путь решения задачи.

$f(a) = 0$, $f(2b) = 0$, $f(3c) = 0$ и т. д.

445. Используя соотношение

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x},$$

получим:

$$\frac{1-\frac{a}{b+c}}{1+\frac{a}{b+c}} - \frac{1-\frac{b}{a+c}}{1+\frac{b}{a+c}} + \frac{1-\frac{c}{a+b}}{1+\frac{c}{a+b}} =$$

$$= \frac{-a+b+c}{a+b+c} + \frac{a-b+c}{a+b+c} + \frac{a+b-c}{a+b+c} = 1.$$

446. Пусть в треугольнике ABC (рис. 96) угол A и угол B равны α. Проведем высоту CD, и пусть биссектриса угла A пересечется с этой высотой в точке O. Пусть EO_1 — перпендикуляр, проведенный в середине стороны AC, и O_1 — точка его пересечения с высотой CD. Тогда $OD = r$ — радиус вписанной окружности, $O_1C = R$ — радиус описанной окружности. Обозначив $AD = a$, будем иметь:

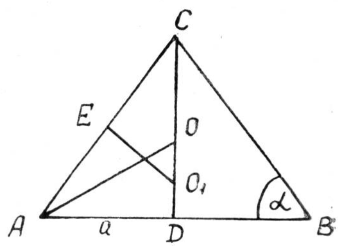


Рис. 96.

$$r = a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}; \quad AC = \frac{a}{\cos \alpha}; \quad R = \frac{EC}{\sin EO_1C} = \frac{AC}{2\sin\alpha} = \frac{a}{\sin 2\alpha};$$

$$d = R - r = a\left(\frac{1}{\sin 2\alpha} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$h = CD = a\operatorname{tg}\alpha = \frac{2d\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha - 2\cos\alpha + 1}.$$

Так как знаменатель полученного выражения может принимать лишь положительные значения, то задача имеет решение при любом значении $\alpha < \frac{\pi}{2}$.

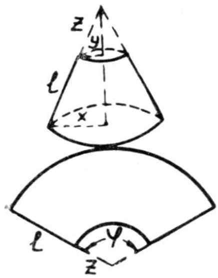


Рис. 97.

447. Искомые радиусы обозначим x и y, а образующую конуса — $l + z$ (рис. 97).

$$\frac{x}{y} = \frac{l+z}{z}, \quad \text{откуда} \quad z = \frac{ly}{x-l}.$$

Полная поверхность усеченного конуса:

$$S_1 = \pi\left[(x+y)\,l + x^2 + y^2\right].$$

Площадь кругового кольца:

$$S_2 = \pi\,(l^2 + 2lz) = \pi l^2\,\frac{x+y}{x-y}.$$

По условию, $S_1 = S_2$, т. е.

$$(x+y)\,l + x^2 + y^2 = \frac{x+y}{x-y}\,l^2. \qquad (1)$$

Центральный угол части кругового кольца определяется формулой

$$\varphi = \frac{2\pi x}{l+z} = \frac{2\pi}{l}\,(x-y),$$

из которой

$$y = x - \frac{\varphi l}{2\pi}. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), получим

$$8\pi^2\varphi x^2 - 4\pi l\,(4\pi^2 - 2\pi\varphi + \varphi^2)\,x + \varphi l^2\,(4\pi^2 - 2\pi\varphi + \varphi^2) = 0,$$

откуда

$$x = \frac{l}{4\pi\varphi}\,\Big[4\pi^2 - 2\pi\varphi + \varphi^2 \pm$$
$$\pm\sqrt{(4\pi^2 - 2\pi\varphi + \varphi^2)\,(4\pi^2 - 2\pi\varphi - \varphi^2)}\Big]. \qquad (3)$$

Радиус y определяется подстановкой найденного значения x в (2). Анализ показывает, что задача имеет единственное решение, соответствующее знаку „плюс“ перед корнем в формуле (3), если

$$0 < \varphi < (\sqrt{5} - 1)\pi,$$

и не имеет решений при значениях φ, лежащих вне указанного промежутка.

Вариант 4

448. Будем считать для определенности, что

$$a_1 = a \text{ и } a_2 = \frac{a}{2}, \text{ где } a > 0.$$

Возможны три случая, указанные на рис. 98.

Так как, по условию задачи, тела движутся без начальной скорости с постоянными ускорениями, то

$$S_1 = \frac{at^2}{2} \text{ и } S_2 = \frac{at^2}{4}.$$

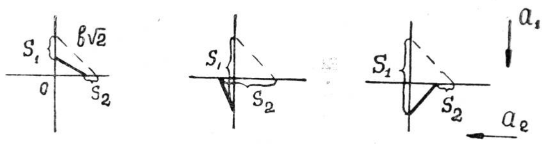


Рис. 98.

Составим уравнение:

$$(S_1 - b)^2 + (S_2 - b)^2 = \frac{2b^2}{9}.$$

Решая это уравнение, мы получим результаты для трех случаев ($S_1 \neq b \neq S_2$).

Подставляя выражения S_1 и S_2 в уравнение и преобразовывая его, получим:

$$t^4 - \frac{3 \cdot 8 \cdot b}{5 \cdot a} t^2 + \frac{16 \cdot 16 b^2}{9 \cdot 5 a^2} = 0;$$

$$t^2_{1,2} = \frac{8b}{3a}, \quad t^2_{3,4} = \frac{32b}{15a};$$

так как $t > 0$, имеем окончательно:

$$t_1 = 2\sqrt{\frac{2b}{3a}}, \quad t_2 = 4\sqrt{\frac{2b}{15a}}.$$

Ответ: В предположении, что $a > 0$, получаем следующие возможные значения времени:

$$t_2 = 2\sqrt{\frac{3b}{2a}}; \quad t_2 = 4\sqrt{\frac{2b}{15a}}.$$

449. О. Д. З. $x + 4a \geqslant 0$ или $x \geqslant -4a$; $\{a, x\} \geqslant 0$. Возведем обе части неравенства в квадрат

$$x^2 - 17ax + 16a^2 \geqslant 0,$$

т. е.

$$x \leqslant a \text{ и } x \geqslant 16a.$$

С учетом О. Д. З., имеем:

$$0 \leqslant x \leqslant a \text{ и } x \geqslant 16a.$$

450. Полагая

$$\sin x + \cos x = t,$$

получим:

$$\cos x \cdot \sin x = \frac{t^2 - 1}{2}.$$

Данное уравнение принимает вид:

$$t^2 + 2t - 3 = 0,$$

откуда

1. $\sin x + \cos x = 1$.
2. $\sin x + \cos x = -3$.

Второе уравнение не имеет решений, ибо необходимо $|\sin x + \cos x| \leqslant \sqrt{2}$. Первое уравнение решается элементарно.

Ответ: $x_k^{(1)} = 2\pi k,\ x_k^{(2)} = \frac{\pi}{2}(4k + 1)$.

451. Из треугольника ABC (рис. 99)

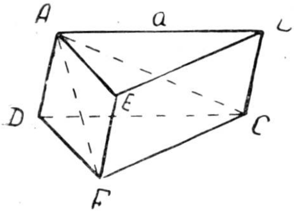


Рис. 99.

$$l = \sqrt{H^2 + a^2}.$$

Из треугольника AFC

$$2(H^2 + a^2) - 2(H^2 + a^2)\cos\alpha = a^2.$$

Очевидно,

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} H = V,$$

или

$$a^2 = \frac{4V}{\sqrt{3}H},$$

$$2\left(H^2 + \frac{4V}{H\sqrt{3}}\right) - 2\left(H^2 + \frac{4V}{H\sqrt{3}}\right)\cos\alpha = a^2,$$

откуда

$$H = \sqrt[3]{\frac{4V\cos\alpha - 2V}{\sqrt{3}(1 - \cos\alpha)}}.$$

Задача имеет решение, если $4V\cos\alpha > 2V$, т. е. $\cos\alpha > \frac{1}{2}$, или $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$.

452. Значения x должны удовлетворять двум неравенствам:

1) $x < 0$,

2) $\log_{\frac{1}{2}}(-x) - 1 > 0$.

Решая второе, имеем: $\log_{\frac{1}{2}}(-x) > 1$, $-x < \frac{1}{2}$, $x > -\frac{1}{2}$.

Ответ: Функция определена при $-\frac{1}{2} < x < 0$.

Вариант 5

453. Пусть t — время, прошедшее до встречи тел. Тогда, по условию задачи, первое тело прошло расстояние

$$S_1 = v \cdot t + \frac{at^2}{2},$$

а второе тело прошло расстояние

$$S_2 = v_x \cdot t.$$

По условию задачи,

$$S_1 = S_2 = \frac{h}{2}.$$

Используя последнее равенство, составим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{h}{2} &= v_x \cdot t \\ \frac{h}{2} &= vt + \frac{at^2}{2} \end{aligned}\right\}.$$

Решая эту систему относительно v_x и t, получаем для v_x два значения, из которых только одно положительно.

Ответ: $v_x = \frac{v + \sqrt{v^2 + ah}}{2}$.

454. О. Д. З. $x > 1$.

Имеем

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{x-1} > \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$$

или

$$\frac{x}{x-1} < x + 1; \quad x^2 - x - 1 > 0.$$

Решая последнее неравенство, получим:

$$x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ и } x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

С учетом О. Д. З., окончательно имеем:

$$x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

455. Произведем следующие преобразования:

$$(\sin^2 x + \cos^2 x) + 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x = \sin^4 2x + (1 - \sin^2 2x)^2;$$

$$1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \sin^4 2x + 1 - 2\sin^2 2x + \sin^4 2x.$$

После приведения подобных членов получим:

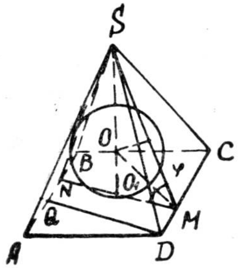


Рис. 100.

$$2\sin^4 2x - \frac{3}{2}\sin^2 2x = 0$$

или

$$\sin^2 2x\left(\sin^2 2x - \frac{3}{4}\right) = 0.$$

1) $\sin^2 2x = 0;\quad 2x = \pi k;\quad x = \frac{\pi k}{2};$

2) $\sin^2 2x = \frac{3}{4};\ 2x = \pi k \pm \frac{\pi}{3};$

$$x = \frac{\pi}{6}(3\pi k \pm 1).$$

Ответ: $x_k^{(1)} = \frac{\pi k}{2}$, $x_k^{(2)} = \frac{\pi}{6}(3\pi k \pm 1)$.

456. По условию, имеем (рис. 100):

$$\angle BAD = \alpha,\quad AB = a,\quad \angle SMO_1 = \varphi.$$

Из треугольника OO_1M получим: $R = O_1M \cdot \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$. Проведем $MN \parallel DQ$. Тогда из треугольника DQA найдем: $DQ = a\sin\alpha$, откуда $O_1M = \frac{a}{2}\sin\alpha$ и

$$R = \frac{a}{2}\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}.$$

Подставляя значение R в формулу для вычисления объема шара, получим:

$$V_{\text{шара}} = \frac{\pi}{6} a^3 \sin^3\alpha \operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2}.$$

457. Имеем систему неравенств

$$\left.\begin{array}{l} 4 - x^2 \geqslant 1 \\ 4 - x^2 > 0 \end{array}\right\}$$

или $4 - x^2 \geqslant 4$, т. е. $|x| \leqslant \sqrt{3}$, и окончательно

$$-\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{3}.$$

Вариант 6

458. Пусть

s — расстояние между A и B;

v_1 — скорость первой машины;

v_2 — скорость второй машины;

t — время, прошедшее между двумя встречами.

Так как за время t первая машина прошла путь, равный $s-m+n$, имеем:

$$v_1=\frac{s-m+n}{t}.$$

Аналогично

$$v_2=\frac{s+m-n}{t}.$$

Отношение $\frac{v_1}{v_2}$ равно отношению путей, пройденных до первой встречи.

Имеем

$$\frac{m}{s-m}=\frac{v_1}{v_2}=\frac{s-m+n}{s+m-n}$$

или

$$(s-m+n)(s-m)=m(s+m-n).$$

Решая последнее уравнение относительно s, получим:

$$s=3m-n.$$

459. Заметим, прежде всего, что знаменатель правой части неравенства положителен при всех значениях x.

Приведем данное неравенство к виду

$$2(x^2+x+1)-1-\frac{15}{x^2+x+1}<0$$

или

$$\frac{2t^2-t-15}{t}<0,$$

где

$$t=x^2+x+1.$$

Решая неравенство

$$2t^2-t-15<0,$$

получим

$$0<t<3,$$

или

$$x^2+x+1<3,$$

т. е.

$$-2<x<1.$$

460. Ответ: $x_k = 2\pi k - \frac{\pi}{2}$.

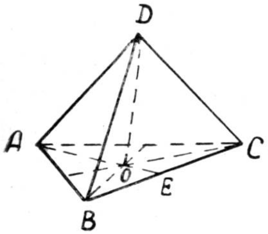


Рис. 101.

461. Высота пирамиды должна проходить через центр окружности, описанной около равнобедренного треугольника ABC (рис. 101). Так как угол $\alpha = \angle CAB$ остается произвольным, то изображение центра O можно взять в любой точке AE (E — середина BC) и даже на продолжении AE за точку E $\left(\text{в последнем случае } \alpha > \frac{\pi}{2}\right)$.

По теореме синусов

$$AO = R = \frac{BC}{2 \sin \alpha}.$$

Из треугольника ABE:

$$BC = 2BE = a \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Из треугольника AOD, где $\angle AOD = \beta$:

$$OD = H = R \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{a \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta}{\sin \alpha}.$$

Площадь основания

$$S = \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha.$$

Окончательно имеем:

$$V = \frac{H \cdot S}{3} = \frac{a^3 \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta}{6}.$$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основными пособиями для подготовки к приемным экзаменам по математике в высшие учебные заведения являются школьные учебники и задачники, содержание которых соответствует требованиям программы приемных экзаменов.

Для лучшей подготовки к приемным экзаменам и более успешному изучению курса высшей математики рекомендуются следующие дополнительные пособия.

Руководства для подготовки к приемным экзаменам

1. Антонов Н. Н., Выгодский М. Я., Никитин В. В., Санкин А. И. Сборник задач по элементарной математике, М., Изд. „Наука“, 1964.

2. Гудков Д. А., Донская М. В., Нестеренко А. И. и др. Об экзаменах по математике при поступлении в Горьковский государственный университет им. Лобачевского. Горький, 1963.

3. Задачи по математике и физике, дававшиеся на приемных испытаниях в 1947 — 1953 гг. Московский физико-технический институт. М., 1964.

4. Залогин Н. С. Сборник конкурсных задач по математике. Киев, Машгиз, 1954.

5. Зорин В. В. Пособие по математике для поступающих в вузы. М., Изд. „Высшая школа“, 1965.

6. Колмогоров А. Н. О профессии математика. М., Изд. „Советская наука“, 1954.

7. Кречмар В. А. Задачник по алгебре. М., Гостехиздат, 1960.

8. Круликовский Н. Н. Сборник задач по математике для подготовки к приемным экзаменам. Изд. Томского гос. ун-та, 1963.

9. Кущенко В. С. Сборник конкурсных задач по математике с решениями. Л., Судпромгиз, 1963.

10. Лидский В. Б., Овсянников Л. В., Тулайков А. Н., Шабунин М. И. Задачи по элементарной математике, М., Физматгиз, 1962.

11. Н. М. Матвеев. Варианты письменных работ и билеты для устных экзаменов по математике. Л., Изд. ЛГУ, 1966.

12. Моденов П. С. и Новоселов С. И. Пособие по математике для поступающих в вузы. М., Изд. МГУ, 1966.

13. Петраков А. Г. Задачи по математике, предлагавшиеся на приемных экзаменах в МИФИ. М., 1963.

14. Потапов М. К., Розов Н. Х. и Дорофеев Г. В. Краткое пособие по математике для поступающих в МГУ. М., Изд. МГУ, 1964.

15. Романов М. Ф., Шаповалов В. В. Методическое пособие по математике (в помощь поступающим в Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина). Л., 1964.

16. Сивашинский И. Х. Задачник по элементарной математике. М., Изд. „Наука“, 1966.

17. Фаддеев Д. К. и Соминский И. С. Алгебра. Пособие для учителей средней школы. М., Учпедгиз, 1962.

18. Шахно К. У. Как готовиться к приемным экзаменам в вуз по математике. Минск, Изд. „Высшая школа“, 1968.

19. Шахно К. У. Сборник задач по элементарной математике повышенной трудности. Минск, Изд. „Высшая школа“, 1967.

Учебные пособия

1. Абрамович М. И. и Стародубцев М. Т. Учебное пособие по математике. Л., 1962.

2. Адамар Ж. Элементарная геометрия, ч. I. М., Учпедгиз, 1957.

3. Андреев П. П., Шувалова Э. З. Геометрия. М., Изд. „Наука“, 1964.

4. Ашкинузе В. Г. и Шоластер Н. Н. Алгебра и элементарные функции. Пособие для старших классов средней школы. М., Изд. „Просвещение“, 1964.

5. Беккенбах Э. и Беллман Р. Введение в неравенства. М., „Мир“, 1965.

6. Болтянский В. Г. и Яглом И. М. Геометрия. М., Изд., „Просвещение“, 1964.

7. Брадис В. М., Истомина Н. С., Маркушевич А. И., Сикорский К. П. Алгебра. Учебное пособие. М., 1960.

8. Бобров С. Волшебный двурог. М. — Л., „Детгиз“, 1949.

9. Вацек А. Повторяем математику. Прага, Изд. „Артия“, 1963.

10. Гельфанд И. М., Глаголева Е. Г., Кириллов А. А. Метод координат. М., Изд. „Наука“, 1968.

11. Гельфанд И. М., Глаголева Е. Г., Шноль Э. Э. Функции и графики. М., Изд. „Наука“, 1965.

12. Гельфанд С. И., Гервер М. Л., Кириллов А. А., Константинов Н. Н., Кушниренко А. Г. Задачи по элементарной математике. Последовательности, комбинаторика, пределы. М., Изд. „Наука“, 1965.

13. Гельфонд А. О. Решение уравнений в целых числах. М., Гостехиздат, 1957.

14. Головина Л. И. и Яглом И. М. Индукция в геометрии. М., Физматгиз, 1961.

15. Гольдберг А. Г. Функции и их исследование. Производная. Л., 1957.

16. Градштейн И. С. Прямая и обратная теоремы. М., Гостехиздат, 1950.

17. Гурский И. П. Функции и построение графиков. Пособие для учителей. М., Учпедгиз, 1961.

18. Гусев Ю. В. Сборник конкурсных задач по математике. Саратов, 1964.

19. Егерев В. Е., Лебедев В. П. Пособие по математике. М., 1962.

20. Зельдович Я. Б. Высшая математика для начинающих. М., Физматгиз, 1965.

21. Кузнецов Н., Полосуев А. О вступительных экзаменах по математике в Московском университете в 1967 году. М., „Наука и жизнь“, 1968, № 5.

22. Крейн С. Г., Ушакова В. Н. Математический анализ элементарных функций. М., „Наука“, 1966.

23. Коровкин П. П. Неравенства. М., Гостехиздат, 1956.

24. Крельштейн Б. И. Необходимые и достаточные условия в математике. М., Учпедгиз, 1961.

25. Маркушевич А. И. Действительные числа и основные принципы теории пределов. М., Изд. АПН, 1948.
26. Маркушевич А. И. Возвратные последовательности. М., Гостехиздат, 1950.
27. Маркушевич А. И. Замечательные кривые. М., Гостехиздат, 1962.
28. Маркушевич А. И. Комплексные числа и конформные отображения. М., Гостехиздат, 1954.
29. Маркушевич А. И. Ряды. Элементарный очерк. М., Физматгиз, 1961.
30. Марнянский И. А. Элементы математического анализа в школьном курсе математики. М., Изд. „Просвещение“, 1964.
31. Математика (алгебра). Учебное пособие для слушателей заочных курсов по подготовке в ЛИСИ. Л., 1964.
32. Милованов Л. Н. Функции и их исследование. М., 1958.
33. Натансон И. П. Простейшие задачи на максимум и минимум. М., Гостехиздат, 1956.
34. Натансон И. П. Суммирование бесконечно малых. М., Гостехиздат, 1956.
35. Натансон И. П. Краткий курс высшей математики. М. — Л., Физматгиз, 1963.
36. Новоселов С. И. Обратные тригонометрические функции. М., Учпедгиз, 1956.
37. Новоселов С. И. Специальный курс тригонометрии. М., Изд. „Высшая школа“, 1959.
38. Новоселов С. И. Специальный курс элементарной алгебры М., Изд. „Высшая школа“, 1965.
39. Панов Д. Ю. Вычисление площадей. М., Гостехиздат, 1946.
40. Парно И. К. Производная и ее применение к исследованию функций. Пособие для учителей и студентов. Кишинев, „Карта Молдовеняскэ“. 1963.
41. Пойа Д. Как решать задачу. М., Учпедгиз, 1959.
42. Потоцкий М. В. Что изучается в курсе математического анализа. М., Изд. „Просвещение“, 1965.
43. Розов Н. Х. О вступительных экзаменах на механико-математический факультет МГУ. „Математика в школе“, 1964, № 3.
44. Сивашинский. Неравенства в задачах. М., „Наука“, 1967.
45. Скопец З. А., Жаров В. А. Задачи и теоремы по геометрии (планиметрия). М., Учпедгиз, 1962.
46. Соминский И. С. Элементарная алгебра. Дополнительный курс. М., Физматгиз, 1963.
47. Соминский И. С. Метод математической индукции. М., Изд. „Наука“, 1965.
48. Туманов С. И. Элементарная алгебра. М., Учпедгиз, 1962.
49. Фаддеев Д. К. и Соминский И. С. Алгебра для самообразования. М., Изд. „Наука“, 1964.
50. Феликс Л. Элементарная математика в современном изложении. М., „Просвещение“, 1967.
51. Черкасов А. Н. Введение в высшую математику. М., Изд. „Наука“, 1964.
52. Шилов. Г. Е. Как строить графики. М., Физматгиз, 1959.
53 Яглом И. М. Комплексные числа и их применение в геометрии. М., Физматгиз, 1963.

Сборники задач

1. Абрамович М. И. и Стародубцев М. Т. Сборник задач по математике с образцами решений. Л., 1965.
2. Баранова И. В. и Ляпин С. Е. Задачи на доказательство по алгебре. Л., Учпедгиз, 1954.

3. Барыбин К. С., Исаков А. К. Сборник задач по математике. Пособие для учителей средней школы. М., Учпедгиз, 1955.

4. Башмаков М. И., Боревич З. И. Конкурсные задачи по математике. Л., Изд. ЛГУ, 1968.

5. Березанская Е. С. Колмогоров А. Н., Нагибин Ф. Ф., Черкасов Р. С. Сборник задач и вопросов по геометрии. М., Учпедгиз, 1962.

6. Березанская Е. С., Нагибин Ф. Ф. Сборник вопросов и упражнений по алгебре и тригонометрии. Пособие для учителей. М., Учпедгиз, 1955.

7. Васильев Н. В., Егоров А. А. Сборник подготовительных задач Всероссийской олимпиады юных математиков. Под редакцией акад. А. Н. Колмогорова. М., Учпедгиз, 1963.

8. Делоне Б. и Житомирский О. Задачник по геометрии. М., Гостехиздат, 1950.

9. Игнатьев В. А., Пономарев С. А., Обуховская Е. Н. Сборник задач и упражнений для устных занятий по математике. М., Учпедгиз, 1949.

10. Избранные задачи по элементарной математике. Минск, Изд. Белорусского ун-та, 1961.

11. Кипнис И. М. Сборник прикладных задач на неравенства. Пособие для учителей. М., Изд. „Просвещение", 1964.

12. Ривкинд. Я. И. Элементарные задачи по математическому анализу. Минск, Изд. „Высшая школа", 1965.

13. Шахно К. У. Пособие по математике для поступающих в высшие учебные заведения. Сборник конкурсных задач по математике с решениями. Минск, Изд. „Высшая школа", 1962.

14. Шахно К. У. Сборник задач по математике. Пособие для учителей. Л., Учпедгиз, 1956.

15. Штейнгауз Г. Сто задач. М., Физматгиз, 1959.

16. Шустеф Ф. М., Фельдман А. М., Гуревич В. Ю. Сборник олимпиадных задач по математике. Минск, Изд. „Народная асвета", 1965.

17. Сборник задач московских математических олимпиад. М., Изд. „Просвещение", 1965.

Справочники

1. Бронштейн И. Н. и Семендяев К. А. Справочник по математике. М., Изд. „Наука", 1964.

2. Выгодский М. Я. Справочник по элементарной математике. М., Физматгиз, 1962.

3. Справочник по элементарной математике и физике. Минск, Госиздат БССР, 1960.

4. Шахно К. У. Справочник по математике. Минск, Изд. „Высшая школа", 1967.

5. Швецов К. И., Бевз Г. П. Справочник по элементарной математике. Арифметика, алгебра. Киев, Изд. „Наукова думка", 1965.

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
38	15 сверху	$2\left(2^{\sqrt{x+3}}\right)^{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}$	$2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2}}$
38	1 снизу	$\frac{2^{2x+4}}{2^{x+1}}$	$\frac{2^{2x+4}}{2^{x+8}}$
39	8 снизу	$x+\sqrt{x^2-2}$	$x+\sqrt{x^2-2}=2$
88	12 снизу	рис. 25	рис. 27
90	3 сверху	рис. 27	рис. 25

Зак.Д-852

Цена 69 коп.