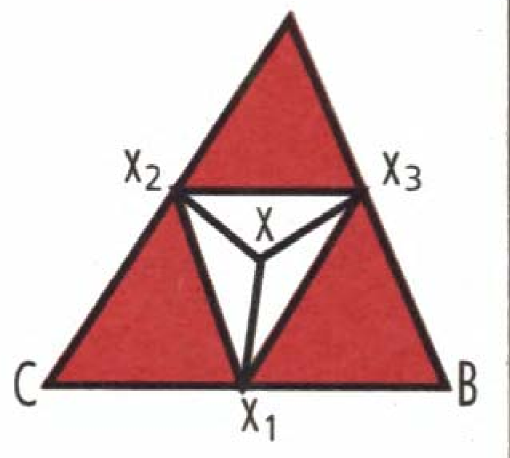
И. Кушнир

Шедевры школьной МАТЕМАТИКИ

$$S = \frac{S}{4}\left(1 - \frac{OX^2}{R^2}\right)$$

КНИГА 2



Задачи с решениями

И. Кушнир Шедевры школьной математики
2

И. Кушнир

Шедевры школьной МАТЕМАТИКИ

Рекомендуется лабораторией
математики
Киевского Межрегионального
института усовершенствования
учителей
им. Б. Гринченко

АСТАРТА
КИЕВ
1995

ББК 22.1
К13

Книга написана Заслуженным учителем Украины, лауреатом фонда Сороса.

В двух томах собраны более тысячи задач с решениями золотого фонда школьной и конкурсной математики (алгебра, тригонометрия, начала математического анализа, геометрия).

Для учащихся общеобразовательных школ, колледжей, гимназий, классов с углубленным изучением математики, абитуриентов, студентов университетов, преподавателей.

ББК 22.1

ISBN 5–7707–8248–X
ISBN 5–7707–8250–1

Глава I. ТРИГОНОМЕТРИЯ

1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Задача 1.

Вычислить, не прибегая к таблицам, следующие произведения:

1) $\cos 4° \cdot \cos 8° \cdot \ldots \cdot \cos 84° \cdot \cos 88°$;

2) $\cos 12° \cdot \cos 24° \cdot \ldots \cdot \cos 72° \cdot \cos 84°$;

3) $\cos 1° \cdot \cos 3° \cdot \ldots \cdot \cos 87° \cdot \cos 89°$;

4) $\cos 5° \cdot \cos 15° \cdot \ldots \cdot \cos 75° \cdot \cos 85°$.

Решение.

1) Очевидно, что $\cos 4° \cdot \cos 86° = \frac{1}{2}\cos 82°$;

$$\cos 8° \cdot \cos 82° = \frac{1}{2}\cos 74°;$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cos 88° \cdot \cos 2° = \frac{1}{2}\cos 86°.$$

Перемножив почленно эти равенства и упростив произведения, получим

$$\cos 4° \cdot \cos 8° \cdot \ldots \cdot \cos 88° = \left(\frac{1}{2}\right)^{22}.$$

2) Аналогично, $\cos 12° \cdot \cos 78° = \frac{1}{2}\cos 66°$;

$$\cos 24° \cdot \cos 66° = \frac{1}{2}\cos 42°;$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cos 84° \cdot \cos 6° = \frac{1}{2}\cos 78° \text{ или}$$

$$\cos 12° \cdot \cos 24° \cdot \ldots \cdot \cos 84° = \left(\frac{1}{2}\right)^{7}.$$

3) Перемножив почленно равенства

$$\cos 1^\circ \cdot \cos 89^\circ = \frac{1}{2}\cos 88^\circ;$$

$$\cos 3^\circ \cdot \cos 87^\circ = \frac{1}{2}\cos 84^\circ;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cos 89^\circ \cdot \cos 1^\circ = \frac{1}{2}\cos 88^\circ, \text{ получим}$$

$$x^2 = (\cos 1^\circ \cdot \cos 3^\circ \cdot \ldots \cdot \cos 89^\circ)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{45} (\cos 88^\circ \cdot \cos 84^\circ \cdot \ldots \cos 4^\circ)^2.$$

Учитывая результат первого примера, находим

$$x^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{45} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{44}, \text{ откуда } x = \left(\frac{1}{2}\right)^{45} \cdot \sqrt{2}.$$

4) Имеем: $\cos 5^\circ \cdot \cos 85^\circ = \frac{1}{2}\cos 80^\circ;$

$$\cos 15^\circ \cdot \cos 75^\circ = \frac{1}{2}\cos 60^\circ;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cos 85^\circ \cdot \cos 5^\circ = \frac{1}{2}\cos 80^\circ. \text{ Отсюда}$$

$$x^2 = (\cos 5^\circ \cdot \cos 15^\circ \cdot \ldots \cdot \cos 85^\circ)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{9} (\cos 80^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \ldots \cos 40^\circ \cdot \cos 20^\circ).$$

Но $\cos 20^\circ \cdot \cos 70^\circ = \frac{1}{2}\cos 50^\circ;$

$$\cos 40^\circ \cdot \cos 50^\circ = \frac{1}{2}\cos 10^\circ;$$

$$\cos 60^\circ \cdot \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\cos 30^\circ;$$

$$\cos 80^\circ \cdot \cos 10^\circ = \frac{1}{2}\cos 70^\circ.$$

После почленного умножения и упрощения получаем $\cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 60° \cdot \cos 80° = \left(\frac{1}{2}\right)^4$. Таким образом,

$$x^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{18} \text{ и } x = \left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot \sqrt{2}.$$

Задача 2.

Вычислить $\sin 1° \cdot \sin 3° \cdot \sin 5° \cdot \ldots \cdot \sin 89°$.

Решение.

Обозначим $x = \sin 1° \cdot \sin 3° \cdot \sin 5° \cdot \ldots \cdot \sin 89°$. Поскольку $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$, то $\sin 89° = \cos 1°$;

$$\sin 88° = \cos 2°; \quad \sin 87° = \cos 3°;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sin 46° = \cos 44°.$$

Тогда

$$A = \sin 45°(\sin 1° \cdot \cos 1°)(\sin 2° \cdot \cos 2°) \cdot \ldots \cdot (\sin 44° \cdot \cos 44°) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sin 2°}{2} \cdot \frac{\sin 4°}{2} \cdot \frac{\sin 6°}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{\sin 88°}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2^{45}}(\sin 2° \cdot \sin 4° \cdot \ldots \cdot \sin 88°);$$

$$x = \frac{A}{\sin 2° \cdot \sin 4° \cdot \ldots \cdot \sin 88°} = \frac{\sqrt{2}}{2^{45}}.$$

Задача 3.

Доказать: $\mathrm{tg}^2\, 10° + \mathrm{tg}^2\, 50° + \mathrm{tg}^2\, 70° = 9$.

Доказательство.

$$A = \sec^2 10° + \sec^2 50° + \sec^2 70° - 3 =$$

$$= \frac{64}{3}(\cos^2 50° \cdot \cos^2 70° + \cos^2 70° \cdot \cos^2 10° + \cos^2 10° \cdot \cos^2 50°) -$$

$$- 3 = \frac{64}{3} \cdot \frac{1}{4}((1 - \cos 80°)(1 - \cos 40°) +$$

$$+ (1 - \cos 40°)(1 + \cos 20°) + (1 + \cos 20°)(1 - \cos 80°)) - 3 =$$

$$= \frac{16}{3}(3 - 2(\cos 40° + \cos 80° - \cos 20°) + \cos 80° \cdot \cos 40° -$$

$$- \cos 40° \cdot \cos 20° - \cos 20° \cdot \cos 80°) - 3 = \frac{16}{3}(3 - 2 \cdot 0 +$$

$$+ \frac{1}{2}(\cos 120° + \cos 40° - \cos 60° - \cos 20° + \cos 80° - \cos 60°)) -$$

$$- 3 = \frac{16}{3}\left(3 - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(\cos 80° + \cos 40° - \cos 20°)\right) - 3 =$$

$$= \frac{16}{3} \cdot \frac{9}{4} - 3 = 9.$$

Задача 4.

Доказать, что $\sin 1°$ — иррациональное число.

Доказательство.

Предположим, что $\sin 1°$ — рациональное число, т.е. $\sin 1° = \frac{m}{n}$, где m и n — целые числа. Тогда

$$\cos^2 1° = 1 - \sin^2 1° \text{ и } \cos^2 1° - \sin^2 1° = \cos 2° \text{ —}$$

тоже числа рациональные.

Аналогично, получим, что $\cos 4° = 2\cos^2 2° - 1$;

$$\cos 8° = 2\cos^2 4° - 1; \quad \cos 16° = 2\cos^2 8° - 1 \text{ —}$$

тоже рациональные числа. Далее

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30° = \cos(32° - 2°) = \cos 32° \cdot \cos 2° + \sin 32° \cdot \sin 2° =$$

$$= (2\cos^2 16° - 1)\cos 2° + 2^4 \cos 16° \cdot \cos 8° \cdot \cos 4° \cdot \cos 2° \cdot \sin 2°.$$

Получим противоречие, так как слева стоит иррациональное число, а справа — рациональное.

Задача 5.

Вычислить:

1) $\lg \operatorname{tg} 30° \cdot \lg \operatorname{tg} 31° \cdot \ldots \cdot \lg \operatorname{tg} 60°$;

2) $\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{16} + \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi}{16} + \ldots + \operatorname{tg}^2 \frac{7\pi}{16}$.

Решение.

1) Так как $\operatorname{tg} 45° = 1$, а $\lg 1 = 0$, то заданное произведение равно 0.

2) $\operatorname{tg}^2 \frac{4\pi}{16} = \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4} = 1.$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{7\pi}{16} = \operatorname{ctg}^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{16}\right) = \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{16}.$$ Аналогично,

$$\operatorname{tg}^2 \frac{6\pi}{16} = \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{16}; \quad \operatorname{tg}^2 \frac{5\pi}{16} = \operatorname{ctg}^2 \frac{3\pi}{16}.$$

Теперь сумма примет вид:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{16} + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{16} + \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi}{16} + \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{16} + \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi}{16} + \operatorname{ctg}^2 \frac{3\pi}{16} + 1 =$$

$$= \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{16} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{16}\right)^2 - 2 + \left(\operatorname{tg} \frac{2\pi}{16} + \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{16}\right)^2 - 2 +$$

$$+ \left(\operatorname{tg} \frac{3\pi}{16} + \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{16}\right)^2 - 2 + 1 = 4\left(\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{8}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{4}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{3\pi}{8}}\right) - 5.$$

Поскольку $\sin^2 \frac{3\pi}{8} = \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8}\right) = \cos^2 \frac{\pi}{8}$, то

$$\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{8}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{3\pi}{8}} = \frac{4}{\sin^2 \frac{\pi}{4}}.$$ Значит,

$$4\left(\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{8}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{4}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{3\pi}{8}}\right) - 5 = 4 \cdot \frac{5}{\sin^2 \frac{\pi}{4}} - 5 = 40 - 5 = 35.$$

Ответ: 35.

Задача 6.

Доказать равенство

$$\cos 12° \cdot \cos 24° \cdot \cos 48° \cdot \cos 84° = \frac{1}{16}.$$

Доказательство.

Пусть $\cos 12° \cdot \cos 24° \cdot \cos 48° \cdot \cos 84° = x$, тогда

$$x \cdot \sin 12^\circ = \frac{1}{2}\sin 24^\circ \cdot \cos 24^\circ \cdot \cos 48^\circ \cdot \cos 84^\circ =$$

$$\frac{1}{4}\sin 48^\circ \cdot \cos 48^\circ \cdot \cos 84^\circ = \frac{1}{8}\sin 96^\circ \cdot \cos 84^\circ =$$

$$= \frac{1}{8}\sin 84^\circ \cdot \cos 84^\circ = \frac{1}{16}\sin 168^\circ = \frac{1}{16}\sin 12^\circ.$$

Отсюда: $x = \frac{1}{16}$.

Задача 7.

Доказать:

$\operatorname{ctg} 80^\circ \cdot \operatorname{ctg} 70^\circ + \operatorname{ctg} 70^\circ \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ + \operatorname{ctg} 30^\circ \cdot \operatorname{ctg} 80^\circ = 1.$

Доказательство.

$$\operatorname{ctg} 80^\circ \cdot \operatorname{ctg} 70^\circ + \operatorname{ctg} 70^\circ \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ + \operatorname{ctg} 30^\circ \cdot \operatorname{ctg} 80^\circ =$$

$$= \operatorname{tg} 10^\circ \cdot \operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 10^\circ =$$

$$= \operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ (\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 10^\circ).$$

Применяя формулу $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha+\beta)(1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta)$, имеем:

$$\operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ (\operatorname{tg} 30^\circ (1 - \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 10^\circ)) = \operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 20^\circ +$$

$$+\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1 - \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 10^\circ)\right) = \operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 20^\circ + 1 - \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 10^\circ = 1.$$

Задача 8.

Найти острые углы α и β, если

$$\cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha+\beta) = 1{,}5.$$

Решение.

Имеем последовательно: $\cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha+\beta) = 1{,}5$,

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} + 1 = 1{,}5;$$

$$\left(4\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right) -$$

$$- \cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} + 1 = 0,$$

$$\left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2+\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=0.$$

Отсюда из равенства $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0$ следует, что $\alpha=\beta$ (α и β — углы острые), а из равенства

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \text{ при } \alpha=\beta \text{ следует, что}$$

$$2\cos\alpha=1, \text{ т.е. } \alpha=\frac{\pi}{3}. \text{ Итак, } \alpha=\beta=\frac{\pi}{3}.$$

Задача 9.

Упростить выражение

$$(\sin\alpha+\operatorname{cosec}\alpha)^2+(\cos\alpha+\sec\alpha)^2-(\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha).$$

Решение.

Раскрывая скобки, получим:

$$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\operatorname{cosec}\alpha+\operatorname{cosec}^2\alpha+\cos^2\alpha+$$
$$+2\cos\alpha\sec\alpha+\sec^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha.$$

Сгруппировав соответствующим образом, найдем:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\operatorname{cosec}\alpha+2\cos\alpha\sec\alpha+$$
$$(\operatorname{cosec}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha)+(\sec^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha)=1+2+2+1+1=7.$$

Итак, данное выражение равно 7, т.е. оно не зависит от α.

Задача 10.

Вычислить $\operatorname{ctg}70^\circ+4\cos70^\circ$.

Решение.

$$\operatorname{ctg}70^\circ+4\cos70^\circ=\frac{\cos70^\circ+4\cos70^\circ\cdot\sin70^\circ}{\sin70^\circ}=$$

$$=\frac{\sin20^\circ+2\sin40^\circ}{\sin70^\circ}=\frac{2\sin30^\circ\cdot\cos10^\circ+\sin40^\circ}{\sin70^\circ}=$$

$$=\frac{\cos10^\circ+\sin40^\circ}{\sin70^\circ}=\frac{\sin80^\circ+\sin40^\circ}{\sin70^\circ}=$$

$$= \frac{2\sin 60^\circ \cdot \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Задача 11.

Доказать, что $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{11} + 4\sin\frac{2\pi}{11} = \sqrt{11}.$

Доказательство.

$$\operatorname{tg}^2\frac{3\pi}{11} + 16\sin^2\frac{2\pi}{11} + 8\operatorname{tg}\frac{3\pi}{11}\sin\frac{2\pi}{11} = 11;$$

$$\frac{1}{\cos^2\frac{3\pi}{11}}\left(\sin^2\frac{3\pi}{11} + 8\sin\frac{3\pi}{11}\sin^2\frac{\pi}{11}\cos\frac{3\pi}{11} + \right.$$

$$\left. + 16\sin^2\frac{2\pi}{11}\cos^2\frac{2\pi}{11} - 11\cos^2\frac{3\pi}{11}\right) = 0;$$

$$1 - 12\cos^2\frac{3\pi}{11} + 8\sin\frac{3\pi}{11}\sin\frac{2\pi}{11}\cos\frac{3\pi}{11} +$$

$$+ 4\left(1 - \cos\frac{4\pi}{11}\right)\left(1 + \cos\frac{6\pi}{11}\right) = 0;$$

$$1 - 6\left(1 + \cos\frac{6\pi}{11}\right) + 4\sin\frac{6\pi}{11}\sin\frac{2\pi}{11} +$$

$$+ 4\left(1 - \cos\frac{4\pi}{11}\right)\left(1 + \cos\frac{6\pi}{11}\right) = 0;$$

$$-5 - 6\cos\frac{6\pi}{11} + 2\cos\frac{4\pi}{11} - 2\cos\frac{8\pi}{11} +$$

$$+ 4\left(1 + \cos\frac{6\pi}{11} - \cos\frac{4\pi}{11} - \cos\frac{4\pi}{11}\cos\frac{6\pi}{11}\right) = 0;$$

$$-5 - 6\cos\frac{6\pi}{11} + 2\cos\frac{4\pi}{11} - 2\cos\frac{8\pi}{11} + 4 + 4\cos\frac{6\pi}{11} -$$

$$- 4\cos\frac{4\pi}{11} - 4\cos\frac{4\pi}{11}\cos\frac{6\pi}{11} = 0;$$

$$-1 - 2\cos\frac{6\pi}{11} - 2\cos\frac{4\pi}{11} - 2\cos\frac{8\pi}{11} - 2\cos\frac{10\pi}{11} - 2\cos\frac{2\pi}{11} = 0;$$

$$-1-2\left(\cos\frac{2\pi}{11}+\cos\frac{4\pi}{11}+\cos\frac{6\pi}{11}+\cos\frac{8\pi}{11}+\cos\frac{10\pi}{11}\right)=0;$$

$$-1-2\left(-\frac{1}{2}\right)=0.$$

Задача 12.

Вычислить $\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{7}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{7}$.

Решение.

Вычислим

$$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{\left(\cos\frac{\pi}{7}\right)^2}\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}=$$

$$=\frac{1}{4\sin\frac{\pi}{7}}\cdot 2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{8\sin\frac{\pi}{7}}2\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}=$$

$$=\frac{1}{8\sin\frac{\pi}{7}}2\cdot\sin\frac{3\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{8}.$$

Теперь вычислим произведение квадратов синусов:

$$8\sin^2\frac{\pi}{7}\sin^2\frac{2\pi}{7}\sin^2\frac{3\pi}{7}=\left(1-\cos\frac{2\pi}{7}\right)\left(1-\cos\frac{4\pi}{7}\right)\left(1-\cos\frac{6\pi}{7}\right).$$

Имеем далее:

$$8\sin^2\frac{\pi}{7}\sin^2\frac{2\pi}{7}\sin^2\frac{3\pi}{7}=1-\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}=$$

$$=1-\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}=\frac{7}{8}.$$

Задача 13.

Доказать:

$$\cos\frac{\pi}{20}\cos\frac{3\pi}{20}\cos\frac{7\pi}{20}\cos\frac{9\pi}{20}=-\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}.$$

Доказательство.

Рассмотрим левую часть равенства:

$$\cos\frac{\pi}{20}\cos\frac{9\pi}{20}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{5};$$

$$\cos\frac{3\pi}{20}\cos\frac{7\pi}{20}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{5}.$$

Итак, $\frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{5}\sin\left(\frac{\pi}{5}-\frac{2\pi}{5}\right)=$

$$=\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1}{16}.$$

Аналогично доказывается, что правая часть равенства равна $\frac{1}{16}$.

Задача 14.

Доказать: $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{tg}2\alpha=4\operatorname{ctg}4\alpha$.

Доказательство. Первый способ.

$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{tg}2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}-2\operatorname{tg}2\alpha=$$

$$=\frac{2\cos2\alpha}{\sin2\alpha}-\frac{2\sin2\alpha}{\cos2\alpha}=\frac{2(\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha)}{\sin2\alpha\cos2\alpha}=$$

$$=\frac{4\cos4\alpha}{\sin4\alpha}=4\operatorname{ctg}4\alpha.$$

Второй способ.

Для угла α имеет место соотношение

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\alpha-2\operatorname{ctg}2\alpha. \qquad (1)$$

Для угла 2α имеет место соотношение

$$\operatorname{tg}2\alpha=\operatorname{ctg}2\alpha-\operatorname{ctg}4\alpha. \qquad (2)$$

Сложим (1) и (2):

$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha+2\operatorname{ctg}2\alpha-2\operatorname{ctg}2\alpha+4\operatorname{ctg}4\alpha=4\operatorname{tg}4\alpha.$$

Задача 15.

Докажите равенство:

$$\cos2\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=\frac{1}{4}\sin2\alpha\cdot\sin4\alpha.$$

Доказательство.

$$\cos 2\alpha - \cos^8\alpha + \sin^8\alpha = \cos 2\alpha +$$
$$+ (\sin^4\alpha - \cos^4\alpha)(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) =$$
$$= \cos 2\alpha + (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) =$$
$$= \cos 2\alpha + (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 -$$
$$- 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \cos 2\alpha - \cos 2\alpha\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha\right) =$$
$$= \cos 2\alpha\left(1 - 1 + \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha\right) = \frac{1}{2}\cos 2\alpha\sin^2 2\alpha =$$
$$= \frac{1}{4}\sin 4\alpha\sin 2\alpha,$$

$$\frac{1}{4}\sin 4\alpha \cdot \sin 2\alpha = \frac{1}{4}\sin 4\alpha \cdot \sin 2\alpha.$$

Задача 16.

Если уравнение

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

имеет корни $\operatorname{tg}\alpha_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2$, $\operatorname{tg}\alpha_3$, а уравнение

$$y^3 + cy^2 + by + a = 0 \qquad (2)$$

имеет корни $\operatorname{tg}\beta_1$, $\operatorname{tg}\beta_2$, $\operatorname{tg}\beta_3$, то $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = k\pi$, где k — целое. Доказать.

Доказательство.

Из уравнения (1) по известным формулам имеем:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2 + \operatorname{tg}\alpha_3 = -a;$$
$$\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2 + \operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_3 + \operatorname{tg}\alpha_3\operatorname{tg}\alpha_1 = b; \qquad (3)$$
$$\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_3 = -c.$$

По формуле для тангенса суммы трех углов:

$$\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2 + \operatorname{tg}\alpha_3 - \operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_3}{1 - \operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_3 - \operatorname{tg}\alpha_3\operatorname{tg}\alpha_1}.$$

Значит (учитывая соотношение (3)),

$$\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \frac{-a + c}{1 - b}. \tag{4}$$

Аналогично из уравнения (2) найдем:

$$\operatorname{tg}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) = \frac{-c + a}{1 - b}. \tag{5}$$

Из (4) и (5) находим:

$$\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = -\operatorname{tg}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) = \operatorname{tg}(-\beta_1 - \beta_2 - \beta_3),$$

откуда заключаем, что

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = k\pi.$$

Задача 17.

Докажите тождество: $\operatorname{tg} 4\alpha + \sec 4\alpha = \dfrac{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha}$.

Доказательство.

Рассмотрис левую часть тождества:

$$\operatorname{tg} 4\alpha + \sec 4\alpha = \frac{\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha} + 1 - 1 + \frac{1}{\cos 4\alpha} =$$

$$= \frac{1 + \sin 4\alpha}{\cos 4\alpha} = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4\alpha\right)}{\cos 4\alpha} = \frac{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right)}{\cos 4\alpha}.$$

Докажем, что этой дроби равна правая часть тождества.

$$\frac{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha} = \frac{\cos 2\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)}{\cos 2\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)} =$$

$$= \frac{2\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right)}{2\sin\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right)} = \frac{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 4\alpha\right)} = \frac{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right)}{\cos 4\alpha}.$$

Заданное тождество доказано.

Задача 18.

Докажите, что:

а) $\operatorname{tg} 20° + 4 \sin 20° = \sqrt{3}$;

б) $\operatorname{tg} 7°30' = \sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{3} - 2$.

Доказательство.

а) $$\operatorname{tg} 20° + 4 \sin 20° = \frac{\sin 20° + 4 \sin 20° \cos 20°}{\cos 20°} =$$

$$= \frac{\sin 20° + 2 \sin 40°}{\cos 20°} = \frac{\sin 20° + \sin 40° + \sin 40°}{\cos 20°} =$$

$$= \frac{2 \sin 30° \cos 10° + \cos 50°}{\cos 20°} = \frac{\cos 10° + \cos 50°}{\cos 20°} =$$

$$= \frac{2 \cos 30° \cos 20°}{\cos 20°} = \sqrt{3}.$$

б) $$\operatorname{tg} 7°30' = \frac{1 - \cos 15°}{\sin 15°} = \frac{1 - \sqrt{\dfrac{1 + \cos 30°}{2}}}{\sqrt{\dfrac{1 - \cos 30°}{2}}} =$$

$$= \frac{1 - \sqrt{\dfrac{1 + \sqrt{3}/2}{2}}}{\sqrt{\dfrac{1 - \sqrt{3}/2}{2}}} = \frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}} =$$

$$= \frac{(2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}})\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{1} = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}} - 2 - \sqrt{3}.$$

Но

$$\sqrt{6} + \sqrt{2} = (\sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{2}})^2 = \sqrt{6 + 2\sqrt{12} + 2} = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} =$$

$= 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$, т.е. $\operatorname{tg} 7°30' = \sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{3} - 2$.

Задача 19.

Докажите равенство

$$\frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = \frac{(1 + \sqrt{\cos x})^n - (1 - \sqrt{\cos x})^n}{(1 + \sqrt{\cos x})^n + (1 - \sqrt{\cos x})^n},$$

если известно, что

$$(a^2+b^2)\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=2ab,\quad a>b>0,\quad x\in\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right).$$

Доказательство.

Так как $(a^2+b^2)\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=2ab$, то $\dfrac{a^2+b^2}{2ab}=\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}$;

$$\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right).$$

Обозначим $\dfrac{a}{b}=x_1$, $\dfrac{b}{a}=x_2$. Тогда

$$x_1\cdot x_2=1,\ x_1+x_2=2\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

Поэтому x_1 и x_2 являются корнями уравнения

$$x^2-2\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}x+1=0.$$

Решив его, находим:

$$x_1=\frac{1+\sqrt{\cos\alpha}}{1-\sqrt{\cos\alpha}},\quad x_2=\frac{1-\sqrt{\cos\alpha}}{1+\sqrt{\cos\alpha}}.$$

Так как $\dfrac{1-\sqrt{\cos\alpha}}{1+\sqrt{\cos\alpha}}=\dfrac{b}{a}$, то $\dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}=\dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)^n-1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n+1}=$

$$=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{\cos\alpha}-1}{1-\sqrt{\cos\alpha}}\right)^n-1}{\left(\frac{1+\sqrt{\cos\alpha}-1}{1-\sqrt{\cos\alpha}}\right)^n+1}=\frac{(1+\sqrt{\cos\alpha})^n-(1-\sqrt{\cos\alpha})^n}{(1+\sqrt{\cos\alpha})^n+(1-\sqrt{\cos\alpha})^n}.$$

Задача 20.

Вычислите без таблиц:

$$\sin\frac{\pi}{64}\cdot\sin\frac{3\pi}{64}\cdot\sin\frac{5\pi}{64}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{31\pi}{64}.$$

Решение.

Преобразуем произведения пар множителей, равноотстоящих от концов данного произведения:

$$\sin\frac{\pi}{64}\cdot\sin\frac{31\pi}{64} = \sin\frac{\pi}{64}\cdot\cos\frac{\pi}{64} = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{32}.$$

Аналогично можно преобразовать каждую пару и других указанных множителей.

Тогда получим:

$$\frac{1}{2^8}\sin\frac{\pi}{32}\cdot\sin\frac{3\pi}{32}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{15\pi}{32} =$$

$$= \frac{1}{2^8}\cdot\frac{1}{2^4}\sin\frac{\pi}{16}\cdot\sin\frac{3\pi}{16}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{7\pi}{16} =$$

$$= \frac{1}{2^8}\cdot\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1}{2^2}\sin\frac{\pi}{8}\cdot\sin\frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2^8}\cdot\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2^{16}}.$$

Задача 21.

Доказать, что $a\sin\alpha + b\cos\alpha$ не зависит от α, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{b}$.

Доказательство.

Воспользовавшись формулами, выражающими тригонометрические функции $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ через тангенс половинного аргумента, получим:

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \frac{a\,2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{b\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{2a^2}{b} + b\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)}{1+\frac{a^2}{b^2}} = \frac{\frac{a^2+b^2}{b}}{\frac{a^2+b^2}{b^2}} = b.$$

Задача 22.

Углы треугольника связаны соотношением:

$$\sin\alpha = 2\sin\beta\cdot\cos\gamma.$$

Доказать, что треугольник равнобедренный.

Доказательство.

$$\sin\alpha = 2\sin\beta\cos\gamma = \sin(\beta+\gamma) + \sin(\beta-\gamma).$$

Но так как α, β и γ — углы треугольника, то $\sin(\beta+\gamma) = \sin\alpha$. Поэтому $\sin\alpha = \sin\alpha + \sin(\beta-\gamma)$. Отсюда $\sin(\beta-\gamma) = 0$, и так как β и γ — углы треугольника, то $\gamma = \beta$, а значит, $b = c$.

Задача 23.

В треугольнике его углы α и β связаны соотношением:

$$\cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha+\beta) = \frac{3}{2}.$$

Доказать, что треугольник правильный.

Доказательство.

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos(\alpha+\beta) = 2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - 1.$$

Следовательно, заданное равенство можно преобразовать так:

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{1}{2} = 0;$$

$$\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{1}{4} = 0;$$

$$\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} = 0;$$

$$\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} = 0.$$

Но сумма квадратов действительных чисел тогда и только тогда равна нулю, когда каждое из этих чисел равно нулю. Отсюда

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 0 \text{ и } \cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 0.$$

Из первого, учитывая, что α и β — углы треугольника, получим $\alpha = \beta$. Тогда, подставив $\alpha = \beta$ во второе, найдем:

$$\cos\alpha - \frac{1}{2} = 0; \ \ \cos\alpha = \frac{1}{2}; \ \ \alpha = 60^\circ.$$

Итак, $\alpha = \beta = 60^\circ$. Тогда и третий угол равен 60°, т.е. треугольник правильный.

Задача 24.

Доказать, что $\sqrt{33 - 16\sqrt{3}\sin 80^\circ} = 1 + 8\sin 10^\circ$.

Доказательство.

Имеем

$$(1 + 8\sin 10^\circ)^2 = 1 + 16\sin 10^\circ + 64\sin^2 10^\circ =$$
$$= 1 + 32(\sin 30^\circ \cdot \sin 10^\circ - \cos 20^\circ + 1) = 33 +$$
$$+ 32(\sin 30^\circ \sin 10^\circ - \cos(30^\circ - 10^\circ)) = 33 +$$
$$+ 32(-\cos 30^\circ \cos 10^\circ) = 33 - 16\sqrt{3}\sin 80^\circ.$$

Задача 25.

Доказать справедливость равенства

$$\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 80^\circ = 8\sin 40^\circ + \sqrt{3}.$$

Доказательство.

Имеем:

$$A = \operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 80^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ =$$
$$= \frac{\sin 60^\circ}{\cos 20^\circ \cos 40^\circ} + \frac{\sin 20^\circ}{\cos 80^\circ \cos 60^\circ} =$$
$$= \frac{\sin 60^\circ \cos 80^\circ}{\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ} + 4\cos 10^\circ =$$
$$= 8\sin 60^\circ \sin 10^\circ + 4\cos 10^\circ,$$

так как $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$. Итак,

$$A = 4(\cos 50^\circ - \cos 70^\circ + \cos 10^\circ) =$$
$$= 4(\sin 40^\circ + 2\sin 40^\circ \sin 30^\circ) = 8\sin 40^\circ,$$

и окончательно:

$$\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 80^\circ = 8 \sin 40^\circ + \sqrt{3}.$$

Задача 26.

Упростить: $\dfrac{\cos^3 \alpha - \cos 3\alpha}{\cos \alpha} + \dfrac{\sin^3 \alpha + \sin 3\alpha}{\sin \alpha}$.

Решение.

Имеем $\cos^3 \alpha = \dfrac{\cos 3\alpha + 3\cos \alpha}{4}$; $\sin^3 \alpha = \dfrac{3\sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}$.

Значит,

$$\frac{\cos 3\alpha + 3\cos \alpha - 4\cos 3\alpha}{4\cos \alpha} + \frac{3\sin \alpha - \sin 3\alpha + 4\sin 3\alpha}{4\sin \alpha} =$$

$$= \frac{3}{2\sin 2\alpha}(\cos \alpha \sin \alpha - \cos 3\alpha \sin \alpha + \sin \alpha \cos \alpha +$$

$$+ \sin 3\alpha \cos \alpha) = \frac{3 \cdot 2\sin 2\alpha}{2\sin 2\alpha} = 3.$$

Задача 27.

Доказать: $\operatorname{tg} 55^\circ \cdot \operatorname{tg} 65^\circ \cdot \operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg} 85^\circ$.

Доказательство.

Умножим обе части доказываемого тождества на

$$\operatorname{tg} 5^\circ = \operatorname{ctg} 85^\circ$$

и воспользуемся формулой

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) \operatorname{tg}(60^\circ + \alpha). \text{ Тогда}$$

$$\underbrace{\operatorname{tg} 5^\circ \cdot \operatorname{tg} 55^\circ \cdot \operatorname{tg} 65^\circ}_{\operatorname{tg} 15^\circ} \cdot \operatorname{tg} 75^\circ = \underbrace{\operatorname{tg} 85^\circ \cdot \operatorname{ctg} 85^\circ}_{1}$$

и поскольку $\operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{ctg} 75^\circ \cdot \operatorname{tg} 75^\circ = 1$, то утверждение задачи доказано.

Задача 28.

Доказать: $1 - 2\sin 50^\circ = \dfrac{1}{2}\sec 160^\circ$.

Доказательство.

$$1 - 2\sin 50^\circ = 1 - 2\cos 40^\circ = 1 - 2(2\cos^2 20^\circ - 1) =$$

$$= 3 - 4\cos^2 20^\circ.$$

Домножим и разделим на $\cos 20°$. Применим формулу $\cos 3\alpha$. Имеем

$$-\frac{\cos 60°}{\cos 20°} = -\frac{1}{2\cos 20°} = -\frac{1}{2}\sec 20° = \frac{1}{2}\sec 160°.$$

Задача 29.

Доказать:

$$A = \cos\frac{1}{15}\pi \cdot \cos\frac{2}{15}\pi \cdot \cos\frac{3}{15}\pi \cdot \ldots \cdot \cos\frac{14}{15}\pi = -\frac{1}{2^{14}}.$$

Доказательство. Первый способ.

$$A = \left(\cos\frac{1}{15}\pi \cdot \cos\frac{14}{15}\pi\right)\left(\cos\frac{2}{15}\pi \cdot \cos\frac{13}{15}\pi\right) \cdot \ldots \cdot$$

$$\cdot \left(\cos\frac{7}{15}\pi \cdot \cos\frac{8}{15}\pi\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{13}{15}\pi - 1\right) \cdot \frac{1}{2}\left(\cos\frac{11}{15}\pi - 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\cos\frac{1}{15}\pi - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{2^7}(-2)\sin^2\frac{13}{30}\pi \cdot (-2)\sin^2\frac{11}{30}\pi \cdot \ldots \cdot (-2)\sin^2\frac{\pi}{30} =$$

$$= -\sin^2\frac{5\pi}{30}\left(\sin\frac{\pi}{30} \cdot \sin\frac{11}{30}\pi \cdot \sin\frac{9}{30}\pi\right)^2 \times$$

$$\times \left(\sin\frac{3}{30}\pi \cdot \sin\frac{13}{30}\pi \cdot \sin\frac{7}{30}\pi\right)^2 =$$

(поскольку выражения, стоящие в скобках, суть $\sin 3\alpha$)

$$= \frac{1 \cdot \sin^2\frac{3\pi}{30} \cdot \sin^2\frac{9\pi}{30}}{4 \cdot 16 \cdot 16} = -\frac{1}{4}\frac{(\sin 18° \cdot \sin 54°)^2}{4 \cdot 16^2} = -\frac{1}{2^{14}}.$$

Второй способ.

Пусть $\cos\frac{1}{15}\pi = \cos\alpha$.

$$\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 3\alpha \cdot \ldots \cdot \cos 14\alpha =$$

$$= \frac{2\cos\alpha\sin\alpha\, 2\cos 2\alpha\sin 2\alpha \ldots 2\sin 14\alpha\cos 14\alpha}{2^{14}\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha\ldots\sin 14\alpha} =$$

$$= \frac{\sin 2\alpha\sin 4\alpha\sin 6\alpha\ldots\sin 28\alpha}{2^{14}\sin 2\alpha\sin\alpha\sin 3\alpha\ldots\sin 14\alpha} =$$

$$= \frac{\sin 16\alpha\sin 18\alpha\sin 20\alpha\ldots\sin 28\alpha}{2^{14}\sin\alpha\sin 3\alpha\ldots\sin 13\alpha} =$$

$$= \frac{\sin 192^\circ\sin 216^\circ\ldots\sin 336^\circ}{2^{14}\sin 12^\circ\sin 36^\circ\ldots\sin 156^\circ} = -\frac{1}{2^{14}}.$$

Задача 30.

Что больше: $\frac{\sin 1^\circ}{\sin 2^\circ}$ или $\frac{\sin 3^\circ}{\sin 4^\circ}$?

Решение.

При $\alpha = 1^\circ$ будем иметь

$$\frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} - \frac{\sin 3\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{\sin 4\alpha\sin\alpha - \sin 2\alpha\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha\sin 4\alpha} =$$

$$= \frac{(\cos 3\alpha - \cos 5\alpha) - (\cos\alpha - \cos 5\alpha)}{2\sin 2\alpha\sin 4\alpha} = -\frac{\sin 2\alpha\sin\alpha}{\sin 2\alpha\sin 4\alpha} < 0,$$

так что второе из данных чисел больше.

Задача 31.

Доказать: $1 - 4\sin 10^\circ = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,10^\circ$.

Доказательство.

$$A = 2\left(\frac{1}{2} - 2\sin 10^\circ\right) = 2(\sin 30^\circ - \sin 10^\circ - \sin 10^\circ) =$$

$$= 2(2\cos 20^\circ\sin 10^\circ - \sin 10^\circ) = 2\sin 10^\circ(2\cos 20^\circ - 1) =$$

$$= 4\sin 10^\circ(\cos 20^\circ - \cos 60^\circ) = 8\sin 10^\circ\sin 40^\circ\sin 20^\circ =$$

$$= \frac{4\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ\, 2\sin 10^\circ}{\sin 80^\circ} =$$

$$= \frac{2\sin 60^\circ\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ} = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,10^\circ.$$

Задача 32.

В равнобедренном треугольнике с основанием a и боковой стороной b угол при вершине равен 20°. Доказать, что

$$a^3 + b^3 = 3ab^2.$$

Доказательство.

Так как $a = 2b \sin 10°$, то доказываемое соотношение равносильно равенству

$$1 + 8 \sin^3 10° = 6 \sin 10°, \text{ или}$$

$$\sin 30° = 3 \sin 10° - 4 \sin^3 10°.$$

Последнее равенство выполнено в силу формулы $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$.

Задача 33.

Вычислить $\sin 18°$

Решение.

Имеем $\sin 36° = \cos 54°$, или

$$2 \sin 18° \cdot \cos 18° = 4 \cos^3 18° - 3 \cos 18°.$$

Поскольку $\cos^2 18° = 1 - \sin^2 18°$, то

$$4 \sin^2 18° + 2 \sin 18° - 1 = 0, \text{ откуда } \sin 18° = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Но $\sin 18° > 0$, поэтому $\sin 18° = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

Задача 34.

Доказать, что $\operatorname{tg} 36° \cdot \operatorname{tg} 72° = \sqrt{5}$.

Доказательство.

$$\cos 18° - \sqrt{1 - \sin^2 18°} = \sqrt{1 - \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{16}} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4};$$

$$\operatorname{tg} 18° = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}.$$

Значит, $\operatorname{tg} 36° \cdot \operatorname{tg} 72° = \operatorname{tg} (2 \cdot 18°) \cdot \operatorname{ctg} 18° =$

$$= \frac{2\,\mathrm{tg}\,18^\circ \cdot \mathrm{ctg}\,18^\circ}{1-\mathrm{tg}^2\,18^\circ} = \frac{2}{1-\dfrac{5-2\sqrt{5}+1}{10+2\sqrt{5}}} =$$

$$= \frac{2\,(10+2\sqrt{5})}{4+4\sqrt{4}} = \frac{4\sqrt{5}\,(\sqrt{5}+1)}{4\,(1+\sqrt{5})}.$$

Задача 35.

Разложить на множители $2\sqrt{3}+\sqrt{5}-1$.

Решение.

Воспользуемся тем, что $\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Имеем $2\sqrt{3}+\sqrt{5}-1 = 4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right) =$

$$= 4\,(\sin 60^\circ + \sin 18^\circ) = 4\sin 39^\circ \cos 21^\circ.$$

Задача 36.

Доказать:

$$3\sin\frac{2\pi}{17}+\sin\frac{4\pi}{17}-\sin\frac{6\pi}{17}-\frac{1}{2}\sin\frac{8\pi}{17} = 8\sin^3\frac{2\pi}{17}\cos^2\frac{\pi}{17}.$$

Доказательство.

Раскладываем $\sin\dfrac{6\pi}{17}$ как $\sin 3\alpha$, а $\sin\dfrac{8\pi}{17}$ как $\sin 2\alpha$.

Имеем

$$3\sin\frac{2\pi}{17}-3\sin\frac{2\pi}{17}+4\sin^3\frac{2\pi}{17}-\sin\frac{4\pi}{17}\cos\frac{4\pi}{17}+\sin\frac{4\pi}{17} =$$

$$= 4\sin^3\frac{2\pi}{17}+\sin\frac{4\pi}{17}\left(1-\cos\frac{4\pi}{17}\right) =$$

$$= 4\sin^3\frac{2\pi}{17}+2\sin\frac{4\pi}{17}\sin^2\frac{2\pi}{17} =$$

$$= 2\sin^2\frac{2\pi}{17}\left(2\sin\frac{2\pi}{17}+2\sin\frac{2\pi}{17}\cos\frac{2\pi}{17}\right) =$$

$$= 4\sin^3\frac{2\pi}{17}\left(1+\cos\frac{2\pi}{17}\right) = 8\sin^3\frac{2\pi}{17}\cos^2\frac{\pi}{17}.$$

Задача 36.

Вычислить $\sin 12^\circ \sin 24^\circ \sin 48^\circ \sin 84^\circ$.

Решение.

Воспользуемся формулой

$$\sin 3\alpha = 4 \sin\alpha \sin(60^\circ - \alpha) \cdot \sin(60^\circ + \alpha).$$

1) Пусть $\alpha = 12^\circ$, тогда

$$\sin(3\cdot 12^\circ) = 4\sin 12^\circ \cdot \sin(60^\circ - 12^\circ)\sin(60^\circ + 12^\circ), \text{ или}$$

$$\sin 36^\circ = 4\sin 12^\circ \cdot \sin 48^\circ \sin 72^\circ,$$

откуда $\sin 48^\circ = \dfrac{\sin 36^\circ}{4\sin 12^\circ \sin 72^\circ}$.

2) Аналогично для $\alpha = 24^\circ$:

$$\sin 72^\circ = 4\sin 24^\circ \cdot \sin 36^\circ \cdot \sin 84^\circ,$$

откуда $\sin 24^\circ = \dfrac{\sin 72^\circ}{4\sin 36^\circ \cdot \sin 84^\circ}$.

3) Подставим: $\sin 12^\circ \cdot \sin 24^\circ \cdot \sin 48^\circ \cdot \sin 84^\circ =$

$$= \sin 12^\circ \frac{\sin 72^\circ}{4\sin 36^\circ \sin 84^\circ} \cdot \frac{\sin 36^\circ}{4\sin 12^\circ \cdot \sin 72^\circ} \cdot \sin 84^\circ = \frac{1}{6}.$$

Задача 37.

Доказать, что $\operatorname{tg}(60^\circ + \alpha) - \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) + \operatorname{tg}\alpha = 3\operatorname{tg}3\alpha$.

Доказательство. Первый способ.

Имеет место формула:

$$\operatorname{tg}3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}. \qquad (1)$$

Действительно,

$$\operatorname{tg}3\alpha = \operatorname{tg}(2\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg}2\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}2\alpha \operatorname{tg}\alpha} = \frac{\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \cdot \operatorname{tg}\alpha} =$$

$$= \frac{(2\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha)(1 - \operatorname{tg}^2\alpha)}{(1 - \operatorname{tg}^2\alpha)(1 - \operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}^2\alpha 0} = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Покажем, что левая часть заданного равенства равна правой части формулы (1). Имеем:

$$-\frac{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg}\alpha} + \frac{\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg}\alpha} + \operatorname{tg}\alpha =$$

$$= -\frac{\sqrt{3} - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha} + \frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha} + \operatorname{tg}\alpha =$$

$$= -\frac{(\sqrt{3} + \operatorname{tg}\alpha)(1 + \sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha) - (\sqrt{3} - \operatorname{tg}\alpha)(1 - \sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha)}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha =$$

$$= \frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg}\alpha + \sqrt{3}\operatorname{tg}^2\alpha - \sqrt{3} + \operatorname{tg}\alpha - \sqrt{3}\operatorname{tg}^2\alpha + 3\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha - 3\operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha + 8\operatorname{tg}\alpha - 3\operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}\alpha} = \frac{3(3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha)}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Второй способ.

$$\operatorname{tg}(60^\circ + \alpha) - \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) + \operatorname{tg}\alpha =$$

$$= \operatorname{tg} 2\alpha\,(1 - \operatorname{tg}(60^\circ + \alpha)\operatorname{tg}(60^\circ - \alpha)) + \operatorname{tg}\alpha =$$

$$= \operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg}(60^\circ + \alpha)\operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) + \operatorname{tg}\alpha =$$

$$= \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg}(60^\circ + \alpha)\operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) + \operatorname{tg} 3\alpha\,(1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg} 2\alpha) =$$

$$= \operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha\,(\operatorname{tg}(60^\circ + \alpha))\operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg} 3\alpha) =$$

$$= \operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha \left(\frac{\operatorname{tg} 3\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} - \operatorname{tg} 3\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha\right) =$$

$$= \operatorname{tg} 3\alpha \left(1 + \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} - \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg}\alpha\right) =$$

$$= \operatorname{tg} 3\alpha \left(1 + \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha} \cdot 2\right) = \operatorname{tg} 3\alpha \cdot 3.$$

Задача 38.

Доказать, что $8\cos^3 18^\circ = 5\operatorname{tg} 54^\circ$.

Доказательство. Первый способ.

$$8\cos^3 18^\circ = 5\operatorname{tg} 54^\circ;$$

$$\sin 36^\circ \cdot 8\cos^3 18^\circ = 5\cos 36^\circ;$$

$$\frac{8\cos^3 18^\circ \sin 36^\circ \cos 36^\circ}{\cos 36^\circ} = 5\cos 36^\circ;$$

$$4\cos^3 18^\circ \sin 72^\circ = 5\cos^2 36^\circ; \quad 4\cos^4 18^\circ = 5\cos^2 36^\circ.$$

1) $(1 + \cos 36^\circ)^2 = 5\cos^2 36^\circ$; $\cos^2 36^\circ = z^2$;

$$1 + 2z - 4z^2 = 0, \quad 4z^2 - 2z - 1 = 0;$$

$$z_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 16}}{8} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}; \quad z = \frac{1 + \sqrt{5}}{4};$$

$$\cos^2 36^\circ = \frac{1}{2}(1 + \cos 72^\circ) = \frac{1}{2}(1 + \cos(90^\circ - 18^\circ)) =$$

$$= \frac{1}{2}(1 + \sin 18^\circ) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right) = \frac{3 + \sqrt{5}}{8}.$$

Второй способ.

$$8\cos^3 18^\circ - \frac{5\sin 54^\circ}{\cos 54^\circ} = 8\cos^3 18^\circ - \frac{5\sin 54^\circ}{2\sin 18^\circ \cos 18^\circ} =$$

$$= 16\cos^4 18^\circ \sin 18^\circ - 5\sin 54^\circ = 4(1 + 2\cos 36^\circ + \cos^2 36^\circ) \times$$

$$\times \sin 18^\circ - 5\sin 54^\circ = 2(2 + 4\cos 36^\circ + 1 + \cos 72^\circ)\sin 18^\circ -$$

$$- 5\sin 54^\circ = 6\sin 18^\circ + 8\sin 18^\circ \cos 36^\circ + 2\sin 18^\circ \cos 72^\circ -$$

$$- 5\sin 54^\circ = 6\sin 18^\circ + 8\sin 18^\circ \cos 36^\circ + 2\sin 18^\circ \cos 72^\circ -$$

$$- 5\sin 54^\circ = 0.$$

Третий способ.

$$8\cos^3 18^\circ = 5\,\mathrm{tg}\, 54^\circ;$$

$$2\cos 54^\circ + 6\cos 18^\circ - 5\,\mathrm{tg}\, 54^\circ = 0;$$

$$2\cos^2 54^\circ + 6\cos 18^\circ \cos 54^\circ - 5\sin 54^\circ = 0;$$

$$1 + \cos 108^\circ + 3(\cos 72^\circ + \cos 36^\circ) - 5\sin 54^\circ = 0;$$

$$1 + 2\sin 18^\circ - 2\sin 54^\circ = 0; \quad 1 - 2(\sin 54^\circ - \sin 18^\circ) = 0;$$

$$1 - 4\sin 18^\circ \cos 36^\circ = 0; \quad 1 - 4\frac{\sin 18^\circ \cos 18^\circ \cos 36^\circ}{\cos 18^\circ} = 0;$$

$$1 - \frac{\sin 72^\circ}{\cos 18^\circ} = 0.$$

Задача 39.

Доказать, что $A = \operatorname{tg}^6 10^\circ + \operatorname{tg}^6 50^\circ + \operatorname{tg}^6 80^\circ = 433$.

Доказательство.

Известно, что $\operatorname{tg} 3\alpha = \dfrac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$. Возведем в квадрат выражение $\operatorname{tg} 3\alpha - \dfrac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha} = 0$:

$$\operatorname{tg}^6\alpha - 3(2 + 3\operatorname{tg}^2\alpha)\operatorname{tg}^4\alpha + 3(3 + 2\operatorname{tg}^2 3\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2 3\alpha = 0.$$

При $\alpha = 10^\circ,\ 50^\circ,\ 70^\circ$

$$2 + 3\operatorname{tg}^2 3\alpha = 3,\quad 3 + 2\operatorname{tg}^2 3\alpha = \frac{11}{3},$$

поэтому числа $x_1 = \operatorname{tg}^2 10^\circ$, $x_2 = \operatorname{tg}^2 50^\circ$ и $x_3 = \operatorname{tg}^2 70^\circ$ являются корнями уравнения

$$3x^3 - 27x^2 + 33x - 1 = 0.$$

По теореме Виета:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9,$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = 11, \qquad (*)$$

$$x_1 x_2 x_3 = \frac{1}{3}.$$

Теперь значения (*) подставим в тождество:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3 = (x_1 + x_2 + x_3)\cdot((x_1 + x_2 + x_3)^2 - 3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)).$$

Получаем $A = 1 + 9(81 - 33) = 433$.

Задача 40.

Доказать:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(\alpha + 20^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha + 40^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha + 160^\circ) = 9\operatorname{tg} 9\alpha.$$

Доказательство.

Было доказано, что

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(\alpha + 60^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha + 120^\circ) = 3\operatorname{tg} 3\alpha.$$

Запишем еще два тождества:

$$\operatorname{tg}(\alpha + 20^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha + 80^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha + 140^\circ) = 3\operatorname{tg}(3\alpha + 60^\circ);$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + 40^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha + 100^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha + 160^\circ) = 3\operatorname{tg}(3\alpha + 120^\circ).$$

После сложения всех трех тождеств, еще раз воспользовавшись исходным тождеством, получим

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(\alpha + 20^\circ) + \ldots + \operatorname{tg}(\alpha + 160^\circ) =$$

$$= 3(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(3\alpha + 60^\circ) + \operatorname{tg}(3\alpha + 120^\circ)) = 9\operatorname{tg}9\alpha.$$

2. УСЛОВНЫЕ РАВЕНСТВА

Задача 1.

Зная, что $\sin\alpha = A\sin\beta$ и $\operatorname{tg}\alpha = B\operatorname{tg}\beta$, доказать, что одно из значений $\cos\alpha$ есть $\sqrt{\dfrac{A^2-1}{B^2-1}}$.

Доказательство.

Поделив почленно данные равенства, найдем

$$\cos\alpha = \frac{A}{B}\cos\beta.$$

Значит, $\sin\beta = \dfrac{\sin\alpha}{A}$; $\cos\beta = \dfrac{B\cos\alpha}{A}$. Далее имеем

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = \frac{\sin^2\alpha}{A^2} + \frac{B^2\cos^2\alpha}{A^2},$$

$$A^2 = 1 - \cos^2\alpha + B^2\cos^2\alpha,$$

откуда $A^2 - 1 = (B^2 - 1)\cos^2\alpha$; $\cos^2\alpha = \dfrac{A^2-1}{B^2-1}$;

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{A^2-1}{B^2-1}}$$

и одним из значений $\cos\alpha$ есть $\sqrt{\dfrac{A^2-1}{B^2-1}}$, что и требовалось доказать.

Задача 2.

Дано $\sin\alpha = A(\sin(\alpha+\beta))$.

Доказать $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta - A}$.

Доказательство.

Имеем $\alpha = (\alpha+\beta) - \beta$. Тогда

$$\sin((\alpha+\beta)-\beta) = A\sin(\alpha+\beta), \text{ или}$$

$$\sin(\alpha+\beta)\cos\beta - \cos(\alpha+\beta)\sin\beta = A\sin(\alpha+\beta).$$

Поскольку $\alpha+\beta \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ и $\cos B \neq A$, то поделив на $\cos(\alpha+\beta) \neq 0$, получим $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\cos\beta - \sin\beta = A\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, откуда $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta - A}$.

Задача 3.

Доказать, что если

$$\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos(x+\alpha)}{b} = \frac{\cos(x+2\alpha)}{c} = \frac{\cos(x+3\alpha)}{d},$$

то $\dfrac{a+c}{b} = \dfrac{b+d}{c}$.

Доказательство.

Имеем $\dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{\cos x + \cos(x+2\alpha)}{\cos(x+\alpha)+\cos(x+3\alpha)} =$

$= \dfrac{\cos(x+\alpha)\cos\alpha}{\cos(x+2\alpha)\cos\alpha} = \dfrac{b}{c}$, откуда $\dfrac{a+c}{b} = \dfrac{b+d}{c}$.

Задача 4.

Дано $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = b$.

Вычислить $\operatorname{tg}^2\alpha + \sec\alpha\operatorname{cosec}\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$.

Решение.

Из равенства $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 = b^2$ получим

$$\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha = b^2 - 2.$$

Заданное соотношение $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = b$ преобразуем так:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = b; \quad \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = b,$$

$$\frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\alpha} = b, \text{ откуда } \sec\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha = b,$$

значит, $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + \sec\alpha\operatorname{cosec}\alpha = b^2 - 2 + b = b^2 + b - 2$.

Задача 5.

Доказать, что в треугольнике ABC, если

$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}A + \operatorname{ctg}B + \operatorname{ctg}C$, где $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, то

$$\sin^3\alpha = \sin(A-\alpha)\sin(B-\alpha)\sin(C-\alpha).$$

Доказательство.

Запишем условие задачи так:

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}A = \operatorname{ctg}B + \operatorname{ctg}C;$$

$$\frac{\sin(A-\alpha)}{\sin\alpha\sin A} = \frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C} = \frac{\sin A}{\sin B\sin C}.$$

Аналогично получим

$$\frac{\sin(B-\alpha)}{\sin\alpha\sin B} = \frac{\sin B}{\sin C\sin A};$$

$$\frac{\sin(C-\alpha)}{\sin\alpha\sin C} = \frac{\sin C}{\sin A\sin B}.$$

Перемножим почленно эти равенства, получим

$$\frac{\sin(A-\alpha)\sin(B-\alpha)\sin(C-\alpha)}{\sin^3\alpha\sin A\sin B\sin C} = \frac{1}{\sin A\sin B\sin C}.$$

Задача 6.

Доказать, что из равенства

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \quad A+B+C=\pi$$

следует соотношение:

$$a = b\cos C + c\cos B;$$

$$b = c\cos A + a\cos C;$$

$$c = a\cos B + b\cos A.$$

Доказательство.

Поскольку $A+B+C=\pi$, то

$$\sin A = \sin(B+C) = \sin B\cos C + \cos B\sin C.$$

Пусть

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k. \qquad (1)$$

Если $k=0$, т.е. $a=b=c=0$, то равенство, которое доказываем — очевидно.

Если $k \neq 0$, то

$$\sin A = \frac{a}{k}, \quad \sin B = \frac{b}{k}, \quad \sin C = \frac{c}{k}. \tag{2}$$

Подставляя значение $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ из (2) в равенство (1), получим $a = b\cos C + c\cos B$.

Аналогично получим последние два соотношения.

Задача 7.

Дано $\cos\alpha + \cos\beta = A$; $\sin\alpha + \sin\beta = B$.
Вычислить $\cos(\alpha+\beta)$ и $\sin(\alpha+\beta)$.

Решение.

Имеем

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = A; \quad 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = B,$$

откуда $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{B}{A}$.

Используем формулы

$$\cos\gamma = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}, \quad \sin\gamma = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}$$

Имеем $\cos(\alpha+\beta) = \dfrac{1-\dfrac{B^2}{A^2}}{1+\dfrac{B^2}{A^2}} = \dfrac{A^2-B^2}{A^2+B^2}$;

$$\sin(A+B) = \frac{2\cdot\dfrac{B}{A}}{1+\dfrac{B^2}{A^2}} = \frac{2\cdot A\cdot B}{A^2+B^2}$$

Задача 8.

Дано $\cos\alpha + \cos\beta = a$; $\sin\alpha + \sin\beta = b$; $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Доказать: $\sin(\alpha+\beta) = \dfrac{2ab}{a^2+b^2}$.

Доказательство.

Имеем

$$\begin{cases}\cos^2\alpha + \cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta = a^2,\\ \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta = b^2.\end{cases}$$

Сложим эти равенства:

$$2 + 2\,(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = a^2 + b^2, \text{ или}$$

$$2 + 2\cos(\alpha+\beta) = a^2 + b^2, \text{ откуда}$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \frac{a^2+b^2}{2} - 1.$$

Далее, перемножив эти равенства, получим

$$\sin\alpha\cos\alpha + \cos\beta\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = ab, \text{ или}$$

$$\frac{1}{2}\cdot 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+\beta) = ab, \text{ откуда}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{ab}{1+\cos(\alpha+\beta)} = \frac{ab}{1+\frac{a^2+b^2}{2}-1} = \frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

Задача 9.

Найти значение выражения

$$y = a\sin^2(\alpha+\beta) + b\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) + c\cos^2(\alpha+\beta),$$

если $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ являются корнями уравнения:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Решение.

По теореме Виета должно иметь место равенство

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = -\frac{b}{a};\quad \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{c}{a}.$$

Тогда $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = -\dfrac{b}{a} : \left(1-\dfrac{c}{a}\right) = \dfrac{b}{c-a}$,

поэтому

$$y=\frac{1}{1+\left(\frac{b}{c-a}\right)^2}\left(a\left(\frac{b}{c-a}\right)^2+b\left(\frac{b}{c-a}\right)+c\right)=c.$$

Итак, $y=c$.

Задача 10.

Доказать, что если

$$\cos\alpha=\frac{a}{b+c},\quad \cos\beta=\frac{b}{a+c},\quad \cos\gamma=\frac{c}{a+c},\quad a+b+c\neq 0,$$

то имеет место равенство $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}=1.$

Доказательство.

Имеем $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\frac{a}{b+c}}{1+\frac{a}{b+c}}=\frac{b+c-a}{a+b+c}.$

Поскольку $a+b+c\neq 0$, то $\frac{a}{b+c}\neq -1$, итак,

$$\frac{\alpha}{2}\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\text{ т.е. } \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \text{ — определено.}$$

Аналогично убеждаемся, что $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ — также определены.

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}+$$

$$+\frac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma}=\frac{b+c-a}{a+b+c}+\frac{a+c-b}{a+b+c}+\frac{a+b-c}{a+b+c}=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1.$$

Задача 11.

Найти значения чисел, при которых равенство

$$2\sin 4\alpha\,(\cos^4 2\alpha-\sin^4 2\alpha)=\sin k\alpha$$

верно при любом произвольном значении α.

Решение.

Имеем $2\sin 4\alpha\,(\cos^4 2\alpha - \sin^4 2\alpha) =$

$$= 2\sin 4\alpha\,(\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha)(\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha) =$$

$$= 2\sin 4\alpha \cos 4\alpha = \sin 8\alpha.$$

Равенство $\sin 8\alpha = \sin k\alpha$ при $k = 8$ верно для всех $\alpha \in R$.

Задача 12.

Доказать, что $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma} = \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma$,

если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Доказательство.

Имеем

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma} = \frac{\sin(\pi - \beta - \gamma)}{\sin\beta\sin\gamma} = \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin\beta\sin\gamma} = \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma.$$

Задача 13.

Доказать, что $\sin(2\alpha - \beta) = k\sin\beta$, если

$$\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{1-k}{1+k}\operatorname{tg}\alpha.$$

Доказательство.

По условию $\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \dfrac{1-k}{1+k}\operatorname{tg}\alpha$;

$$\frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos(\beta - \alpha)} = \frac{1-k}{1+k}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\quad \frac{\cos\alpha\sin(\beta - \alpha)}{\sin\alpha\cos(\beta - \alpha)} = \frac{1-k}{1+k};$$

$$\frac{\sin\beta - \sin(2\alpha - \beta)}{\sin\beta + \sin(2\alpha - \beta)} = \frac{1-k}{1+k}.$$

Составим производную пропорции

$$\frac{\sin\beta + \sin(2\alpha - \beta) - (\sin\beta - \sin(2\alpha - \beta))}{\sin\beta + \sin(2\alpha - \beta) + (\sin\beta - \sin(2\alpha - \beta))} = \frac{1 + k - (1 - k)}{1 + k + (1 - k)},$$

откуда $\dfrac{\sin(2\alpha - \beta)}{\sin\beta} = k$, или $\sin(2\alpha - \beta) = k\sin\beta$.

Задача 14.

Найти множество всех пар чисел (a, b), для каждой из которых при всех значениях x справедливо равенство

$$a(\cos x - 1) + b^2 = \cos(ax + b^2) - 1$$

Решение.

Поскольку данное равенство справедливо при произвольном x, то частично оно верно при $x = \pi$ и $x = 2\pi$. Это значит, что числа a и b удовлетворяют равенству

$$-2a + b^2 = \cos(\pi a + b^2) - 1, \qquad (1)$$

$$b^2 = \cos(2\pi a + b^2) - 1. \qquad (2)$$

Из равенства (2), поскольку $\cos(2\pi a + b^2) \leqslant 1$ следует, что $b^2 \leqslant 0$. Этому условию удовлетворяет только $b = 0$. Но тогда $\cos 2\pi a = 1$, т.е. a — целое число. Равенство (1) теперь имеет вид: $1 - 2a = \cos \pi a$.

Поскольку $1 \leqslant \cos \pi a \leqslant 1$, то $-1 \leqslant 1 - 2a \leqslant 1$.

Но $0 \leqslant a \leqslant 1$. В этом промежутке имеем только целые числа $a = 0$; $a = 1$. Значит, условие задачи могут удовлетворять только такие пары чисел: $a = 0$, $b = 0$ и $a = 1$, $b = 0$. Если $a = 0$, $b = 0$, то данное в условии равенство будет выполняться при всех x.

При $a = 1$, $b = 0$ — данное в условии равенство также выполняется при всех x: итак, обе пары чисел $a = 0$, $b = 0$ и $a = 1$, $b = 0$ удовлетворяют условию задачи.

Ответ: (0; 0) и (1; 0).

Задача 15.

Найти все такие γ и целые α, для которых равенство

$$\sin \alpha x + \cos x = \gamma \sin\left(\alpha x + \frac{\pi}{4}\right)$$

справедливо при всех действительных x.

Решение.

Имеем: $\sin \alpha x + \cos x = \gamma \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha x + \gamma \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha x.$

Поскольку по условию задачи это равенство должно быть справедливо при всех действительных x, получим

$$\begin{cases} 1 \pm \dfrac{\gamma}{\sqrt{2}}, \\ \cos x = \cos \alpha x, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \gamma = \sqrt{2}, \\ \cos x - \cos \alpha x = 0. \end{cases}$$

Итак, $2 \sin\dfrac{x + \alpha x}{2} \sin\dfrac{\alpha x - x}{2} = 0$, это возможно только при $\alpha = 1$ или $\alpha = -1$.

Ответ: $\begin{cases} \gamma = \sqrt{2}, \\ \alpha = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma = \sqrt{2}, \\ \alpha = -1. \end{cases}$

3. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Задача 1.

Решить уравнение: $a\sin x \pm b\cos x = c$.

Решение.

Будем считать, что $c \neq 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$. Разделив обе части уравнения на $\sqrt{a^2+b^2}$, получаем

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Так как $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, то существует такой угол φ, что

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi,\quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi. \tag{1}$$

Значит, заданное уравнение эквивалентно уравнению

$$\sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},\text{ или}$$

$$\sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Если $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leqslant 1$, то

$$x = -\varphi + (-1)^n \arcsin n = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi n,$$

где φ определяется из формулы (1).

Задача 2.

Решить уравнение $4\sin x + 3\cos x = 5$.

Решение.

Делим обе части уравнения на $M = \sqrt{4^2+3^2} = 5$, получим: $\frac{4}{5}\sin x + \frac{3}{5}\cos x = 1$. Полагая $\frac{4}{5} = \sin\gamma$, где $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$, получим $\frac{3}{5} = \cos\gamma$, и тогда данное уравнение преобразуется так: $\sin\gamma\sin x + \cos\gamma\cos x = 1$; $\cos(x-\gamma) = 1$, откуда

$$x - \gamma = 2k\pi \text{ и } x = 2k\pi + \gamma, \quad k \in Z.$$

Задача 3.

Решить уравнение $3\sin x + \sqrt{3}\cos x = 3$.

Решение.

$$\sin x + \frac{\sqrt{3}}{3}\cos x = 1; \quad \sin x + \operatorname{tg} 30^\circ \cos x = 1;$$

$$\sin x + \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}\cos x = 1;$$

$$\sin x + \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}\cos x = 1; \quad \sin x \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos x = \cos 30^\circ;$$

$$\sin(x + 30^\circ) = \sin 60^\circ, \quad x + 30^\circ = 180^\circ n + (-1)^n 60^\circ;$$

$$x = 180^\circ n + (-1)^n 60^\circ - 30^\circ.$$

Задача 4.

Решить уравнение $26\sin^2 x^2 + 12\cos 2x + 5\sin 2x = 13$.

Решение.

Учитывая, что $12\cos 2x + 5\sin 2x = \frac{12}{13}\cos 2x + \frac{5}{13}\sin 2x$, вводим вспомогательный угол γ:

$$\cos 2\gamma = \frac{12}{13}; \quad \sin 2\gamma = \frac{5}{13}.$$

Заданное уравнение эквивалентно уравнению

$$2\sin^2 x^2 + \cos(2x - 2\gamma) = 1,$$

$$1 - \cos 2x^2 + \cos(2x - 2\gamma) = 1, \text{ или}$$

$$\cos 2x^2 - \cos(2x - 2\gamma) = 0,$$

$$2\sin(x^2 + x - \gamma)\sin(x - \gamma - x^2) = 0.$$

Значит, $x^2 + x - \gamma = k\pi$ и $x - \gamma - x^2 = k\pi$.

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4y + 4k\pi}}{2}; \quad x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4y - 4k\pi}}{2}.$$

Задача 5.

Решить уравнение $a(\sin x + \cos x) + b \sin x \cos x = c.$

Решение.

Обозначим $\sin x + \cos x = y$. Тогда $\sin x \cos x = \frac{y^2 - 1}{2}$, откуда $ay - \frac{b}{2}(1 - y^2) = c$, или $by^2 + 2ay - (b + 2c) = 0$,

$$y = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + b(b + 2c)}}{b},$$

при условии, что $b \neq 0$ и $a^2 + b^2 + 2bc \geqslant 0$. Уравнение имеет решение, если выполнены указанные условия и $|y| \leqslant \sqrt{2}$.

Задача 6.

Решить уравнение $2(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 1 = 0.$

Решение.

Полагая $\sin x + \cos x = t$, получаем уравнение

$$2t + (t^2 - 1) + 1 = 0, \text{ или } t^2 + 2t = 0.$$

Отсюда находим, что $t_1 = 0$, $t_2 = -2$, так что данное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\sin x + \cos x = 0 \text{ и } \sin x - \cos x = 2.$$

Первое из этих уравнений равносильно уравнению

$$\operatorname{tg} x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \ n \in Z.$$

Второе уравнение решений не имеет.

Задача 7.

Решить уравнение $\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0.$

Решение.

Положив $\sin x - \cos x = t$, получим уравнение

$$t^2 + 12t - 13 = 0; \quad t_1 = 1, \quad t_2 = -13 \text{ (не подходит)}.$$

Далее $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

$$x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad n \in Z.$$

Задача 8.

Решить уравнение $\dfrac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x + \cos x - 2} = \dfrac{4(\sin x + \cos x)}{9 - 3\sin 2x}$

Решение.

Заменяя $\sin x + \cos x = t$, получим

$$\frac{t-1}{t-2} = \frac{4t}{9 + 3(1 - t^2)},$$

откуда $t_1 = \frac{2}{3}$; $t_2 = -3$ (не подходит).

Итак, данное уравнение равносильно уравнению

$$\sin x + \cos x = \frac{2}{3}, \text{ или } \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}};$$

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{2}{3\sqrt{2}} + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

Задача 9.

Решить уравнение $\sin x + \sin^2 x + \cos^3 x = 0$.

Решение.

Имеем $\sin(1 + \sin x) + \cos x(1 - \sin^2 x) = 0$;

$$(1 + \sin x)(\sin x + \cos x - \sin x \cos x) = 0.$$

Последнее уравнение равносильно совокупности уравнений: $\sin x + 1 = 0$ и $\sin x + \cos x - \sin x\cos x = 0$;

$$x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z;$$

$$x_2 = (-1)^n \arcsin\left(\frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + \pi n - \frac{\pi}{4}, \quad n \in Z.$$

Задача 10.

Решить уравнение $(\sin x + \cos x)\sqrt{2} = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.

Решение. *Первый способ.*

Преобразуем уравнение: $(\sin x + \cos x)\sqrt{2} = \dfrac{1}{\sin x \cdot \cos x}$. Сделав замену $\sin x + \cos x = y$, получим

$$t\sqrt{2} = \frac{2}{t^2 - 1}, \text{ откуда } \sqrt{2}\,t^3 - \sqrt{2}\,t - 2 = 0, \text{ или}$$

$$(t - \sqrt{2})(\sqrt{2}\,t^2 + 2t + \sqrt{2}) = 0.$$

Очевидно, что $t = \sqrt{2}$, значит,

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}, \quad x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in Z.$$

Второй способ.

Преобразуем уравнение к виду

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \frac{1}{2\sin x \cos x},$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sin 2x}, \text{ или}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin 2x = 1. \qquad (1)$$

Так как $|\sin\alpha| \leqslant 1$, то (1) имеет место, если

$$\text{либо } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \text{ и } \sin 2x = -1;$$

$$\text{либо } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \text{ и } \sin 2x = 1.$$

Но первые два уравнения не имеют общих корней, а вторые два уравнения имеют общие корни $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$. Следовательно, данное уравнение имеет корни $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$.

Третий способ

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geqslant 2,\ \ (\sin x + \cos x)\sqrt{2} = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{2} \leqslant \sqrt{2}.$$

Значит, заданное уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2, \\ \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1. \end{cases}$$

Окончить самостоятельно.

Задача 11.

Решить уравнение $\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{cosec}^3 x = 3$.

Решение.

Имеем $\operatorname{cosec}^6 x = (3 - \operatorname{ctg}^3 x)^2$,

$$(1 + \operatorname{ctg}^2 x)^3 = 9 - 6\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg}^6 x, \text{ далее}$$

$$3\operatorname{ctg}^4 x + 6\operatorname{ctg}^3 x + 3\operatorname{ctg}^2 x - 8 = 0.$$

Производя подстановку $\operatorname{ctg} x = t$, получим

$$3t^4 + 6t^3 + 3t^2 = 8, \text{ или } 3t^2(t+1)^2 = 8, \text{ откуда}$$

$$t(t+1) = \pm\sqrt{\frac{8}{3}}.$$

Уравнение $t^2 + t + \sqrt{\dfrac{8}{3}} = 0$ не имеет действительных корней, а уравнение $t^2 + t - \sqrt{\dfrac{8}{3}} = 0$ имеет корни

$$t = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{8}{3}}}. \text{ Тогда}$$

$$\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{8}{3}}},$$

$$x = \operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{8}{3}}} + n\pi\right).$$

Проверим полученные решения, так как при решении данного уравнения обе части уравнения возводили в квадрат. Если $n = 2m + 1$, $m \in Z$, то x будет находиться в третьей или четвертой четверти, где $\operatorname{cosec} x < 0$. Поскольку $|\operatorname{cosec} x| > |\operatorname{ctg} x|$, то левая часть исходного уравнения будет отрицательна, что противоречит условию. При четных n $(n = 2m,\ m \in Z)$ x находится в первой или второй четверти, где $\operatorname{cosec} x > 0$, и найденные значения x удовлетворяют уравнение.

Ответ: $x = \operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{8}{3}}}\right) + 2\pi m$.

Задача 12.

Решить уравнение $2 \operatorname{tg} 3x - 3 \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}^2 2x \operatorname{tg} 3x$.

Решение.

Уравнение запишем в следующем виде:

$$2(\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x) = \operatorname{tg} 2x\,(1 + \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} 3x). \qquad (1)$$

Разделив обе части (1) на $1 + \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x$, получаем

$$2\,\frac{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x}{1 + \operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{tg} 2x} = \operatorname{tg} 2x, \qquad (2)$$

или

$$2 \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 2x, \qquad (3)$$

так как дробь, стоящая в левой части (2), равна $\operatorname{tg} x$. Выражая в (3) $\operatorname{tg} 2x$ через $\operatorname{tg} x$, получаем

$$2 \operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}, \text{ откуда } \operatorname{tg} x = 0, \quad x = \pi n.$$

Убедимся в том, что деление на $1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x$ не приводит к потере корней исходного уравнения. В самом деле, пусть

$$1 + \operatorname{tg} 2x_0 \operatorname{tg} 3x_0 = 0.$$

Покажем, что x_0 не является корнем уравнения (1). Предполагая противное, из (1) и (4) получаем, что

$\operatorname{tg} 3x_0 = \operatorname{tg} 2x_0$. Подставляя $\operatorname{tg} 3x_0$ в (4), приходим к равенству $1 + \operatorname{tg}^2 2x_0 = 0$, что невозможно.

Ответ: $x = \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$.

Задача 13.

Решить уравнение

$$4 \operatorname{tg} 4x - 4 \operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 4x.$$

Решение.

Запишем заданное уравнение

$$4 (\operatorname{tg} 4x - \operatorname{tg} 3x) = \operatorname{tg} 2x (1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 4x);$$

$$\frac{4 \sin x}{\cos 4x \cos 3x} = \operatorname{tg} 2x \frac{\cos x}{\cos 4x \cos 3x}.$$

Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 4 \sin x = \cos x \operatorname{tg} 2x, \\ \cos 3x \neq 0, \\ \cos 4x \neq 0. \end{cases}$$

Так как $\cos x = 0$ не удовлетворяет уравнению, то его можно переписать так:

$$4 \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 2x, \text{ или } 2 \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

Имеем $\operatorname{tg} x = 0$, $x = \pi n$. Если $\operatorname{tg} x \neq 0$, то $2 - 2 \operatorname{tg}^2 x = 1$, $\operatorname{tg} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Так как $\cos 3x$ и $\cos 4x$ не обращаются при этом в нуль, то можно написать ответ.

Ответ: $n\pi, \quad \pm \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Задача 14.

Решить уравнение

$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x = \frac{82}{9} (\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x + 1) \cos 2x.$$

Решение.

Преобразуем правую часть уравнения:

$$\frac{82}{9}\left(\frac{\sin x \sin 2x}{\cos x \cos 2x} + 1\right)\cos 2x = \frac{82}{9}\left(\frac{\cos x}{\cos x \cos 2x}\right)\cos 2x = \frac{82}{9}.$$

Значит, $\operatorname{tg}^4 x + \dfrac{1}{\operatorname{tg}^4 x} = \dfrac{82}{9}$, откуда

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3}, \\ \operatorname{tg} x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi n, \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + n\pi. \end{array}\right.$$

Задача 15.

Решить уравнение $8\cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{\sin x} = \sec x$.

Решение.

Имеем

$$8\sin x\cos^2 x + \sin x - \sqrt{3}\cos x;$$

$$4\sin 2x\cos x = \sin x - \sqrt{3}\cos x;$$

$$2\sin 3x + \sin x + \sqrt{3}\cos x = 0;$$

$$\sin 3x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 0;$$

$$2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0;$$

$$x_1 = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \text{ и } x_2 = n\pi + \frac{2\pi}{3},\quad k,\ n \in Z.$$

Задача 16.

Решить уравнение $\sin(\pi\cos x) = \cos(\pi\sin x)$.

Решение.

Имеем $\sin(\pi\cos x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \pi\sin x\right)$, откуда *а)* $\pi\cos x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \pi\sin x$ или $\sin x + \cos x = \frac{4k+1}{2}$, $k \in Z$.

б) $\pi\cos x = (2k+1)\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \pi\sin x\right)$ или

$$\cos x - \sin x = \frac{4n+1}{2},\ n \in Z.$$

Решаем первое уравнение $\sin x + \cos x = \frac{4k+1}{2}$, или $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4k+1}{2\sqrt{2}}$. Поскольку $\left|\frac{4k+1}{2\sqrt{2}}\right| \leqslant 1$ и $k \in Z$, то $k = 0$. Значит, $x_1 = 2\pi n \pm \arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}$.

Решаем второе уравнение:

$$\cos x - \sin x = \frac{4k+1}{2},\ \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4n+1}{2}.$$

Подобно первому случаю и здесь $n = 0$.

$x_2 = 2n\pi \pm \arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}$, или, объединяя с x_1, получим

$$x = 2\pi l \pm \arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4},\quad l \in Z.$$

Задача 17.

Решить уравнение $\operatorname{tg}(\pi\operatorname{tg} x) = \operatorname{ctg}(\pi\operatorname{ctg} x)$.

Решение.

Очевидно, что $\operatorname{tg} x \neq \frac{2m+1}{2}$ и $\operatorname{ctg} x \neq m$ $(m \in Z)$. (1)

Имеем $\operatorname{tg}(\pi\operatorname{tg} x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \pi\operatorname{ctg} x\right)$, или

$$\operatorname{tg} x = k + \frac{1}{2} - \operatorname{ctg} x. \tag{2}$$

Из уравнения (2) исключим числа вида (1). Уравнение (2) эквивалентно уравнению

$$\operatorname{tg}^2 x - \left(k + \frac{1}{2}\right) \operatorname{tg} x + 1 = 0, \text{ откуда}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2k + 1 \pm \sqrt{(2k+1)^2 - 16}}{4}.$$

Должно быть $(2k+1)^2 - 16 \geqslant 0$, или $|2k+1| \geqslant 4$. Следовательно, k не может быть равно 0; ± 1; -2. Кроме того, должны быть исключены те значения k, которые дают $\operatorname{tg} x = \frac{2m+1}{2}$.

Для того, чтобы $\operatorname{tg} x = \frac{2m+1}{2}$, необходимо, чтобы $(2k+1)^2 - 16$ было квадратом нечетного числа, т.е. чтобы $(2k+1)^2 - 16 = (2l+1)^2$. Отсюда получаем

$$(2k+1)^2 - (2l+1)^2 = 16, \quad (2k+1+2l+1)(2k-2l) = 16,$$
$$(k+l+1)(k-l) = 4.$$

Заменив первый сомножитель на u, второй — на v, получим $u \cdot v = 4$. Таким образом, нужно решить в целых числах уравнение $u \cdot v = 4$, причем u и v — числа различной четности, потому что $u + v = 2k + 1$. Таких решений будет четыре:

$$u_1 = 1, \quad v_1 = 4; \quad u_2 = 4, \quad v_2 = 1;$$

$$u_3 = -1, \quad v_3 = -4; \quad u_4 = -4, \quad v_4 = -1.$$

Первое и второе решение дают $2k + 1 = u + v = 5$, а последние два $2k + 1 = -5$.

В первом случае $k = 2$, а во втором $k = -3$. Но если $k = 2$, то $\operatorname{tg} x = \frac{5 \pm 3}{4}$, причем только $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$ должно быть исключено, так как левая часть данного уравнения в этом случае не определена. Второе же ($\operatorname{tg} x = 2$) приводит к решению $x = \pi n + \operatorname{arctg} 2$. Если $k = -3$, то

$$\operatorname{tg} x = \frac{-5 \pm 3}{4},$$

причем только $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$ должно быть отброшено, а $\operatorname{tg} x = -2$ приводит к решению $x = n\pi - \operatorname{arctg} 2$. Итак, данное уравнение имеет следующие решения:

$$x_1 = n\pi \pm \operatorname{arctg} 2;$$

$$x_2 = n\pi \pm \operatorname{arctg}\frac{2k + 1 \pm \sqrt{(2k+1)^2 - 16}}{4};$$

$$k = 3;\ \pm 4;\ \pm 5, \ldots;\quad n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2, \ldots$$

Задача 18.

Решить уравнение $\operatorname{cosec} t - \operatorname{cosec} 2t = \operatorname{cosec} 4t$.

Решение.

Запишем ОДЗ уравнения:

$$\begin{cases} \sin x \neq 0, \\ \sin 2x \neq 0, \text{ значит, } x \neq \dfrac{n\pi}{4}, \quad n \in Z. \\ \sin 4x \neq 0, \end{cases}$$

Имеем $\dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{\sin 4x + \sin 2x}{\sin 2x \sin 4x} = \dfrac{2\sin 3x \cos x}{2\sin x \cos x \cos 4x}$.

На О.Д.З. $\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x} = 1$, $\sin 4x - \sin 3x = 0$, $\cos\dfrac{7x}{2}\sin\dfrac{x}{2} = 0$.

1) $\sin\frac{x}{2} = 0$, $x = 2k\pi$ — при любом $k \in Z$ не входит в ОДЗ.

2) $\cos\frac{7x}{2} = 0$, $x = \frac{\pi}{7}(2t + 1)$, $t \in Z$.

Найдем, при каких t существует n такое, что

$$\frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{7}(2t + 1).$$

Имеем $7n = 8t + 4$, $n = \dfrac{8t + 4}{7} = t + \dfrac{t + 4}{7}$. Очевидно, n существует, если $\dfrac{t+4}{7}$ — целое, т.е. $t = 7p + 3$, $p \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{7}(2t + 1)$, $t \neq 7p + 3$, $t \in Z$, $p \in Z$.

4. РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Задача 1.

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin \pi x \sin \pi y = \dfrac{3}{4}, & (1) \\ \operatorname{tg} \pi x \operatorname{tg} \pi y = 3. & (2) \end{cases}$$

Решение.

Обе части уравнения (1) делим на соответственные части уравнения (2). Получим $\cos \pi x \cos \pi y = \frac{1}{4}$.

Тогда система уравнений

$$\begin{cases} \cos \pi x \cos \pi y = \dfrac{1}{4}, \\ \sin \pi x \sin \pi y = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

эквивалентна данной системе.

Правые и левые части уравнений этой системы вычтем и прибавим. Получим

$$\begin{cases} \cos \pi (x + y) = -\dfrac{1}{2}, \\ \cos \pi (x - y) = 1, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} \pi (x + y) = 2k\pi \pm \dfrac{3}{3}, \\ x - y = 2n, \end{cases}$$

где k и n — произвольные целые числа.

Далее, решая две системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x + y = 2k + \dfrac{2}{3}, \\ x - y = n \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + y = 2k - \dfrac{2}{3}, \\ x - y = 2n, \end{cases}$$

найдем

$$x = k + n + \frac{1}{3}, \quad y = k - n + \frac{1}{3};$$

$$x = k + n - \frac{1}{3}, \quad y = k - n - \frac{1}{3}.$$

Задача 2.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin^3 x = \frac{1}{2}\sin y, \\ \cos^3 x = \frac{1}{2}\cos y. \end{cases}$$

Решение.

Возведем оба уравнения в квадрат, сложим почленно и воспользуемся тождеством

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x \text{ (докажите!)}.$$

Получим $\sin^2 2x = 1$. Если $\sin 2x = 1$, то

$$\text{либо } x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \text{ либо } x = \frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi.$$

В первом случае из исходной системы найдем $\sin y = \cos y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, а во втором случае $\sin y = \cos y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Аналогично рассматривается случай $\sin 2x = -1$.

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad y_1 = \frac{\pi}{4} + 2l\pi;$

$$x_2 = \frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi, \quad y_2 = \frac{\pi}{4} + (2l+1)\pi;$$

$$x_3 = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, \quad y_3 = \frac{3}{4}\pi + 2l\pi;$$

$$x_4 = \frac{3}{4}\pi + (2k+1)\pi, y_4 = \frac{3}{4}\pi + (2l+1)\pi, \quad k, l \in Z.$$

Задача 3.

Решить систему

$$\begin{cases} \sin x \cos 2y + \sin y \cos 2x + \sin y = 1, \\ 2\cos 2x + 8\cos y \cos x + 7 = 4\sin y. \end{cases}$$

Решение.

Второе уравнение приведем к виду

$$4\cos^2 x + 8\cos y \cos x + 5 - 4\sin y = 0.$$

Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно $\cos x$. Вычислим дискриминант этого уравнения

$$D = 16\cos^2 y + 16\sin y - 20 = -4\,(2\sin y - 1)^2.$$

Очевидно, что $D \leqslant 0$. А это значит, что

$$\begin{cases} 2\sin y - 1 = 0, \\ \cos x = -\cos y. \end{cases}$$

Подставляем найденное значение $\sin y = \frac{1}{2}$ в первое уравнение системы. Получим $\sin x = \frac{1}{2}$. Значит,

$$\sin y = \frac{1}{2}; \quad \cos x = -\cos y.$$

Ответ: $\begin{cases} x = \pi n + (-1)^n \dfrac{\pi}{6}, \\ y = (2k + 1 - n)\,\pi + (-1)^{n+1} \dfrac{\pi}{6}, \end{cases} \quad n, k \in Z.$

Задача 4.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2\cos x = 3\,\mathrm{tg}\, y, \\ 2\cos y = 3\,\mathrm{tg}\, z, \\ 2\cos z = 3\,\mathrm{tg}\, x. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} 2\cos x = 3\,\mathrm{tg}\, y, \\ \mathrm{tg}\, z = \dfrac{2}{3}\cos y, \\ \cos z = \dfrac{3}{2}\,\mathrm{tg}\, x. \end{cases}$$

Используя: $1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$,

$$\begin{cases} 2\cos x = 3\,\mathrm{tg}\, y, \\ 1 + \dfrac{4}{9}\cos^2 y = \dfrac{4}{9\,\mathrm{tg}^2 x}, \end{cases} \quad \begin{cases} \mathrm{tg}^2 x = \dfrac{4 - 9\,\mathrm{tg}^2 y}{9\,\mathrm{tg}^2 y}, \\ \mathrm{tg}^2 x\,(9 + 4\cos^2 y) = 4. \end{cases}$$

$$(4-9\,\mathrm{tg}^2 y)(9+4\cos^2 y)=36\,\mathrm{tg}^2 y;$$

$$36+16\cos^2 y-81\,\mathrm{tg}^2 y-36\sin^2 y=36\,\mathrm{tg}^2 y;$$

$$52\cos^2 y=117\,\mathrm{tg}^2 y;$$

$$52\,(1-\sin y)=117\sin^2 y;$$

$$4\sin^4 y-17\sin^2 y+4=0;$$

$$\sin^2 y=\frac{1}{4};\quad y=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k_1\text{, значит,}$$

$$x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k_2,\quad z=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k_3.$$

Задача 5.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sin^2 x=\sin y,\\ \sin^2 y=\sin z,\\ \sin^2 z=\sin x,\end{cases}$$

где $0\leqslant x\leqslant\pi$, $0\leqslant y\leqslant\pi$, $0\leqslant z\leqslant\pi$.

Решение.

$$\left.\begin{aligned}\sin^2 x\leqslant\sin x &\Rightarrow \sin y\leqslant\sin x,\\ \sin^2 y\leqslant\sin y &\Rightarrow \sin z\leqslant\sin y,\\ \sin^2 z\leqslant\sin z &\Rightarrow \sin x\leqslant\sin z.\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\sin y\leqslant\sin x,\\ \sin x\leqslant\sin z\end{aligned}\right\}\Rightarrow \sin y\leqslant\sin z,\quad \sin z\leqslant\sin y.$$

Следовательно, $\sin y=\sin z$. Аналогично $\sin x=\sin y$. Получаем $\sin x=\sin y=\sin z$.

$$\begin{cases}\sin^2 x=\sin x,\\ \sin^2 y=\sin y,\\ \sin^2 z=\sin z,\end{cases}\qquad \begin{cases}\sin x\,(\sin x-1)=0,\\ \sin y\,(\sin y-1)=0,\\ \sin z\,(\sin z-1)=0.\end{cases}$$

Учитывая, что $\sin x=\sin y=\sin z$, получаем

$$1)\ \begin{cases}\sin x=0,\\ \sin y=0,\\ \sin z=0.\end{cases}\qquad 2)\ \begin{cases}\sin x=1,\\ \sin y=1,\\ \sin z=1.\end{cases}$$

$$x_1 = y_1 = z_1 = \pi k, \quad k \in Z;$$

$$x_2 = y_2 = z_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, \quad l \in Z.$$

Задача 6.

Решить систему

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x_1 + 3 \operatorname{ctg} x_1 = 2 \operatorname{tg} x_2, \\ \operatorname{tg} x_2 + 3 \operatorname{ctg} x_2 = 2 \operatorname{tg} x_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \operatorname{tg} x_{n-1} + 3 \operatorname{ctg} x_{n-1} = 2 \operatorname{g} x_n, \\ \operatorname{tg} x_n + 3 \operatorname{ctg} x_n = 2 \operatorname{tg} x_1. \end{cases}$$

Решение

Найдем сначала решения, при которых $\operatorname{tg} x_k > 0$. Покажем, что $\operatorname{tg} x_k \geqslant \sqrt{3}$ $(k = 1, 2, 3, \dots, n)$.

Действительно, $\operatorname{tg} x_k + \dfrac{3}{\operatorname{tg} x_k} \geqslant 2\sqrt{\operatorname{tg} x_k \cdot \dfrac{3}{\operatorname{tg} x_k}} = 2\sqrt{3}$.

В силу уравнений системы

$$\operatorname{tg} x_k \geqslant \sqrt{3}. \tag{1}$$

Сложим теперь все уравнения системы:

$$\operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2 + \dots + \operatorname{tg} x_n = \frac{3}{\operatorname{tg} x_1} + \frac{3}{\operatorname{tg} x_2} + \dots + \frac{3}{\operatorname{tg} x_n}.$$

При условии (1) равенство возможно лишь в том случае, когда каждый $\operatorname{tg} x_k = \sqrt{3}$. Таким образом,

$$x_k = \frac{\pi}{3} + k_i \pi \quad (k_i \geqslant 0).$$

Аналогично находим, поменяв знак у значений неизвестных, когда $\operatorname{tg} x_k < 0$.

$$x_k' = -\frac{\pi}{3} + k_i \pi \quad (k_i \leqslant 0).$$

5. РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

Задача 1.

Решить неравенство $\cos(\sin x) < 0$.

Решение.

Поскольку $|\sin x| \leqslant 1$, то заданное неравенство решений не имеет.

Задача 2.

Решить неравенство $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 > 0$.

Решение.

Обозначим $\sin x = y$. Получим неравенство

$$2y^2 - 7y + 3 > 0,$$

множество решений которого $y < \frac{1}{2}$, $y > 3$. Значит,

$$\sin x < \frac{1}{2}, \quad \sin x > 3.$$

Второе неравенство решений не имеет, а решение первого

$$x \in \left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n, \ \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right), \quad n \in Z.$$

Задача 3.

Решить неравенство $\cos x + \cos 2x + \cos 3x > 0$.

Решение.

Имеем $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = \cos 2x + 2\cos 2x \cos x =$

$$= \cos 2x\,(2\cos x + 1) > 0.$$

Последнее неравенство эквивалентно двум системам неравенств:

$$\begin{cases} \cos 2x < 0, \\ \cos x < -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \cos 2x > 0, \\ \cos x > -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Объединяя решение этих систем, получаем решение исходного неравенства

$$\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{4\pi}{3}+2\pi n\right)\cup$$

$$\cup\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\right),\ \text{где } n\in Z.$$

Задача 4.

Решить неравенство $\sin x>\cos^2 x$.

Решение.

Заданное неравенство равносильно следующему:

$$\sin^2 x+\sin x-1>0,\ \text{или}$$

$$\left(\sin x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\sin x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)>0.$$

Но $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}>1$, и поэтому $\sin x+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}>0$.

Следовательно, заданное неравенство равносильно следующему:

$$\sin x>\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ \text{а значит, } 2\pi k+\varphi<x<\pi-\varphi+2\pi k,$$

где $\varphi=\arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ $(k=0;\ \pm 1;\ \pm 2,\ldots)$.

Задача 5.

Решить неравенство $|\sin x|>|\cos x|$.

Решение.

Заданное неравенство равносильно такому:

$$\sin^2 x>\cos^2 x,\ \text{т.е. } \cos^2 x-\sin^2 x<0,\ \cos 2x<0,$$

откуда $\dfrac{\pi}{2}+2\pi n<2x<\dfrac{3\pi}{2}+2\pi n$, или $\dfrac{\pi}{4}+\pi n<x<\dfrac{3\pi}{4}+\pi n$.

Задача 6.

Решить неравенство $|\sin x|\cos x>\dfrac{1}{4}$.

Решение.

Перепишем данное неравенство в виде:

$$2\,|\sin x|\cos x > \frac{1}{2}.$$

Так как произведение $|\sin x|\cos x$ должно быть положительным, а в данной задаче $|\sin x| > 0$, то и $\cos x > 0$. Если $\sin x > 0$, то данное неравенство перепишется в виде $\sin 2x > \frac{1}{2}$. Итак, в данном случае имеем систему

$$\begin{cases} \sin x > 0, \\ \cos x > 0, \\ \sin 2x > \frac{1}{2}. \end{cases} \qquad (1)$$

Так как $\sin x > 0$ и $\cos x > 0$, то решения системы (1) должны принадлежать промежуткам

$$2\pi m < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m \in Z. \qquad (2)$$

Из неравенства $\sin 2x > \frac{1}{2}$ следует, что

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi l < 2x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi l, \text{ откуда}$$

$$\frac{\pi}{12} + \pi l < x < \frac{5\pi}{12} + \pi l. \qquad (3)$$

Из (2) и (3) заключаем, что

$$\frac{\pi}{12} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{12} + 2\pi k.$$

Если же $\sin x < 0$, то имеем систему

$$\begin{cases} \sin x < 0, \\ \cos x > 0, \\ \sin 2x < -\frac{1}{2}. \end{cases} \qquad (4)$$

Поскольку $\sin x < 0$ и $\cos x > 0$, то решения системы (4) должны принадлежать промежуткам:

$$\frac{3\pi}{2} + 2\pi m < x < 2\pi + 2\pi m. \tag{5}$$

Из неравенства $\sin 2x < -\frac{1}{2}$ следует, что

$$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi l < 2x < -\frac{\pi}{6} + 2\pi l, \text{ откуда}$$

$$-\frac{5\pi}{12} + \pi l < x < -\frac{\pi}{12} + \pi l. \tag{6}$$

Из (5) и (6) заключаем, что

$$-\frac{5\pi}{12} + 2\pi n < x < -\frac{\pi}{12} + 2\pi n.$$

Итак, имеем ответ:

$$2\pi k + \frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12} + 2\pi k,$$

$$2\pi n - \frac{5\pi}{12} < x < \frac{\pi}{12} + 2\pi n, \quad k, n \in Z.$$

Задача 7.

Решить неравенство $\cos^3 x \cos 3x - \sin^3 x \sin 3x > \frac{5}{8}$.

Решение.

Используя формулы тройного угла, имеем

$$(\cos 3x + 3\cos x)\cos 3x - (3\sin x - \sin 3x)\sin 3x > \frac{5}{2}, \text{ или}$$

$$\sin^2 3x + \cos^2 3x + 3(\cos 3x \cos x - \sin 3x \sin x) > \frac{5}{2}, \text{ или}$$

$$\cos 4x > \frac{1}{2}, \text{ откуда } -\frac{\pi}{3} + 2\pi n < 4x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \text{ или}$$

$$-\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\pi n < x < \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{12} \quad (n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2; \ldots).$$

Задача 8.

Решить неравенство $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} > \sqrt{3}$.

Решение.

Область допустимых значений определяется соотношением $\sin x \neq \cos x$, т.е.

$$x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi. \qquad (1)$$

Имеем $\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{12}}{2}\sin x}{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x} > \sqrt{3}$, или

$$\frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} > \sqrt{3}, \text{ или } \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > \sqrt{3}, \text{ откуда}$$

$$k\pi < x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{6} + k\pi. \qquad (2)$$

Решая совместно (1) и (2), получим решения данного неравенства:

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{5\pi}{12} + k\pi, \text{ где } k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2, \ldots$$

Задача 9.

Решить неравенство $\dfrac{\cos^2 2x}{\cos^2 x} \geqslant 5\operatorname{tg} x$.

Решение.

$$\frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x} - \frac{3\sin x}{\cos x} \geqslant 0; \quad \frac{\cos^2 2x - 3\sin x\cos x}{\cos^2 x} \geqslant 0;$$

$$\frac{2\cos^2 2x - 3\sin 2x}{\cos^2 x} \geqslant 0.$$

Это неравенство эквивалентно системе

$$\begin{cases} 2\sin^2 2x + 3\sin 2x - 2 \leqslant 0, \\ \cos^2 x \neq 0, \end{cases} \text{ или}$$

$$\begin{cases} (\sin 2x + 2)\left(\sin 2x - \dfrac{1}{2}\right) \leqslant 0, \\ \cos^2 x \neq 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \sin 2x \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ \cos^2 x \neq 0. \end{cases}$$

Решая систему неравенств на промежутке $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, имеем $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{12}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{12}; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Итак, имеем ответ:

$$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \ \frac{\pi}{12} + \pi k\right] \cup \left[\frac{5\pi}{12} + \pi k; \ \frac{\pi}{12} + \pi k\right), \quad k \in Z.$$

Задача 10.

Решить неравенство $\dfrac{\sin^2 x - \dfrac{1}{4}}{\sqrt{3} - (\sin x + \cos x)} > 0.$

Решение.

Так как $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \leqslant \sqrt{2}$, то

$$\sqrt{3} - (\sin x + \cos x) = \sqrt{3} - \sqrt{2}\cos x\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$$

при любых допустимых значениях переменной x. Поэтому неравенство выполняется при $\sin^2 x > \dfrac{1}{4} \Rightarrow |\sin x| > \dfrac{1}{2} \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x > \dfrac{1}{2}, \\ \sin x < -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Отсюда $\pi n + \dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{5\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z.$

Задача 11.

Решить неравенство $\log_{\operatorname{tg} x} \sin x > 1.$

Решение.

Область допустимых значений состоит из тех x, для которых

$$\begin{cases} \sin x > 0, \\ \operatorname{tg} x > 0, \\ \operatorname{tg} x \neq 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\pi n < x < \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x \neq \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

1) При $\operatorname{tg} x > 1$ получаем $\sin x > \operatorname{tg} x$, отсюда

$$\sin x \cos x > \sin x \;\; (\sin x > 0) \;\Rightarrow\; \cos x > 1,$$

что не выполняется ни при каких значениях x.

2) При $\operatorname{tg} x < 1$ получаем $\sin x < \operatorname{tg} x$, или $\cos x < 1$, что справедливо при всех x из области допустимых значений.

Остается рассмотреть неравенство $\operatorname{tg} x < 1$ при $x \in$ ОДЗ. Искомыми значениями x являются $2\pi n < x < \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Задача 12.

Решить неравенство $\log_{\cos x} \log_{\sin x} \operatorname{tg} x > 0$.

Решение.

Найдем область допустимых значений.

$$\begin{cases} \cos x > 0, \\ \sin x > 0, \\ \cos x \neq 1, \\ \sin x \neq 1, \\ \operatorname{tg} x > 0, \end{cases} \quad 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n.$$

Далее, так как основание логарифма $\cos x < 1$, получаем

$$0 < \log_{\sin x} \operatorname{tg} x < 1 \;\Rightarrow\; \sin x < \operatorname{tg} x < 1.$$

Неравенство $\sin x < \operatorname{tg} x$ выполняется при всех x из ОДЗ, поэтому из условия $\operatorname{tg} x < 1$ в области допустимых значений находим $2\pi n < x < \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$.

Задача 13.

Решить неравенство $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} > 1$.

Решение.

Если $\sin x \geqslant 0$ и $\cos x \geqslant 0$, то данное неравенство равносильно такому: $\sin x + \cos x + 2\sqrt{\sin x \cos x} > 1$.

Так как при $\sin x \geqslant 0$ и $\cos x \geqslant 0$ имеем $\sin x + \cos x \geqslant 1$, а при $\sin x > 0$ и $\cos x > 0$ это неравенство становится строгим, то отсюда следует, что неравенство (1) равносильно системе

$$\begin{cases} \sin x > 0, \\ \cos x > 0, \end{cases} \text{ значит, } 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

Задача 1.

Доказать, что $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$.

Доказательство.

Имеем $\cos(\sin x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \cos x\right) =$

$$= 2\sin\left(\frac{\sin x - \cos x + \frac{\pi}{2}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{2}\right).$$

Далее очевидно, что $\sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$ $(1{,}42 < 1{,}57)$ и так как $|\sin\alpha| \leqslant 1$ и $|\cos\alpha| \leqslant 1$, то $0 < \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{2} < \pi$ и

$$0 < \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < \pi,$$

откуда и следует требуемое неравенство, так как при таких аргументах оба синуса в произведении положительны.

Задача 2.

Доказать, что при любом α имеет место неравенство

$$4\sin 3\alpha + 5 \geqslant 4\cos 2\alpha + 5\sin\alpha.$$

Доказательство.

Выразив $\sin 3\alpha$ и $\cos 2\alpha$ через $\sin\alpha$ и обозначив $\sin\alpha = y$, получим

$$4(3y - 4y^3) + 5 \geqslant 4 - 8y^2 + 5y;$$

$$16y^3 - 8y^2 - 7y - 1 \leqslant 0.$$

Поскольку $y = 1$, то $16y^3 - 8y^2 - 7y - 1 = (y - 1)(4y + 1)^2$. Так как $y = \sin\alpha$, то $y - 1 \leqslant 0$, а следовательно, и многочлен

$$16y^3 - 8y^2 - 7y - 1 \leqslant 0,$$

что доказывает заданное неравенство.

Задача 3.

Доказать, что если $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} > 1 + \operatorname{ctg}\varphi$.

Доказательство.

Имеем

$$\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} > \frac{\cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2} + \sin\varphi}{\sin\varphi}. \qquad (1)$$

Но $\sin\varphi > 0$ при $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, поэтому после умножения обеих частей неравенства (1) на $\sin\varphi$, получим равносильное неравенство $2\cos^2\frac{\varphi}{2} > \cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2} + \sin\varphi$, или $1 < \sin\varphi$. Последнее неравенство при $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ выполняется, следовательно, справедливо и заданное неравенство.

Задача 4.

Доказать, что при любом допустимом значении α имеет место неравенство $\frac{\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha + \operatorname{ctg}\alpha} > 0$.

Доказательство. Первый способ.

Функция $y = \operatorname{tg}\alpha$ определена при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, а функция $y = \operatorname{ctg}\alpha$ определена при $\alpha \neq \pi k$; чтобы

$$\cos\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \cos\alpha\left(1 + \frac{1}{\sin\alpha}\right) \neq 0,$$

надо, чтобы $\cos\alpha \neq 0$, или $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, и $\sin\alpha \neq -1$, т.е. $\alpha \neq -\frac{\pi}{2} + \pi l$. Итак, необходимо, чтобы $\alpha \neq \frac{\pi}{2}\cdot q$, где

$$q = 0;\ \pm 1;\ \pm 2; \ldots \qquad (1)$$

При соблюдении условия (1) данные неравенства можно переписать в виде:

$$\frac{\sin^2\alpha\,(1+\cos\alpha)}{\cos^2\alpha\,(1+\sin\alpha)} > 0. \tag{2}$$

Из (1) следует, что

$$|\cos\alpha| < 1,\quad |\sin\alpha| < 1,\quad \sin\alpha \neq 0,\quad \cos\alpha \neq 0.$$

Поэтому $1+\sin\alpha > 0$, $1+\sin\alpha > 0$, $\sin^2\alpha > 0$, $\cos^2\alpha > 0$.

Следовательно, при условии $\alpha \neq \frac{\pi}{2}q$ неравенство (2) верно, а вместе с ним верно и доказываемое.

Второй способ.

Так как $\alpha \neq \frac{\pi}{2}k$, то из формул $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha\cos\alpha$ и $\cos\alpha = \operatorname{ctg}\alpha\sin\alpha$ следует, что

$$|\operatorname{tg}\alpha| > |\sin\alpha|,\quad |\operatorname{ctg}\alpha| > |\cos\alpha|.$$

Поэтому знак выражения $(\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha)$ совпадает со знаком $\operatorname{tg}\alpha$, а знак $(\cos\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)$ совпадает со знаком $\operatorname{ctg}\alpha$. Но $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ имеют одинаковые знаки, поэтому

$$\frac{\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha + \operatorname{ctg}\alpha} > 0.$$

Задача 5.

Доказать, что $7^7\sin^4\cos^{10}\alpha \leqslant 12500$, если $0 < \alpha < 90°$.

Доказательство.

Используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим семи неотрицательных чисел, получим

$$7^7\sin^4\alpha\cos^{10}\alpha = 7^7\cdot 2^2\cdot 5^5\left(\frac{\sin^2\alpha}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{\cos^2\alpha}{5}\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant 7^7\cdot 2^2\cdot 5^5\cdot\left(\frac{2\cdot\frac{\sin^2\alpha}{2} + 5\cdot\frac{\cos^2\alpha}{5}}{7}\right)^7 =$$

$$= 7^7\cdot 2^2\cdot 5^5\cdot\frac{1}{7^7} = 5^5\cdot 2^2 = 12500.$$

Равенство достигается при $\frac{\sin^2\alpha}{2} = \frac{\cos^2\alpha}{2}$, т.е. тогда, когда $\alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{5}}$.

Задача 6.

Доказать, что неравенство $|3\sin x - 4\cos x| \leqslant 5$ выполняется при любых значениях x.

Доказательство.

Известно, что $|a\sin x + b\cos x| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$. Поэтому

$$|3\sin x - 4\cos x| \leqslant \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Задача 7.

Доказать неравенство

$$1 + \cos\alpha + \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{3}\cos 3\alpha + \frac{1}{4}\cos 4\alpha > 0.$$

Доказательство.

Рассмотрим функцию

$$f(x) = 1 + \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{4}\cos 4x.$$

Покажем, что наименьшее значение функции на отрезке $[0; \pi]$ больше 0.

$$-f'(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x =$$

$$= 2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2} + 2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2} =$$

$$= 4\sin\frac{5x}{2}\cos x\cos\frac{x}{2}.$$

При $x \in [0; \pi]$ $f'(x) = 0$, когда $x \in \left\{0; \frac{2\pi}{5}; \frac{4\pi}{5}; \frac{\pi}{2}; \pi\right\}$.

Тогда $f(0) > 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} > 0$; $f(\pi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 0$;

$$f\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1 + \cos^2\frac{\pi}{5} + \frac{1}{2}\cos\frac{4\pi}{5} + \frac{1}{3}\cos\frac{6\pi}{5} + \frac{1}{4}\cos\frac{8\pi}{5} =$$

$$= 1 + \frac{\cos 2\pi}{5} + \frac{1}{4}\cos\frac{2\pi}{5} - \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{5} - \frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{5} =$$

$$= 1 + \frac{5}{4}\cos\frac{2\pi}{5} - \frac{5}{6}\cos\frac{\pi}{5} > 0;$$

$$f\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 1 + \cos\frac{4\pi}{5} + \frac{1}{2}\cos\frac{8\pi}{5} + \frac{1}{3}\cos\frac{12\pi}{5} + \frac{1}{4}\cos\frac{16\pi}{5} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{5} + \frac{2}{3}\cos\frac{2\pi}{5} - \cos\frac{\pi}{5} - \frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{5} =$$

$$= 1 + \frac{5}{6}\cos\frac{2\pi}{5} - \frac{5}{4}\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1}{12}\left(12 + 10\cos\frac{2\pi}{5} - 15\cos\frac{\pi}{5}\right) > 0.$$

Таким образом $f_{\min} > 0$. Так как исследуемая функция четная и периодическая с периодом 2π, то $f_{\min} > 0$ при любых x.

Задача 8.

Доказать, что $\sin^3\alpha - \sin^6\alpha \leqslant \frac{1}{4}$.

Доказательство. Первый способ.

Левую часть доказываемого неравенства перепишем в виде $\sin^3\alpha\,(1 - \sin^3\alpha)$. Поскольку $\sin^3\alpha + (1 - \sin^3\alpha) = 1$ — постоянная величина, то левая часть неравенства достигает максимума при $\sin^3\alpha = 1 - \sin^3\alpha$, т.е. при $\sin^3\alpha = \frac{1}{2}$. Таким образом, левая часть принимает наибольшее значение, равное $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Следовательно, $\sin^3\alpha - \sin^6\alpha \leqslant \frac{1}{4}$.

Второй способ.

Имеем $\sin^6\alpha - \sin^3\alpha + \frac{1}{4} = \left(\sin^5\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$, откуда следует, что $\sin^3\alpha - \sin^6\alpha \leqslant \frac{1}{4}$.

Задача 9.

Пусть $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$. Доказать, что

$$\operatorname{tg}\alpha_1 < \frac{\sin\alpha_1 + \ldots + \sin\alpha_n}{\cos\alpha_1 + \ldots + \cos\alpha_n} < \operatorname{tg}\alpha_n.$$

Доказательство.

Так как большему углу из промежутка $\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$ соответствует большее значение тангенса, то

$$\operatorname{tg} \alpha_1 < \operatorname{tg} a_i < \operatorname{tg} a_n \qquad (1)$$

для $i = 1, 2, \ldots, n$. Кроме того, $\cos \alpha_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Поэтому неравенства (1) можно записать в виде

$$\operatorname{tg} \alpha_1 \cos \alpha_1 < \sin \alpha_1 < \operatorname{tg} \alpha_n \cos \alpha_i. \qquad (2)$$

Будем в неравенстве (2) придавать i значения $1, 2, \ldots, n$ и сложим все полученные неравенства. Находим

$$\operatorname{tg} \alpha_1 (\cos \alpha_1 + \ldots + \cos \alpha_n) < \sin \alpha_1 + \ldots + \sin \alpha_n <$$

$$< \operatorname{tg} \alpha_n (\cos \alpha_1 + \ldots + \cos \alpha_n). \qquad (3)$$

Разделив все части неравенства (3) на $\cos\alpha_1 + \ldots + \cos\alpha_n$ (что возможно, так как $\cos \alpha_1 + \ldots + \cos \alpha_n > 0$), будем иметь:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 < \frac{\sin \alpha_1 + \ldots + \sin \alpha_n}{\cos \alpha_1 + \ldots + \cos \alpha_n} < \operatorname{tg} \alpha_n$$

Задача 10.

Доказать, что $\dfrac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{ctg} x} > 0$ при всех допустимых значениях x.

Доказательство.

$$y = \frac{\sin x \left(1 + \dfrac{1}{\cos x}\right)}{\cos x \left(1 + \dfrac{1}{\sin x}\right)} = \frac{\sin^2 x\,(1 + \cos x)}{\cos^2 x\,(1 + \sin x)} > 0.$$

Задача 11.

Доказать, что если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ и $\alpha, \beta, \gamma > 0$, то

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{1}{8}.$$

Доказательство.

Так как $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то

$$\cos\frac{\beta+\gamma}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\frac{\alpha}{2}, \quad \cos\frac{\beta-\gamma}{2} < 1,$$

и, следовательно,

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\left(1 - \sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Наибольшее значение функции, стоящей в правой части неравенства, $f(y) = \frac{1}{2}y(1-y)$ $\left(y = \sin\frac{\alpha}{2}\right)$ на промежутке $[0;\ 1]$ равно $\frac{1}{4}$. Следовательно,

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{1}{8}.$$

Задача 12.

Доказать, что если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} \geqslant \frac{3}{4}.$$

Доказательство.

Заданное неравенство эквивалентно неравенству

$$\frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{2} \leqslant \frac{3}{4}.$$

Так как $\cos\beta + \cos\gamma = 2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$, то с учетом условия и используя формулы приведения, получаем

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant \cos\alpha + 2\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Так как $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, то задача сводится к нахождению наибольшего значения функции $1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}$. Выделяя полный квадрат, получаем

$$1 + \frac{1}{2} - 2\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{3}{2}.$$

Таким образом, $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant \frac{3}{2}$, откуда следует, что заданное неравенство доказано.

Задача 13.

Доказать, что в остроугольном треугольнике ABC

$$\frac{\mathrm{tg}^5 A + \mathrm{tg}^5 B + \mathrm{tg}^5 C}{\mathrm{tg}\,A + \mathrm{tg}\,B + \mathrm{tg}\,C} \geqslant 9.$$

Доказательство.

Известно, что $\mathrm{tg}\,A + \mathrm{tg}\,B + \mathrm{tg}\,C = \mathrm{tg}\,A\,\mathrm{tg}\,B\,\mathrm{tg}\,C$.

Но $\dfrac{\mathrm{tg}^5 A + \mathrm{tg}^5 B + \mathrm{tg}^5 C}{\mathrm{tg}\,A\ \mathrm{tg}\,B\ \mathrm{tg}\,C} \geqslant \dfrac{3\sqrt[3]{(\mathrm{tg}\,A\,\mathrm{tg}\,B\,\mathrm{tg}\,C)}}{\mathrm{tg}\,A\,\mathrm{tg}\,B\,\mathrm{tg}\,C} =$

$$= 3\sqrt[3]{(\mathrm{tg}\,A\,\mathrm{tg}\,B\,\mathrm{tg}\,C)^2}. \tag{1}$$

Но $\mathrm{tg}\,A + \mathrm{tg}\,B + \mathrm{tg}\,C \geqslant 3\sqrt[3]{\mathrm{tg}\,A\,\mathrm{tg}\,B\,\mathrm{tg}\,C}$. Поэтому

$$\mathrm{tg}\,A\ \ \mathrm{tg}\,B\ \ \mathrm{tg}\,C \geqslant 3\sqrt[3]{\mathrm{tg}\,A\,\mathrm{tg}\,B\,\mathrm{tg}\,C} \text{ и}$$

$$3\sqrt[3]{(\mathrm{tg}\,A\,\mathrm{tg}\,B\,\mathrm{tg}\,C)^2} \geqslant 3.$$

Подставив полученный результат в соотношении (1), получим доказываемое неравенство.

Задача 14.

В треугольнике ABC $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \leqslant \frac{3}{8}\sqrt{3}$. Доказать.

Доказательство.

Поскольку $A + B + C = \pi$, то

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2} + \cos\frac{A-B}{2}\right)\cos\frac{C}{2} =$$

$$= \frac{1}{4}(\sin A + \sin B + \sin C).$$

Известно, что при $0 < x < \pi$ $\sin x$ — выпуклая функция. Применяем неравенство Иенсеня. Имеем

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{1}{4}(\sin A + \sin B + \sin C) =$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\underbrace{\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3}} \leqslant \frac{3}{4}\sin\underbrace{\frac{A+B+C}{3}} =$$

$$= \frac{3}{4}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Задача 15.

Доказать, что в треугольнике ABC $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4S\sqrt{3}$ (S — площадь треугольника ABC).

Доказательство.

Имеем $S = \frac{1}{2}bc\sin A$, откуда $bc = \frac{2S}{\sin A}$. Находим

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ba + bc + ca = \frac{2S}{\sin A} + \frac{2S}{\sin B} + \frac{2S}{\sin C} =$$

$$= 6S\underbrace{\frac{\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}}{3}} \geqslant 6S\sqrt[3]{\frac{1}{\sin A\sin B\sin C}}.$$

Поскольку $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8}$, $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}$, то $\sin A\sin B\sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}$. Поэтому

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 6\sqrt[3]{\underbrace{\frac{1}{\sin A\sin B\sin C}}} > 6\sqrt[3]{\frac{8}{3\sqrt{3}}} = 4S\sqrt{3}.$$

Задача 16.

Доказать, что на промежутке $(0; \pi)$ имеет место неравенство $x - \frac{x^3}{4} < \sin x$.

Доказательство.

Представим функцию $\sin x$ в виде

$$\sin x = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\left(1 - \sin^2\frac{x}{2}\right).$$

Используя неравенство $x \leqslant \operatorname{tg} x$, имеем

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} \geqslant \frac{x}{2},\quad 1 - \sin^2\frac{x}{2} \geqslant 1 - \frac{x^2}{4}.$$

Подставляя полученные оценки в правую часть исходного неравенства, убеждаемся в его справедливости.

Задача 17.

Доказать, что если A, B, C — углы тупоугольного треугольника ABC, то $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C < 0$.

Доказательство.

Имеем

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \mathrm{C} = \operatorname{tg}(180° - (B + C)) + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C =$$

$$= -\operatorname{tg}(B + C) + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C =$$

$$= \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C - \frac{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}{1 - \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C} =$$

$$= (\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)\left(1 - \frac{1}{1 - \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C}\right) =$$

$$= (\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C) \cdot \frac{-\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C}{1 - \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C} =$$

$$= -\operatorname{tg}(B + C) \cdot \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C.$$

Итак, $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$. Поскольку данный треугольник тупоугольный, то правая часть полученного равенства отрицательна, а поэтому левая часть отрицательна, так как $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C < 0$.

Задача 18.

Доказать, что при $a \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ имеет место

$$\sin 2\alpha < \frac{2}{3\alpha - \alpha^3}.$$

Доказательство. Первый способ.

Поскольку $\sqrt{3} > 1$, $6 > \frac{\pi}{2}$, то на интервале $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ выражение $3\alpha - \alpha^3$ положительно и поэтому данное неравенство можно переписать в виде

$$\frac{2}{\sin 2\alpha} > 3\alpha - \alpha^3, \tag{1}$$

или $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha > 3\alpha - \alpha^3$.

Применяя неравенство Коши:

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha + \alpha^3 > 3\sqrt[3]{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha\, \alpha^3} = 3\alpha.$$

Второй способ.

Неравенство (1) можно доказать так:

$$\text{если } f(\alpha) = \frac{2}{\sin\alpha\,\alpha},\ \ g(\alpha) = 3\alpha - \alpha^3, \text{ то}$$

$$\text{при } a \in \left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[\ f_{\min} = 2,\ \ g_{\max} = 2,$$

причем экстремальные значения принимаются этими формулами в разных точках.

Задача 19.

Дано $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \gamma < \frac{\pi}{2}$.

Доказать, что

$$\sqrt{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + 5} + \sqrt{\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + 5} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma + 5} \leqslant 4\sqrt{3}.$$

Доказательство.

Применим неравенство Коши:

$$2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + 5}\sqrt{\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + 5} \leqslant \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + 10;$$

$$2\sqrt{\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + 5}\sqrt{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma + 5} \leqslant \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\alpha + 10;$$

$$2\sqrt{\operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\alpha + 5}\sqrt{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + 5} \leqslant \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + 10.$$

Сложив эти неравенства с тождеством

$$\left(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + 5}\right)^2 + \left(\sqrt{\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + 5}\right)^2 + \left(\sqrt{\operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\alpha + 5}\right)^2 =$$

$$= \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\alpha + 15,$$ получим:

$$(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + 5} + \sqrt{\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + 5} + \sqrt{\operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\alpha + 5})^2 \leqslant$$

$$\leqslant 3(\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\alpha) + 45.$$

Так как по условию $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, то

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\alpha = 1$$ (докажите!),

а значит, утверждение задачи доказано.

7. ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Задача 1.

Вычислить значение $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcctg} 3\right)$.

Решение.

Обозначим $\alpha = \operatorname{arcctg} 3$. Тогда $\operatorname{ctg}\alpha = 3$. Вычислим теперь значение $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Имеем

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+3^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}};$$

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Используя формулу $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$, получаем

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{10}}}{1+\frac{3}{\sqrt{10}}} = \frac{1}{\sqrt{10}+3}.$$

Задача 2.

Доказать справедливость равенства

$$\arcsin\frac{4}{5} + \arccos\frac{2}{\sqrt{5}} = \operatorname{arcctg}\frac{2}{11}.$$

Решение.

Вычислим котангенс от левой и правой части равенства:

$$\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{4}{5} + \arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)\operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{4}{5}\right) + \operatorname{ctg}\left(\mathrm{arc}sos\frac{2}{\sqrt{5}}\right)} =$$

$$= \frac{2}{11}, \quad \operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{2}{11}\right) = \frac{2}{11}.$$

Итак, получаем

$$\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{4}{5} + \arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{2}{11}\right).$$

Так как угол $\arcsin\frac{4}{5}+\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$ принадлежит промежутку $(0;\ \pi)$, промежутку монотонности функции котангенс, то из равенства значений функции следует равенство значений аргументов, что и требовалось доказать.

Задача 3.

Вычислить $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$.

Решение.

$$\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)=\arccos\left(\cos\frac{9\pi}{14}\right)=\frac{9\pi}{14}.$$

Задача 4.

Доказать, что $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$.

Доказательство.

Пусть $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\alpha_1$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{5}=\alpha_2$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}=\alpha_3$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{8}=\alpha_4$. Очевидно $0<\alpha_i<\frac{\pi}{4}$, $i=1,2,3,4$. Поэтому

$$0<\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4<\pi.$$

Для доказательства тождества достаточно показать, что

$$\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)=1.$$

Так как $\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2)=\frac{4}{7}$, $\operatorname{tg}(\alpha_3+\alpha_4)=\frac{3}{11}$, то

$$\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)=\frac{\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2)+\operatorname{tg}(\alpha_3+\alpha_4)}{1-\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2)\operatorname{tg}(\alpha_3+\alpha_4)}=1.$$

Задача 5.

Доказать, что уравнение $\sin\left(\frac{1}{7}\arccos x\right)=1$ не имеет решений.

Доказательство.

Имеем $\frac{1}{7}\arccos x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, где $k=0;\ \pm1;\ \pm2;\ \ldots$, т.е.

$$\arccos x = \left(\frac{7}{2} + 14k\right)\pi.$$

Поскольку $0 \leqslant \arccos x < \pi$, то последнее равенство не выполняется ни при каком значении $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$. Итак, уравнение решений не имеет.

Задача 6.

Доказать, что

1) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$;

2) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.

Доказательство.

1) Заданное равенство запишем в виде

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x.$$

Обозначим: $\arcsin x = \alpha_1$; $\frac{\pi}{2} - \arccos x = \alpha_2$. Докажем, что $\alpha_1 = \alpha_2$. Действительно, $\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2$, так как

$$\sin(\arcsin x) = x \text{ и } \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x.$$

Покажем теперь, что углы α_1 и α_2 находятся в одном промежутке монотонности функции $\sin x$.

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x < \frac{\pi}{2}; \qquad (1)$$

$$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi. \qquad (2)$$

Домножим неравенство (2) на (-1) и прибавим ко всем его частям $\frac{\pi}{2}$. Имеем: $\frac{\pi}{2} \geqslant \frac{\pi}{2} - \arccos x \geqslant -\frac{\pi}{2}$. Утверждение доказано.

Соотношение 2) доказывается аналогично.

Задача 7.

Доказать, что уравнение $2 \operatorname{arctg} x + 3 \operatorname{arctg} x = \pi$ не имеет решений.

Доказательство.

Данное уравнение перепишем в виде

$$2\,(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x) + \operatorname{arctg} x = \pi.$$

Но так как $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, то имеем

$$2 \cdot \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} x = \pi,$$

откуда следует, что $\operatorname{arctg} x = 0$, что невозможно, поскольку $0 < \operatorname{arctg} x < \pi$. Итак, уравнение не имеет решений.

Задача 8.

Найти значение выражения $\arcsin(\sin 3)$.

Решение.

Пользуясь формулами приведения, заменим $\sin 3$ синусом другого угла x, удовлетворяющего неравенствам

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Имеем $\sin 3 = \sin(\pi - 3)$, потому

$$\arcsin(\sin 3) = \arcsin(\sin(\pi - 3)).$$

В то же время число $\pi - 3 \approx 0{,}14$ удовлетворяет неравенствам $-\frac{\pi}{2} \leqslant \pi - 3 \leqslant \frac{\pi}{2}$, так что

$$\arcsin(\sin(\pi - 3)) = \pi - 3.$$

Таким образом, $\arcsin(\sin 3) = \pi - 3$.

Задача 9.

Найти величину выражения:

а) $\arcsin(x-1) + 2\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2x - x^2}}{x}$;

б) $\arccos(\sin \pi(x^2 + x - 3))$, если $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}$.

Решение.

а) отметим, что данное выражение определено, если

$$\begin{cases} -1 \leqslant x-1 \leqslant 1, \\ 2x - x^2 \geqslant 0, \quad x \neq 0, \end{cases}$$

откуда $0 < x \leqslant 2$.

Обозначим $\alpha = \arcsin(x-1)$, $\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{x}$.

Требуется найти $\gamma = \alpha + 2\beta$. Имеем

1) $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $\sin\alpha = x-1$, откуда

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{2x-x^2}.$$

2) $-\dfrac{\pi}{2} < \beta < \dfrac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{x}$, откуда находим

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{2x-x^2}}{x} = \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} =$$

$$= \operatorname{tg}\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right). \qquad (1)$$

Из неравенства $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ следует, что

$$0 \leqslant \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Тогда, поскольку угол β лежит в интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, из равенства тангенсов (1) следует равенство самих углов, так что $\beta = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}$, $\dfrac{\alpha}{2} + \beta = \dfrac{\pi}{4}$. Отсюда искомый угол

$$\gamma = 2\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Значит, при любых x $0 < x \leqslant 2$;

$$\arcsin(x-1) + 2\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

б) Оценим величину $\alpha = \pi(x^2 + x - 3)$ при

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{3}-1}{2}. \text{ Имеем}$$

$$0 \leqslant x^2 \leqslant \frac{2-\sqrt{3}}{2}; \quad 0 \leqslant x^2 + x \leqslant \frac{1}{2}; \quad -3\pi \leqslant \alpha \leqslant -\frac{5\pi}{2}, \text{ или}$$

$$\pi \leqslant 4\pi + \alpha \leqslant \frac{3\pi}{2}. \qquad (1)$$

Следовательно,

$$\arccos(\sin\alpha) = \arccos(\sin(4\pi+\alpha)) =$$
$$= \arccos\left(\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \left(\frac{3}{2}\pi - 4\pi - \alpha\right)\right)\right) =$$
$$= \arccos\left(-\cos\left(\frac{3}{2}\pi - 4\pi - \alpha\right)\right) =$$
$$= \pi - \arccos\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi - 4\pi - \alpha\right)\right),$$

где в силу неравенства (1) $0 \leqslant \frac{3}{2}\pi - 4\pi - \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Тогда окончательно получаем

$$\arccos(\sin\alpha) = \pi - \frac{3\pi}{2} + 4\pi + \alpha = \frac{7}{2}\pi + \alpha.$$

Ответ: $\frac{7}{2}\pi + \pi(x^2 + x - 3)$.

Задача 10.

Дано: $0 < x < 1$, $\alpha = 2\,\mathrm{arctg}\frac{1+x}{1-x}$, $\beta = \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Доказать: $\alpha + \beta = \pi$.

Доказательство.

По условию задачи $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+x}{1-x}$. (1)

Пользуясь формулой $\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, получаем в силу (1) $\sin\alpha = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, откуда

$$y = \arcsin(\sin\alpha) = \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2} = \beta. \tag{2}$$

Так как $0 \leqslant x < 1$, то $\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x} < \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Тогда $-\frac{\pi}{2} < \alpha - \pi < 0$ и

$$\arcsin(\sin(\alpha-\pi)) = \arcsin(-\sin\alpha) = -\arcsin(\sin\alpha) = -y.$$

Но угол $\alpha - \pi$ лежит в интервале монотонности функции $\sin x$, следовательно,

$$y = \arcsin(\sin\alpha) = \pi - \alpha. \tag{3}$$

Из соотношений (2) и (3) получаем, что $\alpha + \beta = \pi$.

Задача 11.

Доказать, что $\arcsin\dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ существует тогда и только тогда, когда $\pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + \pi k$.

Доказательство.

Из условия следует, что $\left|\dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right| \leqslant 1.$

Из последнего следует, что

$$\left|\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right| = \left|\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x}{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x}\right| = \left|\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right| \leqslant 1.$$

Из последнего следует, что

$$-\frac{\pi}{4} \leqslant x - \frac{\pi}{4} - \pi k \leqslant \frac{\pi}{4}, \text{ или } \pi k \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi k,$$

что и требовалось доказать.

Задача 12.

Решить неравенство $\arcsin \lg x > 0$.

Решение.

Должно быть $0 < \lg x \leqslant 1$. Отсюда $1 < x \leqslant 10$.

Задача 13.

Доказать, что сумма

$$\arcsin x + 3 \arccos x + \arcsin (2x\sqrt{1 - x^2})$$

не зависит от x, если $x^2 < \frac{1}{2}$.

Доказательство.

Пусть $\arcsin x = y$. Тогда $\sin y = x$. Отсюда

$$2y = k\pi + (-1)^k \arcsin 2x\sqrt{1 - x^2},$$

где k — целое число или нуль. Но из условия $x^2 < \frac{1}{2}$ следует, что $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $-\frac{\pi}{4} < y < \frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{2} < 2y < \frac{\pi}{2}$ и $k = 0$. Поэтому $2y = 2 \arcsin x = \arcsin 2x\sqrt{1 - x^2}$.

Итак, имеем

$$\arcsin x + 3 \arccos x + \arcsin (2x\sqrt{1 - x^2}) =$$

$$= 3 (\arcsin x + \arccos x) = \frac{3\pi}{2}.$$

Задача 14.

Решить неравенство

$$\frac{\arccos (x^2 - 3x + 2)}{8x^2 - 10x + 3} > 0.$$

Решение.

Так как $\arccos(x^2-3x+2)\geqslant 0$, то данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}8x^2-10x+3>0,\\ \arccos(x^2-3x+2)\neq 0,\\ \arccos(x^2-3x+2) \text{ существует.}\end{cases}$$

Другими словами,

$$\begin{cases}8x^2-10x+3>0,\\ -1\leqslant x^2-3x+2<1.\end{cases}$$

Решаем каждое из трех неравенств системы:

$$\begin{cases}8x^2-10x+3>0,\\ x^2-3x+3\geqslant 0,\\ x^2-3x+1<0.\end{cases}$$

Дискриминант второго неравенства отрицателен, а потому оно удовлетворяется при всех x. Остается первое и третье.

$$x<\frac{1}{2},\quad x>\frac{3}{4};\quad \frac{3-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Задача 15.

Решить неравенство $\operatorname{arctg}^2 x-5\operatorname{arctg}x+6>0$.

Решение.

Обозначая $\operatorname{arctg}x=y$, заданное неравенство перепишем в виде неравенства $y^2-5y+6>0$, решение которого $y<2$ и $y>3$. Значит, $\operatorname{arctg}x<2$ и $\operatorname{arctg}x>3$, откуда

$$x\in(\operatorname{ctg}2;\ \infty)\ \text{и}\ x\in(-\infty;\ \operatorname{ctg}3).$$

Задача 16.

Решить неравенство $\arcsin x>\arccos x$.

Решение.

Множество допустимых значений x, входящих в неравенство, имеет вид $x\in[-1;\ 1]$. При $x<0$ как правая, так и левая части неравенства имеют значения, принадлежащие промежутку $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$. Так, на промежутке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ функция синус монотонно возрастает, то при $x \in [0;\ 1]$ заданное неравенство эквивалентно неравенству

$$\sin(\arcsin x) > \sin(\arccos x) \quad \Leftrightarrow \quad x > \sqrt{1 - x^2}.$$

Последнее неравенство при рассматриваемых значениях неизвестного эквивалентно неравенству $2x^2 > 1$.

Ответ: $x \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ 1\right)$.

Задача 17.

Решить уравнение

$$\arccos(\sin x) = \frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}.$$

Решение.

Поскольку $\cos(\arccos a) = a$, то

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{4}\right) \Rightarrow \sin x = -\sin\frac{x}{4},$$

$$2\sin\frac{5x}{8}\cos\frac{3x}{8} = 0, \qquad \left[\begin{array}{l} \frac{5x}{8} = k\pi, \\ \frac{3x}{8} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{8k\pi}{5}, \\ x = \frac{4\pi}{3} + \frac{8k\pi}{3}, \quad k \in Z. \end{array}\right.$$

Так как $0 \leqslant \arccos a \leqslant \pi$, то и

$$0 \leqslant \frac{\pi}{2} + \frac{x}{4} \leqslant \pi, \qquad -2\pi \leqslant x \leqslant 2\pi.$$

Поэтому окончательно уравнение удовлетворяет лишь значения переменной x: $0;\ \pm\frac{8\pi}{3};\ \pm\frac{4\pi}{3}$.

Задача 18.

Решить уравнение

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = \frac{x}{4} + \frac{\pi}{4}.$$

Решение.

Имеем

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{4}\right) \Rightarrow \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{4}\right), \text{ или}$$

$$\frac{\sin\left(x - \frac{x}{4} - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos x \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{4}\right)} = 0, \text{ откуда } x = \frac{2\pi}{3}(2n + 1).$$

При этом $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} a < \frac{\pi}{2}$, и поэтому следует потребовать выполнения условия

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{x}{4} + \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -4\pi < x < 0.$$

Среди найденных значений x лишь два принадлежат указанной области: $-\frac{2\pi}{3}$ и $-\frac{10\pi}{3}$.

Очевидно также, что в этих точках

$$\cos x \neq 0 \text{ и } \cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right) \neq 0, \text{ значит,}$$

$$x = \left\{-\frac{2\pi}{3};\ -\frac{10\pi}{3}\right\}.$$

Задача 19.

Решить уравнение $\arcsin(\sin x) = \frac{x}{6}$.

Решение.

Имеем

$$\sin x = \sin\frac{x}{6} \Rightarrow 2\cos\frac{7x}{12}\sin\frac{5x}{12} = 0 \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{7x}{12}=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\\ \dfrac{5x}{12}=\pi n,\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{6\pi}{7}+\dfrac{12\pi n}{7},\\ x=\dfrac{12\pi n}{5}, \quad n\in Z.\end{array}\right.$$

Поскольку $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant \arcsin(\sin x)\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, то

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{x}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}, \quad -3\pi\leqslant x\leqslant 3\pi.$$

Из найденных решений нужно выбрать лишь те, что удовлетворяют последнему неравенству:

$$x=\left\{\frac{6\pi}{7};\ \frac{6\pi}{7}\pm\frac{12\pi}{7};\ \frac{6\pi}{7}-\frac{24\pi}{7};\ 0;\ \pm\frac{12\pi}{5}\right\}.$$

Задача 20.

Решить уравнение

$$\arcsin x\cdot\arccos x=\frac{\pi^2}{18}.$$

Решение.

Поскольку $x=\dfrac{\pi}{2}-\arcsin x$, обозначим $\arcsin x=u$,

получим $\dfrac{\pi}{2}u-u^2=\dfrac{\pi^2}{18}$, $\quad u^2-\dfrac{\pi}{2}u+\dfrac{\pi^2}{18}=0$,

$$u=\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{12}, \quad \arcsin x=\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{12}, \quad x=\sin\left(\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{12}\right).$$

Значит, $x=\left\{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\pm\dfrac{\pi}{12}\right)\right\}$.

Задача 21.

Доказать, что если x, y, $z>0$ и

$$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y+\operatorname{arctg} z<\pi, \text{ то } xyz<x+y+z.$$

Доказательство.

Обозначив слагаемые в левой части заданного в условии неравенства через α, β, γ соответственно, будем иметь:

$$x + y + z = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma =$$

$$= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha \cos\beta} + \operatorname{tg}\alpha \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos\alpha \cos\beta} =$$

$$= \frac{\sin(\alpha + \beta)\cos\gamma + \sin\alpha\cos(\alpha + \beta)}{\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma} =$$

$$= \frac{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}{\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma} > 0,$$

так как $0 < \alpha + \beta + \gamma < \pi$ и все множители в знаменателе положительны, $\cos(\operatorname{arctg} t) > 0$, поскольку $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} t < \frac{\pi}{2}$ при любом t.

8. ПАРАМЕТР В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ И НЕРАВЕНСТВАХ

Задача 1.

Решить уравнение $a(1+\cos x) = b\sin x$.

Решение.

Запишем уравнение так:

$$2a\cos^2\frac{x}{2} = 2b\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} \text{ и рассмотрим случаи:}$$

1) При $a = b = 0$ получим тождество, которое справедливо при любых x;

2) при $a = 0$, $b \neq 0$ уравнение будет выглядеть так:

$$2b\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0; \quad \sin x = 0, \quad x = \pi n, \quad n \in Z;$$

3) при $b = 0$, $a \neq 0$ получаем:

$$\cos\frac{x}{2} = 0, \quad x = \pi + 2k\pi, \quad k \in Z;$$

4) при $a \neq 0$, $b \neq 0$ запишем уравнение в виде:

$$\cos x\left(a\cos\frac{x}{2} - b\sin\frac{x}{2}\right) = 0, \text{ откуда}$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos\frac{x}{2} = 0,\\ a\cos\frac{x}{2} - b\sin\frac{x}{2} = 0,\end{array}\right. \quad \text{значит,}$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos\frac{x}{2} = 0,\\ a = b\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2},\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\cos\frac{x}{2} = 0,\\ \mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = \frac{a}{b},\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = \pi + 2k\pi,\\ x = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{a}{b} + 2\pi m, \quad m \in Z.\end{array}\right.$$

Ответ: При $a = b = 0$ x — любое число;

при $a = 0$, $b \neq 0$ $x = \pi n$, $n \in Z$;

при $b = 0$, $a \neq 0$ $x = \pi + 2k\pi$, $k \in Z$;

при $a \neq 0$, $b \neq 0$

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad x_2 = 2\operatorname{arctg}\frac{a}{b} + 2\pi m, \quad k, m \in Z$$

Задача 2.

Решить уравнение $\sin 4x = a \operatorname{tg} x$.

Решение.

1) Если $a = 0$, то $\sin 4x = 0$, $x = \frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$.

2) Если $a \neq 0$, то данное уравнение запишем так:

$$2\sin 2x \cos 2x = a \operatorname{tg} x, \text{ откуда}$$

$$\frac{4\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = a \operatorname{tg} x, \text{ или}$$

$$\operatorname{tg} x \left(4\frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{(1 + \operatorname{tg}^2 x)^2} - a\right) = 0.$$

Тут в свою очередь возможны два случая:

1°) $\operatorname{tg} x = 0$, $x = k\pi$;

2°) $4(1 - \operatorname{tg}^2 x) = a(1 + \operatorname{tg}^2 x)^2$.

Обозначим $\operatorname{tg}^2 x = t$ $(t \geqslant 0)$. Тогда

$$4 - 4t = a(1 + 2t + t^2), \text{ откуда}$$

$$at^2 + t(2a + 4) + a - 4 = 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{-a - 2 \pm \sqrt{1 + 2a}}{a}.$$

Действительные корни возможны при условии $a \neq 0$, $a \geqslant -\frac{1}{2}$. Кроме того, поскольку $t = \operatorname{tg}^2 x$, то

$$\frac{-a - 2 - 2\sqrt{1 + 2a}}{a} \geqslant 0$$

а) при $a>0$, $-2-a-2\sqrt{1+2a}\geqslant 0$, $2\sqrt{1+2a}\leqslant a-2$. Поскольку $-2-a<0$, то решений нет;

б) при $-\frac{1}{2}\leqslant a<0$, $2\sqrt{1+2a}\geqslant -a-2$ и неравенство выполняется при всех $-\frac{1}{2}\leqslant a<0$, поскольку его левая часть не меньше нуля, а правая больше.

При условии t_2:

$$\frac{-a-2+2\sqrt{1+2a}}{a}\geqslant 0$$

а) при $a>0$ получаем $2\sqrt{1+2a}\geqslant a+2$, откуда

$$0<a\leqslant 4;$$

б) при $-\frac{1}{2}\leqslant a<0$ получаем $a^2-4a\geqslant 0$, $-\frac{1}{2}\leqslant a<0$. Значит, при $-\frac{1}{2}\leqslant a<0$ $t=\frac{-a-2\pm\sqrt{1+2a}}{a}$. Имеем

$$x=\pm\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{-a-2+2\sqrt{1+2a}}{a}}+k\pi,\quad k\in Z.$$

Ответ: При любом действительном $a\neq 0$ $x=\pi n$, $n\in Z$;

при $a=0$ $x=\frac{\pi n}{4}$, $n\in Z$;

при $-\frac{1}{2}\leqslant a<0$

$$x_2=\pi n\pm\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{-a-2\pm 2\sqrt{1+2a}}{a}},\ n\in Z;$$

при $0<a<4$ $x_2=\pi n\pm\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{-a-2+\sqrt{1+2a}}{a}}$, $n\in Z$.

Задача 3.

Решить уравнение $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}(\alpha-x)=2\operatorname{tg}\alpha$.

Решение.

Имеем $\frac{\sin\alpha}{\cos x\cos(\alpha-x)}=\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}$. (1)

Понятно, что $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z.$

1) Если $\alpha = k\pi$, то уравнение (1) будет выглядеть

$$\frac{0}{\cos x \cos(x-\alpha)} = 0.$$

Это уравнение удовлетворяется при любом x, при котором $\cos x \neq 0$ и $\cos(x - k\pi) \neq 0$ или

$$x \neq \frac{\pi}{2} + m\pi; \quad x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} + l\pi, \quad k,\ m,\ l \in Z.$$

Значит, если $\alpha = k\pi$, то x — любое число, кроме

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in Z.$$

2) Пускай $\alpha \neq k\pi$ и $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Тогда $\sin\alpha \neq 0$. Уравнение будет выглядеть:

$$\frac{1}{\cos x \cos(x-\alpha)} = \frac{2}{\cos\alpha}, \text{ откуда}$$

$$\cos(2x-\alpha) = 0, \quad x = \frac{m\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}.$$

Чтобы $x = \dfrac{m\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}$ было решением заданного уравнения, должны исполняться условия

$$\cos x \neq 0 \text{ и } \cos(x-\alpha) \neq 0.$$

Если $\cos x = 0$, то $\dfrac{m\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2} = s\pi + \dfrac{\pi}{2}$, откуда

$$\alpha = (2s - m)\pi + \frac{\pi}{2}, \text{ что противоречит условию:}$$

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Значит, $\cos x \neq 0$ и $\cos(x-\alpha) \neq 0$.

Ответ: Если $\alpha = \pi k$, $k \in Z$, то $x \in R$, кроме $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Если $\alpha \neq k\pi$ и $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, то $x = \dfrac{m\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}$.

Если $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$, то уравнение решений не имеет.

Задача 4.

Решить уравнение $\cos^4 x + 2\sin^4 x = a$.

Решение.

Заданное уравнение сводится к уравнению

$$3\cos^2 2x - 2\cos 2x + 3 - 4a = 0. \qquad (1)$$

Дискриминантом этого уравнения (относительно $\cos 2x$) является выражение: $D = 48a - 32$.

Для того, чтобы корни уравнения (1) были действительными необходимо и достаточно, чтобы $48a - 32 \geqslant 0$. В этом случае

$$\cos 2x = \frac{1 \pm 2\sqrt{3a-2}}{3},$$

$$x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1 \pm 2\sqrt{3a-2}}{3} + k\pi, \quad k \in Z.$$

Поскольку $|\cos 2x| \leqslant 1$, то должно быть:

$$-1 \leqslant \frac{1 + 2\sqrt{3a-2}}{3} \leqslant 1.$$

Неравенство $-1 \leqslant \dfrac{1 + 2\sqrt{3a-2}}{3} \leqslant 1$ выполняется при $\dfrac{2}{3} \leqslant a \leqslant 1$, а неравенство $-1 \leqslant \dfrac{1 - 2\sqrt{3a-2}}{3} \leqslant 1$ — при $\dfrac{2}{3} \leqslant a \leqslant 2$. Значит, $x = -\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1 \pm 2\sqrt{3a-2}}{3} + k\pi$, $k \in Z$, если $\dfrac{2}{3} \leqslant a \leqslant 1$; $x = k\pi \pm \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1 - 2\sqrt{3a-2}}{3}$, если $1 < a \leqslant 2$.

Рассмотрим случаи:

1) Если $a = \frac{3}{3}$, то уравнение (1) удовлетворяется только при $\cos 2x = \frac{1}{3}$, $x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3} + k\pi$, $k \in Z$.

2) Если $a + 2$, то

$$\cos 2x = \frac{1 - 2\sqrt{6 - 2}}{3} = -1, \ x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}.$$

3) Если $a + 1$, то $x_2 = \pm \frac{1}{2} \arccos \left(-\frac{1}{3}\right) + k\pi$, $k \in Z$.

Ответ: Если $a < \frac{2}{3}$, то решений нет.

Если $\frac{2}{3} \leqslant a \leqslant 1$, то $x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1 \pm 2\sqrt{3a - 2}}{3} + k\pi$, $k \in Z$.

Если $1 < a \leqslant 2$, то $x = \pm \arccos \frac{1 - 2\sqrt{3a - 2}}{3} + k\pi$, $k \in Z$

Задача 5.

Решить уравнение $\sec x + \operatorname{cosec} x = \frac{1}{p}$.

Решение.

Обозначим $\sin x + \cos x = t$. Тогда

$$t^2 - 2pt - 1 = 0, \ t_{1,2} = p \pm \sqrt{p^2 + 1}, \text{ значит,}$$

$$\sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = p \pm \sqrt{p^2 + 1};$$

$$\cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 1}}{\sqrt{2}};$$

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos \left(\frac{p \pm \sqrt{p^2 + 1}}{\sqrt{2}}\right) + 2\pi n$$

при $\left|\frac{p \pm \sqrt{p^2 + 1}}{\sqrt{2}}\right| \leqslant 1$. Рассмотрим неравенство

$$-\sqrt{2} \leqslant p + \sqrt{p^2 + 1} \leqslant \sqrt{2}.$$

Неравенство $-\sqrt{2} \leqslant p + \sqrt{p^2+1}$ выполняется для всех p, поскольку $\sqrt{p^2+1} > |p|$, поэтому $0 < p + \sqrt{p^2+1}$.

Рассмотрим второе неравенство: $p + \sqrt{p^2+1} \leqslant \sqrt{2}$.

Имеем $\sqrt{p^2+1} \leqslant \sqrt{2} - p$. Последнее неравенство имеет решения только при $\sqrt{2} - p > 0$, значит, $p < \sqrt{2}$. При этом можно возвести к квадрат обе части неравенства.

$$p^2 + 1 \leqslant 2 + p^2 - 2\sqrt{2}\,p \Rightarrow p \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Решая неравенство $-\sqrt{2} \leqslant p - \sqrt{p^2+1} \leqslant \sqrt{2}$, имеем: при всех p выполняется неравенство

$$p - \sqrt{p^2+1} \leqslant \sqrt{2}, \text{ поскольку } p - \sqrt{p^2+1} < 0.$$

Решаем неравенство $-\sqrt{2} \leqslant p + \sqrt{p^2+1}$. Имеет место неравенство $p \geqslant -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Ответ: При $p < -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{p + \sqrt{p^2+1}}{\sqrt{2}} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

При $-\frac{1}{2\sqrt{2}} \leqslant p \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{p \pm \sqrt{p^2+1}}{\sqrt{2}} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

При $p > \frac{1}{2\sqrt{2}}$ $x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{p - \sqrt{p^2+1}}{\sqrt{2}} + 2\pi n,\ n \in Z$

Задача 6.

Решить уравнение $\frac{\sin mx}{\sin x} = \frac{\cos mx}{\cos x}$.

Решение.

Имеем $\sin mx \cdot \cos x - \cos mx \sin x = 0$;

$$\sin(mx - x) = 0;\ \ mx - x = k\pi;$$

$$(m-1)\,x = k\pi. \qquad (1)$$

1) Пускай $m = 1$. Тогда заданное уравнение будет иметь вид $\frac{\sin x}{\sin x} = \frac{\cos x}{\cos x}$

Это уравнение удовлетворяется при любых x, кроме $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

2) Пускай

$m \neq 1$. Тогда из (1) $x = \frac{k\pi}{m-1}$.

Эта формула дает посторонние решения при тех значениях k, при которых $\frac{k\pi}{m-1} = \frac{n\pi}{2}$, откуда

$$k = \frac{m-1}{2}n, \text{ где } n \in Z.$$

Ответ: Если $m = 1$, то x — любое число, кроме $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

Если $m \neq 1$, то $x = \frac{k\pi}{m-1}$, где $k \in Z$, кроме $k = \frac{m-1}{2}n$, где $n \in Z$.

Задача 7.

Решить уравнение $\sin(x+\alpha) = \cos\alpha \cdot \frac{1}{\sin x}$.

Решение.

По условию $x \neq \pi k$, $k \in Z$. Имеем

$$\sin(x+\alpha)\sin\alpha = \cos\alpha, \quad \frac{1}{2}(\cos\alpha - \cos(2x-\alpha)) = \cos\alpha,$$

$$\cos\alpha + \cos(2x+\alpha) = 0, \quad 2\cos(x+\alpha)\cos x = 0,$$

откуда $\cos(x+\alpha) = 0$ и $\cos x = 0$, значит,

$$x = -\alpha + \frac{\pi}{2} + n\pi, \; n \in Z; \qquad (1)$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z. \qquad (2)$$

Из полученного множества значений исключим углы $x = \pi k$, $k \in Z$. Множество значений (1) их не имеет, а во втором им отвечает параметр $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi(m - k)$, $k, m \in Z$.

Ответ: При $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi(m - k)$, $k, m \in Z$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z,$$

$$x = -\alpha + \frac{\pi}{2} + m\pi, \quad m \in Z.$$

При $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi(m - k)$, $k, m \in Z$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z.$$

Задача 8.

Решить уравнение $|\cos 2x| = |\sin^2 x - a|$.

Решение.

Сделаем замену $\sin^2 x = t$. Тогда заданное уравнение запишем так: $|1 - 2t| = |t - a|$.

Рассмотрим случаи:

1) $1 - 2t = t - a$, откуда $t = \frac{1 + a}{3}$, $\sin^2 x = \frac{1 + a}{3}$.

Это возможно при $0 \leqslant \frac{1 + a}{3} \leqslant 1$. При таких значениях параметра получим

$$\sin x = \pm\sqrt{\frac{a + 1}{3}}, \text{ откуда}$$

$$x = \pm \arcsin\sqrt{\frac{a + 1}{3}} + \pi n, \quad n \in Z.$$

2) $1 - 2t = -(t - a)$, откуда $t = 1 - a$.

$\sin^2 x = 1 - a$, $x = \pm \arcsin\sqrt{1 - a} + \pi n$, $n \in Z$,

$$0 \leqslant 1 - a \leqslant 1, \quad 0 \leqslant a \leqslant 1.$$

Ответ: При $-1 \leqslant a \leqslant 0$ $x = \pm \arcsin \sqrt{\dfrac{a+1}{3}} + \pi n, \ n \in Z.$

При $0 \leqslant a \leqslant 1$ $x = \pm \arcsin \sqrt{\dfrac{a+1}{3}} + \pi n,$

$x = \pm \arcsin \sqrt{1-a} + k\pi, \quad n, k \in Z.$

При $1 < a \leqslant 2$ $x = \pm \arcsin \sqrt{\dfrac{a+2}{3}} + \pi n, \ n \in Z.$

Задача 9.

Найти все значения параметра b, при которых система

$$\begin{cases} (\operatorname{ctg} x - 1)(x + b) = 0, \\ |x| < 1 \end{cases}$$

имеет только одно решение.

Решение.

Уравнение $\operatorname{ctg} x = 1$ на промежутке $(-1; 1)$ имеет только один корень $x = \dfrac{\pi}{4}$. Значит, первое уравнение системы имеет не больше двух разных корней на промежутке $(-1; 1)$. Таким образом, задача сводится к тому, чтобы найти все значения b, при которых уравнение $x = -b$ не будет давать новых решений данной системы. Понятно, что $b = \dfrac{\pi}{4}$ — одно из искомых значений.

Дальше, учитывая условие $-1 < x < 1$, значение $x = -b$ не будет решением системы, если $b \leqslant -1$ или $b \geqslant 1$. Кроме того, $x \neq \pi n$, $n \in Z$. Учитывая это, имеем, если $b = 0$, то $x = -b$ не будет решением системы.

Ответ: $b \leqslant -1$, $b = -\dfrac{\pi}{4}$, $b = 0$, или $b \geqslant 1$.

Задача 10.

Решить систему $\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = a^2, \\ \sin y \cdot \cos x = a. \end{cases}$

Решение.

Сложим и вычтем данные уравнения. Получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} \sin(x+y) = a^2 + a, \\ \sin(x-y) = a^2 - a. \end{cases}$$

Поскольку $|\sin\alpha| \leqslant 1$, то

$$\begin{cases} -1 \leqslant a^2 - a \leqslant 1, \\ -1 \leqslant a^2 + a \leqslant 1, \end{cases}$$

откуда

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2 + a + 1 \geqslant 0, \\ a^2 + a - 1 \leqslant 0, \end{cases} \\ \\ \begin{cases} a^2 - a + 1 \geqslant 0, \\ a^2 - a - 1 \leqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Неравенства $a^2 + a + 1 \geqslant 0$ и $a^2 - a + 1 \geqslant 0$ выполняются при всех действительных a, поэтому последняя система сводится к системе

$$\begin{cases} a^2 - a - 1 \leqslant 0, \\ a^2 + a - 1 \leqslant 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \leqslant a \leqslant \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \leqslant a \leqslant \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \end{cases}$$

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leqslant a \leqslant \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

При таких a последовательно находим

$$\begin{cases} x + y = (-1)^n \arcsin(a^2 + a) + \pi n, \quad n \in Z, \\ x - y = (-1)^k \arcsin(a^2 - a) + k\pi, \quad k \in Z, \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{2}((-1)^n \arcsin(a^2 + a) + (-1)^k \arcsin(a^2 - a) + \pi(\pi + k);$$

$$y = \frac{1}{2}((-1)^n \arcsin(a^2 + a) - (-1)^k \arcsin(a^2 - a) + \pi(\pi - k),$$

$$n, k \in Z.$$

Задача 11.

Считая, что система уравнений

$$\begin{cases} a\sin^2 x + b\cos^2 x = 1, \\ a\cos^2 y + b\sin^2 x = 1, \\ a\operatorname{tg} x = b\operatorname{tg} y, \end{cases}$$

где $a \neq b$, имеет хотя бы одно решение, найти соотношение между числами a и b.

Решение.

Понятно, что $\cos x \neq 0$, $\cos y \neq 0$, поскольку в противоположном случае третье уравнение не имеет смысла. Поэтому первые два уравнения можно преобразовать так:

$$(a-1)\operatorname{tg}^2 x = 1 - b, \tag{1}$$

$$(b-1)\operatorname{tg}^2 y = 1 - a. \tag{2}$$

Но $a \neq 1$, поскольку, если $a = 1$, то из равенства (1) будем иметь $b = 1$, что противоречит условию $a \neq b$.

Аналогично, если $b = 1$, то $a = 1$. Значит, уравнение (1) можно почленно поделить на (2):

$$\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}\right)^2 = \left(\frac{1-b}{1-a}\right)^2.$$

Убедимся в том, что $a \neq 0$. Действительно, если $a = 0$, то со второго уравнения получим, что $\sin y \neq 0$, а из третьего тогда получим, что $b = 0$, значит, $a = b = 0$, что невозможно. Теперь из третьего уравнения найдем

$$\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2}.$$

Значит, $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{1-b}{1-a}\right)^2$.

Если $\frac{b}{a} = \frac{1-b}{1-a}$, то $a = b$, что невозможно.

Если $\frac{b}{a} = -\frac{1-b}{1-a}$, то $a + b = 2ab$.

Ответ: $a + b = 2ab$.

Задача 12.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\cos(x-2y) = a\cos^3 y,\\ \sin(x-2y) = a\cos^2 y.\end{cases}$$

Решение.

Докажем сначала, что $\cos y \neq 0$. Действительно, если $\cos y = 0$, то $y = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$ и

$$\cos(x-2y) = \cos(x-\pi) = -\cos x = 0,$$

$$\sin(x-2y) = \sin(x-\pi) = -\sin x = 0.$$

Но $\sin x$ и $\cos x$ не могут одновременно быть равными нулю, поскольку $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Понятно также, что $a \neq 0$ (в противном случае $\cos(x-2y) = \sin(x-2y) = 0$).

Поделив первое уравнение на второе почленно (это возможно — было доказано выше), получим:

$$\operatorname{tg}(x-2y) = 1;\quad x - 2y = \frac{\pi}{4} + k\pi. \tag{1}$$

Рассмотрим два случая:

а) k — четное. В этом случае

$$\cos(x-2y) = \frac{1}{\sqrt{2}} = a\cos^3 y;$$

$$\cos y = \sqrt[3]{\frac{1}{a\sqrt{2}}} = t;$$

$$y = \pm\arccos t + 2mn\pi,\quad m, n \in Z.$$

Подставляя это значение в (1), получим:

$$x = \pm\alpha\arccos t + (4m+k)\pi + \frac{\pi}{4},\quad m, k \in Z.$$

б) k — нечетное. Тогда

$$\cos(x-2y) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = a\cos^3 y;$$

$$y = \pm \arccos(-x) + 2m\pi, \quad m \in Z.$$

Из (1) найдем:

$$x = \pm 2 \arccos(-x) + (4m + k)\pi + \frac{\pi}{4}.$$

Система имеет решение при $a > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Задача 13.

Решить систему

$$\begin{cases} \frac{\operatorname{tg} x}{a} = \frac{\operatorname{tg} y}{b} = \frac{\operatorname{tg} z}{c}, \\ x + y + z = \pi. \end{cases}$$

Решение.

Обозначим равные соотношения через p. Тогда

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = ap, \\ \operatorname{tg} y = bp, \\ \operatorname{tg} z = cp. \end{cases} \tag{1}$$

Поскольку $x + y + z = \pi$, то $x + y = \pi - z$,

$$\operatorname{tg}(x + y) = \operatorname{tg}(\pi - z), \text{ или}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z. \tag{2}$$

Подставляя значения $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg} y$, $\operatorname{tg} z$ из (1) в (2), получим

$$p(a + b + c) = abcp^3,$$

откуда $p = \pm \sqrt{\frac{a + b + c}{abc}}$.

Если $p = 0$, то $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} z = 0$, а поэтому

$$x_1 = k\pi, \ y_1 = l\pi, \ z_1 = m\pi.$$

Тут нужно брать такие целые k, l, m, чтобы $k + l + m = 1$, поскольку $x + y + z = \pi$.

Если же $p = \pm \sqrt{\frac{a + b + c}{abc}}$, то

$$x = \pm \operatorname{arctg} a\sqrt{\frac{a+b+c}{abc}} + k\pi, \quad n \in Z,$$

$$y = \pm \operatorname{arctg} b\sqrt{\frac{a+b+c}{abc}} + l\pi, \quad l \in Z,$$

$$z = \pm \operatorname{arctg} c\sqrt{\frac{a+b+c}{abc}} + m\pi, \quad m \in Z.$$

Поскольку должно быть $x + y + z = \pi$, то выбрать нужно только те k, l, m, чтобы $x + y + z = \pi$.

Задача 14.

Дано три утверждения:

а) уравнение $x + \frac{1}{x} = a$ не имеет действительных корней;

б) справедливо равенство: $\sqrt{a^2 - 4a + 4} = 2 - a$;

в) система

$$\begin{cases} x + y^2 = a, \\ x - \sin^2 y = -3 \end{cases}$$

имеет единственное решение. При каких значениях параметра a два из этих утверждений правильны, а одно утверждение неправильное?

Решение.

Первое утверждение равносильно тому, что

$$|a| < 2. \qquad (1)$$

Поскольку $\sqrt{a^2 - 4a + 4} = |a - 2|$, то второе утверждение верно тогда и только тогда, когда

$$a \leqslant 2. \qquad (2)$$

Рассмотрим третье утверждение. Если при некотором значении a пара чисел $(x_0;\ y_0)$ является решением системы, то $(x_0;\ -y_0)$ тоже будет решением. В случае единственного решения $y_0 = -y_0$, значит, $y_0 = 0$, а тогда

$$x_0 = -3 \text{ и } a = 3. \qquad (3)$$

Обратно, если $a = -3$, то $y^2 = -\sin^2 y$, откуда $y = 0$ и $x = -3$, значит, решение единственно.

Замечаем, что условия (1) и (3) исключают друг друга. Если одно из них имеет место, то второе также верно.

Задача 15.

Решить неравенство $\dfrac{1+\sin x}{1-\cos x} + \dfrac{1-\sin x}{1+\cos x} \leqslant a$.

Решение.

Имеем $|\cos x| \neq 1$, $x \neq \pi k$, $k \in Z$.

Запишем неравенство так:

$$\frac{2-\sin 2x}{\sin^2 x} \leqslant a, \text{ если } a\sin^2 x \geqslant 2 - \sin^2 x \text{ или}$$

$$a\sin^2 x + \sin 2x \geqslant 2(\sin^2 x + \cos^2 x), \quad \sin x \neq 0.$$

Разделим обе части неравенства на $\sin^2 x$. Тогда получим

$$a + 2\operatorname{ctg} x \geqslant 2(1 + \operatorname{ctg}^2 x).$$

Сделаем замену $\operatorname{ctg} x = t$. Получим

$$2t^2 - 2t + 2 - a \leqslant 0. \qquad (1)$$

Дискриминант соответствующего квадратного трехчлена

$$D = \frac{-3+2a}{4}.$$

Рассмотрим такие случаи:

1) $-3 + 2a < 0$, $a < \dfrac{3}{2}$, тогда неравенство (1) не имеет решений;

2) $a = \dfrac{3}{2}$, тогда $t = \dfrac{1}{2}$;

3) $2a - 3 > 0$, $a > \dfrac{3}{2}$, тогда $\dfrac{1-\sqrt{2a-3}}{2} \leqslant t \leqslant \dfrac{1+\sqrt{2a-3}}{2}$.

Значит, при $a > \dfrac{3}{2}$

$$\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{2a-3}}{2} + \pi k \leqslant x \leqslant \operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{2a-3}}{2} + \pi k, \quad k \in Z.$$

При $a=\frac{3}{2}$ $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi m$ $(m=0;\ \pm 1;\ +-2,\ldots)$.

При $a<\frac{3}{2}$ — решений нет.

Задача 16.

Решить неравенство $\sin^6 x+\cos^6 x>a$.

Решение.

Преобразуем левую часть неравенства:

$$(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\cos^2 x\sin^2 x+\cos^4 x)>a,$$

$$(\sin^2 x+\cos^2 x)-3\sin^2 x\cos^2 x>a,$$

$$1-\frac{3}{4}\sin^2 2x>a,\ 1-\frac{3}{8}(1-\cos 4x)>a, \text{ откуда}$$

$$\cos 4x>\frac{8a-5}{3}. \qquad (1)$$

Рассмотрим такие случаи:

Если $a\geqslant 1$, то $\frac{8a-5}{3}\geqslant 1$ и неравенство (1) решений не имеет.

Если $\frac{1}{4}\leqslant a<1$, то $-1\leqslant\frac{8a-5}{3}<1$ и из неравенства $\cos 4x>\frac{8a-5}{4}$ находим

$$-\arccos\frac{8a-5}{3}+2\pi k<4x<\arccos\frac{8a-5}{3}+2\pi k,\quad k\in Z,$$

откуда $-\frac{1}{4}\arccos\frac{8a-5}{3}+\frac{k\pi}{2}<x<\arccos\frac{8a-5}{3}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in Z$, где k — произвольное целое число.

Если $a<\frac{1}{4}$, $\frac{8a-5}{3}<-1$ — неравенство справедливо при любых значениях x.

Задача 17.

Решить неравенство $|\sin x|+|\cos x|>a$.

Решение.

Поскольку для всех действительных x

$$|\sin x| \geqslant \sin^2 x, \quad |\cos x| \geqslant \cos^2 x, \text{ то}$$

$$|\sin x| + |\cos x| \geqslant \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Значит, при $a < 1$ неравенство исполняется при всех действительных x.

При $a = 1$ решением неравенства будут все числа, кроме $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$.

При $a \geqslant 2$ неравенство не имеет решений, поэтому рассмотрим случай, когда $1 < a < 2$.

Имеем $|\sin 2x| > a^2 - 1$, откуда

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin(a^2 - 1) < x < \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin(a^2 - 1) + \frac{k\pi}{2}, \; k \in Z.$$

Задача 18.

Решить неравенство $\sin^2 x = a^2 \sin^2 3x$, $a > 0$.

Решение.

Используем формулу $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$. Положим $\sin x = t$. После преобразований получим

$$(1) \qquad t^2 \leqslant a^2 (3t - 4t^3)^2, \text{ или}$$

$$(2) \qquad t^2 (a^2 (4t^2 - 3)^2 - 1) \geqslant 0, \text{ или}$$

$$t^2 \left(t^2 - \frac{3a - 1}{4a}\right)\left(t^2 - \frac{3a + 1}{4a}\right) \geqslant 0.$$

Учитывая, что по условию $a > 0$,

$$\frac{3a - 1}{4a} < 1; \quad \frac{3a - 1}{4a} \leqslant \frac{3a + 1}{4a}; \quad 0 < \frac{3a + 1}{4a};$$

$$0 \leqslant \frac{3a - 1}{4a}, \text{ или } a \geqslant \frac{1}{3};$$

$$\frac{3a + 1}{4a} \leqslant 1, \text{ или } a \geqslant 1.$$

Значит, в зависимости от $a > 0$; $a \geqslant \frac{1}{3}$; $a \geqslant 1$ с условием $|t| \leqslant 1$, имеем:

1) $t = 0$ при произвольном $a > 0$;

2) $t^2 \leqslant \frac{3a-1}{4a}$ при $a > \frac{1}{3}$;

3) $t^2 \leqslant \frac{3a+1}{4a}$ при $a \geqslant 1$.

Соответственно имеем три серии решения данного неравенства:

1) $\sin x = 0$, $x = \pi n$ $(n = 0; \pm 1; \pm 2, \ldots)$;

2) $|\sin x| \leqslant \sqrt{\frac{3a-1}{4a}}$,

$$\pi n - \arcsin\sqrt{\frac{3a-1}{4a}} \leqslant x \leqslant \pi n + \arcsin\sqrt{\frac{3a-1}{4a}}$$

$$(n = 0; \pm 1; \pm 2, \ldots).$$

3) $|\sin x| \geqslant \sqrt{\frac{3a+1}{4a}}$,

$$\pi n + \arcsin\sqrt{\frac{3a+1}{4a}} \leqslant x \leqslant \pi n - \arcsin\sqrt{\frac{3a+1}{4a}}$$

$$(n = 0; \pm 1; \pm 2, \ldots).$$

Задача 19.

Решить неравенство $\sin x - a\cos x < 3a$.

Решение.

Пускай $4x = \operatorname{arctg} a$. Тогда $\sin x - \operatorname{tg}\varphi\cos x < 3a$,

$$\frac{\sin x\cos\varphi - \sin\varphi\cos x}{\cos\varphi} < 3a,$$

откуда, поскольку $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\varphi}{2}$, и, значит, $\cos\varphi > 0$, получаем

$$\sin(x - y) < 3a\cos\varphi.$$

Находим $\cos\varphi$:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\varphi + 1}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}.$$

Поэтому $\sin(x-y) < \dfrac{3a}{\sqrt{a^2+1}}$.

Решая соответственно уравнения и неравенства, найдем, что

$$\frac{3a}{\sqrt{a^2+1}} \geqslant 1 \text{ при } a \geqslant \frac{1}{2\sqrt{2}};$$

$$\frac{3a}{\sqrt{a^2+1}} \leqslant 1 \text{ при } a \leqslant -\frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ и}$$

$$-1 < \frac{3a}{\sqrt{a^2+1}} < 1 \text{ при } -\frac{1}{2\sqrt{2}} < a < \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Теперь рассмотрим такие случаи:

а) Пускай $a \leqslant -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. Тогда $\dfrac{3a}{\sqrt{a^2+1}} \leqslant 1$ и заданное неравенство не имеет решений.

б) Пускай $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}} < a \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. Тогда $-1 < \dfrac{3a}{\sqrt{a^2+1}} \leqslant 1$ и $-\arcsin\dfrac{3a}{\sqrt{a^2+1}} - \pi + 2k\pi < x - \varphi < \arcsin\dfrac{3a}{\sqrt{a^2+1}} + 2k\pi$, $k \in Z$, значит,

$$-\arcsin\frac{3a}{\sqrt{a^2+1}} - \pi + \varphi + 2k\pi < \arcsin\frac{3a}{\sqrt{a^2+1}} + \varphi + 2\pi k,$$

где $\varphi = \operatorname{arctg} a$ и $k \in Z$.

в) Пускай $a > \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, тогда $\dfrac{3a}{\sqrt{a^2+1}} > 1$, $x \in R$.

Задача 20.

При каких значениях параметра a неравенство

$$a\sin^2 x + 2(a+1)\sin x + a - 4 > 0$$

не имеет решений?

Решение.

Положим $\sin x = t$ и рассмотрим неравенство

$$at^2 + 2(a+1)t + (a-4) > 0. \qquad (1)$$

Необходимо выяснить, при каких значениях a промежуток

$$-1 \leqslant t \leqslant 1 \qquad (2)$$

не имеет ни одного из решений неравенства (1).

Если $a = 0$, то решениями (1) будут значения $t > 2$, ни одно из которых не попадает в соотношении (2).

Будем считать дальше, что $a \neq 0$.

Дискриминант квадратного трехчлена (1) равен $6a + 1$, поэтому при $a \leqslant -\frac{1}{6}$ неравенство (1) вообще не имеет решений.

Пускай $-\frac{1}{6} < a < 0$. В этом случае все решения уравнения (1) принадлежат промежутку $t_1 < t < t_2$, где

$$t_1 = \frac{-(a+1) + \sqrt{6a+1}}{a}, \quad t_2 = \frac{-(a+1) - \sqrt{6a+1}}{a}.$$

Если считать, что $t_1 < 1$, то получим

$$-(a+1) + \sqrt{6a+1} > a; \quad \sqrt{6a+1} > 2a+1, \quad 2a > 4a^2,$$

чего быть не может, поскольку $a < 0$.

Пускай $a > 0$. Неравенству (1) в этом случае удовлетворяют значения $t < t_2$ и $t > t_1$ $(t_2 < t_1)$. Все значения $t < t_2$ в неравенстве (2) не находятся, поскольку $t_2 < -1$.

Выяснив, при каких значениях $a > 0$ справедливо неравенство $t_2 < 1$, имеем

$$-(a+1) + \sqrt{6a+1} < 0, \text{ откуда } a > \frac{1}{2}.$$

Ответ: $a \leqslant \frac{1}{2}$.

Исключение параметров

Пусть задана система уравнений

$$\begin{cases} f(x, a) = 0, \\ \psi(x, a) = 0. \end{cases}$$

Исключить параметр (или неизвестное число) значит получить такое равенство, которое не содержало бы параметр

$$\psi(x, \varphi(x)) = 0.$$

При исключении параметров мы находим необходимое условие, которое должно удовлетворять параметры, чтобы заданное уравнение имело место.

Задача 21.

Исключить угол α из системы уравнений

$$\begin{cases} x = 2\cos\alpha, \\ y = 2\sin\alpha. \end{cases}$$

Решение.

Поскольку $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, то, подставляя $\sin^2\alpha = \frac{y^2}{4}$ и $\cos^2\alpha = \frac{x^2}{4}$, получим $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$, или $x^2 + y^2 = 4$.

Задача 22.

Исключить угол x из системы уравнений

$$\begin{cases} \cos x - \sin x = m, \\ \sin 2x = n. \end{cases}$$

Решение.

Возведем первое равенство в квадрат:

$$\cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x\cos x = m^2;$$

$$1 - \sin 2x = m^2.$$

Поскольку $\sin 2x = n$, то $1 - n = m^2$.

Задача 23.

Исключить угол α из системы

$$\begin{cases} x = 2\sec\alpha, \\ y = 2\operatorname{tg}\alpha. \end{cases}$$

Решение.

Из первого равенства найдем $\sec\alpha = \frac{x}{2}$. Учитывая, что $\sec^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha = 1$, получим

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Задача 24.

Исключить углы из системы равенств

$$\begin{cases} \cos(x - y) = c, \\ \sin x + \sin y = a, \\ \cos x + \cos y = b. \end{cases}$$

Решение.

Возведя второе и третье равенство в квадрат и складывая их, получим $(\sin^2 x + \cos^2 x) + 2(\sin x\sin y + \cos x\cos y) + (\sin^2 y + \cos^2 y) = a^2 + b^2$, значит, $2 + 2\cos(x - y) = a^2 + b^2$. Используя первое равенство, получим

$$2 + 2c = a^2 + b^2.$$

Задача 25.

Исключить углы α и φ из системы:

$$\begin{cases} p\cos^2\alpha + q\cos^2\varphi = 1, \\ p\operatorname{ctg}^2\alpha + q\operatorname{ctg}^2\varphi = 1, \\ p\sin\alpha = q\sin\varphi. \end{cases}$$

Решение.

Запишем первое равенство системы в виде

$$p(1 - \sin^2\alpha) + q(1 - \sin^2\varphi) = 1, \text{ или}$$

$$p\sin^2\alpha + q\sin^2\varphi = p + q - 1.$$

Возведя третье равенство в квадрат, получим систему двух равенств относительно величин $\sin^2\alpha$ и $\sin^2\varphi$:

$$\begin{cases} p\sin^2\alpha + q\sin^2\varphi = p + q - 1, \\ p^2\sin^2\alpha + q^2\sin^2\varphi = 0. \end{cases}$$

Исключим из них вначале $\sin^2\alpha$, потом $\sin^2\varphi$, получим

$$q\,(p + q)\sin^2\varphi = p\,(p + q - 1);$$

$$p\,(p + q)\sin^2\alpha = q\,(p + q - 1).$$

Поскольку $4 \neq \pi n$, $\alpha \neq \pi k$ (n и k — целые), то $\sin\varphi \neq 0$ и $\sin\alpha \neq 0$. Отсюда следует, что $p \neq 0$ и $q \neq 0$. Действительно, если $p = 0$, то из третьего равенства следует, что $q = 0$. Но в этом случае, первые два равенства системы теряют смысл. Тогда $p + q \neq 0$, поэтому

$$\sin^2\varphi = \frac{p\,(p + q - 1)}{q\,(p + q)};\quad \sin^2\alpha = \frac{q\,(p + q - 1)}{p\,(p + q)}.$$

Переписав теперь второе равенство заданной системы в виде

$$\frac{p\,(1 - \sin\alpha)}{\sin^2\alpha} + \frac{q\,(1 - \sin^2\varphi)}{\sin^2\varphi} = 1$$

и подставляя найденные значения $\sin^2\varphi$ и $\sin^2\alpha$, после преобразований получим $(p^2 - q^2)^2 = -\,pq$.

Задача 26.

Исключить параметр α из системы равенств

$$\begin{cases} \sin\alpha + \cos\alpha = x, \\ \sin^3\alpha + \cos^3\alpha = y. \end{cases}$$

Решение.

Возведя обе части первого равенства в квадрат, получим

$$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = x^2, \text{ откуда}$$

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{x^2 - 1}{2}.$$

Возведя обе части того же равенства в куб, получим

$$\sin^3\alpha + \cos^3\alpha + 3\sin\alpha\cos\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha) = x^3.$$

Учитывая второе из данных равенств, получим

$$y + \frac{3(x^2-1)}{2}x = x^3, \text{ или } 3x - 2y = x^3.$$

Задача 27.

Исключить α из системы равенств

$$\begin{cases}\cos(\beta+\alpha) = m,\\ \cos(\beta-\alpha) = n.\end{cases}$$

Решение. *Первый способ.*

Имеем

$$\begin{cases}\cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha = m,\\ \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha = n,\end{cases}$$

откуда $\cos\beta\cos\alpha = \dfrac{m+n}{2}$, $\sin\beta\sin\alpha = \dfrac{n-m}{2}$.

Итак, $\cos\alpha = \dfrac{m+n}{2\cos\beta}$; $\sin\alpha = \dfrac{m-n}{2\sin\beta}$.

Возведя обе части каждого из последних равенств в квадрат, и складывая их находим искомое соотношение

$$1 = \frac{(m+n)^2}{4\cos^2\beta} + \frac{(m-n)^2}{4\sin^2\beta}, \text{ или}$$

$$\frac{(m+n)^2}{\cos^2\beta} + \frac{(m-n)^2}{\sin^2\beta} = 4.$$

Второй способ.

Поскольку $\beta + \alpha + \beta - \alpha = 2\beta$, то

$$\cos((\beta+\alpha) + (\beta-\alpha)) = \cos 2\beta, \text{ или}$$

$$\cos(\beta+\alpha)\cos(\beta-\alpha) - \sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha) = \cos 2\beta \text{ и}$$

$$mn \pm \sqrt{(1-m^2)(1-n^2)} = \cos^2\beta.$$

Задача 28.

Исключить α из системы

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)=m, \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)=n. \end{cases}$$

Решение.

Из очевидного тождества

$$\operatorname{tg}\left(\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)+\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$$

находим:

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)}=1, \text{ или}$$

$$\frac{m+n}{1-mn}=1;\quad m+n+mn=1.$$

Задача 29.

Исключить α из системы уравнений

$$\begin{cases} x=\sin\alpha, \\ y=\cos 2\alpha. \end{cases}$$

Решение.

Поскольку $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$, имеем

$$y=1-2x^2;\quad 2x^2+y=1.$$

Задача 30.

Исключить α из системы уравнений

$$\begin{cases} x=\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha, \\ y=\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha. \end{cases}$$

Решение.

Имеем $x=-2\operatorname{ctg}^2\alpha$, значит, $\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{x}{2}$, $\operatorname{tg}2\alpha=-\frac{2}{x}$.

Подставляя во второе равенство, находим

$$y = -\frac{x}{2} - \frac{2}{x}, \quad y = -\frac{x^2+4}{2x}.$$

Задача 31.

Найти соотношение между параметрами a, b и c, зная, что система

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a, \\ \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = b, \\ x + y = c \end{cases}$$

имеет решение.

Решение. *Первый способ.*

Первые два уравнения системы можно переписать так:

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} = a; \quad \frac{\sin(x+y)}{\sin x \sin y} = b.$$

Поскольку $x + y = c$, то из этих уравнений находим:

$$\cos x \cos y = \frac{\sin c}{a}; \quad \sin x \sin y = \frac{\sin c}{b}.$$

Вычитая второе равенство из первого, получим

$$\cos(x+y) = \frac{b-a}{ab}\sin c, \text{ или}$$

$$\cos c = \frac{b-a}{ab}\sin c,$$

откуда $\operatorname{tg} c = \dfrac{ab}{b-a}$.

Второй способ.

Преобразуем второе из данных соотношений:

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x} + \frac{1}{\operatorname{tg} y} = b; \quad \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = b \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y.$$

Используя первое соотношение, найдем

$$a = b \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y, \text{ откуда } \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{a}{b}.$$

Из равенства $x + y = c$ имеем:

$$\operatorname{tg}(x + y) = \operatorname{tg} c, \text{ или } \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = \operatorname{tg} c, \text{ или}$$

$$\frac{a}{1 - \frac{a}{b}} = \operatorname{tg} c, \text{ или } \frac{ab}{b - a} = \operatorname{tg} c.$$

Задача 32.

Исключить t:

$$\begin{cases} x = \arccos 2t, \\ y = \operatorname{arcctg} \frac{t}{2}. \end{cases}$$

Решение.

Из данных равенств находим

$$\cos x = 2t; \quad \operatorname{ctg} y = \frac{t}{2}.$$

Разделив эти равенства почленно, получим

$$\cos x = 4 \operatorname{ctg} y.$$

Задача 33.

Исключить t:

$$\begin{cases} x = \sin t - \cos t, \\ y = t + \sin 2t. \end{cases}$$

Решение.

Возведя обе части первого равенства в квадрат получим:

$$x^2 = 1 - \sin 2t, \text{ откуда}$$

$$\sin 2t = 1 - x^2 \text{ и } t = \frac{1}{2} \arcsin(1 - x^2).$$

Подставляя эти значения во второе равенство, найдем искомый результат

$$y = \frac{1}{2} \arcsin(1 - x^2) + 1 - x^2.$$

9. НАХОЖДЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ

Задача 1.

Найти сумму

$$S = \cos x + \cos(x+h) + \cos(x+2h) + \ldots + \cos(x+nh).$$

Решение.

1) Пусть $h = 2k\pi$ $(k \in Z)$. Тогда

$$\underbrace{\cos x + \cos x + \ldots + \cos x}_{n+1} = \cos((n+1)x).$$

2) Пусть $h \neq 2k\pi$ $(k \in Z)$ и $\sin\frac{h}{2} \neq 0$. Умножим и разделим каждое слагаемое на $2\sin\frac{h}{2}$. Получим

$$2\sin\frac{h}{2}\cos x = \sin\left(\frac{h}{2}+x\right) + \sin\left(\frac{h}{2}-x\right);$$

$$2\sin\frac{h}{2}\cos(x+h) = \sin\left(\frac{3h}{2}+x\right) + \sin\left(\frac{h}{2}+x-h\right) =$$

$$= \sin\left(\frac{3h}{2}+x\right) - \sin\left(\frac{h}{2}-x\right);$$

$$2\sin\frac{h}{2}\cos(x-nh) = \sin\left(\frac{h}{2}+x+nh\right) + \sin\left(\frac{h}{2}-x-nh\right),$$

значит, $S = \dfrac{\cos(x+nh)\cdot\sin((n+1)h)}{2}$.

Задача 2.

Найти сумму

$$S = \sin\alpha + \sin(\alpha+h) + \ldots + \sin(\alpha+(n+1)h).$$

Решение.

Имеем

$$2\sin h\sin\alpha = \cos(\alpha-h) - \cos(\alpha+h);$$

$$2\sin h\sin(\alpha+h) = \cos\alpha - \cos(\alpha+2h);$$

$$2\sin h\sin(\alpha+2h)=\cos(\alpha+h)-\cos(\alpha+3h);$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$2\sin h\sin(\alpha+(n-2)h)=\cos(\alpha+(n-3)h)-$$
$$-\cos(\alpha+(n-1)h),$$

$$2\sin h\sin(\alpha+(n-1)h)=\cos(\alpha+(n-2)h)-\cos(\alpha+nh).$$

Складывая эти равенства почленно, находим:

$$2\sin h(\sin\alpha+\sin(\alpha+h)+\sin(\alpha+2h)+\dots+$$
$$+\sin(\alpha+(n-1)h))=$$
$$=\cos\alpha+\cos(\alpha-h)-\cos(\alpha+nh)-\cos(\alpha+(n-1)h)=$$
$$=\cos\alpha-\cos(\alpha+(n-1)h))+\cos(\alpha-h)-\cos(\alpha+nh))=$$
$$=2\sin\frac{n-1}{2}h\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}h\right)+$$
$$+2\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}h\right)\sin\frac{n+1}{2}h=$$
$$=2\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}h\right)\cdot 2\sin\frac{nh}{2}\cos\frac{h}{2}.$$

Значит, $S=\dfrac{\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}h\right)\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}}$.

Задача 3.

Найти сумму

$$\cos\alpha+2\cos2\alpha+3\cos3\alpha+\dots+n\cos n\alpha.$$

Решение.

Имеем

$$S=(\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos3\alpha+\dots+\cos(n-1)\alpha+\cos n\alpha)+$$
$$+(\cos2\alpha+\cos3\alpha+\dots+\cos(n-1)\alpha+\cos n\alpha)+$$
$$+(\cos3\alpha+\dots+\cos(n-1)\alpha+\cos n\alpha)+\dots+$$
$$+(\cos(n-1)\alpha+\cos n\alpha)+\cos n\alpha. \qquad (1)$$

Если находить сумму

$S = \cos\alpha + \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + 2\beta) + \ldots + \cos(\alpha + n\beta)$, то

$$S = \frac{\cos\left(\alpha + \frac{n\beta}{2}\right)\sin\frac{(n+1)\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}. \qquad (2)$$

Применяя к выражению (1) формулу (2), получим

$$S = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot n\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{n\alpha}{2} =$$

$$= \frac{(n+1)\cos n\alpha - n\cos(n+1)\alpha - 1}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Задача 4.

Найти сумму

$$S = \cos^3\frac{\pi}{n} + 2\cos^3\frac{2\pi}{n} + 3\cos^3\frac{3\pi}{n} + \ldots + n\cos^3\frac{h\pi}{n}.$$

Решение.

Так как $\cos^3\alpha = \frac{1}{4}(\cos 3\alpha + 3\cos\alpha)$, то

$$S = \sum_{k=1}^{n} k\cos^3\frac{k\pi}{n} = \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{3}{4}\cos k\frac{\pi}{n} + \frac{1}{4}\cos k\frac{3\pi}{n}\right) =$$

$$= \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n} k\cos k\frac{\pi}{n} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} k\cos k\frac{3\pi}{n}.$$

Учитывая предыдущую задачу, имеем

$$S = \sum_{k=1}^{n} k\cos^3\frac{k\pi}{n} = \frac{3}{4} \cdot \frac{(h+1)\cos n\frac{\pi}{n} - n\cos(h+1)\frac{\pi}{n} - 1}{4\sin^2\frac{\pi}{n}} +$$

$$+ \frac{1}{4}\frac{(h+1)\cos n\frac{3\pi}{n} - n\cos(h+1)\frac{3\pi}{n} - 1}{4\sin^2\frac{3\pi}{n}} =$$

$$= -\left(\frac{n}{2}+\frac{3}{8\sin^2\frac{\pi}{2n}}+\frac{1}{8\sin^2\frac{3\pi}{2n}}\right).$$

Задача 5.

Найти сумму

$$S=\frac{1}{4^0}\sin^4 2^0\alpha+\frac{1}{4^1}\sin^4 2^1\alpha+\frac{1}{4^2}\sin^4 2^2\alpha+\ldots+\frac{1}{4^n}\sin^4 2^n\alpha.$$

Решение.

Имеем

$$\frac{1}{4^0}\sin^4\alpha=\sin^2\alpha-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha;$$

$$\frac{1}{4}\sin^4 2\alpha=\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha-\frac{1}{4}\sin^2 2^2\alpha;$$

$$\frac{1}{4^2}\sin^4 2^2\alpha=\frac{1}{4^2}\sin^2 2^2\alpha-\frac{1}{4^3}\sin^2 2^3\alpha;$$

. . . .

$$\frac{1}{4^n}\sin^4 2^n\alpha=\frac{1}{4^n}\sin^2 2^n\alpha-\frac{1}{4^{n+1}}\sin^2 2^{n+1}\alpha.$$

Сложив эти $n+1$ равенств, получим

$$S=\sin^2\alpha-\frac{1}{4^{n+1}}\sin^2 2^{n+1}\alpha.$$

Задача 6.

Найти сумму

$$S=\frac{1}{\cos x\cos y}+\frac{1}{\cos y\cos z}+\ldots+\frac{1}{\cos u\cos t}+\frac{1}{\cos t\cos v},$$

если числа x, y, z, … составляют арифметическую прогрессию.

Решение.

Имеем

$$\operatorname{tg} y-\operatorname{tg} z=\frac{\sin(y-x)}{\cos x\cos y}=\frac{\sin r}{\cos x\cos y},$$

$$\operatorname{tg} z - \operatorname{tg} y = \frac{\sin r}{\cos y \cos z}$$

(r — разность арифметической прогрессии);

. . . .

$$\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} t = \frac{\sin r}{\cos u \cos t};$$

$$\operatorname{tg} v - \operatorname{tg} u = \frac{\sin r}{\cos v \cos u}.$$

Сложив почленно все эти равенства, получим

$$\operatorname{tg} v - \operatorname{tg} x = \sin r \left(\frac{1}{\cos x \cos y} + \frac{1}{\cos y \cos z} + \ldots + \frac{1}{\cos u \cos v} \right),$$

откуда находим

$$\frac{1}{\cos x \cos y} + \frac{1}{\cos y \cos z} + \ldots + \frac{1}{\cos u \cos v} = \frac{\operatorname{tg} v - \operatorname{tg} x}{\sin r}.$$

Задача 7.

Найти сумму

$$\operatorname{cosec} 2\alpha + \operatorname{cosec} 4\alpha + \ldots + \operatorname{cosec} 2^n \alpha.$$

Решение.

Имеем очевидные равенства:

$$\operatorname{cosec} 2\alpha = \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha;$$

$$\operatorname{cosec} 4\alpha = \operatorname{ctg} 2\alpha - \operatorname{ctg} 4\alpha;$$

. . . .

$$\operatorname{cosec} 2^n \alpha = \operatorname{ctg} 2^{n-1} \alpha - \operatorname{ctg} 2^n \alpha. \qquad (1)$$

Сложив почленно равенства (1), получим

$$\operatorname{cosec} 2\alpha + \operatorname{cosec} 4\alpha + \ldots + \operatorname{cosec} 2^n \alpha = \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} 2^n \alpha.$$

Задача 8.

Доказать, что если сумма

$$a_1 \cos (\alpha_1 + x) + a_2 \cos (\alpha_2 + x) + \ldots + a_n \cos (\alpha_n + x)$$

при $x = 0$ и $x = x_1 \neq k\pi$ (k — целое) обращается в нуль, то она тождественно равна нулю.

Доказательство.

Поскольку рассматриваемая сумма обращается в нуль при $x = 0$ и при $x = x_1$ $(x_1 \neq k\pi)$, то имеем два равенства:

$$a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + \ldots + a_n \cos \alpha_n = 0 \text{ и} \qquad (1)$$

$$a_1 \cos (\alpha_1 + x_1) + a_2 \cos (\alpha_2 + x_1) + \ldots + a_n \cos (\alpha_n + x_1) = 0.$$

Второе равенство можно представить в виде

$$(a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + \ldots + a_n \cos \alpha_n) \cos x_1 -$$

$$- (a_1 \sin \alpha_1 + \alpha_2 \sin \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \sin \alpha_n) \sin x_1 = 0.$$

Учитывая равенство (1) и неравенство $\sin x_1 \neq 0$ (так как $x_1 \neq k\pi$), имеем

$$a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 + \ldots + a_n \sin \alpha_n = 0. \qquad (2)$$

Пусть теперь x — произвольное число. Имеем

$$a_1 \cos (\alpha_1 + x) + a_2 \cos (\alpha_2 + x) + \ldots + a_n \cos (\alpha_n + x) =$$

$$= (a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + \ldots + a_n \cos \alpha_n) \cos x +$$

$$+ (a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 + \ldots + a_n \sin \alpha_n) \sin x = 0,$$

так как имеют места равенства (1) и (2).

Задача 9.

Найти сумму $\operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{x}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$.

Решение.

Имеет место тождество $2 \operatorname{ctg} 2\varphi - \operatorname{ctg} \varphi = - \operatorname{tg} \varphi$.

Если в этом тождестве заменить последовательно φ на $\frac{x}{2}, \frac{x}{4}, \ldots, \frac{x}{2^n}$, то получим следующие равенства:

$$2 \operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x = - \operatorname{tg} x;$$

$$2 \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = - \operatorname{tg} \frac{x}{2};$$

$$2\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}\frac{x}{4}=-\operatorname{tg}\frac{x}{4},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2\operatorname{ctg}\frac{x}{2^{n-1}}-\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n}=-\operatorname{tg}\frac{x}{2^n},\ \text{или}$$

$$(1)\qquad \begin{cases} 2\operatorname{ctg}2x-\operatorname{ctg}x=-\operatorname{tg}x,\\ \operatorname{ctg}x-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}x=-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2},\\ \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{x}{4}=-\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{1}{2^{n-1}}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n}=-\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}. \end{cases}$$

Сложив почленно $n+1$ равенств (1), получим

$$2\operatorname{ctg}2x-\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n}=-\operatorname{tg}x-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}-$$

$$-\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4}-\ldots-\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n},\ \text{откуда}$$

$$\operatorname{tg}x+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}=$$

$$=\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n}-2\operatorname{ctg}2x.$$

Задача 10.

Найти сумму

$$S=\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2+\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_3+\ldots+\operatorname{tg}\alpha_n\operatorname{tg}\alpha_{n+1},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ — последовательные члены арифметической прогрессии с разностью d.

Решение.

Имеем $\operatorname{tg}(\alpha_2-\alpha_1)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha_2-\operatorname{tg}\alpha_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2}$. Но так как по условию $\alpha_2-\alpha_1=d$, то $\operatorname{tg}d=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha_2-\operatorname{tg}\alpha_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2}$, откуда получаем

$$\operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg} d} - 1.$$

Аналогично находим

$$\operatorname{tg}\alpha_2 \operatorname{tg}\alpha_3 = \frac{\operatorname{tg}\alpha_3 - \operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg} d} - 1,$$

. . . .

$$\operatorname{tg}\alpha_n \operatorname{tg}\alpha_{n+1} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_{n+1} - \operatorname{tg}\alpha_n}{\operatorname{tg} d} - 1.$$

Сложив почленно n равенств, получим

$$S = \frac{\operatorname{tg}\alpha_{n+1} - \operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg} d} - n.$$

10. ТРИГОНОМЕТРИЯ ПОМОГАЕТ АЛГЕБРЕ

Задача 1.

Исследовать функцию $y = x + \frac{1}{x}$ при $x > 0$.

Решение.

Воспользуемся легкодоказуемым тождеством

$$\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} x = \frac{2}{\sin 2t}.$$

Положим $x = \operatorname{tg} x$, где $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Тогда $y = \frac{2}{\sin 2t}$. Поскольку знаменатель $\sin 2t$ принимает наибольшее значение, равное единице, при $t = \frac{\pi}{4}$, то наибольшее значение x равно 1, и при таком значении x данная функция принимает наименьшее значение, равное 2. При изменении t от 0 до $\frac{\pi}{4}$ $\sin 2t$ возрастает от 0 до 1. Отсюда следует, что при изменении x от 0 до 1 функция монотонно убывает от ∞ до 2. Если же t изменяется от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{2}$, то x возрастает от 1 до ∞, $\sin 2t$ убывает от единицы до 0, а функция $x + \frac{1}{x}$ монотонно возрастает от 2 до ∞.

Задача 2.

Решить уравнение $1 + x^3 = (x^2 + 3x - 1)\sqrt{1 - x^2}$.

Решение.

Поскольку $|x| \leqslant 1$, применяем подстановку $x = \sin t$. Получаем уравнение

$$1 + \sin^3 t + \cos^3 t = 3 \sin t \cos t.$$

Положим $z = \sin t + \cos t$, $|z| \leqslant \sqrt{2}$. Имеем

$$z^3 + 3z^2 - 3z - 5 = 0, \quad z = -1, \quad x + \sqrt{1 - x^2} = -1,$$

значит, $x = -1$.

Задача 3.

Решить уравнение $x + \dfrac{2x}{\sqrt{2 + x^2}} = \sqrt{2}.$

Решение.

Пусть $x = \sqrt{2}\operatorname{tg} t$, $\sqrt{2}\operatorname{tg} t + \dfrac{2\operatorname{tg} t}{\sqrt{2}\sec t} = \sqrt{2}$,

$$\sqrt{2}(\cos t - \sin t) = \sin 2t.$$

Это тригонометрическое уравнение решается с помощью замены $\sin t + \cos t = y$.

Задача 4.

Решить уравнение $\dfrac{x + \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} = \dfrac{35}{12}x.$

Решение.

$$\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} + 1 = \frac{35}{12}x; \quad \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1}{x} = \frac{35}{12}.$$

Сделаем замену $x = \cos\alpha$. Получим

$\dfrac{1}{\sin\alpha} + \dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{35}{12}$, или $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{35}{12}\sin\alpha\cos\alpha.$

Сделав замену $\sin\alpha + \cos\alpha = z$, получим квадратное уравнение, корни которого $\dfrac{7}{10}\sqrt{2}$; $-\dfrac{5}{14}\sqrt{2}$.

Учитывая, что $|z| < \sqrt{2}$, получим решения исходного уравнения:

$$x_1 = \frac{4}{5}; \quad x_2 = \frac{3}{5}; \quad x_3 = \frac{-5 - \sqrt{73}}{14}.$$

Задача 5.

Решить уравнение $\sqrt{1 - x^2} = 4x^3 - 3x$.

Указание: $x = \sin y$; $\cos y = \sin 3y$.

Задача 6.

Решить уравнение $\sqrt{1 - x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1 - x^2}$.

Указание: $x = \cos\frac{y}{2}$.

$$\sqrt{2}\sin\frac{y}{4} = \cos y + \sin y.$$

Задача 7.

Решить уравнение $\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}$.

Решение.

Положим $x = \cos\alpha$, $\alpha \in [0;\ \pi]$ выполнив подстановку и учитывая, что $\sin\frac{\alpha}{2} \geqslant 0$, $\sin\alpha \geqslant 0$ получим

$$\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2} = \cos 2\alpha + \sin 2\alpha;$$

$$\sin\left(\frac{3\alpha}{4} + \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{5\alpha}{4} + \frac{\pi}{8}\right) = 0, \text{ откуда либо}$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi k}{3},\ k \in Z, \text{ либо } \alpha = \frac{3\pi}{10} + \frac{4\pi k}{5},\ n \in Z.$$

Поскольку $k \in (0;\ \pi)$, $x = \frac{3\pi}{10}$.

Задача 8.

Решить уравнение

$$\frac{x+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{3}}} + \frac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{3}}} = \sqrt{x}.$$

Решение.

Очевидно, что $x \geqslant \sqrt{3}$. Так как $x = 0$ не является корнем уравнения, то, поделив числитель и знаменатель левой части уравнения на $\sqrt{x}$, получим

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{\frac{3}{x}}}{1+\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{x}}} + \frac{\sqrt{x}-\sqrt{\frac{3}{x}}}{1-\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{x}}} = \sqrt{x}, \text{ или} \qquad (1)$$

$$\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{x}}}+\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{x}}{1-\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{x}}}=1. \qquad (2)$$

Так как $0 \leqslant \frac{\sqrt{3}}{x} \leqslant 1$ и $1 \leqslant 1+\frac{\sqrt{3}}{x} \leqslant 2$, $0 \leqslant 1-\frac{\sqrt{3}}{x} \leqslant 1$, положим $1+\frac{\sqrt{3}}{x}=2\cos^2\alpha$, а $1-\frac{\sqrt{3}}{x}=2\sin^2\alpha$. Данные соотношения верны, так как выполняется основное тригонометрическое тождество: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

Уравнение (2) примет вид:

$$\frac{2\cos^2\alpha}{1+\sqrt{2}\cos\alpha}+\frac{2\sin^2\alpha}{1-\sqrt{2}\sin\alpha}=1, \text{ или}$$

$$2\cos^2\alpha-2\sqrt{2}\cos^2\alpha\sin\alpha+2\sin^2\alpha+2\sqrt{2}\sin^2\alpha\cos\alpha=$$
$$=1+\sqrt{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)-2\sin\alpha\cos\alpha. \qquad (3)$$

Положим $\cos\alpha-\sin\alpha=t$. Тогда уравнение (3) примет вид:

$$2-\sqrt{2}(1-t^2)\,t=1+\sqrt{2}\,t-(1-t^2);$$
$$2-\sqrt{2}\,t+\sqrt{2}\,t^3=\sqrt{2}\,t+t^2;$$
$$\sqrt{2}\,t^3-t^2-2\sqrt{2}\,t+2=0;$$
$$t^2(\sqrt{2}\,t-1)-2(\sqrt{2}\,t-1)=0;$$
$$(\sqrt{2}-1)(t^2-2)=0.$$

Получаем $t_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $t_2=\sqrt{2}$, $t_3=-\sqrt{2}$, или

$$\left[\begin{array}{l}\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}},\\ \cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2},\\ \cos\alpha-\sin\alpha=-\sqrt{2}.\end{array}\right.$$

Корни второго и третьего уравнения посторонние для данного уравнения. Решаем уравнение

$$\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}; \quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}, \text{ откуда}$$

$$1 + \frac{\sqrt{3}}{x} = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 2, \quad 1 + \frac{\sqrt{3}}{x} = \frac{2+\sqrt{3}}{2},$$

откуда $x = 2$.

Задача 9.

Решить уравнение $x^3 - px + q = 0$ $(p > 0)$.

Решение.

Рассмотрим равносильное уравнение $q = px - x^3$. Положим $x = kz$. Тогда $q = kpz - k^3 z^3$.

Неизвестное k найдем из условия $\frac{kp}{k^3} = \frac{3}{4}$.

Отсюда $k = 2\sqrt{\frac{p}{3}}$.

Уравнение после несложных преобразований примет вид:

$$\frac{q}{2} : \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3} = 3z - 4z^3.$$

Пусть $\left(\frac{q}{2}\right) \leqslant \left(\frac{p}{3}\right)^3$. Тогда $\left|\frac{q}{2} : \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3}\right| \leqslant 1$, и мы можем получить

$$\sin 3\alpha = \frac{q}{2} : \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3} .$$

Сравнивая полученное уравнение: $\sin 3\alpha = 3z - 4z^3$ с тождеством $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, видим, что $\sin\alpha$ — корень этого уравнения.

Задача 10.

Решить уравнение $x^3 - 3x + 1 = 0$.

Решение.

Учитывая предыдущую задачу, имеем $k = 2$, после замены $x = 2z$ получим

$$\frac{1}{2} = 3z - 4z^3.$$

Получаем $\sin 3\alpha = \frac{1}{2}$. Итак, корень уравнения

$$x^3 - 3x + 1 = 0 \qquad x = 2\sin 10^\circ + 360^\circ n.$$

Задача 11.

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{2}(x-y)(1+4xy) = \sqrt{3}, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Решение.

Положим $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$, и преобразуем первое уравнение системы:

$$\sqrt{2}(\cos\alpha - \sin\alpha)(1 + 2\sin 2\alpha) = \sqrt{2};$$

$$4\sin(45^\circ - \alpha)(\sin 30^\circ + \sin 2\alpha) = \sqrt{3};$$

$$8\sin(45^\circ - \alpha)\sin(\alpha + 15^\circ)\cos(\alpha - 15^\circ) = \sqrt{3};$$

$$4(\cos(2\alpha - 80^\circ) - \cos 60^\circ)\cos(\alpha - 15^\circ) = \sqrt{3};$$

$$2\cos(3\alpha - 45^\circ) + 2\cos(\alpha - 15^\circ) - 2\cos(\alpha - 15^\circ) = \sqrt{3};$$

$$3\alpha_{1,2} - 45^\circ = \pm 30^\circ + 360^\circ n \quad (n \in Z);$$

$$\alpha_{1,2} = 15^\circ \pm 10^\circ + 120^\circ n \quad (n \in Z).$$

Отсюда получаем следующие шесть решений исходной системы:

$$(\cos 25^\circ,\ \sin 25^\circ),\quad (-\cos 35^\circ,\ \sin 35^\circ),$$

$$(-\sin 5^\circ,\ \cos 5^\circ),\quad (\cos 5^\circ,\ \sin 5^\circ),$$

$$(-\sin 35^\circ,\ \cos 35^\circ),\quad (-\sin 25^\circ,\ -\cos 25^\circ).$$

Задача 12.

Решить систему

$$\begin{cases} x = \dfrac{2z^2}{1+z^2}, \\ y = \dfrac{2x^2}{1+x^2}, \\ z = \dfrac{2y^2}{1+y^2}. \end{cases}$$

Решение.

Пусть $\dfrac{2z}{1+z^2} = \sin\alpha$, $|\sin\alpha| \leqslant 1$. Тогда из первого уравнения следует, что $x \leqslant z$, из второго и третьего — $z \leqslant y$, $y \leqslant z$. Значит, $x = y = z$. Подставим $z = x$, получим $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Ответ: (0; 0; 0); (1; 1; 1).

Задача 13.

Доказать, что если $|a| \leqslant 1$, $|b| \leqslant 1$, то

$$-1 \leqslant ab \pm \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \leqslant 1.$$

Доказательство.

Так как $|a| \leqslant 1$, $|b| \leqslant 1$, то $a = \sin\alpha$, $b = \cos\alpha$. Тогда

$$\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} = \sqrt{(1-\sin^2\alpha)(1-\cos^2\beta)} =$$

$$= \sqrt{\cos^2\alpha\sin^2\beta} = \cos\alpha \cdot \sin\beta.$$

Данное выражение примет вид:

$$ab \pm \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha \pm \beta);$$

$$-1 \leqslant \sin(\alpha \pm \beta) \leqslant 1,$$

что доказывает утверждение задачи.

Задача 14.

Решить уравнение $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 2^x$.

Решение.

Уравнение представим в виде

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^x = 1.$$

Поскольку $0 < \sqrt{2+\sqrt{3}} < 2$, сделаем замену

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \sin\alpha, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Тогда $\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$

Данное уравнение можно записать: $\cos^x\alpha + \sin^x\alpha = 1$. Отсюда следует, что $x = 2$.

Задача 15.

Решить уравнение $2^x = 3^{x/2} + 1$.

Решение.

Приведем уравнение к такому: $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x = 1$, или

$$\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^x + \left(\cos\frac{\pi}{6}\right)^x = 1.$$

Очевидно, что $x = 2$.

Задача 16.

Решить уравнение $\sqrt{\frac{1-|x|}{2}} = 4x^3 - 3x$.

Решение.

Делаем замену $x = \cos\alpha$. Получим уравнение:

$$\sqrt{\frac{1-|\cos\alpha|}{2}} = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha. \qquad (1)$$

1) При $\cos\alpha \geqslant 0$ уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \cos 3\alpha;$$

$$\cos 3\alpha - \sin\frac{\alpha}{2} = 0;$$

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{7},\ \ x_1 = \cos\frac{\pi}{7};\ \ \alpha_2 = -\frac{\pi}{5},\ \ x_2 = \cos\frac{\pi}{5}.$$

2) При $\cos\alpha < 0$ уравнение (1) эквивалентно уравнению $\cos\frac{\alpha}{3} = \cos 3\alpha$, корни которого являются посторонними для уравнения (1).

Задача 17.

Доказать, что $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geqslant 12{,}5$, если $a + b = 1$.

Доказательство.

Положим $a = \sin^2 x$, $b = \cos^2 x$. Тогда заданное неравенство запишем в виде:

$$\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 = 12 + \frac{1}{2}\sin y.$$

Рассмотрим выражение

$$\sin y = 2\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + 2\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 - 24.$$

Обозначим правую часть равенства через A:

$$A = 2\left(\sin^4 x + \frac{1}{\sin^4 x}\right) + 4 + 2\left(\cos^4 x + \frac{1}{\cos^4 x}\right) + 4 - 24 =$$

$$= 2\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)\left(1 + \frac{1}{\sin^4 x}\right) + 4 + 2\left(\cos^4 x + \frac{1}{\cos^4 x}\right) +$$

$$+ 4 - 24 = 2\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)\left(1 + \frac{1}{\sin^4 x\cos^4 x}\right) - 16 =$$

$$= 2\left(1 - 2\sin^2 x\cos^2 x\right)\left(1 + \frac{1}{\sin^4 x\cos^4 x}\right) - 16 =$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right)\left(1 + \frac{16}{\sin^4 2x}\right) - 16.$$

Итак,

$$(2-\sin^2 2x)\left(1+\frac{16}{\sin^4 2x}\right)=16+\sin y. \qquad (2)$$

Поскольку наибольшее значение $16+\sin y$ равно 17, а

$$2-\sin^2 2x \geqslant 1 \text{ и } 1+\frac{16}{\sin^4 2x} \geqslant 17,$$

то знак равенства в выражении (2) возможен, если

$$\begin{cases}\sin y = 1,\\ \sin^2 2x = 1.\end{cases}$$

Таким образом, выражение (1) не меньше

$$12+\frac{1}{2}\cdot 1 = 12\frac{1}{2},$$

а следовательно, $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geqslant 12{,}5.$

Задача 18.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{x^3}{y}+xy=40,\\ \dfrac{y^3}{x}+xy=10.\end{cases}$$

Решение.

$$x=\rho\cos\varphi, \quad 0\leqslant\rho<\infty;$$
$$y=\rho\sin\varphi, \quad 0\leqslant\varphi<2\pi.$$

Имеем:

$$\begin{cases}\dfrac{\rho^3\cos^3\varphi}{\rho\sin\varphi}+\rho^2\cos\varphi\sin\varphi=40,\\ \dfrac{\rho^3\sin^3\varphi}{\rho\cos\varphi}+\rho^2\cos\varphi\sin\varphi=10,\end{cases}$$

или $\begin{cases}\rho^2\operatorname{ctg}\varphi=40,\\ \rho^2\operatorname{tg}\varphi=10.\end{cases}$

Отсюда $\operatorname{ctg}^2\varphi = 4$, $\operatorname{ctg}\varphi_1 = 2$, $\operatorname{ctg}\varphi_2 = -2$.

Учитывая, что $\operatorname{ctg}\varphi$ и ρ^2 имеют одинаковые знаки, а ρ^2 не может быть отрицательным, получим

$$\operatorname{cosec}\varphi = -\sqrt{5},\ \cos\varphi = -\frac{2}{\sqrt{5}},\ \rho^2 = 20,\ \rho = 2\sqrt{5}.$$

Значит: $x_1 = 2\sqrt{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = 4$, $y_1 = 2\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = 2$;

$$x_2 = 2\sqrt{5}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -4,\ y_2 = 2\sqrt{5}\ \ -\frac{1}{\sqrt{5}}\Bigg) = -2.$$

Задача 19.

Сколько корней на отрезке $[0;\ 1]$ имеет уравнение

$$8x(1-2x^2)(8x^4-8x^2+1) = 1?$$

Решение.

Замена $x = \cos\varphi$, $\varphi \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда

$$8\cos\varphi\,(1-2\cos^2\varphi)\,(8\cos^4\varphi - 8\cos^2\varphi + 1) =$$

$$= 8\cos\varphi\,(-\cos2\varphi)(8\cos^2\varphi\,(\cos^2\varphi - 1) + 1) =$$

$$= -8\cos\varphi\cos2\varphi\,(-2\sin^2\varphi + 1),\ \text{откуда}$$

$$-8\cos\varphi\cos2\varphi\cos4\varphi = 1. \qquad (*)$$

Умножим обе части выражения (*) на $\sin\varphi$. Получим $-8\sin\varphi\cos\varphi\cos2\varphi\sin4\varphi = \sin\varphi$, или $-\sin8\varphi = \sin\varphi$, откуда либо $\varphi = \frac{2}{9}\pi k$, $k \in Z$, либо $\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{7}$, $n \in Z$.

Из первой серии промежутку $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ принадлежат два значения: $\varphi_1 = \frac{2\pi}{9}$; $\varphi_2 = \frac{4\pi}{9}$; во второй серии таких значений тоже два: $\varphi_3 = \frac{\pi}{4}$; $\varphi_4 = \frac{3\pi}{7}$.

Задача 20.

Решить уравнение $x^2\sqrt{1-x^2} = |x^3| - |x| + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Решение.

Очевидно, что если x — корень уравнения, то $(-x)$ — тоже корень этого уравнения. Пусть $x = \sin y$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$\sin^2 y \cos y = \sin^3 y - \sin y + \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{\sin 2y(\sin y + \cos y)}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{или} \quad \sin 2y \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Поскольку $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $\sin 2y > 0$ и $\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) > 0$. Значит,

$$\begin{cases} \sin 2y = 1, \\ \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = 1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} y = \frac{4n+1}{4}\pi, \\ y = \frac{8m+1}{4}\pi, \end{cases}$$

$$y = \frac{8n+1}{4}\pi, \; x_1 = \sin y = \frac{1}{\sqrt{2}}, \; x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \; n \in Z.$$

Задача 21.

Доказать, что

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

Доказательство.

Нетрудно показать, что

$$\sqrt{1 \pm \sin\alpha} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}. \qquad (1)$$

Теперь положим $\frac{\sqrt{b}}{a} = \sin\alpha$, отсюда

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{a^2 - b}}{a}.$$

Если теперь эти выражения подставить в формулу (1), то получим доказываемое соотношение.

О рационализирующих тригонометрических подстановках:

Задана функция

$$R\left(x,\ \sqrt{a^2 - x^2}\right). \tag{1}$$

Применим рационализирующую подстановку

$$x = |a| \sin t.$$

При этом $\sqrt{a^2 - x^2} = |a| \cos t$. Ясно, что

$$-|a| \leqslant x \leqslant |a|, \text{ а } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Поэтому $t = \arcsin\frac{x}{|a|}$.

С помощью данной подстановки рассматриваемая функция приводится к следующему виду:

$$R\left(x,\ \sqrt{a^2 - x^2}\right) = R\left(|a| \sin t,\ |a| \cos t\right). \tag{2}$$

Аналогично, функция

$$R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)$$

подстановкой $x = |a| \operatorname{tg} t \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$ приводится к виду

$$R\left(|a| \operatorname{tg} t,\ |a| \sec t\right), \text{ так как } \sqrt{a^2 + x^2} = |a| \sec t.$$

Для рационализации функции

$$R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) \tag{3}$$

можно применить подстановку $x = |a| \sec t$.

Выполняя рационализацию выражения

$$R\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$$

с помощью тригонометрических подстановок, необходимо предварительно это выражение привести к одному из рассмотренных выше видов (1), (2), (3).

Задача 22.

Решить уравнение $\sqrt{1-2x}\,(1-4x\sqrt{1+2x}) = 8x^2-1$.

Решение.

Область определения данного уравнения задается неравенством $|2x| \leqslant 1$ и поэтому существует такое число t, что $2x = \cos 2t$ причем можно считать, что $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.

После соответствующей подстановки уравнение приводится к виду

$$\sqrt{1-\cos 2t}\,(1-2\cos 2t\sqrt{1+\cos 2t}\,) = 2\cos^2 2t-1;$$

$$\sqrt{2}\,|\sin t|\ (1-2\cos 2t\sqrt{21}\,|\cos t|) = \cos 4t,$$

или, поскольку угол t лежит в первой четверти, то

$$2\sin t\,(1-2\sqrt{2}\cos t) = \cos 4t,\quad 2\sin t-\sin 4t = \cos 4t,$$

$$2\sin t = \sin 4t+\cos 4t,\ \sin t = \sin\left(4t+\frac{\pi}{4}\right).$$

Отсюда

$$3t+\frac{\pi}{4} = 2k\pi \text{ или } 5t+\frac{\pi}{4} = (2k+1)\,\pi,\quad k \in Z,$$

и мы получаем две серии решений:

$$t = (8k-1)\,\frac{\pi}{12};\quad t = (8k+3)\,\frac{\pi}{20},\quad k \in Z.$$

Из этих решений в промежутке от 0 до $\frac{\pi}{2}$ лежит только $t = \frac{3\pi}{20}$ откуда получаем единственный корень исходного уравнения $x = \frac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{10}$.

Задача 23.

Решить уравнение $\sqrt{12 - 6\sqrt{x-4}} + \sqrt{6 - 3\sqrt{8-x}} = 6.$

Решение. *Первый способ.*

По формуле сложного радикала

$$\sqrt{12 - 6\sqrt{x-4}} - \sqrt{6}\sqrt{2 - \sqrt{x-4}} =$$

$$= \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{8-x}} - \sqrt{2 - 8 - x}}{\sqrt{2}}.$$

Уравнение примет вид $\sqrt{3}\sqrt{2 + \sqrt{8-x}} = \sqrt{6}.$

Второй способ.

Запишем в виде:

$$\sqrt{12}\sqrt{1 - \sqrt{\frac{x}{4} - 1}} + \sqrt{6}\sqrt{1 - \sqrt{2 - \frac{x}{4}}} = 6$$

и положим $\sin 2t = \sqrt{\frac{x}{4} - 1}$ (заметим, что $\frac{x}{4} - 1 \leqslant 1$). Тогда уравнение примет вид:

$$\sqrt{2}\,|\sin t - \cos t| + \sqrt{2}\sin t = 1.$$

Задача 24.

Решить уравнение $\dfrac{3 - x^2}{1 - x^2} + \dfrac{3 - x^2}{1 - 3x^2} + \dfrac{4 - 4x^2}{x^4 - 6x^2 + 1} = 0.$

Решение.

Умножив каждое слагаемое в левой части на x (получив при этом посторонний корень) и положив $x = \operatorname{tg} t$, получим уравнение $\operatorname{tg} t + \operatorname{tg} 2t + \operatorname{tg} 3t + \operatorname{tg} 4t = 0.$

Складывая первое слагаемое с четвертым, а второе с третьим будем иметь далее:

$$\frac{\sin 5t}{\cos t \cos 4t} + \frac{\sin 5t}{\cos 2t \cos 3t} = 0,$$

$$\sin 5t = 0 \text{ или } \cos t \cos 4t + \cos 2t \cos 3t = 0,$$

откуда $t = \frac{k\pi}{5}$ $(k \in Z)$, а для решения второго уравнения переходим к переменной $y = \cos t$,

$$8y^4 - 9y^2 + 2 = 0, \quad y^2 = \frac{(9 \pm \sqrt{17})}{16},$$

откуда $x_{1,2} = \operatorname{tg} 2t = (1 + y^2)^{-1} = \frac{16}{25 \pm \sqrt{17}}$.

Из первой серии корней получаем еще 4 корня, соответствующих значениям $k = \pm 1, \pm 2$:

$$x_{3,4} = \pm \operatorname{tg}\frac{\pi}{5}, \quad x_{5,6} = \pm \operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}.$$

Покажем, как алгебра помогает тригонометрии.

Задача 25.

Доказать неравенство

$$\sin^{2k}\alpha + \cos^{2k}\alpha \leqslant 2\,(\sin^{2k+2}\alpha + \cos^{2k+2}\alpha) \quad (\alpha \in R).$$

Решение.

Обозначив $\sin^2\alpha$ и $\cos^2\alpha$ соответственно через a и b, запишем данное неравенство в виде

$$(a^k + b^k)(a + b) \leqslant 2\,(a^{k+1} + b^{k+1}) \text{ и будем иметь}$$

$$a^k b + ab^k \leqslant a^{k+1} + b^{k+1}, \text{ или } (a^k - b^k)(a - b) \geqslant 0.$$

Последнее неравенство, очевидно, справедливо, поскольку множители в левой части имеют одинаковые знаки; при этом равенство достигается при $a = b$.

Задача 26.

Решить уравнение $\sin^8 x + \cos^8 x = 32\,(\sin^{18} x + \cos^{18} x)$.

Решение.

Из результата и решения предыдущей задачи следует, что левая часть уравнения не больше, чем $2\,(\sin^{10}x + \cos^{10}x)$, что в свою очередь, не больше, чем $4\,(\sin^{12} x + \cos^{12} x)$ и т.д. При этом равенство достигается только при $\sin^2 x = \cos^2 x$ т.е. при $x = (2k + 1)\frac{\pi}{4}$ $(k \in Z)$.

Глава II. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

11. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Задача 1.

Найти производную функции

$$y=\sqrt{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{1+x^4}}}.$$

Решение.

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{1+x^4}}}}\left(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{1+x^4}}\right)'=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{1+x^4}}}}\cdot\frac{1}{3}\left(1+\sqrt[4]{1+x^4}\right)^{-2/3}\left(1+\sqrt[4]{1+x^4}\right)'=$$

$$=\frac{x^3}{6\sqrt{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{1+x^4}}}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{1+x^4}\right)^2}\;\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}.$$

Задача 2.

Найти производную функции $y=\ln^2\left(\sec 2^{\sqrt[3]{x}}\right)$.

Решение.

$$y'=\frac{2}{3}\ln\left(\sec 2^{\sqrt[3]{x}}\right)\cdot\frac{1}{\sec 2^{\sqrt[3]{x}}}\cdot\frac{\sin 2^{\sqrt[3]{x}}}{\cos^2 2^{\sqrt[3]{x}}}\cdot 2^{\sqrt[3]{x}}\,x^{-2/3}\ln 2=$$

$$=\frac{\ln 2}{3}\ln\left(\sec 2^{\sqrt[3]{x}}\right)\operatorname{tg} 2^{\sqrt[3]{x}}\cdot\frac{2^{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}}.$$

Задача 3.

Найти производную функции $y=x+x^x+x^{x^x}$ $(x>0)$.

Решение.

Перепишем y в виде:

$$y = x + e^{x\ln x} + e^{x^x \ln x} = x + e^{x\ln x} + e^{e^{x\ln x}\ln x}.\ \text{Тогда}$$

$$y' = 1 + e^{x\ln x}(\ln x + 1) + e^{e^{x\ln x}\ln x}\left(\frac{e^{x\ln x}}{x} + e^{x\ln x}(1 + \ln x)\ln x\right) =$$

$$= 1 + x^x(1 + \ln x) + x^{x^x}\left(x^{x-1} + x^x(1 + \ln x)\ln x\right).$$

Задача 4.

Найти производную функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

в точках $x = 2$ и $x = 0$.

Решение.

Для каждого x, $x \neq 0$ получаем

$$f'(x) = \left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right)' = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x},\ \text{поэтому}$$

$$f'(2) = 4\sin\frac{1}{2} - \cos\frac{1}{2}.$$

Производную данной функции в точке $x = 0$ найдем непосредственно из определения производной в точке:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{(\Delta x)^2 \sin\dfrac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\Delta x \sin\frac{1}{\Delta x}\right).$$

Так как $\Delta x \to 0$, а $\left|\sin\dfrac{1}{\Delta x}\right| \leqslant 1$, то $\lim\left(\Delta x \sin\dfrac{1}{\Delta x}\right) = 0.$

Итак, $f'(0) = 0$.

Задача 5.

Доказать, что функция $y = |x|$ не дифференцируема в точке $x = 0$.

Доказательство.

Приращение функции $f(x) = |x|$ в точке $x = 0$ равно

$$\Delta f(0) = f(0 + \Delta x) - f(0) = |0 + \Delta x| - 0 = |\Delta x|.$$

По определению производной находим, что

$$f_-'(0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1;$$

$$f_+'(0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Так как $f_+'(0) \neq f_-'(0)$, то функция $y = |x|$ в точке $x = 0$ не дифференцируема (хотя она является непрерывной в этой точке).

Задача 6.

Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 1, \\ x^2, & x < 1 \end{cases}$$

не дифференцируема в точке $x = 1$.

Доказательство.

Приращение функции в точке $x = 1$ равно

$$\Delta f(1) = f(1 + \Delta x) - f(1) = \begin{cases} \Delta x, & \Delta X \geqslant 0, \\ (1 + \Delta x)^2 - 1, & \Delta x < 0, \end{cases}$$

или после преобразования

$$\Delta f(1) = \begin{cases} \Delta x, & \Delta x \geqslant 0, \\ 2\Delta x + (\Delta x)^2, & \Delta x < 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$f_-'(1) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{2\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2;$$

$$f_+'(1) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Так как $f'_+(1) \neq f'_-(1)$, то производная $f'(x)$ в точке $x = 1$ не существует.

Задача 7.

Найти $f'(0)$, если $f(x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-1000)$.

Решение.

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(\Delta x - 1)(\Delta x - 2)\ldots(\Delta x - 1000)}{\Delta x} = 1000!$$

Задача 8.

Доказать, что производная четной функции есть функция нечетная, а производная нечетной функции есть функция четная (предполагается, что указанные функции имеют конечную производную). Дать геометрическую интерпретацию этого факта.

Доказательство.

Пусть $f(x)$ — четная функция, имеющая конечную производную, т.е. $f(x) = f(-x)$.

По определению производной, имеем

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= -\lim_{-\Delta x \to 0} \frac{f(-x - \Delta x) - f(-x)}{-\Delta x} = -f'(-x).$$

Пусть $f(x)$ — нечетная функция, имеющая конечную производную, т.е. $f(x) = -f(-x)$, тогда

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}(f(x + \Delta x) - f(x)) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}(-f(-x - \Delta x) + f(-x)) =$$

$$= \lim_{-\Delta x \to 0} \frac{1}{-\Delta x}(f(-x - \Delta x) - f(-x)) = f'(-x).$$

Геометрическая интерпретация.

Например, у четной дифференцируемой функции угловой коэффициент касательной, проведенной в точке $(x_0, f(x_0))$ к графику функции, равен по абсолютной величине и противоположен по знаку угловому коэффициенту касательной, проведенной в точке $(-x_0, f(x_0))$.

Задача 9.

Доказать, что производная периодической функции, если она существует, есть снова периодическая функция с тем же периодом.

Доказательство.

Пусть T — период функции $f(x)$, тогда $f(x) = f(x + T)$. Положим $g(x) = f(x + T)$. Поскольку $f(x) = g(x)$, то $f'(x) = g'(x)$ и $f'(x + t) = g'(x) = f'(x)$, что и требовалось доказать.

Задача 10.

Сколько действительных корней имеет уравнение

$$x^{37} + x^8 + 1 = 0?$$

Решение.

Заметив, что $x \neq 0$, положим $y = \frac{1}{x}$. Тогда уравнение примет вид

$$y^{37} + y^{29} + 1 = 0. \qquad (1)$$

Функция $f(y) = y^{37} + y^{29} + 1$ — сумма возрастающих функций, а потому и она есть возрастающая. Следовательно, уравнение (1) не может иметь более одного корня. С другой стороны, многочлен нечетной степени, как известно, всегда имеет хотя бы один действительный корень.

Задача 11.

Решить неравенство $x^9 - x^5 + x < 13\sqrt{2}$.

Решение.

Функция $f(x) = x^9 - x^5 + x - 13\sqrt{2}$ имеет положительную производную и, следовательно, возрастает на всей числовой прямой. Корень уравнения $x^9 - x^5 + x = 13\sqrt{2}$ должен быть вида $a\sqrt{2}$.

Ответ: $x \in \,]-\infty;\ \sqrt{2}[$.

Задача 12.

Докажите неравенство $x^2 - x^3 < \frac{1}{6}$ на промежутке $\left]\frac{2}{3};\ \infty\right[$.

Решение.

Пусть $f(x) = x^2 - x^3$. Тогда $f'(x) = 2x - 3x^2 < 0$ на промежутке $\left]\frac{2}{3};\ \infty\right[$. Следовательно, на этом промежутке

$$f(x) < f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27} < \frac{1}{6}$$

Здесь совпадение, что функция убывает и меньше нуля.

Задача 13.

Что больше: $e^{\frac{1}{\pi} - \frac{1}{e}}$ или $e^{\frac{1}{e}} \cdot \left(\frac{e}{\pi}\right)^e$?

Решение.

Запишем неравенство в виде

$$e^{1/\pi} \cdot \pi^e > e^{1/e} \cdot e^e, \text{ или } f(\pi) > f(e),$$

где $f(x) = e^{1/x} x^e$ $(x > 0)$. Будем иметь:

$$f'(x) = e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) x^e + e^{1/x} e x^{e-1} =$$

$$= e^{1/x} x^{e-2}(ex - 1),$$

так что $f'(x) > 0 \Rightarrow ex > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$. Поэтому $f(\pi) > f(e)$.

Задача 14.

Решите неравенство $x^9 - x^5 + x > 1$.

Решение.

Указание. Запишем неравенство в виде $f(x) > 0$, где $f(x) = x^9 - x^5 + x - 1$. Так как $f'(x) = 9x^8 - 5x^4 + 1 > 0$ для любого x, то функция f возрастает на всей числовой прямой. Поэтому $f(x) > f(1) = 0$ при $x > 1$ и $f(x) < f(1) = 0$ при $x < 1$.

Ответ: $x \in \left]1;\ +\infty\right[$.

Задача 15.

Сколько действительных корней имеет уравнение

$$x^5 + x^2 + 1 = 0?$$

Решение.

$x = 0$ не является корнем уравнения. Поэтому при замене $x = \frac{1}{y}$ не произойдет потери корня. Тогда получим:

$$\frac{1}{y^5} + \frac{1}{y^2} + 1 = 0, \text{ откуда } y^5 + y^3 + 1 = 0.$$

Но $f(y) = y^5 + y^3 + 1 = 0$ — непрерывная возрастающая функция. Заметим, что $f(-1) < 0$, $f(0) > 0$, следовательно, функция в некоторой точке интервала имеет один действительный корень.

Задача 16.

При каких a и b равенство $a \cdot e^x + b = e^{ax+b}$ выполняется при всех $x \in R$?

Решение.

Пусть для некоторой пары a и b выполняется заданное равенство, т.е. совпадают функции $ae^x + b$ и e^{ax+b}. Тогда совпадают и их производные, или, другими словами, при любом $x \in R$ выполняется равенство

$$ae^x = ae^{ax+b}.$$

Если $a \neq 0$, то из этого равенства следует равенство $x = ax + b$, которое является тождеством при $a = 1$ и $b = 0$.

Покажем, что это равенство не выполняется ни при каком b или, другими словами, уравнение $e^x - x = 0$ не имеет решений.

Пусть $f(x) = e^x - x$. На множестве $x < 0$ функция f положительна, $f(0) = 1$, а на множестве $x > 0$ она, как легко видеть, возрастает, поэтому функция f не обращается в 0.

Итак, данное в условии равенство выполняется лишь при $a = 1$, $b = 0$.

12. КАСАТЕЛЬНАЯ К КРИВОЙ

Задача 1.

Найти на графике функции $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 1$ точку, касательная к которой образует с осью OX угол $\frac{\pi}{4}$.

Решение.

Чтобы угол касательной с осью OX был равен $\frac{\pi}{4}$, необходимо и достаточно, чтобы угловой коэффициент касательной был равен 1. Но $k = f'(x_0)$, значит, нам надо решить уравнение

$$f'(x_0) = 1, \text{ т.е. } 9x_0^2 - 8x_0 = 1 \Rightarrow x_0 = 1 \text{ или } x_0 = -\frac{1}{9}.$$

В этих точках $f(1) = 0$, $f\left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{230}{243}$. Значит, искомых точек две: $M_1\left(-\frac{1}{9}; \frac{230}{243}\right)$, $M_2(1; 0)$.

Задача 2.

Найти уравнение параболы $y = x^2 + bx + c$, касающейся прямой $y = x$ в точке $M(1; 1)$.

Решение.

Задачу удобно сформулировать так: уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 + bx + c$ в точке $M(1; 1)$ имеет вид $y = x$; найти b и c. Такая формулировка уже более явно содержит два условия:

1) точка $M(1; 1)$ лежит на графике функции $f(x) = x^2 + bx + c$;

2) $f'(1) = 1$ (поскольку для прямой $y = x$ будет $k = 1$). Отсюда с учетом формулы $f'(x) = 2x + b$ получаем систему

$$\begin{cases} 1 + b + c = 1, \\ 2 + b = 1, \end{cases}$$

из которой $b = -1$; $c = 1$.

Ответ: $y = x^2 - x + 1$.

Задача 3.

Найти уравнение прямой, проходящей через точку с координатами $\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$, касающейся графика функции $y(x) = -\frac{x^2}{2} + 2$ и пересекающей в двух различных точках график функции $y(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

Решение.

Обозначим через $(\alpha;\ \beta)$ точку, в которой прямая касается графика функции $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 2$. Тогда угловой коэффициент прямой равен $f'(\alpha) = -\alpha$, а ее уравнение можно записать в виде: $y = \beta - \alpha(x - \alpha)$.

Прямая по условию проходит через точку $\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$, а значит, должно выполняться равенство $2 = \beta - \alpha\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)$, или $\beta + \alpha^2 - \frac{\alpha}{2} = 2$. Воспользуемся тем, что точка $(\alpha;\ \beta)$ лежит на графике функции $f(x)$ и найдем еще одно условие: $\beta = -\frac{\alpha^2}{2} + 2$. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} \beta + \alpha^2 - \frac{\alpha}{2} = 2, \\ \beta = -\frac{\alpha^2}{2} + 2, \end{cases}$$

находим две точки касания: $(0;\ 2)$, $\left(1;\ \frac{3}{2}\right)$. Касательные к графику $f(x)$ в этих точках имеют уравнения $y = 2$ и $y = \frac{3}{2} - 1\,(x - 1)$, или $y = -x + \frac{5}{2}$. Найдем количество точек, в которых каждая из найденных прямых пересекает график функции $y(x) = \sqrt{4 - x^2}$. Система

$$\begin{cases} y = \sqrt{4 - x^2}, \\ y = 2 \end{cases} \qquad (1)$$

имеет единственное решение (0; 2). Значит, первая прямая имеет только одну общую точку с графиком функции $y(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

Решаем вторую систему:

$$\begin{cases} y = \sqrt{4 - x^2}, \\ y = -x + \dfrac{5}{2}, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} -x + \dfrac{5}{2} = \sqrt{4 - x^2}, \\ y = -x + \dfrac{5}{2}. \end{cases} \qquad (2)$$

Множество решений первого уравнения системы (2) содержится в промежутке $-\infty < x \leqslant \frac{5}{2}$. На этом промежутке обе части уравнения неотрицательны, и поэтому оно равносильно (на этом промежутке) уравнению $\left(-x + \frac{5}{2}\right)^2 = 4 - x^2$. Полученное уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{7}}{4} \text{ и } x_2 = \frac{5 + \sqrt{7}}{4},$$

содержащиеся в множестве $x \leqslant \frac{5}{2}$. Значит, первое уравнение системы имеет два корня x_1 и x_2, и поэтому система (2) имеет два решения:

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{7}}{4},\ y_1 = \frac{5 + \sqrt{7}}{4};\ \ x_2 = \frac{5 + \sqrt{7}}{4},\ y_2 = \frac{5 - \sqrt{7}}{4}.$$

Следовательно, вторая прямая пересекает график функции $y(x) = \sqrt{4 - x^2}$ в двух различных точках.

Ответ: $y = -x + \frac{5}{2}$.

Задача 4.

Дана кривая $xy = 1$. К ней проведена касательная в точке $M(x_0;\ y_0)$. Доказать, что где бы ни была взята эта точка на кривой, она отсекает треугольник постоянной площади.

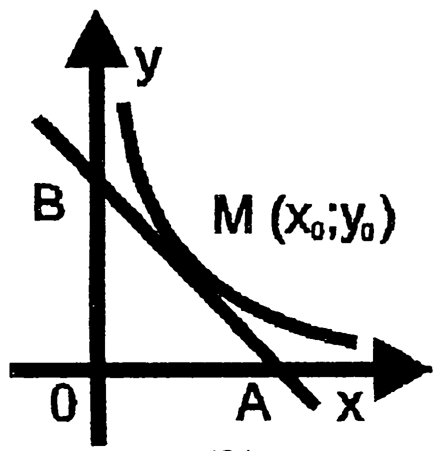


Рис. 12.1

Решение.

Пусть касательная к кривой $xy = 1$ пересекает оси в точках A и B (рис. 12.1). Уравнение касательной в точке $M(x_0; y_0)$ имеет вид: $y = y_0 - \frac{1}{x_0^2}(x - x_0)$. Положив $y = 0$, найдем длину AO: $x = y_0 x_0^2 + x_0$.

Аналогично найдем длину OB: $y = y_0 + \frac{1}{x_0}$. Учитывая, что $y = \frac{1}{x}$, найдем площадь треугольника AOB:

$$S = \frac{1}{2}(y_0 x_0^2 + x_0)\left(y_0 + \frac{1}{x_0}\right) = \frac{1}{2}(x_0 + x_0)\left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0}\right) = 2.$$

Задача 5.

При каком значении a кривые

$$f(x) = x^3 - x + 1 \text{ и } \varphi(x) = 3x^2 - 4x + a$$

касаются друг друга?

Решение.

Для того, чтобы графики функций f и φ касались в точке с абсциссой x_0, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:

1) $f(x_0) = \varphi(x_0)$;
2) $f'(x_0) = \varphi'(x_0)$.

Согласно этим условиям имеем систему

$$\begin{cases} x_0^3 - x_0 + 1 = 3x_0^2 - 4x_0 + a, \\ 3x_0^2 - 1 = 6x_0 - 4. \end{cases}$$

Из второго уравнения имеем $x_0 = 1$. Тогда из первого уравнения следует $a = 2$.

Задача 6.

Прямая касается параболы $y = -x^2 + 4x + 1$ и параболы $y = 3x^2 + 4x + \frac{7}{3}$. Напишите уравнение этой прямой. При каких целых значениях k и b прямая $y = kx + b$ не имеет общих точек ни с одной из парабол?

Решение.

Так как по условию задачи прямая $y = kx + b$ касается обеих парабол, то уравнения

$$-x^2 + 4x + 1 = kx + b \text{ и } 3x^2 + 4x = \frac{7}{3}kx + b$$

должны иметь по одному решению. Для этого необходимо и достаточно, чтобы дискриминанты этих уравнений были равны нулю, то есть

$$D_1 = (k-4)^4 + 4(1-b) = 0 \text{ и } D_2 = (k-4)^2 - 12\left(\frac{7}{3} - b\right) = 0,$$

откуда $k_1 = 2$, $b_1 = 2$ и $k_2 = 6$, $b_2 = 2$.

Значит, искомыми прямыми являются

$$y_1 = 2x + 2 \text{ и } y_2 = 6x + 2.$$

Для того, чтобы прямая не имела общих точек с параболами, необходимо:

$$\begin{cases} D_1 < 0, \\ D_2 < 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (k-4)^2 + 4(1-b) < 0, \\ (k-4)^2 - 12\left(\frac{7}{3} - b\right) < 0, \end{cases}$$

где $k \in Z$, $b \in Z$.

Имеем $1 - b < 0$; $\frac{7}{3} - b > 0$, откуда $1 < b < 2\frac{1}{3}$, т.е. $b = 2$.

Теперь $(k-4)^2 - 4 < 0$, т.е. $-2 < k - 4 < 2$, или $k \in \{3, 4, 5\}$. Проверкой убеждаемся, что все эти значения подходят, итак,

$$k \in \{3, 4, 5\} \text{ и } b = 2.$$

Задача 7.

В какой точке касательная к графику функции $f(x) = x^2$

а) параллельна прямой $2x - y + 1 = 0$;

б) перпендикулярна этой же прямой?

Решение.

1) Известно, что две прямые параллельны, если их угловые коэффициенты равны. Уравнение данной прямой можно записать в виде $y = 2x + 1$, откуда $k = 2$.

Для касательной $k = f'(x_0)$, поэтому нам надо решить уравнение: $f'(x_0) = 2$, т.е. $2x_0 = 2$, откуда $x_0 = 1$. Значит, касательную надо проводить в точке $M_1(1;\ 1)$. Уравнение касательной: $y = 2x - 1$.

2) Если прямые перпендикулярны, то $k_1 k_2 = -1$.

В данном примере $k_1 = 2$, $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{2}$, и из уравнения $2x_0 = -\frac{1}{2}$ находим $x_0 = -\frac{1}{4}$. Это соответствует точке $M_2\left(-\frac{1}{4};\ \frac{1}{16}\right)$ и уравнению касательной $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{16}$.

Задача 8.

Доказать, что лучи света, исходящие из фокуса $F\left(0;\ \frac{1}{4a}\right)$ параболы $y = ax^2$, в любой ее точке отражаются параллельно ее оси симметрии.

Решение.

Пусть $M(x_0;\ ax_0^2)$ — произвольная точка параболы (рис. 12.2). Из закона отражения света следует, что величины углов, образуемых с касательной MP падающим лучом FM и отраженным лучом MA, равны между собой. Нам нужно доказать, что $MA \parallel OY$. Последнее же следует из равнобедренности треугольника PFM. Итак, достаточно доказать, что $FM = FP$.

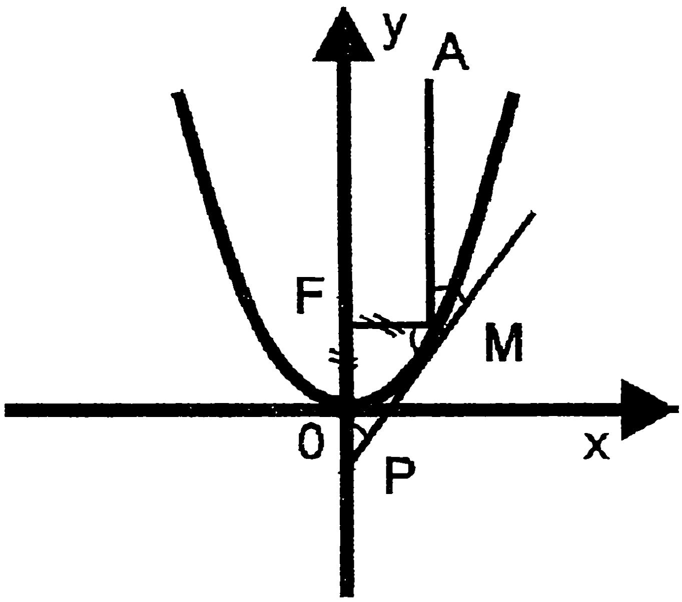


Рис. 12.2

$$FM = \sqrt{x_0^2 + \left(ax_0^2 - \frac{1}{4a}\right)^2} = \sqrt{a^2x_0^4 + \frac{1}{2}x_0^2 + \frac{1}{16a^2}} = \left|ax_0^2 + \frac{1}{4a}\right|.$$

Для вычисления FP запишем уравнение касательной MP. Поскольку угловой коэффициент касательной $k = 2ax_0$, то это уравнение имеет вид $y = ax_0^2 = 2ax_0(x - x_0)$. Полагая в нем $x = 0$, найдем ординату точки P: $y = -ax_0^2$. Следовательно,

$$FP = \left|\frac{1}{4a} - (-ax_0^2)\right| = \left|ax_0^2 + \frac{1}{4a}\right| = FM.$$

Задача 9.

Профиль автомобильного моста имеет форму параболы (рис. 12.3) с осью, проходящей вертикально через середину моста с высотой центральной части 10 м и длиной основания 120 м. Какой должен быть наклон насыпи на обоих концах моста?

Решение.

Заметим, что наклон насыпи — это наклон отрезков касательных к параболе в точках A и B. Выберем систему координат так, как указано на рисунке 12.3. Тогда парабола в этой системе задается уравнением вида $y = ax^2 + 10$.

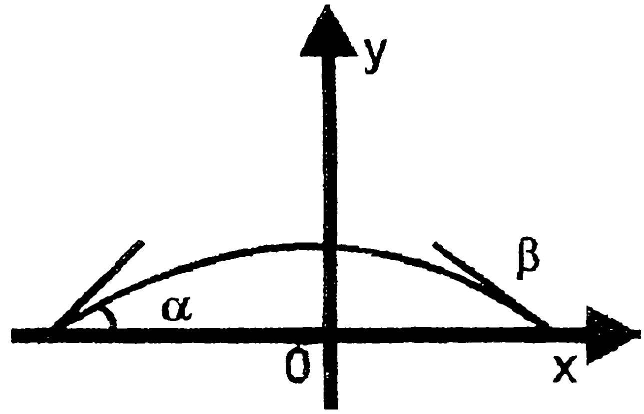


Рис. 12.3

Так как точка $A\,(60; 0)$ лежит на параболе, $a = -\frac{1}{360}$.

Таким образом, уравнение параболы $y = -\frac{x^2}{360} + 10$. Отсюда $y' = -\frac{x}{180}$.

В точке A: $\operatorname{tg}\alpha = y'(-60) = \frac{1}{3}$, $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

В точке B: $\operatorname{tg}\beta = y'(60) = -\frac{1}{3}$, $\beta = \pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

Задача 10.

Касается ли прямая $x + 4y - 4 = 0$ гиперболы $y = \frac{1}{x}$?

Решение.

Решив систему

$$\begin{cases} x + 4y - 4 = 0, \\ xy = 1, \end{cases}$$

находим общую точку прямой и гиперболы $\left(2; \frac{1}{2}\right)$. Производная функции $y = \frac{1}{x}$ равна $y' = -\frac{1}{x^2}$, а ее значение в точке пересечения $y'(2) = -\frac{1}{4}$. Но угловой коэффициент прямой такой же. Значит, данная прямая касается гиперболы в точке $\left(2; \frac{1}{2}\right)$.

Задача 11.

Найти величину угла, под которым парабола $y = x^2$ видна из точки $A(2; -1)$.

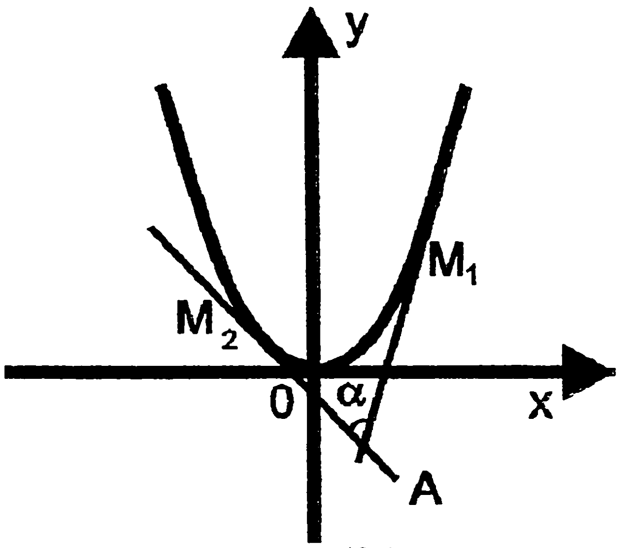


Рис. 12.4

Решение.

Очевидно, этот угол образован двумя касательными к параболе, проходящими через точку A (рис. 12.4). Обозначим искомый угол через α, а углы наклона касательных к оси OX через α_1 и α_2. Тогда

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}, \qquad (1)$$

где k_1 и k_2 — угловые коэффициенты касательных. Для их вычисления нужно знать абсциссы точек касания.

Обозначим точку касания через $M(x_0;\ x_0^2)$. Для вычисления x_0 запишем уравнение касательной $y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0)$ и воспользуемся тем, что точка $A\,(2;\ -1)$ удовлетворяет этому уравнению, то есть $-1 - x_0^2 = 2x_0\,(2 - x_0)$, откуда $x_0 = 2 \pm \sqrt{5}$. Таким образом,

$$k_1 = y'\,(2 + \sqrt{5}) = 4 + 2\sqrt{5};\quad k_2 = y'\,(2 - \sqrt{5}) = 4 - 2\sqrt{5}.$$

Согласно (1), $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{(4 - 2\sqrt{5}) - (4 + 2\sqrt{5})}{1 + (4 - 2\sqrt{5})(4 + 2\sqrt{5})} = \dfrac{4}{3}\sqrt{5}$, то есть $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}\sqrt{5}$.

Задача 12.

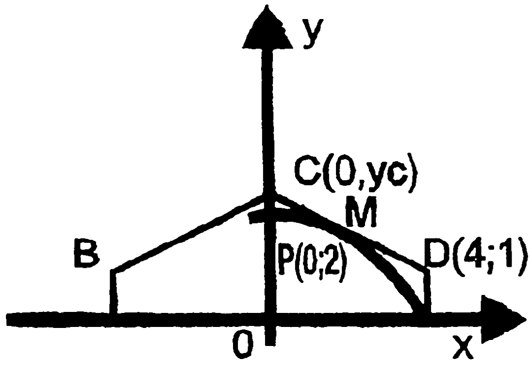


Рис. 12.5

Вертикальный разрез теплицы имеет форму пятиугольника $ABCDE$ (рис. 12.5), в котором $|AE| = 8$ м, $|AB| = |DE| = 1$ м. Из точки P, расположенной на высоте 2 м в плоскости POE, горизонтально вытекает струя воды, которая при максимальном напоре достигает точки E (или A). Какую высоту h нужно придать центральной части теплицы, если требуется, чтобы струя воды (она имеет форму параболы с вершиной в точке P) не задевала крыши теплицы?

Решение.

Выберем систему координат и найдем уравнение параболы. Оно должно иметь вид $y = 2 + ax^2$. Так как точка $E\,(4;\,0)$ лежит на параболе, $a = -\dfrac{1}{8}$. Таким образом, парабола определяется уравнением $y = 2 - \dfrac{x^2}{8}$. Поскольку точка $D\,(4;\ 1)$ фиксирована, то нам надо найти такое положение точки $C\,(0;\ y_C)$, при котором прямая CD касается параболы $y = 2 - \dfrac{x^2}{8}$, а затем взять $h > y_C$. Обозначим точку касания через $M\left(x_0;\ 2 - \dfrac{x_0^2}{8}\right)$ и запишем уравнение касательной:

$$y - \left(2 - \frac{x_0^2}{8}\right) = -\frac{x_0}{4}\,(x - x_0).$$

Подставляя координаты точки $D\,(4;\ 1)$ в это уравнение, получим $x_0^2 - 8x_0 + 8 = 0$, т.е. $x_0 = 4 \pm 2\sqrt{2}$. Условию задачи удовлетворяет лишь один корень $x_0 = 4 - 2\sqrt{2}$, так как второй корень соответствует точке касания, лежащей вне рассматриваемого участка параболы. Подставив полученное значение x_0 в уравнение касательной и положив в нем $x = 0$, получим ординату точки C:

$$y_C = 2 - \frac{x_0^2}{8} + \frac{x_0^2}{4} = 2 + \frac{x_0^2}{8} = 2 + \frac{(4 - 2\sqrt{2})}{8} = 5 - 2\sqrt{2}.$$

Таким образом, достаточно взять $h > 5 - 2\sqrt{2} \approx 2{,}2$ (м).

Задача 13.

Окружность радиуса 1 с центром на положительной полуоси Oy касается параболы $y = x^2$. Найти точку касания M и положение центра окружности C.

Решение.

Обозначим центр окружности через $C\,(0,\ a)$. Тогда уравнение окружности будет иметь вид $x^2 + (y - a)^2 = 1$.

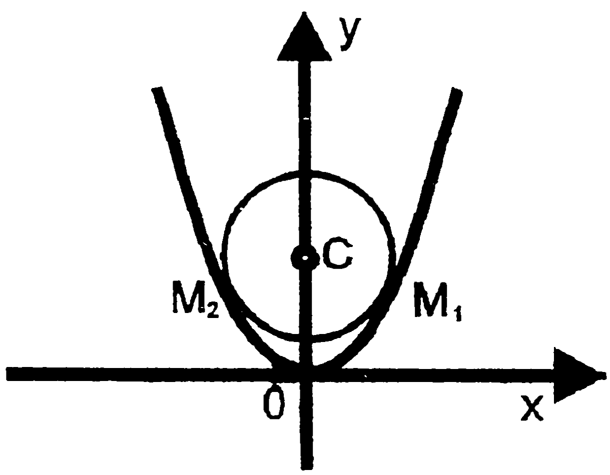


Рис. 12.6

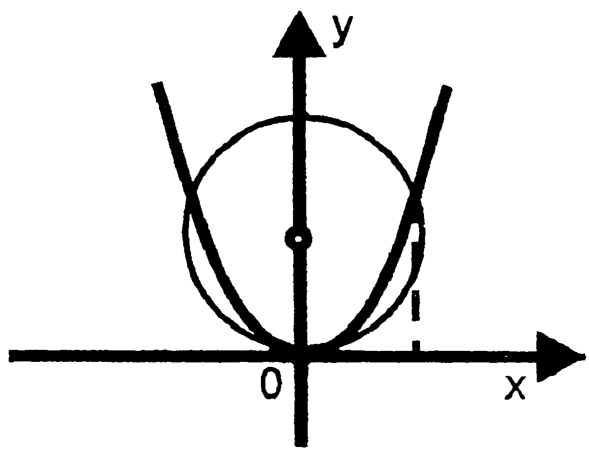


Рис. 12.7

Нас интересует касание параболы с нижней полуокружностью (рис. 12.6) уравнение которой имеет вид $y = a - \sqrt{1 - x^2}$.

Обозначим абсциссу точки касания через x_0. Значения функций $y = x^2$ и $y = a - \sqrt{1 - x^2}$, а также значения их производных в точке $x = x_0$ должны совпасть, поэтому имеем

$$\begin{cases} a - \sqrt{1 - x_0^2} = x_0^2, \\ \dfrac{x_0}{\sqrt{1 - x_0^2}} = 2x_0, \end{cases} \text{ то есть } \begin{cases} \sqrt{1 - x_0^2} = a - x_0^2, \\ x_0 (1 - 2\sqrt{1 - x_0^2} = 0. \end{cases}$$

Одно решение, очевидно, $x_0 = 0$, $a = 1$ (рис. 12.7). Второе уравнение имеет еще два корня $x_0 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ (рис. 12.6).

Им соответствует одно и то же значение $a = \frac{5}{4}$. Таким образом, мы получаем более интересный случай: окружность с центром в точке $C\left(0; \frac{5}{4}\right)$, касающуюся параболы в точках $M_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{4}\right)$ и $M_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{4}\right)$ (рис. 12.6).

Задача 14.

Точка движется прямолинейно под действием постоянной силы с ускорением 2 м/с^2 и с нулевой начальной скоростью. Через 3 секунды после начала движения сила прекращает действовать и точка начинает двигаться равномерно с набранной скоростью. Найдите закон движения точки.

Решение.

Выберем систему координат так, чтобы в начальный момент точка находилась в начале координат: $S = 0$ при $t = 0$. Тогда при $0 \leqslant t \leqslant 3$ имеем $S = t^2$. При $t \geqslant 3$ график движения — часть касательной к параболе $S = t^2$, проведенной в точке (3; 9) в сторону возрастания t. Поэтому его уравнение имеет вид $S - 9 = 6(t - 3)$, или $S = 6t - 9$.

Таким образом, закон движения определяется функцией

$$S = \begin{cases} T^2, & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant 3, \\ 6t - 9, & \text{если } t \geqslant 3. \end{cases}$$

Задача 15.

Найдите уравнение общих касательных к параболам

$$y = x^2 - 5x + 6 \text{ и } y = x^2 + x + 1.$$

Решение.

Пусть точки различных парабол, через которые проходит общая касательная, имеют координаты $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$. Пусть уравнение общей касательной будет $y = kx + b$. Угловой коэффициент

$$k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \tag{3}$$

причем

$$y_1 = x_1^2 - 5x_1 + 6, \tag{1}$$

$$y_2 = x_2^2 + x_2 + 1, \tag{2}$$

и, т.к. k — угловой коэффициент прямой-касательной, то

$$k = (y_1)', \tag{4}$$

$$k = (y_2)'. \tag{5}$$

Из уравнений (3), (4) и (5) составляем систему

$$\begin{cases} k = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, & (3) \\ k = 2x_1 - 5, & (4) \\ k = 2x_2 + 1. & (5) \end{cases}$$

Далее, вычитая (5) из (4), получим

$$x_1 - x_2 = 3, \tag{6}$$

$$x_1 = 3 + x_2. \tag{6'}$$

Подставим значение для x_1 из выражения (6′) в уравнение (1). Получим

$$y_1 = (x_2 + 3)^2 - 5(3 + x_2) + 6 = x_2^2 + x_2. \tag{1'}$$

Подставим (1′), (2) и (6′) в (3). Получим $k = -\frac{1}{3}$. Несложно получить, что $b = \frac{5}{9}$. Далее составляем уравнение искомой касательной.

Ответ: $y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{9}$.

Задача 16.

Даны две параболы: $y = 8 - 3x - 2x^2$, $y = 2 + 9x - 2x^2$.

1) Найти значения a и b в их общей касательной $ax + b$.

2) Найти координаты точек касания.

Решение.

Запишем уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$, проходящую через точку $P(x_0,\ y_0)$:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Пусть искомая прямая касается данных парабол в точках с координатами $(x_{0_1}; y_{0_1})$ и $(x_{0_2}; y_{0_2})$. Имеем:

$$f_1'(x_{0_1}) = -3 - 4x_{0_1};\quad f_2'(x_{0_2}) = 9 - 4x_{0_2};$$

$$y_{0_1} = 8 - 3x_{0_1} - 2x_{0_1}^2;\quad y_{0_2} = 2 + 9x_{0_2} - 2x_{0_2}^2.$$

Подставим в уравнение касательной:

$$\begin{cases} y - y_{0_1} = f_1'(x_{0_1})(x - x_{0_1}), \\ y - y_{0_2} = f_2'(x_{0_2})(x - x_{0_2}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - (8 - 3x_{0_1} - 2x_{0_1}^2) = (-3 - 4x_{0_1})(x - x_{0_1}), \\ y - (2 + 9x_{0_2} - 2x_{0_2}^2) = (9 - 4x_{0_2})(x - x_{0_2}). \end{cases}$$

Так как это уравнения одной и той же прямой, то можно приравнять коэффициенты a и b.

$$\begin{cases} y = (-3 - 4x_{0_1})\,x + 3x_{0_1} + 4x_{0_1}^2 + 8 - 3x_{0_1} - 2x_{0_1}^2, & (1) \\ y = (9 - 4x_{0_2})\,x - 9x_{0_2} + 4x_{0_2}^2 + 2 + 9x_{0_2} - 2x_{0_2}^2, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 - 4x_{0_1} = 9 - 4x_{0_2}, \\ 2x_{0_1}^2 + 8 = 2x_{0_2}^2 + 2, \end{cases}$$

$$x_{0_1} = x_{0_2} - 3;\quad (x_{0_2} - 3)^2 + 4 = x_{0_2}^2 + 1,$$

$$x_{0_2}^2 - 6x_{0_2} + 9 + 3 - x_{0_2}^2 = 0,$$

$$x_{0_2} = 2, \quad y_{0_2} = 2 + 18 - 8 = 12;$$

$$x_{0_1} = 2 - 3 = -1, \quad y_{0_1} = 8 + 3 - 2 = 9.$$

Подставим $(x_{0_1}; y_{0_1})$ в (1) или $(x_{0_2}; y_{0_2})$ в (2), получим уравнение касательной $y = x + 10$.

Задача 17.

Хорда параболы $y = -a^2x^2 + 5ax - 4$ касается кривой $y = \dfrac{1}{1-x}$ в точке $x_0 = 2$ и делится этой точкой пополам. Найдите a.

Решение.

Напишем уравнение касательной к графику функции $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ в точке M с абсциссой $x_0 = 2$:

$$f(2) = -1, \quad f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f'(2) = 1,$$

так что уравнение касательной имеет вид $y = x - 3$.

Предположим, что эта касательная пересекает данную параболу в точках A и B. Абсциссы точек A и B — это корни уравнения $-a^2x^2 + 5ax - 4 = x - 3$ или

$$-a^2x^2 + (5a - 1)x - 1 = 0. \qquad (1)$$

Точка M является серединой отрезка AB в том и только в том случае, если ее абсцисса равна полусумме абсцисс точек A и B. Воспользовавшись теоремой Виета, запишем это условие: $\dfrac{5a-1}{a^2} = 4$, откуда $a = 1$ или $a = \dfrac{1}{4}$.

Остается проверить, пересекаются ли при этих значениях a данная парабола и прямая $y = x - 3$, т.е. имеет ли корни уравнение (1).

При $a = 1$ получаем уравнение $-x^2 + 4x - 1 = 0$ с положительным дискриминантом, а при $a = \dfrac{1}{4}$ — уравнение $-\dfrac{1}{16}x^2 + \dfrac{1}{4}x - 1 = 0$ с отрицательным дискриминантом.

Таким образом, $a = 1$.

Задача 18.

Вычислите площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $y = \frac{x}{2x-1}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Решение.

Найдем уравнение касательной:

$$f(1) = 1, \quad f'(x) = \frac{-1}{(2x-1)^2}, \quad f'(1) = -1.$$

Уравнение касательной имеет вид $y = -x + 2$. Эта прямая пересекает оси координат в точках $A\,(2; 0)$ и $B\,(0; 2)$. Таким образом, искомая площадь $S_{AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = 2$.

Задача 19.

Напишите уравнение касательной к параболе

$$y = 2x^2 - x - 1$$

в точке с ординатой 5, если известно, что эта касательная не проходит через точку $M\,(1; -2)$.

Решение.

Для нахождения абсциссы точки касания решим уравнение $2x^2 - x - 1 = 5$. Получим два корня: $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = 2$. Пусть $f(x) = 2x^2 - x - 1$, тогда $f'(x) = 4x - 1$, $f'\left(-\frac{3}{2}\right) = -7$. Уравнения касательных $y = -7x - 5{,}5$ и $y = 7x - 9$, из них первая касательная не проходит через точку M, а вторая — проходит.

Ответ: $y = -7x - 5{,}5$.

Задача 20.

Из точки $M\,(1;\ 1)$ проведены касательные к двум ветвям гиперболы $y = \frac{k}{x}$ $(k < 0)$, касающиеся этих ветвей в точках A и В, причем треугольник MAB правильный. Найдите k и площадь треугольника MAB.

Решение.

Пусть t — абсцисса произвольной точки данной гиперболы. Касательная в этой точке задается уравнением $y = -\frac{k}{t^2}x + \frac{2k}{t}$ и проходит через точку $M(1;\ 1)$ в том и только том случае, если $1 = -\frac{k}{t^2} + \frac{2k}{t}$, или $t^2 - 2kt + k = 0$.

По теореме Виета $t_1 + t_2 = 2k$, $t_1 \cdot t_2 - k$. Поскольку ветви данной гиперболы симметричны относительно прямой $y = x$, а точка M лежит на этой прямой, точки A и B симметричны относительно прямой $y = x$. Впрочем, в этом можно убедиться и так: $t_1 t_2 = k$, т.е. абсцисса точки B равна ординате точки A и наоборот. Таким образом, точка $A(t_1;\ t_2)$, а точка $B(t_2;\ t_1)$.

Отсюда следует, что $MA = MB$ при любом $k < 0$. Таким образом, k нужно находить из равенства $MA = AB$. Вычислим MA^2 и AB^2:

$$AB^2 = (t_1 - t_2)^2 + (t_2 - t_1)^2 = 2(t_1 - t_2)^2 = 2((t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2) = \\ = 8k^2 - 8k;$$

$$MA^2 = (t_1 - 1)^2 + (t_2 - 1)^2 = t_1^2 + t_2^2 - 2(t_1 + t_2) + 2 = \\ = (t_1 + t_2)^2 - 2(t_1 + t_2) + 2 - 2t_1 t_2 = 4k^2 - 6k + 2.$$

Мы получили относительно k уравнение

$$8k^2 - 8k = 4k^2 - 6k + 2,$$

которое имеет единственный отрицательный корень $k = -\frac{1}{2}$. Для нахождения площади правильного треугольника MAB подставим найденное значение k в выражение для AB^2. Получим $AB^2 = 6$, и, следовательно, площадь $S_{MAB} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Задача 21.

Найдите уравнение прямой, касающейся графика функции $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 2$ в двух точках.

Решение.

Заметим, что $f(x) - (x - 2) = x^2(x - 1)^2$. Оказывается, если многочлен $f(x)$ представляется в виде

$$f(x) = (x - a)^2 g(x) + l(x),$$

где $l(x)$ — линейная функция, а $g(x)$ — произвольный многочлен, то прямая $y = l(x)$ является касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой a. Действительно, в этом случае $f(a) = l(a)$, $f'(a) = l'(a)$, так что прямая $y = l(x)$ проходит через точку $(a; f(a))$ имеет угловой коэффициент $f'(a)$. В нашем случае отсюда сразу же следует, что прямая $y = l(x)$ касается графика данной функции в двух точках ($a_1 = 0$ и $a_2 = 1$) и $l(x) = x - 2$.

Итак, уравнение искомой касательной $y = x - 2$.

Задача 22.

Даны параболы $y = x^2$ и $y = x^2 + m$ $(m > 0)$. Доказать, что хорда первой параболы, касающаяся второй параболы, делится точкой касания пополам.

Решение.

Пусть прямая l касается параболы $y = x^2 + m$ в точке $M_0(x_0;\ y_0)$. Уравнение касательной l имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

где $k = f'(x_0) = 2x_0$ и $y_0 = x_0^2 + m$.

Выполнив подстановку, получим: $y = 2x_0x - x_0^2 + m$.

Обозначим через $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$ точки пересечения прямой l с параболой $y = x^2$. Координаты этих точек являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} y = 2x_0 x - x_0^2 + m, \\ y = x^2, \end{cases} \qquad x^2 - 2x_0 x + x_0^2 - m = 0,$$

или (по теореме Виета) $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, что доказывает утверждение задачи.

13. ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ

Задача 1.

При каких значениях параметра a функция

$$f(x) = \frac{ax^3}{3} - (a-1)x^2 + 2x + 5$$

возрастает во всей области определения?

Решение.

Область определения функции — множество всех действительных чисел.

$$f'(x) = ax^2 - 2(a-1)x + 2.$$

Чтобы функция монотонно возрастала, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $f'(x) \geqslant 0$ при $x \in R$. Это в свою очередь, значит, что выполняется система неравенств

$$\begin{cases} a > 0, \\ D \leqslant 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a > 0, \\ 4(a-1)^2 - 8a \leqslant 0, \end{cases} \text{ или}$$

$$2 - \sqrt{3} \leqslant a \leqslant 2 + \sqrt{3}.$$

Ответ: $2 - \sqrt{3} \leqslant a \leqslant 2 + \sqrt{3}$.

Задача 2.

Найти все значения $a > 0$, при каждом из которых неравенство $\ln(1+x) \geqslant x - ax^2$ выполняется при всех неотрицательных значениях x.

Решение.

Рассмотрим на интервале $(-1; \infty)$ непрерывную функцию

$$f(x) = \ln(1+x) + ax^2 - ax.$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} + 2ax - 1 = \frac{2ax^2 + (2a-1)x}{x+1}.$$

Если $2a - 1 \geqslant 0$, то $f'(x) > 0$ при $x > 0$. Поэтому функция $f(x)$ будет возрастающей на промежутке $[0; \infty)$, следовательно, в этом случае $f(x) > f(0) = 0$ при любом $x > 0$.

Пусть $2a - 1 < 0$ и $a > 0$. $f'(x)$ обращается в нуль в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = \dfrac{1-2a}{2a}$, причем в точке $x = 0$ функция $f'(x)$ меняет знак с плюс на минус. Следовательно, точка $x = 0$ является точкой локального максимума функции $f(x)$. Кроме того, при достаточно малых положительных значениях x выполняется неравенство $f(x) < f(0) = 0$.

Таким образом, условию задачи удовлетворяют все числа $a \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Задача 3.

При каких значениях параметра a функция

$$y = 3(a+1)x^5 - 20x^3 + 15(a+2)x - 4$$

монотонна на множестве R?

Решение.

$$y'(x) = 15((a-1)x^4 - 4x^2 + (a+2)).$$

Условию задачи удовлетворяют те значения a, для которых равенство $(a-1)z^2 - 4z + (a+2) = 0$ или не имеет решений, или имеет положительные решения. Это будет тогда, когда a удовлетворяет неравенство $4(a-1)(a+2) < 0$ или систему

$$\begin{cases} \dfrac{4}{a-1} < 0, \\ \dfrac{a+2}{a-1} > 0. \end{cases}$$

Решая систему, найдем ответ.

Ответ: $a \in\ ]-\infty;\ -2] \cup [2;\ \infty[$.

Задача 4.

При каких значениях параметра c функция $f(x)$ непрерывна во всех точках, где она определена?

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{25 - x^2}, & \text{если } x < 4, \\ \dfrac{c}{x}, & \text{если } x \geqslant 4, \end{cases} \qquad \text{т.е.}$$

Решение.

1) При $x = 4$ $f(x) = 3$. Таким образом, $\frac{c}{4} = 3$, $c = 12$.

Ответ: $c = 12$.

Задача 5.

Какому условию должны удовлетворять параметры a и b, чтобы функция

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{при } x \leqslant 1, \\ ax^2 + bx & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

была непрерывной?

Решение.

Вычислим левый и правый предел данной функции в точке $x = 1$. Имеем

$$\lim_{x \to 1-0} (x - 1) = 0; \quad \lim_{x \to 1+0} (ax^2 + bx) = a + b.$$

Поскольку данная функция в точке $x = 1$ непрерывна слева и $f(1) = 0$, то для ее непрерывности необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $a + b = 0$.

Ответ: $a + b = 0$.

Задача 6.

При каких значениях параметра a функция

$$y = \sin x - a \sin 2x - \frac{1}{3} \sin 3x + 2ax$$

возрастает на множестве R?

Решение.

Функция возрастает на множестве R, если

$$y'(x) = 4 \sin^2 x \, (a + \cos x) \geqslant 0$$

для всех действительных x, т.е. при $a \geqslant 1$.

Ответ: $a \geqslant 1$.

Задача 7.

При каких значениях параметра a функция

$$y = \frac{1}{3}\sin^3 x - \sin x\,(a + \cos x) + (1 - 2a)\,x - 2$$

убывает на множестве R?

Ответ: $a \geqslant 1$.

Задача 8.

Для каких значений параметра a функция

$$y = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) \text{ — нечетная?}$$

Решение.

Имеем

$$\ln\left(-x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) = -\ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right),$$

$$x^2 - a^2 - x^2 = 1; \quad a = \pm 1$$

Ответ: $a = \pm 1$.

Задача 9.

Для каких значений параметра a функция $y = \ln\dfrac{a^2 - x}{4 - x}$ — нечетная?

Ответ: $a = \pm 2$.

Задача 10.

Дана функция $f(x) = (3 - 5a)\,x - ax^3$.

Найдите множество всех значений параметра a, при которых равенство $f'(x) = 0$ имеет решение7

Решение.

$$f'(x) = 3 - 5a - 3ax^2.$$

Если $f'(x) = 0$, то при $a = 0$ равенство $3ax^2 + 5a - 3 = 0$ — решений не имеет.

Если $a \neq 0$, то $x^2 = \dfrac{3 - 5a}{3}$ и $0 < a < \dfrac{3}{5}$.

Ответ: $\left]0; \dfrac{3}{5}\right[$.

Задача 11.

Найдите все значения постоянной величины a, при которых производная функции $y = e^{ax^3+3x^2+x}$ принимает только положительные значения во всей области определения данной функции.

Решение.

$$y' = e^{ax^3+3x^2+x}(ax^3 + 3x^2 + x)' =$$
$$= e^{ax^3+3x^2+x}(3ax^2 + 6x + 1).$$

Поскольку $e^{ax^3+3x^2+x} > 0$ для произвольного $x \in R$, то знак y' совпадает со знаком множителя $3ax^2 + 6x + 1$.

Тут $x \in R$, если $3a > 0$ и $D = 9 - 3a < 0$, откуда следует, что $a > 3$.

Ответ: $]3;\ \infty[$.

Задача 12.

Многочлен $P(x) = ax^2 + bx + 4$ принимает только положительные значения при произвольном действительном значении x. Найти все целые значения параметров a и b, при которых $P'(1) = 4$.

Решение.

$$P'(x) = 2ax + b,\quad P'(1) = 2a + b.$$

Поскольку $P(x) > 0$ при произвольном $x \in R$, то дискриминант трехчлена $P(x)$ отрицательный и $a > 0$.

Имеем систему

$$\begin{cases} D < 0, \\ 2a + b = 4, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} b^2 - 16a < 0, \\ b = 4 - 2a. \end{cases}$$

Подставляя в неравенство системы значение b, имеем

$$(4 - 2a)^2 - 16a < 0,\quad a^2 - 8a + 4 < 0.$$
$$4 - 2\sqrt{3} < a < 4 + 2\sqrt{3}.$$

Поскольку a — целое положительное, то

$a \in [1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7]$, соответственно

$b \in [2;\ 0;\ -2;\ -4;\ -6;\ -8]$.

Ответ: $(1;\ 2);\ (2;\ 0);\ (3;\ -2);\ (4;\ 4);$
$(5;\ -6);\ (6;\ -8);\ (7;\ -10)$.

Задача 13.

При каких значениях a и c все экстремумы функции $f(x) = 2a^2x^2 + 7ax^2 + 4x + c$ неположительные и максимум находится в точке $x = -\frac{1}{3}$?

Решение.

$f'(x) = 6a^2x^2 + 14ax + 4$, откуда при $a > 0$ точка максимума $x = -\frac{2}{a} = -\frac{1}{3}$, т.е. $a = 6$, при $a < 0$ точка максимума $x = -\frac{1}{3a}$ не может быть равна $\left(-\frac{1}{3}\right)$. Следовательно, остается решить неравенство

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) \leqslant 0, \text{ где } f(x) = 72x^3 + 42x^2 + 4x + c,$$

отсюда $c \leqslant -\frac{2}{3}$.

Задача 14.

При каких значениях a уравнение $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} = a$ имеет решения?

Решение.

Заданное уравнение имеет область определения — множество чисел $\left[2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$.

Рассмотрим функцию $y = \sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}$.

Если найти область значения этой функции, то этим самым будут найдены значения a, при которых заданное уравнение имеет решение.

Вычислим $y' = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} - \frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$.

Корнями уравнения $\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} - \dfrac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}} = 0$ являются числа $x = \dfrac{\pi}{4} + n\pi,\ \ n \in Z.$

Поскольку функция $y = \sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}$ периодическая с периодом 2π, то для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции достаточно вычислить значение функции в точках $x_2 = \dfrac{\pi}{4}$; $x_3 = \dfrac{\pi}{3}$. Получим $y(0) = 1$; $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2\sqrt{2}}$. Следовательно, $1 \leqslant \sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x} \leqslant \sqrt{2\sqrt{2}}$ при всех

$$x \in \left[2\pi k,\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right],\quad k \in Z.$$

Таким образом, заданное уравнение имеет решение при $a \in [1;\ \sqrt{2\sqrt{2}}\,]$.

Ответ: $a \in [1;\ \sqrt{2\sqrt{2}}\,]$.

Задача 15.

Найти все значения a, при которых уравнение

$$f'(x) = 0, \text{ где } f(x) = 1 - \cos x + \frac{a-1}{a+1}x$$

имеет на отрезке $[100\pi;\ 101\pi]$ не больше одного корня.

Решение.

Найдем производную $f(x)$:

$$f'(x) = \sin x + \frac{a-1}{a+1}$$

и приравняем ее к нулю:

$$\sin x + \frac{a-1}{a+1} = 0. \qquad (1)$$

Функция $y = f'(x)$ на промежутке $[100\pi;\ 100{,}5\pi]$ возрастает, причем $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$, а на промежутке $[100{,}5\pi;\ 101\pi]$ убывает, причем $0 \leqslant \sin x < 1$. Поэтому уравнение (1) имеет единственное решение или не имеет решений, если выполняется совокупность неравенств:

$$\frac{1-a}{1+a} \geqslant 1; \quad \frac{1-a}{1+a} < 0.$$

Решением первого неравенства будут значения $a \in (-1; 0]$, второго — $a \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$.

Ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (1; \infty)$.

Задача 16.

Решить уравнение $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-1} = a$.

Решение.

Исследуем функцию $y = \sqrt{2x+1} + \sqrt{x-1}$ на экстремум и монотонность.

Область определения — промежуток $[1; \infty[$,

$$y' = \frac{2\sqrt{x-1} - \sqrt{2x+1}}{2\sqrt{(x-1)(2x+1)}}.$$

При $x = \frac{5}{2}$, $y' = 0$ — точка минимума $\left(\text{при } x = \frac{5}{2}\right)$, а поскольку она единственная, то $y\left(\frac{5}{2}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$ — наименьшее значение функции. Следовательно, при $a < \sqrt{\frac{3}{2}}$ уравнение не имеет решений.

Поскольку $y(1) = \sqrt{3}$, то на отрезке $\left[1; \frac{5}{2}\right]$ функция убывает от $\sqrt{3}$ до $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

На промежутке $\left[\frac{5}{2}; \infty\right[$ функция бесконечно возрастает от значения $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Поэтому при $a = \sqrt{\frac{3}{2}}$ уравнение имеет решение: $x = \frac{5}{2}$.

При $\sqrt{\frac{3}{2}} < a \leqslant \sqrt{3}$ — два решения

$$x = 3a^2 \pm 2a\sqrt{2a^2 - 3}.$$

При $a \geqslant \sqrt{3}$ — одно решение $x = 3a^2 - 2 + 2a\sqrt{a^2 - 3}$.

Если $a \geqslant 1$, то уравнение имеет одно решение

$$x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2a + 1}).$$

Если $a < 1$, то уравнение решений не имеет.

Задача 17.

Найти критические точки функции

$$f(x) = 0{,}5\, e^{2x} + (1 - a)\, e^x - ax + 2.$$

Решение.

Функция f определена и дифференцирована при всех действительных x, ее критические точки будут корнями квадратного относительно e^x уравнения:

$$e^{2x} + (1 - a)\, e^x - a = 0,$$

откуда $e^x = -\frac{1 - a}{2} \pm \sqrt{\frac{(1 - a)^2}{4}} + a = -\frac{1 - a}{2} \pm \frac{|1 + a|}{2}$.

Но $|1 + a| = \begin{cases} 1 + a, & \text{если } a \geqslant -1, \\ -(1 + a), & \text{если } a < -1. \end{cases}$

Если $a \geqslant -1$, то $e^x = -\frac{1 - a}{2} \pm \frac{1 + a}{2}$; $e^x = a$; $e^x = -1$.

Но $e^x > 0$ $(x \in R)$. Поэтому имеет смысл только один из корней $e^x = a$, причем только для положительных a.

Решая это уравнение, получим

$$x = \ln a \quad (a > 0).$$

Если $a < -1$, то $e^x = -\frac{1 - a}{2} \pm \frac{1 + a}{2}$, $e^x = -1$, $e^x = a$.

Поскольку $a < -1$, то решением каждого из этих уравнений будет пустое множество. Если $a \in\ ]0;\ \infty[$, то функция

f имеет единственную критическую точку $x = \ln a$. Если $a \notin \,]0;\ \infty[$, то функция критических точек не имеет.

Задача 18.

При каких действительных a и b все экстремумы функции $f(x) = \dfrac{5a^2x^3}{3} + 2ax^2 - 9x + b$ положительны и максимумы находятся в точке $x_0 = -\dfrac{5}{9}$?

Решение.

Найдем экстремальные точки: $x_1 = -\dfrac{9}{5a}$; $x_2 = \dfrac{1}{a}$.

1) Если $a < 0$, то $x_2 < x_1$ и $x_2 = x_0$, т.е. $\dfrac{1}{a} = -\dfrac{5}{9}$, $a = -\dfrac{9}{5}$. Тогда $x_1 = -\dfrac{9}{5a} = 1$. В этой точке $f(x)$ имеет локальный минимум, который должен быть больше нуля.

Имеем $f(1) = -\dfrac{36}{5} + b > 0$, т.е. $b > \dfrac{36}{5}$.

2) Если $a > 0$, то $x_1 < x_2$ и $x_1 = x_0$, т.е. $-\dfrac{9}{5a} = -\dfrac{5}{9}$, $a = \dfrac{81}{25}$. Тогда точка минимума $x_2 = \dfrac{1}{a} = \dfrac{25}{81}$. В этой точке $f\left(\dfrac{25}{81}\right) = -\dfrac{400}{243} + b > 0$, т.е. $b > \dfrac{400}{243}$.

Следовательно, экстремумы будут положительны при $a = -\dfrac{9}{5}$ и $b \in \left]\dfrac{36}{5};\ \infty\right[$ и при $a = \dfrac{81}{25}$ $b \in \left[\dfrac{400}{243},\ \infty\right[$.

Задача 19.

При каком значении $a > 0$ касательные к параболе $y = ax^2$, которые проходят через точку $A\,(0;\ -1)$ перпендикулярны?

Решение.

Уравнениями прямых, которые касаются кривой $y = ax^2$ в точках $(c;\ ac^2)$ и $(-c;\ ac^2)$ являются:

$$y = ac^2 + 2ac(x - c) \text{ и } y = ac^2 - 2ac(x + c)$$

соответственно ($c > 0$). Подставляя в это уравнение $x = 0$, $y = -1$, получим $ac^2 = 1$. Прямые будут перпендикулярны, если $2ac = 1$. Таким образом, получим систему

$$\begin{cases} ac^2 = 1, \\ 2ac = 1, \end{cases}$$

решая которую, получим $a = \frac{1}{4}$, $c = 2$.

Задача 20.

При каких значениях a кривая $y = 3x^3 - a^2x$ имеет две общие точки с прямой $y = (2a + 1)x - 2(a + 1)$?

Решение.

Кубическая парабола имеет с прямой тогда и только тогда две общие точки, когда одна из них является точкой касания. Поэтому, приравнивая угловые коэффициенты касательных, получим уравнения для абсциссы точки касания: $9x^2 - a^2 = 2a + 1$, т.е.

$$x = -\frac{1}{3}(a + 1) \text{ или } x = \frac{1}{3}(a + 1).$$

Далее, используя равенство значений функции при найденном x, получим уравнение для a

$$(a + 1)^2 = 9, \text{ т.е. } a = -2;\ a = -4.$$

Задача 21.

При каком значении параметра a прямая $y = \frac{x}{2}$ касается кривой $y = \sqrt{x} - a$?

Решение.

Если прямая $y = \frac{x}{2}$ касается кривой $y = \sqrt{x} - a$ в точке с абсциссой x, то для x получим уравнение

$$\frac{x}{2} = \sqrt{x} - a, \text{ откуда } x = 1.$$

Значит, $y = \frac{1}{2}$, следовательно, $a = \frac{1}{2}$.

Задача 22.

При каком a парабола $y_1 = ax^2$ касается кривой $y_2 = \ln x$?

Решение.

Найдем точки, в которых касательные к кривой имеют одинаковые углы наклона, это есть точки, где равные значения производных $y_1'(x) = 2ax$, $y_2'(x) = \frac{1}{x}$, $y_2(x) = \frac{1}{x}$.

Из равенства $2ax = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$ получаем

$$x^2 = \frac{1}{a} \quad \text{и} \quad x = \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

Кроме этого, в найденной точке должны совпадать ординаты общих кривых $a \cdot \frac{1}{2a} = \ln \frac{1}{\sqrt{2a}}$, откуда $\ln \frac{1}{\sqrt{2a}} = \frac{1}{2}$;

$$\frac{1}{\sqrt{2a}} = \sqrt{10}; \quad 2a = \frac{1}{10}; \quad a = \frac{1}{20}.$$

Ответ: $a = \frac{1}{20}$.

Глава III. ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ

14. ОБ ОДНОМ ЗАМЕЧАТЕЛЬНОМ ТОЖДЕСТВЕ

Речь идет об известном тождестве:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc =$$
$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc). \qquad (1)$$

Обычно это тождество доказывают так:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3abc -$$
$$- 3a^2b - 3ab^2 = (a + b)^3 + c^3 - 3ab\,(a + b + c) =$$
$$= (a + b + c)\,[(a + b)^2 - (a + b)\,c + c\,] - 3ab\,(a + b + c) =$$
$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc).$$

Сделаем замену: $a = \sqrt[3]{x}$, $b = \sqrt[3]{y}$, $c = \sqrt[3]{z}$. Тогда (1) будет иметь вид:

$$x + y + z - 3\sqrt[3]{xyz} = (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{z^2} -$$
$$- \sqrt[3]{xy} - \sqrt[3]{yz} - \sqrt[3]{zx}). \qquad (2)$$

В дальнейшем вторые сомножители в формулах (1) и (2) будем заменять буквами соответственно M_1 и M_2 и будем пользоваться соотношением:

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)\,M_1 + 3abc. \qquad (3)$$

При этом легко доказать, что $M_1 \geqslant 0$, $M_2 \geqslant 0$.

С помощью тождества (3) можно решить различные задачи. Начнем с тождественных преобразований.

Задача 1.

Разложить на множители:

$$A = (x^2 + y^2)^3 + (z^2 - x^2)^3 - (y^2 + z^2)^3.$$

Решение.

Воспользуемся формулой (3):

$$A = (x^2 + y^2 + z^2 - x^2 - y^2 - z^2)\,M_1 +$$
$$+ 3\,(x^2 + y^2)(z^2 - x^2)(-y^2 - z^2).$$

Ясно, что первое слагаемое равно нулю. Итак,

$$A = 3\,(x^2 + y^2)(z^2 - x^2)(-y^2 - z^2)$$

Задача 2.

Уничтожить иррациональность в знаменателе дроби

$$A = \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}}.$$

Решение.

Воспользуемся тождеством (2) и умножая числитель и знаменатель на M_2, получим:

$$A = \frac{M_2}{x + y + z - 3\sqrt[3]{xyz}} = \frac{M_2}{\sqrt[3]{(x + y + z)^3} - \sqrt[3]{37xyz}} \quad \text{и т.д.}$$

Ответ: $A = \dfrac{M_2 M_3}{(x + y + z)^3 - 27xyz}$, где M_3 — неполный квадрат чисел $\sqrt[3]{(x + y + z)^3}$ и $\sqrt[3]{27xyz}$.

Задача 3.

Доказать (самостоятельно), что

$$(a + b + c)(a + bz + cz^2)(a + bz^2 + cz) = a^3 + b^3 + c^3,$$

где комплексное число z — корень уравнения $z^3 = 1$.

Задача 4.

Решить уравнение $2x^3 - 6x + 5 = 0$. (1)

Решение.

Уравнение (1) запишем в виде:

$$x^3 - 3x + 2 + \frac{1}{2} = x^3 + (\sqrt[3]{2})^3 + \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^3 - 3x\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2}}. \quad (2)$$

Сравним (2) и (1). Ясно, что левую часть уравнения (2) можно разложить на множители:

$$\left(x + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right) M_1 = 0, \text{ то есть } x_1 = -\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}}.$$

Второе уравнение — квадратное, имеющее комплексные корни.

Задача 5.

(Решить самостоятельно).

При каких значениях m уравнение

$$x^3 - 3x + m = 0$$

будет иметь один действительный корень?

Ответ: при $m = k + \frac{1}{k}$, где k — любое натуральное число, не меньше 2.

Задача 6.

Решить уравнение:

1) $3x^3 - 9x + 10 = 0$;

2) $x^3 + 3ax^2 + 3(a^2 - bc)x + a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Рассмотрим уравнение вида

$$\sqrt[3]{f_1(x)} + \sqrt[3]{f_2(x)} + \sqrt[3]{f_3(x)} = 0. \qquad (1')$$

Сделаем замену:

$$\sqrt[3]{f_1(x)} = y_1; \quad \sqrt[3]{f_2(x)} = y_2; \quad \sqrt[3]{f_3(x)} = y_3, \qquad (2')$$

тогда (1′) будет иметь вид: $y_1 + y_2 = -y_3$. Возведем в куб:

$$y_1^3 + y_2^3 + 3y_1y_2(-y_3) = -y_3^3, \text{ или}$$

$$y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 - 3y_1y_2y_3 = 0;$$

$$(y_1 + y_2 + y_3)((y_1 - y_2)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (y_3 - y_1)^2) = 0.$$

Хотя бы один из сомножителей левой части равен нулю:

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0, \qquad (1'')$$

или

$$y_1 = y_2 = y_3. \qquad (2'')$$

Уравнения (1″) и (2″) не эквивалентны. Таким образом, можно найти посторонние корни уравнения (1′). Это делается так: решаем уравнение $f_1(x) = f_2(x)$. Пусть $x = \alpha$ — корень этого уравнения. Если $f_1(\alpha) = f_3(\alpha)$, то α — посторонний корень.

Для решения уравнения (1′) рекомендуем пользоваться соотношением

$$(f_1(x) + f_2(x) + f_3(x))^3 = 27 f_1(x) f_2(x) f_3(x). \qquad (3'')$$

Его легко доказать, умножив две части (1′) на M_2, а потом возвести в куб.

Задача 7.

Решить уравнение: $\sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{1-3x} = 0$.

Решение.

Проверим, есть ли посторонние корни:

$$2x = x - 1,\ x = -1.$$

Таким образом, посторонних корней нет.

Воспользовавшись соотношением (3″), получим:

$$x(x-1)(1-3x) = 0; \quad x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = \frac{1}{3}.$$

Для самостоятельного решения.

1) $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1}$;

2) $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{3x}$.

С помощью тождества (1) решим задачи:

Задача 8.

Решить в целых числах уравнение: $x^3 - y^3 - 3xy = 3$.

Решение.

Запишем уравнение в виде:

$$x^3 + y^3 + 1 - 3xy \cdot 1 = 4, \text{ или}$$

$$(x + y + 1)(x^2 + y^2 + 1 - xy - x - y) = 4, \text{ или}$$

$$(x + y + 1) \cdot \frac{1}{2}((x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2) = 4.$$

Таким образом, возможны системы:

$$\begin{cases} x + y + 1 = 2, \\ x^2 + y^2 + 1 - xy - x - y = 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + 1 = 4, \\ x^2 + y^2 + 1 - xy - x - y = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + 1 = 1, \\ x^2 + y^2 + 1 - xy - x - y = 4. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 1,\ y_1 = 2;\quad x_2 = 2,\ y_2 = 1;\quad x_{3,4} = \pm 1,\ y_{3,4} = \pm 1.$

Задача 9.

Доказать, что для $m = 1$, $m = 2$ уравнение

$$x^3 + y^3 + z^3 = mxyz$$

не имеет решения в натуральных числах. Найти натуральные числа x, y, z для $m = 3$.

Ответ: $x = y = 3$, z — любое натуральное число.

Задача 10.

Решить уравнение: $\cos^{12} x + \sin^6 x\,(1 + \cos^2 x)^3 = 1.$

Решение.

Заданное уравнение запишем в виде:

$$(\cos^4 x)^3 + (\sin^2 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x)^3 -$$

$$- (\cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \sin^2 x) = 0.$$

Известно, что $(a + b)^3 - a^3 - b^3 = 3ab\,(a + b).$
В этом случае

$$a + b = 1;\ a = \cos^4 x;\ b = \sin^2 x\,(1 + \cos^2 x).$$

Отсюда уравнение примет вид:

$$3 \cos^4 x \sin^2 x\,(1 + \cos^2 x) = 0.$$

$$x_1 = k\pi;\quad x_2 = \frac{\pi}{2}(2l + 1);\quad x_{1,2} = \frac{\pi}{2}n,\quad k, n, l \in Z.$$

Тождество (2) применяется при доказательстве неравенств.

Задача 11.

Доказать неравенство $\dfrac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz}$ для x, y, $z \geqslant 0$.

Решение.

Если учесть, что $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc$, то заданное неравенство очевидно (см. форму.лу (2)).

Задача 12.

Доказать неравенство $(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)^3 \leqslant (a^2 + b^2 + c^2)^3$.

Доказательство.

Обозначим $a^2 + b^2 + c^2 = A$; $ab + ac + bc = B$.

Понятно, что $A \geqslant B$. Теперь заданное неравенство будет иметь вид:

$$(A + 2B)(A - B)^2 \leqslant A^3; \ (A + 2B)(A^2 + B^2 - 2AB) \leqslant A^3,$$

откуда $2B \leqslant 3A$, что очевидно, а, значит, заданное неравенство доказано.

Задача 13.

Решить уравнение:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 3, \text{ если } x, y, z > 0.$$

Ответ: $x = y = z$ — любое положительное число.

Задача 14.

Доказать (самостоятельно):

$$(a^3 + b^3 + c^3)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant 3\,[(a + b - c)^2 + (a + c - b)^2 +$$

$$+ (b + c - a)^2] \geqslant 3\,(a^2 + b^2 + c^2) \geqslant (a + b + c)^2, \text{ где } a, b, c > 0.$$

Задача 15.

Построить изображение кривой, которую задано уравнением $x^3 + 3xy + y^3 - 1 = 0$ в прямоугольной декартовой системе координат.

Решение.

$$x^3 + 3xy + y^3 - 1 = \frac{1}{2}(x + y - 1)\left((x - y)^2 + (x + 1)^2 + (y + 1)^2\right),$$

и заданное уравнение разложится на два:

1°) $x + y - 1 = 0$;

2°) $(x - y)^2 + (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 0$,

то есть $x = y = -1$.

Получили прямую $y = -x + 1$ и точку $M(-1;\ 1)$.

Задача 16.

Доказать, что когда x_1 и x_2 — корни уравнения

$$x^2 - cx - c = 0,$$

где c — действительное число ($c \neq 0$), то $x_1^3 + x_2^3 + x_1^3 x_2^3 > 0$.

Доказательство.

$$x_1^3 + x_2^3 + x_1^3 x_2^3 = (x_1 + x_2 + x_1 x_2)\, M_1 + 3x_1^2 x_2^2.$$

Поскольку $x_1 + x_2 = c$, а $x_1 \cdot x_2 = -c$, то заданное неравенство доказано.

Задача 17.

Доказать, что сумма кубов цифр трехзначного числа делится на 3, если сумма цифр этого числа делится на 3.

Решение.

Пусть $a_1 a_2 a_3$ — заданное число. Надо доказать, что

$$(a_1^3 + a_2^3 + a_3^3) \vdots 3.$$

Известно, что

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 = (a_1 + a_2 + a_3)\, M_1 + 3a_1 a_2 a_3 = 0.$$

Применяя признак делимости на 3, доказываем утверждение задачи.

Задача 18.

Доказать неравенство

$$(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)^2 \leqslant (a^2 + b^2 + c^2)^3.$$

Доказательство.

Обозначим

$$a^2 + b^2 + c^2 = p; \quad ab + bc + ac = q; \quad a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = m.$$

Легко проверяются соотношения $p - q \geqslant 0$ и

$$m^2 = (a + b + c)^2 (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)^2 =$$

$$= (p + 2q)(p - q)^2.$$

Тогда $p^3 - m^2 = p^3 - (p + 2q)(p - q^2) =$

$$= 3pq - 2q^3 = q^2 (3p - 2q) = q^2 (2p - 2q + p) > 0,$$

так как $p - q \geqslant 0$, $p \geqslant 0$.

15. УРАВНЕНИЯ И ОБРАТНЫЕ ФУНКЦИИ

Пускай функция $f(x)$ определена, непрерывна и монотонна на множестве X ($X \subset R$), причем множество значений этой функции Y. Тогда существует функция $g(x)$, обратная $f(x)$, область определения которой Y, область значений X, которая непрерывна и монотонна (с тем же, что и $f(x)$, направлением монотонности).

Задача-теорема 1.

Доказать, что уравнения $f(x) = g(x)$ и $f(x) = x$ равносильны, если $f(x)$ возрастает, и уравнение $f(x) = g(x)$ является следствием уравнения $f(x) = x$, если $f(x)$ убывает.

Доказательство.

Пусть x_0 — корень уравнения $f(x) = x$, т.е.

$$x_0 = f(x_0).$$

Тогда $x_0 \in X$. Но $f(x_0) \in Y$, а значит, $x_0 \in Y$.

В таком случае x_0 и $f(x_0)$ попадают в область определения функции g, значит, $g(x_0) = g(f(x_0))$.

Но $g(f(x_0)) = x_0$, а $x_0 = f(x_0)$, итак, $g(x_0) = f(x_0)$.

Пусть теперь $f(x)$ возрастает, и $f(x_0) = g(x_0)$ (т.е. x_0 — корень уравнения $f(x) = g(x)$), тогда $x_0 \in X$; но и $g(x_0) \in X$, значит, $f(x_0) \in X$. В таком случае $f(x_0)$ и $g(x_0)$ попадают в область определения функции f, значит,

$$f(f(x_0)) = f(g(x_0)) = x_0. \qquad (*)$$

Если $f(x_0) > x_0$, то, поскольку обе части неравенства попадают в область определения функции f, то, учитывая ее возрастание, имеем $f(f(x_0)) > f(x_0)$; но $f(x_0) > x_0$, откуда $f(f(x_0)) > x_0$, что противоречит (*).

Аналогично доказывается невозможность случая $f(x_0) < x_0$, итак, остается единственное: $f(x_0) = x_0$.

В дальнейшем через f и g будем обозначать взаимно-обратные функции.

Задача 2.

Решить уравнение $\frac{a}{x} = \frac{a}{x-b} - b$ $(a > 0)$.

Решение.

Очевидно, $x = 0$ не является решением данного уравнения. Пусть $f(x) = \frac{a}{x} + b$, тогда $x = \frac{a}{f(x) - b}$, и $g(x) = \frac{a}{x-b}$. Очевидно, данное в условии уравнение имеет степень не выше второй, следовательно, оно имеет не более двух корней.

Поскольку $f(x)$ монотонно убывает на промежутках $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$, то на этих промежутках, согласно задаче-теореме 1, оно является следствием уравнения $f(x) = x$. Это уравнение имеет вид $\frac{a}{x} + b = x$, или

$$x^2 - bx - a = 0. \qquad (*)$$

Поскольку $a > 0$, то уравнение $(*)$, очевидно, имеет два различных, не равных нулю корня

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + a}\ .$$

Поскольку x_1 и x_2 являются решениями и квадратного уравнения-следствия $\frac{a}{x} = \frac{a}{x-b} - b$, то других корней это уравнение не имеет, откуда ответ: $x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - a}$.

Задача 3.

Решить уравнение $\sqrt[3]{x-9} = (x-3)^3 + 6$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$(x-3)^3 + 9 = \sqrt[3]{x-9} + 3.$$

Тогда $f = (x-3)^3 + 9$, $x - 3 = \sqrt[3]{f-9}$, откуда

$$x = \sqrt[3]{f-9} + 3,\ g = \sqrt[3]{x-9} + 3.$$

Имеем $f(x) = g(x)$, $f(x)$ монотонно возрастает на R, значит, можно применить задачу-теорему 1:

$$(x-3)^3 + 9 = x, \text{ или } x^3 - 9x^2 + 26x - 18 = 0.$$

Поскольку

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 18 = (x-1)(x^2 - 8x + 18), \text{ то } x = 1.$$

Задача 4.

Решить уравнение $\sqrt[3]{2-x} = 2 - x^3$.

Решение.

Пусть $f(x) = 2 - x^3$. Найдем функцию $g(x)$, обратную $f(x)$:

$$f(x) = 2 - x^3,\ x^3 = 2 - f(x),\ x = \sqrt[3]{2 - f(x)}, \text{ значит,}$$

$$g(x) = \sqrt[3]{2-x} \quad \text{и} \quad f(x) = g(x),$$

следовательно по задаче-теореме 1

$$2 - x^3 = x;\ (x-1)(x^2 + x + 2) = 0,\ x = 1.$$

Задача 5.

Решить уравнение $x^2 - x + 1 = \frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}}$.

Решение.

Очевидно, $x \geqslant \frac{3}{4}$. Пусть $f = x^2 - x + 1$. При $x \geqslant \frac{3}{4}$ $f(x)$, очевидно, возрастает. Найдем g.

$$x^2 - x + 1 - f = 0, \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1-f)}}{2},$$

$$2x = 1 + \sqrt{4f - 3}, \quad x = \frac{1}{2} + \sqrt{f - \frac{3}{4}},$$

значит, $g = \frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}}$. Имеем $g(x) = f(x)$, т.е. можно применить задачу-теорему 1: $x^2 - x + 1 = x$, $x = 1$.

Задача 6.

Решить уравнение $x = \sqrt{\sqrt{x} - \frac{1}{4}} - \frac{1}{4}$.

Решение.

Запишем уравнение в виде: $x + \frac{1}{4} = \sqrt{\sqrt{x} - \frac{1}{4}}$. Очевидно, что $x \geqslant 0$. Тогда $x + \frac{1}{4} > 0$, и $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = \sqrt{x} - \frac{1}{4}$.

Пусть $f = \left(x + \frac{1}{4}\right)^2$, тогда $g = \sqrt{x} - \frac{1}{4}$, значит, заданное уравнение эквивалентно уравнению

$$\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = x, \text{ откуда } x = \frac{1}{4}.$$

Задача 7.

Решить уравнение $x = 1 - e^{1-e^x}$ $(x \geqslant 0)$.

Решение.

Запишем уравнение в виде $1 - x = e^{1-e^x}$, или

$$\ln(1 - x) = 1 - e^x.$$

Если $f = \ln(1 - x)$, то $g = 1 - e^x$, отсюда

$$\ln(1 - x) = x, \quad 1 - x = e^x, \quad x = 0.$$

Задача 8.

Решить уравнение $x = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{x}}$.

Решение.

Очевидно, $x \geqslant 2$. Запишем уравнение в виде

$$(x - 2)^2 + a + \sqrt{x}, \text{ тогда}$$

$$f = (x - 2)^2, \quad g = 2 + \sqrt{x}.$$

Поскольку $f(x)$ возрастает при $x \geqslant 2$, применим задачу-теорему 1. Тогда

$$2 + \sqrt{x} = x, \quad \sqrt{x} = \frac{1 \pm 3}{2}, \text{ откуда } x = 4.$$

Задача 9.

Решить уравнение $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x - 1}$.

Решение.

Пусть $\frac{x^3 + 1}{2} = f$, тогда $g = \sqrt[3]{2x - 1}$.

Решаем уравнение, эквивалентное данному:

$$\frac{x^3 + 1}{2} = x, \quad \text{или} \quad x^3 - 2x + 1 = 0.$$

Поскольку $x^3 - 2x + 1 = (x - 1)(x^2 + x - 1)$, то

$$x_1 = 1, \; x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Задача 10.

Решить уравнение: $1 + \cos^6 x = 2\sqrt[3]{\cos 2x}$.

Решение.

Преобразуем уравнение: $1 + \cos^6 x = 2\sqrt[3]{2\cos^2 x - 1}$.

Обозначим $\cos^2 x = k$, тогда наше уравнение запишется так: $\frac{1 + k^3}{2} = \sqrt[3]{2k - 1}$.

Положим $f = \frac{1 + k^3}{2}$, тогда $k = \sqrt[3]{2f - 1}$, т.е. $g = \sqrt[3]{2k - 1}$. Имеем уравнение вида $f(k) = g(k)$, которое равносильно уравнению $f(k) = k$. Итак, имеем

$$\frac{1 + k^3}{2} = k; \quad k^3 - 2k + 1 = 0; \quad (k - 1)(k^2 + k - 1) = 0.$$

$$k_1 = 1; \quad k_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

($k_3 = \frac{-\sqrt{5} - 1}{2}$ не подходит, поскольку $k = \cos^2 x \geqslant 0$).

Итак, $\left[\begin{array}{l}\cos^2 x = 1,\\ \cos^2 x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2},\end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l}\sin^2 x = 0,\\ \cos x = \pm\, t,\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x = \pi n, \quad n \in \mathbf{Z},\\ x = \pi n \pm \arccos t, \quad \text{где} \quad t = \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}\,.\end{array}\right.$$

16. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

Задача 1.

Решить в целых числах уравнение $xy = x + y$.

Решение. *Первый способ.*

$x = \dfrac{y}{y-1}$, x будет целым, если

$$y - 1 = 1 \text{ или } y - 1 = -1.$$

Поэтому решениями будут пары чисел (0; 0) и (2; 2).

Второй способ.

Из условия следует, что $(x - 1)(y - 1) = 1$, откуда

$$\begin{cases} x - 1 = 1, \\ y - 1 = 1, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x - 1 = -1, \\ y - 1 = -1. \end{cases}$$

Задача 2.

Решить уравнение $x^2 - y^2 = 93$ в целых числах.

Решение.

$$(x + y)(x - y) = 93.$$

В целых числах равенство возможно, если

1) $\begin{cases} x + y = 1, \\ x - y = 93, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 93, \\ x - y = 1, \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = -1, \\ x - y = -93, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = -93, \\ x - y = -1, \end{cases}$

5) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 31, \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x + y = 31, \\ x - y = 3, \end{cases}$

7) $\begin{cases} x + y = -3, \\ x - y = -31, \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x + y = -31, \\ x - y = -3, \end{cases}$

Ответ: (47; 46); (47; 46); (−47; 46); (47; 46); (17; −14); (17; 14); (−17; 14); (−17; −14).

Задача 3.

Решить в целых числах уравнение $6x^2 + 5y^2 = 74$.

Решение.

$6x^2 - 24 = 50 - 5y^2$, или $6(x^2 - 4) = 5(10 - y^2)$, откуда

$$x^2 - 4 = 5u, \text{ т.е. } 4 + 5u \geqslant 0, \text{ откуда } u \geqslant -\frac{4}{5}.$$

Аналогично:

$$10 - y^2 = 6u, \text{ т.е. } 10 - 6u \geqslant 0, \ u \leqslant \frac{5}{3}.$$

Целое число u удовлетворяет неравенству

$$-\frac{4}{5} \leqslant u \leqslant \frac{5}{3}, \text{ значит, } u = 0 \text{ и } u = 1.$$

При $u = 0$, получим $10 = y^2$, где y — не целое, что неверно. Пусть $u = 1$, тогда $x^2 = 9$, $y^2 = 4$.

Ответ: $\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 2, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = -2, \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 = -3, \\ y_3 = 2, \end{cases}$ $\begin{cases} x_4 = -3, \\ y_4 = -2. \end{cases}$

Задача 4.

Решить в целых числах уравнение $3x^2 + 5y^2 = 345$.

Решение.

Так как 345 и $5y^2$ делятся на 5, то и $3x^2$ делится на 5, откуда следует, что $x = 5u$, где u — целое.

Аналогично $y = 3v$ для некоторого целого числа v. Уравнение принимает вид $5u^2 + 3v^2 = 23$. Следовательно, $u^2 \leqslant \frac{23}{5}$, $v^2 \leqslant \frac{23}{3}$, откуда $|u| \leqslant 2$, $|v| \leqslant 2$.

Перебором устанавливаем, что $|u| = 2$; $|v| = 1$.

Ответ: $\begin{cases} x_1 = 10, \\ y_1 = 3, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 10, \\ y_2 = -3, \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 = -10, \\ y_3 = 3, \end{cases}$ $\begin{cases} x_4 = -10, \\ y_4 = -3. \end{cases}$

Задача 5.

Решить в целых числах уравнение $x^3 + y^3 - 3xy = 2$.

Решение.

Если x и y оба нечетны или одно из них нечетно, то левая часть уравнения есть нечетное число, а правая — четное. Если же $x = 2m$ и $y = 2n$, то $8m^3 + 8n^3 - 12mn = 2$, т.е. $2(2m^3 + 2n^3 - 3mn) = 1$, что невозможно ни при каких целых m и n.

Задача 6.

Доказать, что уравнение $2x^2 - 5y^2 = 7$ не имеет решений в целых числах.

Доказательство.

Из уравнения видно, что y должен быть нечетным числом. Положив $y = 2z + 1$, получим $2x^2 - 20z^2 - 20z - 5 = 7$, или $x^2 - 10z^2 - 10z = 6$, откуда следует, что x есть четное число. Положим $x = 2u$. Тогда $2u^2 - 5z(z + 1) = 3$, что невозможно, так как $z(z + 1)$ есть четное число.

Задача 7.

Найти все положительные числа a, b, c, для которых

$$\frac{a}{2a + b + c} + \frac{b}{2b + c + a} + \frac{c}{2c + a + b} = \frac{3}{4}.$$

Решение.

Введем обозначения:

$$x = 2a + b + c,\ y = 2b + c + a,\ z = 2c + b + a.$$

Тогда $a + b + c = x - a = y - b = z - c$, и поскольку

$$x + y + z = 4(a + b + c) = 4x - 4a,$$

то $4a = 3x - y - z$, и сделав круговую перестановку переменных x, y, z, мы получим аналогичные выражения для b и c. После подстановки этих выражений в равенство оно примет вид

$$\frac{3x - y = z}{x} + \frac{3y - z - x}{y} + \frac{3z - x - y}{z} = 3,$$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{y}{z}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}=6.$$

Так как сумма взаимно обратных положительных чисел не меньше 2 и равна 2 только в случае их равенства, то $x=y=z$, а тогда $a=b=c$. Поэтому заданное равенство выполняется при любых равных положительных числах a, b, c.

Задача 8.

Решите в целых числах уравнение

$$(x^2+1)(y^2+1)=(x+y)^2+1.$$

Решение.

Выполним преобразование в левой и правой частях:

$$x^2y^2+x^2+y^2+1=x^2+2xy+y^2+1,$$

далее $xy(xy-2)=0$, откуда $xy=0$ или $xy=2$.

В первом случае $x=0$, $y\in Z$, или $y=0$, $x\in Z$. Во втором случае четыре возможности:

$$\begin{cases}x_1=1,\\y_1=2,\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=2,\\y_2=1,\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=-1,\\y_3=-2,\end{cases}\quad\begin{cases}x_4=-2,\\y_1=-1.\end{cases}$$

Задача 9.

Решите в целых числах уравнение $(x+1)(x^2+1)=y^3$.

Решение.

Непосредственно видим, что пары чисел (0; 1) и (–1; 0) являются решениями уравнения. Других решений нет, так как

$$x^3<(x+1)(x^2+1)<(x+1)(x+1)^2=(x+1)^3,\text{ то}$$

$$(x+1)(x^2+1)\neq y^3$$

ни для какого целого y (располагается между кубами последовательных целых чисел).

Задача 10.

Решить в целых числах уравнение $x^3+1=y^2$.

Решение.

Одно решение очевидно: $(x,\ y) = (-1;\ 0)$. Более того, легко заметить, что x не может принимать других отрицательных значений, поскольку y^2 не отрицательно. Запишем наше уравнение в виде

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1) =$$
$$= (x + 1)^2 \left(x - 2 + \frac{3}{x + 1}\right) = y^2.$$

Далее, выражение $\frac{3}{x+1}$ будет целым только при $x = 0$ или $x = 2$. Отсюда мы можем найти оставшиеся четыре решения: $(0;\ \pm 1)$ и $(2;\ \pm 3)$. Других решений нет.

Задача 11.

Докажите, что при любом целом положительном a уравнение $x^2 - y^2 = a^3$ разрешимо в целых числах.

Доказательство.

Положим $x + y = a^2$, $x - y = a$, откуда $x = \frac{a(a+1)}{2}$ и $y = \frac{a(a-1)}{2}$. Поскольку при любом целом a в числителе каждой из данных дробей стоит произведение четного и нечетного чисел, определенные таким образом x и y представляют собой целые числа и удовлетворяют исходному уравнению.

Задача 12.

Решить в целых числах уравнение $xy + 3x - 5y = -3$.

Решение.

Преобразуем к виду: $x(y + 3) - 5y = -3$. Прибавим к левой и правой части (-15):

$$x(y + 3) - 5y - 15 = -3 - 15.$$

Отсюда $(x - 5)(y + 3) = -18$. Теперь имеем системы:

1) $\begin{cases} x - 5 = 1, \\ y + 3 = -18, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 5 = -18, \\ y + 3 = 1, \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-5=-1, \\ y+3=18, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-5=18, \\ y+3=-1, \end{cases}$

5) $\begin{cases} x-5=2, \\ y+3=-9, \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x-5=-9, \\ y+3=2, \end{cases}$

7) $\begin{cases} x-5=-2, \\ y+3=9, \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x-5=9, \\ y+3=-2, \end{cases}$

9) $\begin{cases} x-5=3, \\ y+3=-6, \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x-5=-6, \\ y+3=3, \end{cases}$

11) $\begin{cases} x-5=-3, \\ y+3=6, \end{cases}$ 12) $\begin{cases} x-5=6, \\ y+3=-3. \end{cases}$

Ответ: (6; –21); (–13; –2), ... — всего 12 решений.

Задача 13.

Решить в целых числах уравнение $60x + 77y = 1$.

Решение.

Решим относительно x:

$$x = \frac{77y+1}{60} = \frac{60y+(17y+1)}{60} = y + \frac{17y+1}{60}.$$

Пусть $\frac{17y+1}{60} = z$. Тогда $y = \frac{60z-1}{17} = 3z + \frac{9z-1}{17}$.

Обозначим $\frac{9z-1}{17}$ через t. Тогда

$$z = \frac{17t+1}{9} = 2t + \frac{-t+1}{9}.$$

Наконец, пусть $\frac{-t+1}{9} = n$. Тогда $t = 1 - 9n$.

Так как мы находим только целые решения, то z, t, n — целые. Таким образом, $z = 2 - 18n + n = 2 - 17n$, а потому $y = 6 - 51n + 1 - 9n = 70 - 60n$,

$$x = 2 - 17n + 7 - 60n = 9 - 77n.$$

Итак, если x и y — целые, то найдется целое n, что $y = 7 - 60n$, $x = 9 - 77n$. Обратно, если

$$x = 9 - 77n,\ y = 7 - 60n, \text{ где } n \in Z,$$

то очевидно x, y — целые.

Проверка показывает, что они удовлетворяют исходное уравнение.

Ответ: $x = 9 - 77n$, $y = 7 - 60n$, n — целое.

Задача 14.

Решить в целых числах уравнение $x^3 + y^3 = 1972$.

Решение.

Числа x и y, очевидно, одинаковой четности. Более того, вследствие равенства $x^3 + y^3 = 4 \cdot 493$ числа x и y оба нечетны. Поэтому в разложении

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

во второй скобке стоит нечетное число. Кроме того, число $x^2 - xy + y^2$ положительно. Значит, имеет место одно из двух соотношений: $x + y = 4$, $x + y = 1972$.

В первом случае

$$493 = x^2 + y^2 - xy = (x + y)^2 - 3xy = 16 - 3xy.$$

Поэтому $xy = -159$. Разлагая это число в произведение двух целых множителей, видим, что сумма этих множителей не равна 4. Во втором случае из очевидного неравенства

$$x^2 + y^2 - xy \geqslant |xy|$$

следует, что $|xy| \leqslant 1$. Отсюда $x + y$ не может равняться 1972.

Задача 15.

Решить в целых числах уравнение $xy - 10(x + y) = 1$.

Решение.

Решая данное уравнение относительно y, имеем

$$y = \frac{10x + 1}{x - 10} \text{ или } y = 10 + \frac{101}{x - 10}, \qquad (1)$$

откуда следует, что $(x-10)$ есть делитель простого числа 101. Таким образом, должно быть

$$x-10=\pm 1 \text{ или } x-10=\pm 101. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получаем четыре решения.

Ответ: $\begin{cases} x_1=11, \\ y_1=111, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=9, \\ y_2=-91, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=111, \\ y_3=11, \end{cases}$ $\begin{cases} x_4=-91, \\ y_4=9. \end{cases}$

Задача 16.

Решить в натуральных числах уравнение

$$2x^2+5xy-12y^2=28.$$

Решение.

Перепишем в виде:

$$2x^2-3xy+8xy-12y^2=28;$$

$$(2x-3y)(x+4y)=28.$$

Теперь видно, что число $x+4y$ должно быть делителем числа 28. Поскольку $x+4y \geqslant 5$, то ясно, что $x+4y=7$, а, следовательно, $2x-3y=4$, либо $x+4y=14$ и $2x-3y=2$.

Из полученных трех систем только последняя дает решения в целых числах.

Ответ: $\begin{cases} x=8, \\ y=5. \end{cases}$

Задача 17.

Решить в целых числах уравнение $10x+y=(x+y)^2$.

Решение.

Имеем $10x+y=x^2+2xy+y^2$, или

$$x^2-2(5-y)x-y+y^2=0, \text{ откуда}$$

$$x=5-y\pm\sqrt{25-9y}. \qquad (1)$$

Так как число x должно быть целым, то необходимо, чтобы разность $25-9y$ была полным квадратом; эта разность может быть полным квадратом только при $y=0$ и $y=1$. Пусть $y=0$, тогда из (1) следует

$$x_1=10, \quad x_2=0.$$

Пусть теперь $y = 1$, тогда из (1) следует

$$x_3 = 8, \quad x_4 = 0.$$

Итак, данное уравнение имеет четыре решения.

Ответ: $x_1 = 10,\ y_1 = 0;\ x_2 = 0,\ y_2 = 0;$

$x_3 = 8,\ y_3 = 1;\ x_4 = 0,\ y_4 = 1.$

Задача 18.

Уравнение $x^x + y^y = 2x + y$ решить в целых числах.

Решение.

Имеем $(x^x - 2x) + (y^y - y) = 0$, или

$$x\,(x^{x-1} - 2) + y\,(y^{y-1} - 1) = 0. \qquad (1)$$

Если $x > 2$, то $x - 1 > 0$ и $x - 1 > 1$, а потому

$$x^{x-1} > 2^{x-1} > 2^1, \text{ значит, } x^{x-1} > 2,$$

следовательно, при $x > 2$ имеет место неравенство

$$x\,(x^{x-1} - 2) > 0. \qquad (2)$$

Если $y > 1$, то $y - 1 > 0$, а потому

$$y^{y-1} > 1^{y-1}, \text{ т.е. } y^{y-1} > 1,$$

значит, при $y > 1$ имеет место неравенство

$$y\,(y^{y-1} - 1) > 0. \qquad (3)$$

Складывая неравенства (2) и (3), заключаем, что при $x > 2$ и $y > 1$ левая часть уравнения (1) положительна и поэтому отличная от нуля. Итак, при существовании целых положительных решений данного уравнения x должно равняться 1 или 2, а $y = 1$. Подстановкой убеждаемся, что

$$x = 2, \quad y = 1$$

является единственным решением (в целых положительных числах) данного уравнения.

Ответ: $x = 2,\ y = 1.$

Задача 19.

Решить в целых числах уравнение $x^3 - 100 = 225y$.

Решение.

Очевидно, что x должен быть кратным пяти. Полагая $x = 5z$, получаем

$$5z^3 - 4 = 9y. \tag{1}$$

Левая часть этого уравнения должна быть кратна девяти, и так как число z может быть представлено в одном из трех видов: $3t$, $3t - 1$, $3t + 1$, то подстановкой этих выражений в уравнение (1) убеждаемся, что число, кратное девяти, дает только тот случай, когда z может быть представлено в виде $3t - 1$. В этом случае

$$x = 15t - 5,\ y = \frac{5z^3 - 4}{9} = 15t^3 - 15t^2 + 5t - 1.$$

При любом целом t получаем соответственно целые решения данного уравнения.

17. МОНОТОННЫЕ ФУНКЦИИ РЕШАЮТ ЗАДАЧИ

Докажем вначале следующее свойство монотонных функций:

Если функция f возрастает или убывает на некотором промежутке, то на этом промежутке уравнение $f(x) = 0$ имеет не более одного корня.

Доказательство.

Пусть для определенности функция $f(x)$ монотонно возрастает на промежутке $[a, b]$, x_1 и x_2 — корни функции и $x_1 < x_2$. Тогда $f(x_1) < f(x_2)$. Но $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

Задача 1.

Решить уравнение $\sqrt{4x^2 - 1} + \sqrt{4x - 1} = 1$.

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{4x^2 - 1} + \sqrt{4x - 1}$. На области определения $\left[\frac{1}{2}, \infty\right[$ эта функция монотонно возрастает, значит, предложенное уравнение имеет один корень. Найдем его:

$$(\sqrt{4x - 1})^2 = (1 - \sqrt{4x^2 - 1})^2, \text{ или}$$

$$2\sqrt{4x^2 - 1} = 4x^2 - 4x + 1, \text{ откуда}$$

$$2\sqrt{(2x - 1)(2x + 1)} = (2x - 1)^2.$$

Равенство выполняется, например, при $2x - 1 = 0$, т.е. $x = \frac{1}{2}$. Проверкой убеждаемся, что $x = \frac{1}{2}$ — действительно корень данного уравнения.

Задача 2.

Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{3x - 2}}{x^2} = \frac{1}{1 - x}.$$

Решение.

Левая часть данного уравнения определена на промежутке $\left[\frac{2}{3},\ \infty\right[$ и неотрицательна на нем. Значит, уравнение может иметь решение на пересечении промежутков $\left[\frac{2}{3},\ \infty\right[$ и $]-\infty;\ 1[$, т.е. на промежутке $\left[\frac{2}{3},\ 1\right[$.

Перепишем уравнение в виде $\sqrt{3x-2}=\frac{x^2}{1-x}$.

Рассмотрим функции $f_1(x)=\sqrt{3x-2}$ и $f_2(x)=\frac{x^2}{1-x}$. На промежутке $\left[\frac{2}{3},\ 1\right[$ они возрастают, при этом

$$\sqrt{3x-2}<\sqrt{3\cdot 1-2}=1;\quad \frac{x^2}{1-x}>\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1-\frac{2}{3}}=\frac{4}{3}>1.$$

Итак, уравнение корней не имеет.

Задача 3.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y(x+y)^2=9, \\ y(x^3-y^3)=7. \end{cases}$$

Решение.

Из первого уравнения следует, что $y>0$, из второго — $x>y>0$. Выразим из первого уравнения x через y:

$$\sqrt{y}(x+y)=3,\ \ x=\frac{3}{\sqrt{y}}-y.$$

Тогда $y\left(\left(\frac{3}{\sqrt{y}}-y\right)^3-y^3\right)=7$. Положим $t=\sqrt{y}$, получим $t^2\left(\left(\frac{3}{t}-t^2\right)^3-t^6\right)=7$ или $(3-t^3)^3-t^9-7t=0$. Пусть

$$f(t)=(3-t^3)^3-t^9-7t,\ f'(t)=-9t^2(3-t^3)^2-9t^8-7.$$

Она отрицательна при всех значениях t.

Таким образом, функция f убывает. Поэтому уравнение $f(t) = 0$ имеет не более одного корня. Нетрудно заметить, что $t = 1$ — корень. Итак, $x = 2$, $y = 1$ — единственное решение системы.

Задача 4.

Сколько действительных корней имеет уравнение

$$x^5 + x^2 + 1 = 0?$$

Решение.

Поскольку $x = 0$ не является корнем уравнения, то если сделать замену $x = \frac{1}{y}$, потери корней не будет. Тогда получим $\frac{1}{y^5} + \frac{1}{y^2} + 1 = 0$, или $y^5 + y^3 + 1 = 0$.

Рассмотрим функцию $f(y) = y^5 + y^3 + 1$. Она возрастающая, при этом $f(-1) < 0$, $f(0) > 0$, значит, в некоторой точке интервала $]-1;\ 0[$ она имеет единственный корень.

Задача 5.

Решить уравнение $x^2 + x + 12\sqrt{x+1} = 36$.

Решение.

Уравнение рассматривается на промежутке $[-1;\ \infty[$. Число $x \in [-1;\ 0]$ не может быть корнем этого уравнения, потому что при таких x $x^2 + x < 0$, $12\sqrt{x+1} \leqslant 12$.

С другой стороны, при $x > 0$ левая часть уравнения возрастающая функция, поэтому целесообразно использовать подбор корней, значит, $x = 3$.

Задача 6.

Решить уравнение $\sqrt{x^3 + 24} = 3x + 8 + \sqrt{x^3 + 12}$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{12}{\sqrt{x^3 + 24} + \sqrt{x^3 + 12}} = 3x + 8.$$

Замечаем, что левая часть есть убывающая функция, а правая — возрастающая, значит, уравнение не может иметь более одного корня: $x = 2$.

Рассмотрим показательные и логарифмические уравнения. Обращаем внимание на показательные и логарифмические уравнения вида

$$a^x + b^x = (a + b)^x, \tag{1}$$

где $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$.

Докажем, что это уравнение имеет единственный корень $x = 1$.

Имеет место **теорема:** *сумма монотонно-возрастающих (или монотонно-убывающих) есть функция монотонно-возрастающая (монотонно-убывающая).*

Действительно, пусть для определенности $f(x)$ и $g(x)$ монотонно-убывающие функции. Обозначим их сумму как $T(x)$:

$$T(x) = f(x) + g(x).$$

Найдем производную $T(x)$:

$$T'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Поскольку $f'(x) < 0$ и $g'(x)$, то и $T'(x) < 0$, а значит, утверждение теоремы доказано.

Перейдем к решению уравнения (1). Имеем

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^x + \left(\frac{b}{a+b}\right)^x = 1.$$

Поскольку по условию $a > 0$, $b > 0$, то

$$\begin{cases} \dfrac{a}{a+b} < 1, \\ \dfrac{b}{a+b} < 1, \end{cases}$$

следовательно, функция $f(x) = \left(\frac{a}{a+b}\right)^x + \left(\frac{b}{a+b}\right)^x$ монотонно убывающая, а значит, $x = 1$ — единственный корень уравнения (1).

Приведем несколько уравнений типа уравнения (1):

1°) $3^x + 4^x = 7^x$;

2°) $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = 2^x$;

3°) $\left(\sqrt[3]{25+\sqrt[3]{11}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{25-\sqrt[3]{11}}\right)^x = 3^x$.

Иногда «на первый взгляд» уравнение не похоже на уравнение (1). Но его можно свести к этому виду.

Задача 7.

Решить уравнение $3^x + 4^x = 91^{x/3}$.

Решение.

Запишем заданное уравнение так: $27^{x/3} + 64^{x/3} = 91^{x/3}$. Очевидно, что $x = 3$.

Задача 8.

Решить уравнение $3^x + 4^x = 5^x$.

Имеем сумму двух монотонно убывающих функций:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1. \quad x = 2.$$

Задача 9.

Сколько корней имеет уравнение

$$5^x + 2^{x+1}\cdot 3^x = 3^{2x} + 2^{2x}?$$

Решение.

Имеем $5^x + 2\cdot 2^x\cdot 3^x = (3^x)^2 + (2^x)^2$; $5^x = (3^x - 2^x)^2$;

$$(\sqrt{5})^x = |3^x - 2^x|.$$

Если $x \geqslant 0$, то $(\sqrt{5})^x = 3^x - 2^x$, т.е. $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$.

$x = 2$ — корень этого уравнения.

Если $x < 0$, то $(\sqrt{5})^x = 2^x - 3^x$, значит,

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^x + \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1.$$

Функция $f(x) = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^x + \left(\frac{3}{2}\right)^x - 1$ монотонно возрастает, а потому уравнение $f(x) = 0$ не может иметь более одного корня. Неравенство $f(-3) < 0$ и $f(-2) > 0$ показывает: что корень существует и находится в интервале $]-3;\ -2]$. Значит, данное уравнение имеет два корня.

Задача 10.

Решить уравнение $3 \cdot 5^{2x+1} - 7 \cdot 2^{4x+1} = 19$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде $14 \cdot 4^{2x} + 19 = 15 \cdot 5^{2x}$.

Разделим обе части уравнения на 5^{2x}. Получим

$$14 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{2x} + 19\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} = 15.$$

Нетрудно установить, что $x = \frac{1}{2}$ — корень этого уравнения, но поскольку левая часть уравнения монотонно-убывающая функция, то этот корень единственен.

Задача 11.

Решить уравнение $5^x - 3^x = 2$.

Решение.

$1 = 2\left(\frac{1}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x$. Обозначим $f(x) = 2\left(\frac{1}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x - 1$.

$$f'(x) = \ln\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^x + \ln\frac{3}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^x.$$

Поскольку $f'(x) < 0$, то функция $f(x)$ убывающая, а значит, $x = 1$ является единственным корнем заданного уравнения.

Задача 12.

Решить уравнение: $\log_2(1 + \sqrt{x}) = \log_3 x$.

Решение.

Сделаем замену $\log_3 x = y$. Тогда уравнение примет вид

$$\log_2(1+\sqrt{3^y}) = y, \text{ или } 1+(\sqrt{3})^y = 2^y, \text{ или}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^y + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^y = 1,\ \ y=2,\ \ x=9.$$

Задача 13.

Решить уравнение $(\sqrt{3})^x - 2^{x-1} = 1$.

Решение.

Обозначим $f(x) = 3^{x/2} - 2^{x-1}$. Тогда и $f'(x) < 0$, и $\frac{1}{2}\cdot 3^{x/2}\ln 3 - \frac{1}{2}\cdot 2^x \ln 2 < 0$, или

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x < \frac{\ln 2}{\ln 3},\ \text{или } x > \log_{\sqrt{3}/2}\log_3 2.$$

Поэтому функция $f(x)$ возрастает на промежутке $]-\infty;\ a]$ и убывает на промежутке $[a,\ \infty[$, где

$$a = \log_{\sqrt{3}/2}\log_3 2.$$

Итак, уравнение $f(x) = 1$ имеет не более двух корней. Но $f(2) = f(x) = 1$, значит, корнями будут числа 2 и 4.

Задача 14.

Решить уравнение

$$2\log_3 \operatorname{ctg} x = \log_2 \cos x.$$

Решение.

Обозначим $\log_2 \cos x = y$. Тогда $\cos x = 2^y$.

$$\operatorname{ctg}^2 x = 3^y,\ \ \operatorname{ctg} x > 0.$$

Но $\operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}$, поэтому

$$3^y = \frac{4^y}{1-4^y},\ \ 3^y - 12^y = 4^y, \text{ или } \left(\frac{3}{4}\right)^y = 3^y + 1.$$

Поскольку левая часть уравнения — убывающая функция, а правая — возрастающая, то уравнение имеет единственный корень $y = 1$. Учитывая, что $\cos x > 0$,

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2, \ldots).$$

Задача 15.

Решить неравенство

$$\log_5 (1 + \sqrt{x}) > \log_{16} x.$$

Решение.

Область определения неравенства $]0; \infty[$. Обозначим $\log_{16} x = y$. Тогда $x = 16^y$, и неравенство запишется так:

$$\log_5 (1 + 4^y) > y, \text{ откуда}$$

$$1 + 4^y > 5^y, \text{ или } \left(\frac{1}{5}\right)^y + \left(\frac{4}{5}\right)^y > 1.$$

Поскольку функция $f(y) = \left(\frac{1}{5}\right)^y + \left(\frac{4}{5}\right)^y$ убывающая, то уравнение $f(y) = 1$ справедливо только для одного значения y. Это будет $y = 1$. Итак, данное неравенство справедливо для $y < 1$. Значит, $\log_{16} x < 1$, откуда $0 < x < 16$.

Задача 16.

Решить неравенство

$$\log_2 (x^9 - 2x^5 + 3x) \leqslant 1.$$

Решение.

Область определения неравенства — множество решений неравенства $x(x^8 - 2x^4 + 3) > 0$, — промежуток $]0; \infty[$. На этом интервале заданное неравенство равносильно неравенству $x^9 - 2x^5 + 3x - 2 \leqslant 0$, $f'(x) = 9x^8 - 10x^4 + 3 > 0$ для всех x, поэтому $f(x)$ возрастает, т.е. $f(x) \leqslant 0$ при $x \leqslant 1$ $(f(1) = 0)$, значит, $x \in\ ]0, 1]$.

Задача 17.

Решить систему

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 3(\lg y - \lg x), \\ 9^y = 4^y + 2^x + 3^x. \end{cases}$$

Решение.

Обозначим $x + 3\ln x$ через $f(x)$. Запишем первое уравнение в виде $f(x) = f(y)$, и поскольку функция f является возрастающей, то из него следует, что $x = y$. Поэтому второе уравнение системы можно переписать в виде:

$$9^x = 4^x + 2^x + 3^x, \quad 1 = \left(\frac{4}{9}\right)^x + \left(\frac{2}{9}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x,$$

и поскольку правая часть последнего уравнения — убывающая функция, то оно имеет не более одного корня. С другой стороны, его корнем является число 1, так что исходная система уравнений имеет единственное решение (1; 1).

Задача 18.

При каких $a > 0$ неравенство $\ln(1 + x) \geqslant x - ax^2$ выполняется при всех $x \in R$?

Решение.

Рассмотрим на интервале $]-1;\ \infty[$ функцию

$$f(x) = \ln(1 + x) + ax^2 - x$$

и ее производную $f'(x) = (\ln(1 + x) + ax^2 - x)' =$

$$= \frac{1}{1 + x} + 2ax - 1 = \frac{2ax^2 + (2a - 1)x}{x + 1}.$$

Если $2a - 1 \geqslant 0$, то на $]0;\ \infty[$ $f'(x) > 0$, так что на R функция $f(x)$ возрастает, и поэтому $f(x) > f(0) = 0$ при любом $x > 0$. Если же $2a - 1 < 0$, то $f'(x)$ обращается в 0 в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{1 - 2a}{2a}$, причем в точке 0 она меняет знак с плюса на минус. Следовательно, $x = 0$ — точка максимума функции $f(x)$, и при положительных x выполняется неравенство $f(x) < f(0) = 0$, т.о. ответ: $a \in \left[\frac{1}{2},\ \infty\right[$.

Задача 19.

Решить неравенство

$$-e^{-1} \leqslant x\ln x < 0.$$

Решение.

Функция $f(x) = x \ln x$ на $\left]0;\ \frac{1}{e}\right]$ убывает, так как ее производная $f'(x) = 1 + \ln x < 0$ на промежутке $\left]0;\ \frac{1}{e}\right]$; $f(x)$ возрастает на $\left[\frac{1}{e};\ \infty\right]$, так как $f'(x) > 0$ на промежутке $\left]\frac{1}{e};\ \infty\right]$. Далее, на промежутке $\left]0;\ \frac{1}{e}\right]$ имеем:

$$f(x) < 0 \text{ и } f(x) > f\left(\frac{1}{e}\right) = -e^{-1};$$

на промежутке $\left[\frac{1}{e};\ \infty\right]$ имеем:

$$f(x) \geqslant f\left(\frac{1}{e}\right) = -e^{-1} \text{ и } f(x) \leqslant f(1) = 0 \text{ при } x \leqslant 1.$$

Ответ: $x \in \left]0;\ 1\right]$.

Задача 20.

Решить неравенство $9^n + 10^n < 11^n$ (n — натуральное число).

Решение.

Данное неравенство приводится к неравенству

$$\left(\frac{9}{11}\right)^n + \left(\frac{10}{11}\right)^n < 1,$$

в левой части которого стоит убывающая функция $f(n)$. Поэтому достаточно найти наименьшее число n_0 такое, что $f(n_0) < 1$, и тогда неравенство будет справедливо для всех $n \geqslant n_0$.

При подборе чисел n_0 более удобно, конечно, иметь дело с заданным неравенством. Непосредственные подсчеты показывают, что оно не выполняется при $n = 1, 2, 3, 4$, а при $n = 5$ — выполняется. Таким образом, решениями данного неравенства являются целые числа $n \geqslant 5$.

18. МЕТОД НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Метод неопределенных коэффициентов обычно применяется в тех случаях, когда в результате некоторых преобразований получается определенного вида выражение и неизвестны лишь коэффициенты. Тогда эти коэффициенты обозначаются буквами и рассматриваются как неизвестные. При этом следует пользоваться теоремой:

Необходимым и достаточным условием тождественности двух многочленов, заданных в каноническом виде, является равенство коэффициентов членов.

Доказательство. Необходимость

Предположим, что при всех значениях аргументов значения многочленов P и Q равны. Докажем, что при этом условии многочлены состоят из одних и тех же одночленов.

Рассмотрим какой-либо член одного из многочленов, например, $A_1 x^{k_1} y^{l_1} \ldots z^{q_1}$. В другом многочлене либо содержится член $B_1 x^{k_1} y^{l_2} \ldots z^{q_1}$, подобный данному, либо такого члена нет. В последнем случае член $B_1 x^{k_1} y^{l_2} \ldots z^{q_1}$ все же может быть написан, если считать $B_1 = 0$. Добавив (в случае надобности) в каждом из данных многочленов недостающее количество членов с коэффициентами равными нулю. Можно считать, что каждому члену одного многочлена соответствует подобный член другого. По условию значения многочленов P и Q одинаковы при всех значениях аргументов, поэтому, выполнив почленное вычитание, получим при всех значениях аргументов:

$$P - Q = (A_1 - B_1)\, x^{k_1} y^{l_1} \ldots z^{q_1} + (A_1 - B_2)\, x^{k_2} y^{l_2} \ldots z^{q_2} \equiv 0.$$

Это возможно лишь при условии

$$A_1 - B_1 = A_2 - B_2 = \ldots = 0, \text{ значит, } A_1 = B_1 = B_2\,, \ldots$$

Достаточность предлагается доказать самостоятельно.

Задача 1.

Разложить на множители многочлен

$$x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1.$$

Решение.

Допустим, что разложение на множители возможно. Тогда имеем тождество

$$x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (ax^2 + bx + c)(mx^3 + nx^2 + px + q).$$

Коэффициенты при различных степенях x в левой и правой части тождества должны быть равны. Поэтому получаем систему уравнений

$$\begin{cases} am = 1, \\ an + bm = 1, \\ ap + bn + cm = 2, \\ aq + bp + cn = 2, \\ bq + cp = 2, \\ cq = 1. \end{cases}$$

Решим эту систему в целых числах. Из первого уравнения системы видно, что $a = m = 1$ или $a = m = -1$. Тогда

$$\begin{cases} n + b = 1, \\ p + bn + c = 2, \\ q + bp + cn = 2, \\ bq + cp = 2, \\ cq = 1. \end{cases} \qquad (1)$$

Из первого уравнения системы (1) имеем $n = 1 - b$. Подставив в остальные уравнения системы вместо n полученное для него выражение через b, получим

$$\begin{cases} b^2 - b - p = -1, \\ b(p - 1) = 0, \\ b + p = 2, \end{cases}$$

откуда $b = 1$, $n = 0$. Итак, $a = b = c = 1$, $m = p = q = 1$.

Значит,

$$x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x^3 + x + 1)(x^2 + x + 1).$$

Задача 2.

Разложить многочлен $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ по степеням $x + 1$.

Решение.

$$x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1 =$$

$$= a_4(x+1)^4 + a_3(x+1)^3 + a_2(x+1)^2 + a_1(x+1) + a_0,$$

откуда

$$x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1 = a_4x^4 + (4a_4 + a_3)x^3 +$$

$$+ (6a_4 + 3a_3 + a_2)x^2 + (4a_4 + 3a_3 + 2a_2 + a_1)x +$$

$$+ (a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0), \text{ и}$$

$$\begin{cases} a_4 = 1, \\ 4a_4 + a_3 = 2, \\ 6a_4 + 3a_3 + a_2 = -3, \\ 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 + a_1 = -4, \\ a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 1. \end{cases}$$

Из системы находим

$$a_4 = 1,\ \ a_3 = -2,\ \ a_2 = -3,\ \ a_1 = 4,\ \ a_0 = 1.$$

Таким образом,

$$f(x) = (x+1)^4 - 2(x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 4(x+1) + 1.$$

Задача 3.

Вывести формулу куба трехчлена $(x + y + z)^3$.

Решение.

Многочлен $(x + y + z)^3$ есть однородный симметрический многочлен третьей степени с тремя аргументами. Поэтому

$$(x + y + z)^3 = A(x^3 + y^3 + z^3) + B(x^2y + y^2x + x^2z + z^2z +$$

$$+ y^2z + z^2y) + Cxyz,$$

где A, B и C — искомые числовые коэффициенты.

Коэффициенты при x^3 в каноническом представлении левой части равен 1, поэтому $A = 1$. К тому же результату придем, положив $x = 1$, $y = z = 0$.

Положив $x = y = 1$, $z = 0$, получим $8 = 2A + 2B$, откуда $B = 3$.

Положив $x = y = z = 1$, получим $27 = 3A + 6B + C$, откуда $C = 6$.

Следовательно,

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3\,(x^2y + y^2x + x^2z + z^2x + \\ + y^2z + z^2y) + 6xyz.$$

Задача 4.

Решить уравнение $x^4 - 12x + 323 = 0$.

Решение.

$$x^4 - 12x + 323 = (x^2 + px + q)(x^2 + mx + n) =$$

$$= x^4 + mx^3 + nx^2 + px^3 + pmx^2 + pnx + qx^2 + qmx + qn =$$

$$= x^4 + (m + p)\,x^3 + (n + pm + q)\,x^2 + (pn + qm)\,x + qn.$$

$$\begin{cases} m + p = 0, \\ n + pm + q = 0, \\ pn + qm = -12, \\ qn = 323. \end{cases}$$

Поскольку $323 = 17 \cdot 19$, имеем предположительно:

$$\begin{cases} q = 17, \\ n = 19, \\ m = -6, \\ p = 6 \end{cases}$$

и $x^4 - 12x + 323 = (x^2 + 6x + 17)(x^2 - 6x + 19)$.

Уравнение не имеет действительных корней.

Задача 5.

Найти условия, при которых многочлен

$$ax^3 + bx^2 + cx + d$$

является кубом двучлена первой степени.

Решение.

По условию $(Ax + B)^3 \equiv A^3\,x^3 + 3A^2\,Bx^2 + 3AB^2\,x + B^3 \equiv$

$$\equiv ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

откуда $A^3 = a$; $3A^2B = b$; $3AB^2 = c$; $B^3 = d$.

Из первого и четвертого равенств имеем:

$$A = \sqrt[3]{a}, \quad B = \sqrt[3]{d}.$$

Подставив во второе и третье, получим

$$3\,(\sqrt[3]{a})^2 \cdot \sqrt[3]{d} = b, \quad 3\,\sqrt[3]{a} \cdot (\sqrt[3]{d})^2 = c.$$

Возведя в куб, получим следующие необходимые условия:

$$27a^2\,d = b^3 \text{ и } 27ad^2 = c^3$$

Для многочлена во множестве действительных чисел это условие является и достаточным. В самом деле, положив $A = \sqrt[3]{a}$, где $a \neq 0$ и $B = \dfrac{b}{3\,(\sqrt[3]{a})^2}$, получим

$$B^2 = \frac{b^3}{27a^2} = d \text{ и } 27ad^2 = 27A^3\,B^6 = c^3, \text{ откуда } c = 3AB^2.$$

Задача 6.

Доказать, что выражение

$$(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 1$$

есть квадрат трехчлена.

Доказательство.

Если данное выражение есть квадрат трехчлена, то справедливо равенство

$$(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 1 = (x^2 + ax + b)^2,$$

где a и b — искомые коэффициенты.

Раскрывая скобки и сравнивая коэффициенты при x^3 и x^2 в левой и правой части, получаем систему

$$\begin{cases} 2a = 10, \\ a^2 + 2b = 35, \end{cases}$$

откуда находим $a = 5$, $b = 5$. Убеждаемся, что при этих значениях a и b также совпадают коэффициенты при x и x^0. Итак, данное выражение равно $(x^2 + 5x + 5)^2$.

Задача 7.

Многочлен $x^4 + 2x^3 + ax^2 + 2x + b$ является квадратом другого многочлена. Найти этот последний многочлен, а также числа a и b.

Решение.

Очевидно, что искомый многочлен имеет вид

$$x^2 + px + q.$$

Отсюда получаем тождество

$$x^4 + 2x^3 + ax^2 + 2x + b = (x^2 + px + q)^2, \text{ или}$$

$$x^4 + 2x^3 + ax^2 + 2x + b = x^4 + 2px^3 + (p^2 + 2q)\,x^2 + 2pqx + q^2.$$

Приравнивая коэффициенты левой и правой части равенств, получим

$$2 = 2p;\;\; a = p^2 + 2q;\;\; 2 = 2pq;\;\; b = q^2.$$

Значит, $p = 1$, $q = 1$, $a = 3$, $b = 1$. Итак, искомый многочлен имеет вид $x^2 + x + 1$.

Задача 8.

Определить A, B и C так, чтобы имело место равенство:

$$\frac{x+3}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Решение.

Имеем $(A + B)\,x^2 + (B + C)\,x + A + C = x + 3.$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях буквы x, взятые из левой и правой частей этого равенства, придем к системе

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ B + C = 1, \\ A + C = 3. \end{cases}$$

Из нее найдем $A = 1$, $B = -1$, $C = 2$.

Задача 9.

Доказать, что кубическое уравнение

$$a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 = 0 \quad (a_1 \neq 0)$$

можно привести к двучленному уравнению третьей степени.

Доказательство.

Итак, пусть дано кубическое уравнение

$$a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 = 0 \quad (a_1 \neq 0)$$

Приведем это уравнение к виду

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \tag{1}$$

где $a = \frac{b_1}{a_1}$, $b = \frac{c_1}{a_1}$, $c = \frac{d_1}{a_1}$.

Положим в уравнении (1) $x = y + m$. Тогда

$$y^3 + y^2(a + 3m) + y(3m^2 + 2am + b) + m^3 + am^2 + \\ + bm + c = 0. \tag{2}$$

Для того, чтобы уравнение (2) было двучленным, должно выполняться условие:

$$\begin{cases} a + 3m = 0, \\ b + 2am + 3m^2 = 0. \end{cases}$$

Решения этой системы $m = -\frac{a}{3}$, $a^2 = 3b$.

Таким образом, при произвольном c и при $a^2 = 3b$ уравнение (1) подстановкой $x = y - \frac{a}{3}$ можно привести к двучленному уравнению третьей степени.

Задача 10.

Разложить на множители многочлен

$$P(x, y, z) = x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2).$$

Решение.

Заметим, что при $x = y$ многочлен равен нулю. Тогда по теореме Безу многочлен $P(x, y, z)$ делится на $x - y$.

Так как многочлен $P(x, y, z)$ не меняется при любой круговой подстановке x, y и z, то он равен нулю и при $y = z$, и при $z = x$, и, следовательно, делится на $y - z$ и $z - x$. Поэтому

$$P(x, y, z) = k(x - y)(y - z)(z - x),$$

где k — некоторое число. Для нахождения k придадим x, y и z некоторые значения, например, $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. Тогда $2 = 2k$, откуда $k = 1$ и $P(x, y, z) = (x - y)(y - z)(z - x)$.

Задача 11.

Упростить выражение

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} +$$
$$+ \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+5)}.$$

Решение.

С помощью метода неопределенных коэффициентов можно показать, что

$$\frac{1}{(x+k)(x+k+1)} = \frac{1}{x+k} - \frac{1}{x+k+1}.$$

Получим:

$$A = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) +$$
$$+ \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}\right) + \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5}\right) =$$
$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+5} = \frac{5}{x(x+5)}.$$

Задача 12.

Найти сумму

$$A = \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \ldots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}.$$

Решение.

Методом неопределенных коэффициентов, можно доказать, что

$$\frac{1}{k(n+k)} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+k}\right).$$

Поэтому

$$A = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{11}\right) + \ldots + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2}\right)\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2}\right) = \frac{n}{2(3n+2)}.$$

Теорема Виета для кубического многочлена

Пусть $x^3 + ax^2 + bx + c$ — данный многочлен, а его корни — k, m, n. Представим этот многочлен в следующем виде:

$$(x - k)(x - m)(x - n) = 0, \text{ или:}$$

$$x^3 - x^2(m + n + k) + x(kn + mn + km) - kmn = 0.$$

Поскольку этот многочлен тождественен многочлену

$$x^3 + ax^2 + bx + c,$$

тогда можно сказать, что

$$m + n + k = -a, \quad mnk = -c, \quad mn + nk + mk = b.$$

Задача 13.

Уничтожить иррациональность в знаменателе дроби

$$\frac{59}{1 + 3\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{4}}.$$

Решение.

Умножив знаменатель на $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ (a, b, c — неопределенные коэффициенты):

$$1 + 3\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{4})(a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4})$$

и сделав приведение подобных, получим

$$(a - 4b + 6c) + (3a + b - 4c)\sqrt[3]{2} - (2a - 3b - c)\sqrt[3]{4}.$$

Найдем такие числа a, b, c, чтобы полученное выражение было целым:

$$\begin{cases} 3a + b - 4c = 0, \\ 2a - 3b - c = 0. \end{cases}$$

1) Исключив b, получим: $11a = 13c$; $\frac{a}{13} = \frac{c}{11}$.

2) Исключив c, получим: $\frac{a}{13} = \frac{b}{5}$; $\frac{a}{13} = \frac{c}{11} = \frac{b}{5}$.

Приняв коэффициент пропорциональности равным единице, получим:

$$a = 13; \quad b = 5; \quad c = 11$$

Следовательно, умножив числитель и знаменатель данной дроби на $13 + 5\sqrt[3]{2} + 11\sqrt[3]{4}$, получим целое число в знаменателе; после преобразований найдем, что

$$\frac{59}{1 + 3\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{4}} = \frac{59\,(13 + 5\sqrt[3]{2} + 11\sqrt[3]{4})}{(1 + 3\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{4})(13 + 5\sqrt[3]{2} + 11\sqrt[3]{4})} =$$

$$= \frac{59}{59}\,(13 + 5\sqrt[3]{2} + 11\sqrt[3]{4}) = 13 + 5\sqrt[3]{2} + 11\sqrt[3]{4}.$$

19. О НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМАХ И ЗАДАЧАХ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Во многих сборниках задач по математике можно встретить такой пример: Доказать, что

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4.$$

Но мало кому известно, что автором его есть гениальный математик XVIII ст. Леонард Эйлер.

Рассмотрим некоторые теоремы и задачи великого математика.

В письме к Христиану Гольдбаху (известному математику) Эйлер рассматривает две теоремы.

Теорема 1. *Произведение двух чисел, каждое из которых есть сумма двух квадратов, есть также сумма квадратов.*

Теорема 2. *Если сумма двух квадратов $a^2 + b^2$, где a и b числа взаимно простые, делится на простое число вида $p^2 + q^2$, то частное от деления есть сумма двух квадратов.*

Рассмотрим разность чисел $(a^2 + b^2)\,p^2$ и $a^2\,(p^2 + q^2)$. Первая из них делится на $p^2 + q^2$ по условию, вторая тоже делится на $p^2 + q^2$. Найдем ее.

$$a^2 p^2 + b^2 p^2 - a^2 p^2 - a^2 q^2 = b^2 p^2 - a^2 q^2 =$$

$$= (bp + aq)\,(bp - aq).$$

Поскольку $p^2 + q^2$ — простое число, то одно из чисел $bp \mp aq$ делится на $p^2 + q^2$. Предположим, что

$$bp \mp aq = m\,(p^2 + q^2), \text{ откуда } b = mp + \frac{mq^2 \pm aq}{p}.$$

Итак, $\dfrac{mq^2 \pm aq}{p}$ есть целое число. Но p и q — взаимно простые числа (иначе $p^2 + q^2$ было бы составным числом), поэтому $mq \pm a$ также делится на p.

Предположим, что $mq \pm a = np$, тогда $\pm a = np - mq$ и $b = mp + nq$, то есть $a^2 + b^2 = (m^2 + n^2)(p^2 + q^2)$ и $\dfrac{a^2 + b^2}{p^2 + q^2} = m^2 + n^2$, что и надо было доказать (такое доказательство дал сам Эйлер).

Свойства простых чисел издавна интересовало математиков. Все время велись поиски выражений, числовые значения которых было бы простыми числами. Французский математик Пьер Ферма (1601–1665) выразил мысль, что все числа вида $F(n) = 2^{2n} + 1$, где $n \in N$, есть простые. И правда, при $n = 1$ $F(1) = 5$, при $n = 4$ $F(4) = 65537$. Эйлер показал, что число $F(5) = 641 \cdot 6700417$, то есть не является простым.

В 1742 г. в письме к голландскому математику Йогану Бернулли Эйлер нашел многочлен $x^2 - x + 41$, который при $x = 1, 2, \ldots, 40$ дает только простые числа 41, 43, 47, 53,..., 1601.

В труде «Алгебра» (1769 г.) Эйлер доказал великую теорему Ферма о целых решениях уравнения $x^n + y^n = z^n$ для $n = 3$ и $n = 4$. Сделал он это с помощью метода «нескончаемого спуска»:

Проиллюстрируем доказательства Эйлера для $n = 4$, то есть, докажем, что уравнение

$$x^4 + y^4 = z^4 \qquad (1)$$

не имеет решения в натуральных числах. Для этого достаточно доказать, что уравнение

$$x^4 + y^4 = z^2 \qquad (1)$$

не имеет решения в целых числах. Предположим, что это не так. Сделаем замену $x^2 = a$, $y^2 = b$. Тогда уравнение (2) будет иметь вид

$$a^2 + b^2 = z^2. \qquad (3)$$

Числа a, b, z — взаимно простые, иначе можно было бы поделить обе части уравнения (3) на квадрат наибольшего общего делителя чисел a, b и z. Докажем, что из чисел a, b и z одно четное и два нечетных. Действительно, все эти три числа не могут быть нечетными, потому, что сумма двух нечетных чисел есть число четное. Числа a, b и z взаимно простые, то есть они одновременно не могут быть четными. Среди них не могут быть двух нечетных, потому что из уравнения (3) следовало бы, что и третье — четное. Итак, из чисел a, b и z одно число четное и два нечетных. Докажем, что z — нечетное число. Будем доказывать методом от противного. Предположим, что z — четное число, тогда a и b — нечетные, то есть

$$z = 2k, \quad a = 2p + 1, \quad b = 2q + 1$$

Тогда уравнение (3) запишем так:

$$(2p + 1)^2 + (2q + 1)^2 = 4k^2, \text{ или}$$

$$4\,(p^2 + q^2 + p + q) + 2 = 4k^2.$$

Последнее равенство невозможно, потому что в нем одно из слагаемых и сумма кратны 4, а второе не кратно 4. Итак, из чисел a и b одно четное, а другое нечетное.

Пусть $a = 2k$, тогда уравнение (3)

$$4k^2 = (z - b)(z + b). \qquad (1')$$

Поскольку b и z — нечетные числа, то их сумма и разность — числа четные. Обозначим

$$2 + b = 2u, \quad 2 - b = 2v. \qquad (2')$$

Тогда

$$2 = v + v, \quad b = u - v. \qquad (3')$$

Тут u и v — взаимно простые числа, потому что если они имели бы общий делитель, отличный от единицы, то из уравнения (3′) выходило бы, что и z и b тоже имеют этот делитель. Из равенств (1′) и (2′) следует, что $4k^2 = 4uv$, или $k^2 = uv$. Итак, произведение двух взаимно простых чисел есть точный квадрат, значит, каждый из сомножителей также есть точный квадрат. Пусть, например, $u = m^2$, $v = n^2$, откуда $k^2 = m^2 n^2$, $k = mn$.

Из равенства $a = 2k$ и равенства (3′) получим:

$$a = 2mn, \quad b = m^2 - n^2, \quad z = m^2 + n^2, \text{ или}$$

$$x^2 = 2mn, \quad y^2 = m^2 - n^2, \quad z^2 = m^2 + n^2, \qquad (4')$$

где m и n — натуральные числа.

Выражение (4′) можно записать в виде $y^2 + n^2 = m^2$.

Итак, мы получаем уравнение вида (3). По аналогии можно найти его решения: $y = u^2 - v^2$, $n = 2uv$, $m = u^2 + v^2$, где u и v — взаимно простые.

Из рассмотренных равенств следует, что

$$x^2 = 4uv(u^2 + v^2), \tag{5'}$$

$$y^2 = (u^2 + v^2)^2 - 4u^2 v^2,\ z^2 = (u^2 + v^2)^2 + 4u^2 v^2. \tag{6'}$$

Из формулы (5′) следует, что $uv(u^2 + v^2)$ есть точный квадрат натурального числа. Итак,

$$u = q^2,\ v = r^2,\ u^2 + v^2 = s^2,\ u^2 + v^2 = q^4 + r^4, \text{ то есть}$$

$$q^4 + r^4 = s^2. \tag{7'}$$

Кроме того, из уравнений (6′) и (7′) следует, что $s < z$. Итак, уравнение (7′) того же вида, что и уравнение (2). Его решения — натуральные числа, но эти числа меньше, чем числа, удовлетворяющие уравнение (2).

Рассуждая аналогично относительно уравнения

$$q^4 + r^4 = s^2$$

мы получили новое уравнение такого же вида, которое удовлетворяют еще меньшие числа. Этот процесс можно бесконечно продолжать, и мы получим при этом бесконечную последовательность натуральных чисел:

$$z > s > s_1 > s_2 > s_3 > \ldots,$$

что невозможно, потому что целых положительных чисел, меньших чем данное, существует только конечное множество чисел. Итак, наше предположение неверное и z — нечетное число.

В труде «Вступление к анализу бесконечно малых» (1780) Эйлер показал, что

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

С числом e связано число C, называемое «константой Эйлера». Докажем, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) = C.$$

Доказательство.

Рассмотрим последовательность

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$$

Докажем, что существует предел этой последовательности.

Сначала покажем, что последовательность $\{x_n\}$ убывающая. Действительно,

$$x_n - x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) -$$

$$- \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1)\right) =$$

$$= \ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n+1} = \ln\frac{n+1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Рассмотрим $\log_{y_n}\frac{n+1}{n}$, где $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Ясно, что $\log_{y_n}\frac{n+1}{n} = \dfrac{1}{\log_{\frac{n+1}{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}$, поэтому

$$\ln\frac{n+1}{n} - \frac{1}{n+1} = \ln\frac{n+1}{n} - \log_{y_n}\frac{n+1}{n}.$$

Но $e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, а значит, $\ln\frac{n+1}{n} > \log_{y_n}\frac{n+1}{n}$, то есть $\ln\frac{n+1}{n} - \frac{1}{n+1} > 0$.

Докажем теперь, что $\{x_n\}$ ограничена снизу. Поскольку

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ldots + \ln\frac{n+1}{n}, \text{ то}$$

$$\ln\left(2 \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) > \ln n,$$

то есть все члены последовательности $\{x_n\}$ положительные. Эта последовательность убывающая, итак, ее предел существует. Обозначают его через C. Известно, что $C = 0{,}57215\ldots$

Рассмотрим некоторые теоремы из работы Эйлера «Разные геометрические доказательства» (1748).

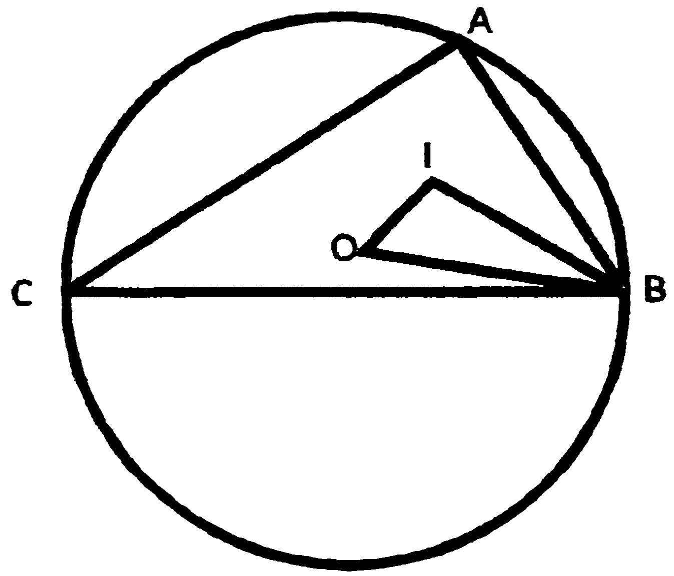


Рис. 19.1

Теорема 1. *Если R — радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC, r — радиус вписанной окружности, d — расстояние между центрами этих окружностей, то $d^2 = R^2 - 2Rr$.*

Доказательство проведем с помощью тригонометрии. Пусть O — центр окружности, описанной вокруг ΔABC, I — центр вписанной в него окружности; a, b, c — длины сторон треугольника ABC.

Докажем, что $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

Действительно, если S — площадь ΔABC, p — его полупериметр, то $r = \frac{S}{p}$.

$$r = \frac{ab\sin C}{2p} = \frac{4R^2\sin A\sin B\sin C}{2R(\sin A + \sin B + \sin C)} =$$

$$= \frac{4R^2\sin A\sin B\sin C}{8R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{32R^2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{8R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} =$$

$$= 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Из ΔOIB по теореме косинусов (рис. 19.1) имеем:

$$OI^2 = OB^2 + BI^2 - 2OB\cdot BI\cdot\cos\angle OBI.$$

Но $OB = R$, $BI = \frac{r}{\sin\frac{B}{2}}$, $\angle OBI = \frac{B}{2} - (90^\circ - C)$.

Поэтому $OI^2 = R^2 + \dfrac{r^2}{\sin\frac{B}{2}} - \dfrac{2Rr\sin\left(\frac{B}{2}+C\right)}{\sin\frac{B}{2}}$.

Применив уже доказанную формулу, получим:

$$\frac{r^2}{\sin\frac{B}{2}} - \frac{2Rr\sin\left(\frac{B}{2}+C\right)}{\sin\frac{B}{2}} =$$

$$= \frac{r\left(4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - 2R\sin\frac{B}{2}\left(\frac{B}{2}+C\right)\right)}{\sin^2\frac{B}{2}} =$$

$$= 2Rr\,\frac{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} - \sin\left(\frac{B}{2}+C\right)}{\sin\frac{B}{2}} =$$

$$= 2Rr\,\frac{\cos\frac{A-C}{2} - \cos\frac{A+C}{2} - \cos\frac{A-C}{2}}{\sin\frac{B}{2}} =$$

$$= -2Rr\,\frac{\cos\frac{A+C}{2}}{\sin\frac{B}{2}} = -2Rr.$$

Итак, $d^2 = OI^2 = R^2 - 2Rr$.

Следствие. В треугольнике радиус описанной окружности не меньше диаметра вписанной в него окружности.

Действительно, $R^2 - 2Rr \geqslant 0$.

Теорема 2. *В любом треугольнике ABC центр описанной окружности O, точка пересечения медиан M и точка пересечения высот (ортоцентр) принадлежат одной прямой (прямая Эйлера).*

Докажем этот факт при помощи гомотетии.

Через вершины треугольника ABC проведем прямые, параллельные его сторонам. Получим $\Delta A_1B_1C_1$ (рис. 19.2). Если рассмотреть гомотетию с центром в точке M и коэффициентом $k = -2$, то образом ΔABC будет $\Delta A_1B_1C_1$. Действительно,

$$H_M^{-2}(A) = A_1 \text{, так как } 2\overline{MA} = -\overline{MA_1},$$

аналогично, $H_M^{-2}(B) = B_1$, $H_M^{-2}(C) = C_1$.

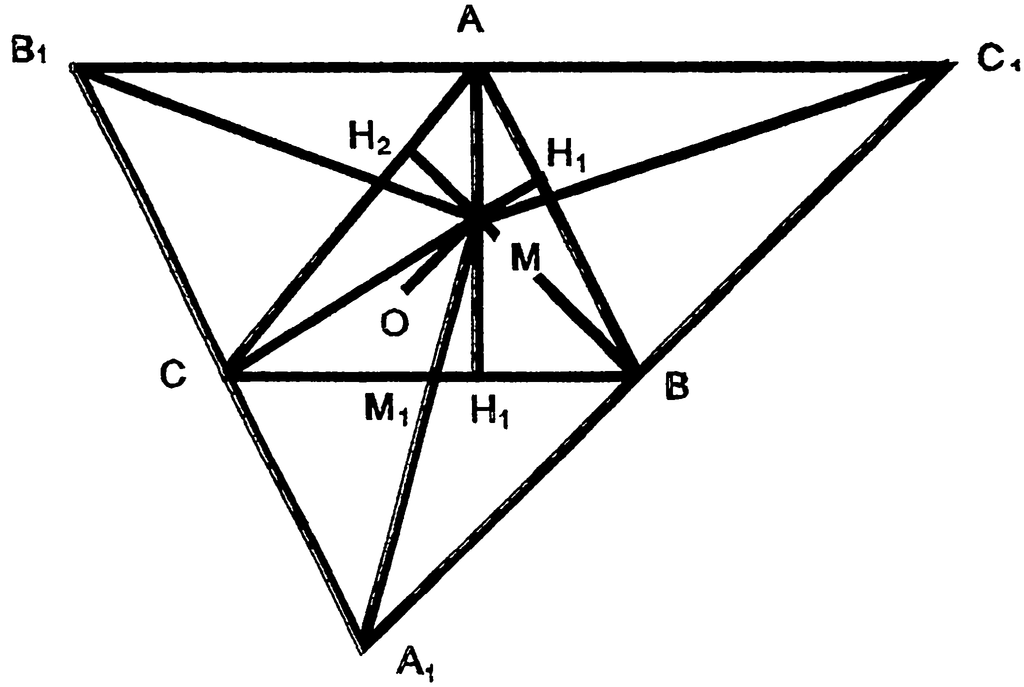


Рис. 19.2

Обратим внимание, что $H_M^{-2}(O) = H$.

Поэтому прямая OH, которой принадлежат соответствующие в этой гомотетии точки O и H, проходит сквозь центр гомотетии — точку M.

Задача 1.

В ΔABC точки M_1, M_2, M_3 — соответственно середины сторон BC, AC, AB.

H — ортоцентр, E_1, E_2, E_3 (точки Эйлера) середины отрезков AH, BH, CH. Доказать, что отрезки M_1E_1, M_2E_2, M_3E_3 пересекаются в одной точке.

Доказательство.

Пусть O — центр окружности, описанной вокруг ΔABC. Рассмотрим гомотетию с центром в точке пересечения медиан (точка M) и коэффициентом гомотетии $k = -2$. Тогда

$$H_M^{-2}(OM_1) = AH.$$

Следовательно, $OM_1 \parallel AH$ и $OM_1 = \frac{1}{2}AH$, то есть четырехугольник OM_1HE_1 — параллелограмм (рис. 19.3), аналогично четырехугольники OM_2HE_2 и OM_3HE_3 — также параллелограммы. Они имеют общую диагональ OH, итак,

$$M_1E_1 \cap M_2E_2 \cap \cap M_3E_3 = E, \qquad (*)$$

где E — середина отрезка OH.

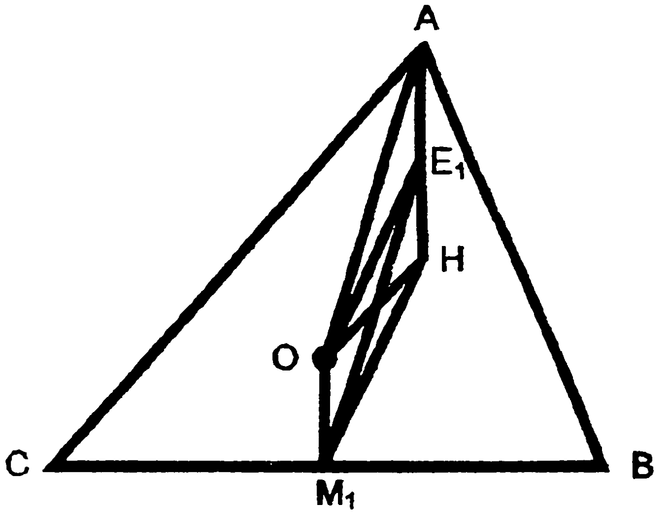


Рис. 19.3

Задача 2.

Доказать, что девять точек: точки Эйлера, середины сторон ΔABC и основания его высот принадлежат окружности (окружность Эйлера).

Доказательство.

Докажем это вновь при помощи гомотетии с центром в ортоцентре H треугольника ABC и коэффициентом гомотетии $k = 2$. В этой гомотетии точкам Эйлера соответствуют точки A, B, C, которые принадлежат окружности, описанной вокруг ΔABC. Высоты треугольника AH_1, BH_2, CH_3 продлим к пересечению с этой окружностью. Получим точки D_1, D_2 и D_3 (рис. 19.4), каждая из которых

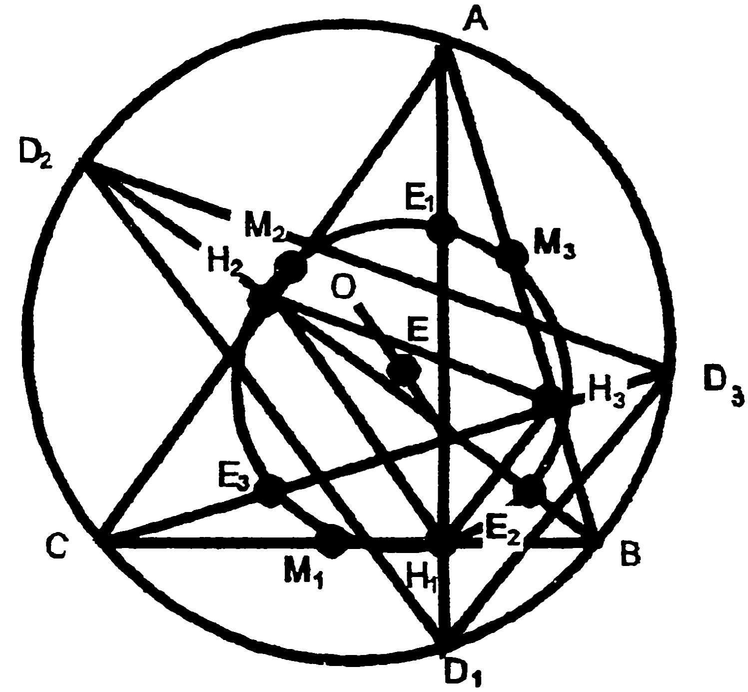


Рис. 19.4

симметрична ортоцентру треугольника H относительно соответствующей стороны (и правда, например, $HH_1 = H_1D_1$, потому что $\angle CHD_1 = \angle CD_1H$). А это обозначает, что в рассмотренной гомотетии образом $\Delta H_1H_2H_3$ будет $\Delta D_1D_2D_3$, вершины которого принадлежат окружности, описанной вокруг ΔABC. Итак, эта окружность есть образом окружности, описанной вокруг треугольника $\Delta H_1H_2H_3$ и ему же принадлежат точки Эйлера. Считая коэффициент гомотетии, считаем, что центр меньшей окружности делит отрезок OH пополам, а радиус его равен половине радиуса окружности, описанной вокруг ΔABC. Из соотношения (*): $M_1E = EE_1$. Таким образом, окружности, описанной вокруг $\Delta H_1H_2H_3$, принадлежит и точка M_1 — середина стороны BC, а значит, и середины отрезков AC и BA — точки M_2, M_3.

Задача 3 *(задача Эйлера).*

Доказать, что отрезок t, соединяющий E_1 и E_2 — середины диагоналей четырехугольника $ABCD$, вычисляется по формуле Эйлера

$$t_3^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2),$$

где a, b, c, d — длины сторон; e и f — длины диагоналей.

Доказательство.

Из треугольника BDE_2 следует, что

$$E_1E_2^2 = \frac{2(BE_2^2 + DE_2^2) - BD^2}{4},$$

а из треугольников ABC и ADC имеем

$$BE_2^2 = \frac{2(a^2 + d^2) - f^2}{4}, \quad DE^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - f^2}{4},$$

$$E_1E_2^2 = t^2 = \frac{2\left(\frac{2(a^2 + d^2) - f^2}{4} + \frac{2(b^2 + c^2) - f^2}{4}\right) - e^2}{4} =$$

$$= \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2).$$

О двух формулах Леонарда Эйлера

Первая формула Эйлера

$$S_x = \frac{S}{4}\left(1 - \frac{OX^2}{R^2}\right), \qquad (1)$$

где S_x — площадь треугольника, вершины которого совпадают с проекциями любой точки x на стороны остроугольного треугольника ABC, S — площадь треугольника ABC, R — радиус описанной окружности, O — центр этой окружности.

Для доказательства формулы (1) сначала рассмотрим две задачи.

Задача А.

Если продолжить отрезки AX, BX, CX до пересечения с описанной вокруг ΔABC окружностью в точках A_1, B_1, C_1, то треугольники ABC и $X_1X_2X_3$ будут подобными.

Доказательство.

Докажем равенство углов $X_1X_2X_3$ и $A_1B_1C_1$ (рис. 19.5). Опишем окружность вокруг четырехугольника AX_2XX_3.

Имеем $\angle XX_2X_3 = \angle XAX_3 = \angle AB_1B$, а также

$\angle XX_2X_1 = \angle XCX_1 = \angle BB_1C$, тогда $\angle X_1X_2X_3 = \angle A_1B_1C_1$.

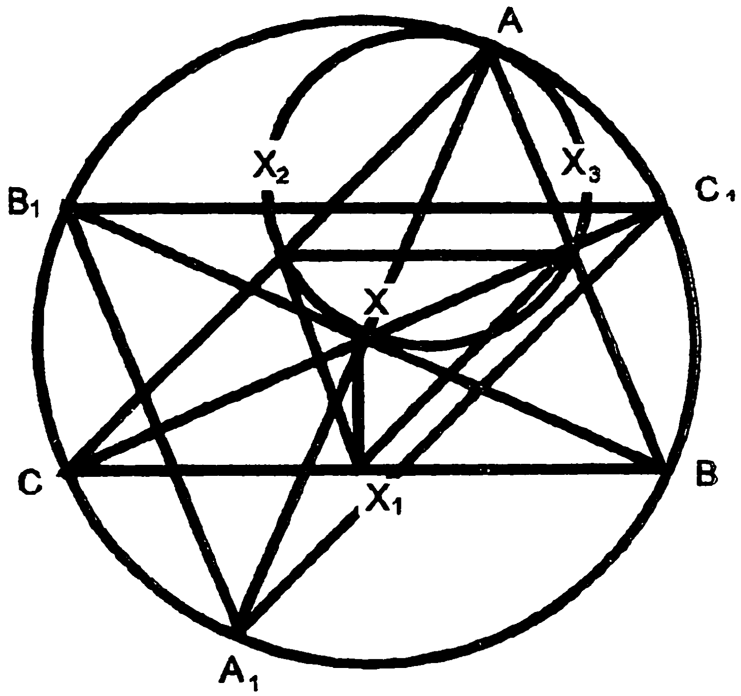


Рис. 19.5

Аналогично доказываем, что $\angle X_2X_1X_3 = \angle B_1A_1C_1$, тогда $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta X_1X_2X_3$.

Задача В.

Доказать, что треугольник BXC подобен треугольнику C_1XB.

Доказательство.

Действительно, $\angle C_1CB = \angle C_1B_1B$, а $\angle B_1C_1C = \angle B_1BC$, как вписанные, опирающиеся на одну дугу.

Перейдем к доказательству формулы Эйлера (1).

Обозначим R_x радиус окружности, описанной вокруг $\Delta X_1X_2X_3$ и используем формулу $S = \frac{abc}{4R}$. Тогда

$$\frac{S_x}{S} = \frac{R}{R_x} = \frac{X_2X_3 \cdot X_1X_2 \cdot X_1X_3}{BC \cdot AC \cdot AB}.$$

По задаче А: $\frac{R}{R_x} = \frac{B_1C_1}{X_2X_3}$, а значит,

$$\frac{S_x}{S} = \frac{B_1C_1}{X_2X_3} \cdot \frac{X_2X_3 \cdot X_1X_2 \cdot X_1X_3}{BC \cdot AC \cdot AB} = \frac{B_1C_1 \cdot X_1X_2 \cdot X_1X_3}{BC \cdot AC \cdot AB}, \text{ но}$$

$$X_1X_2 = CX \cdot \sin C = CX \cdot \frac{AB}{2R}; \quad X_1X_3 = BX \sin B = BX \cdot \frac{AC}{2R},$$

значит,

$$\frac{S_x}{S} = \frac{B_1C_1 \cdot CX \cdot AB \cdot BX \cdot AC}{2R \cdot 2R \cdot AB \cdot BC \cdot AC} = \frac{B_1C_1 \cdot CX \cdot BX}{4R^2 \cdot BC} =$$

$$= \frac{1}{4R^2} \cdot \frac{B_1C_1}{BC} BX \cdot CX.$$

Из задачи В: $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{B_1X}{CX}$, поэтому

$$\frac{S_x}{S} = \frac{1}{4R^2} \frac{B_1X}{CX} \cdot BX \cdot CX = \frac{1}{4R^2} \cdot B_1X \cdot BX.$$

Но $B_1X \cdot BX = (R - OX) \cdot (R + OX) = R^2 - OX^2$, поэтому $\frac{S_x}{S} = \frac{1}{4R^2}(R^2 - OX^2)$, отсюда $S_x = \frac{S}{4}\left(1 - \frac{OX^2}{R^2}\right)$, что и требовалось доказать.

Вторая формула Эйлера.

Если O — центр описанной окружности, I — центр вписанной окружности (инцентр), то

$$OI^2 = R^2 - 2Rr. \qquad (2)$$

Докажем эту формулу с помощью формулы (1).

Пусть точки X и I совпадают. Тогда по формуле (1)

$$S_I = \frac{S}{4}\left(1 - \frac{OI^2}{R^2}\right). \text{ Но}$$

$$S_I = S_{IK_1K_2} + S_{IK_1K_3} + S_{IK_2K_3} = \frac{1}{2}r^2(\sin A + \sin B + \sin C),$$

значит, $\frac{S}{2}\left(1 - \frac{OI^2}{R^2}\right) = r(\sin A + \sin B + \sin C)$.

Поскольку $S = rp$, $p = R(\sin A + \sin B + \sin C)$,

$$\frac{rp}{2}\left(1 - \frac{OI^2}{R^2}\right) = r^2(\sin A + \sin B + \sin C),$$

или $\frac{R}{2}\left(1 - \frac{OI^2}{R^2}\right) = r$, тогда $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

Задача 4.

Доказать, что $\frac{S_1}{S} = \frac{r}{2R}$.

Доказательство.

По формуле (1), если x совпадает с инцентром I, то

$$S_1 = \frac{S}{4}\left(1 - \frac{OI^2}{R^2}\right).$$

По формуле (2)

$$S_1 = \frac{S}{4}\left(1 - \frac{R^2 - 2Rr}{R^2}\right) = \frac{S}{2} \cdot \frac{r}{R} \text{ и } \frac{S_1}{S} = \frac{r}{2R}.$$

Задача 5 *(прямая Симпсона).*

Доказать, что если точка принадлежит окружности, описанной вокруг треугольника ABC, то точки X_1, X_2, X_3 принадлежат одной прямой (прямая Симпсона).

Доказательство.

Действительно, в этом случае $OX = R$ и $S_x = 0$, что и доказывает утверждаемое в задаче.

Задача 6.

Построить треугольник ABC по R, r, a.

Решение.

Построим окружность радиуса R, центр которой обозначим точкой O. В этой окружности проведем хорду BC, длина которой a. Из всех треугольников со стороной a необходимо найти такой, в котором радиус вписанной окружности равняется r.

Проведем на расстоянии r от хорды BC прямую l, параллельную BC, и из точки O проведем дугу радиуса

$$OI = \sqrt{R^2 - 2Rr}$$

(формула 2) до пересечения с прямой l. Находим центр I вписанной окружности. Из точек B и C проводим к ней касательные, которые пересекутся в точке A, которая принадлежит окружности радиуса R.

Треугольник ABC — искомый.

Задача 7.

Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его средней линии. Определить угол BAC, если центр O описанной окружности принадлежит вписанной окружности.

Решение.

Обозначим K точку касания вписанной в треугольник ABC окружности к стороне AC. Имеем $IK = r$.

По формуле (2) и по условию $r^2 = R^2 - 2Rr$ найдем $\frac{r}{R}$:

$$\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\frac{r}{R} - 1 = 0, \quad \frac{r}{R} = \sqrt{2} - 1.$$

Поскольку трапеция BCM_2M_3 описана вокруг окружности, то $\frac{b}{2}+\frac{c}{2}=\frac{a}{2}+a$, значит, $\frac{1}{2}(b+c-a)=a$, следовательно), $p-a=a$ (p — полупериметр треугольника ABC).

Поскольку $r=(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ и $p-a=a$, то $r=a\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ или $r=2R\sin A\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, и $\sin A\cdot\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{r}{R}$.

$$2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\cdot\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1);$$

$$2\sin^2\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{2}-1}{2},\quad \cos A=1-\frac{\sqrt{2}-1}{2}=\frac{3-\sqrt{2}}{2};$$

$$A=\arccos\frac{3-\sqrt{2}}{2}.$$

Задача 8.

Доказать, что $S_x\leqslant\frac{S}{4}$.

Доказательство.

Действительно, так как $OX\leqslant R$, то по формуле (1) $S_x=\frac{S}{4}$.

Задача 9.

Вычислить наибольшую площадь треугольника $X_1X_2X_3$, если a, b, c — длины сторон треугольника ABC.

Решение.

Докажем, что наибольшую площадь имеет треугольник $M_1M_2M_3$. Действительно, так как $S_x\leqslant\frac{S}{4}$, то знак равенства будет в том случае, когда точки X и O совпадают, а точки X_1, X_2, X_3 являются серединами сторон треугольника ABC. Итак, наибольшая площадь треугольника $X_1X_2X_3$ равна $\frac{S}{4}$, а S можно найти по формуле Герона.

Задача 10.

Доказать, что $S_x \leqslant \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + S_3)$, где S_1, S_2, S_3 — площади треугольников AX_2X_3, BX_1X_3, CX_1X_2.

Доказательство.

Так как $S_x \leqslant \frac{S}{4}$ и $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_x$, то

$$4S_x \leqslant S_x + S_1 + S_2 + S_3, \text{ или } S_x \leqslant \frac{S_1 + S_2 + S_3}{3}.$$

Равенство выполняется, если X и O совпадают.

Задача 11.

Доказать, что $R \geqslant 2r$.

Доказательство.

Действительно, $OI^2 = R^2 - 2Rr \geqslant 0$, тогда $R \geqslant 2r$.

Задача 12.

В тетраэдре $DABC$ имеем O — центр описанной сферы; R — ее радиус; O_0, I_0 — центры окружностей соответственно описанной вокруг треугольника ABC и вписанной в него; R_0 и r_0 — их радиусы.

Доказать, что $OI_0^2 = R^2 - 2R_0r_0$.

Доказательство.

Пусть точка O_0 — проекция точки O на грань ABC. Из ΔOO_0I_0 имеем $OI^2 = OO_0^2 + O_0I_0^2$, или из ΔAOO_0 следует, что $OO_0^2 = R^2 - R_0^2$.

По формуле Эйлера имеем $O_0I_0^2 = R_0^2 - 2R_0r_0$. Итак,

$$OI_0^2 = R^2 - R_0^2 + R_0^2 - 2R_0r_0 = R^2 - 2R_0r_0.$$

20. ЧТО БОЛЬШЕ?

Задача 1.

Что больше: 5^{15} или 3^{23}?

Решение.

$$3^{23} = 9 \cdot (3^3)^7;\quad 5^{15} = 5 \cdot (5^2)^7,\ \text{поэтому}\ 3^{23} > 5^{15}.$$

Задача 2.

Что больше: $\dfrac{10^{10}+1}{10^{11}+1}$ или $\dfrac{10^{11}+1}{10^{12}+1}$?

Решение. *Первый способ.*

Сделаем замену $10^{10} = a$. Тогда получим

$$\frac{10^{10}+1}{10^{11}+1} = \frac{a+1}{10a+1};\quad \frac{10^{11}+1}{10^{12}+1} = \frac{10a+1}{100a+1}.$$

Сравнение данных дробей свелось к сравнению дробей

$$\frac{a+1}{10a+1}\ \text{и}\ \frac{10a+1}{100a+1}.$$

Приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{a+1}{10a+1} = \frac{(a+1)(100a+1)}{(10a+1)(100a+1)};$$

$$\frac{10a+1}{100a+1} = \frac{(10a+1)(10a+1)}{(100a+1)(10a+1)};$$

Сравним числители дробей. Имеем

$$(a+1)(100a+1) = 100a^2 + 101a + 1;$$

$$(10a+1)(10a+1) = 100a^2 + 20a + 1.$$

Так как $101a > 20a$ $(a = 10^{10})$, то числитель первой дроби больше числителя второй дроби, а поскольку знаменатели у них равны, то

$$\frac{a+1}{10a+1} > \frac{10a+1}{100a+1},\ \text{т.е.}\ \frac{10^{10}+1}{10^{11}+1} > \frac{10^{11}+1}{10^{12}+1}.$$

Второй способ.

Вычитая от обеих дробей по 0,1 мы легко получаем дроби с одинаковыми числителями, которые легко сравнить:

$$\frac{10^{10}+1}{10^{11}+1}-\frac{1}{10}=\frac{9}{10^{12}+10};$$

$$\frac{10^{11}+1}{10^{12}+1}-\frac{1}{10}=\frac{9}{10^{13}+10}.$$

Так как $\frac{9}{10^{12}+10}>\frac{9}{10^{13}+10}$, то $\frac{10^{10}+1}{10^{11}+1}>\frac{10^{11}+1}{10^{12}+1}$.

Третий способ.

Умножим каждую дробь на 10 и выделив единицу, будем иметь

$$10\cdot\frac{10^{10}+1}{10^{11}+1}=1+\frac{9}{10^{11}+1};$$

$$10\cdot\frac{10^{11}+1}{10^{12}+1}=1+\frac{9}{10^{12}+1}.$$

Так как $\frac{9}{10^{11}+1}>\frac{9}{10^{12}+1}$, то первая дробь больше второй.

Задача 3.

Что больше: $\lg 6$ или $\lg^2 8$?

Решение.

$$\lg^2 8=(1+\lg 0{,}8)^2=1+2\lg 0{,}8+\lg^2 0{,}8>1+2\lg 0{,}8=$$

$$=\lg(10\cdot 0{,}8^2)=\lg 6{,}4>\lg 6.$$

Ответ: $\lg^2 8>\lg 6$.

Задача 4.

При $n=1,\ 2,\ 3$ сравнить числа

$$\sin^n 1^\circ+\sin^n 4^\circ \text{ и } \sin^n 2^\circ+\sin^n 3^\circ.$$

Решение.

1) $n = 1$. Преобразуем сумму синусов в произведение:

$$\sin 1^\circ + \sin 4^\circ = 2\sin 2{,}5^\circ \cos 1{,}5^\circ;$$

$$\sin 2^\circ + \sin 3^\circ = 2\sin 2{,}5^\circ \cos 0{,}5^\circ.$$

Очевидно, что второе число больше первого, ибо

$$\sin 2{,}5^\circ > 0 \text{ и } \cos 0{,}5^\circ > \cos 1{,}5^\circ.$$

2) $n = 2$. Имеем:

$$\sin^2 1^\circ + \sin^2 4^\circ = \frac{1 - \cos 2^\circ + 1 - \cos 8^\circ}{2};$$

$$\sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ = \frac{1 - \cos 4^\circ + 1 - \cos 6^\circ}{2}.$$

Покажем теперь, что первое число больше.

Для этого достаточно установить неравенство

$$\cos 4^\circ + \cos 6^\circ > \cos 2^\circ + \cos 8^\circ,$$

а оно равносильно неравенству

$$2\cos 5^\circ \cos 1^\circ > 2\cos 5^\circ \cos 3^\circ,$$

которое сразу следует из того, что

$$\cos 5^\circ > 0 \text{ и } \cos 1^\circ > \cos 3^\circ.$$

3) $n = 3$. Воспользуемся формулами «тройного угла». Имеем

$$\sin 9^\circ - \sin 3^\circ + \sin 6^\circ - \sin 12^\circ >$$

$$> 3\sin 3^\circ - 3\sin 1^\circ + 3\sin 2^\circ - 3\sin 4^\circ;$$

$$2\cos 6^\circ \sin 3^\circ - 2\cos 9^\circ \sin 3^\circ >$$

$$> 6\cos 2^\circ \sin 1^\circ - 6\cos 3^\circ \sin 1^\circ;$$

$$\sin 3^\circ \sin 7{,}5^\circ \sin 1{,}5^\circ > 3\sin 1^\circ \sin 2{,}5^\circ \sin 0{,}5^\circ.$$

Далее $(3 - 4\sin^2 1^\circ)(3 - 4\sin^2 2{,}5^\circ)(3 - 4\sin^2 0{,}5^\circ) > 3$,

или $(1 + 2\cos 2^\circ)(1 + 2\cos 5^\circ)(1 + 2\cos 1^\circ) > 3$,

а вероятно, левая часть более 8, значит,

$$\cos 1^\circ > \cos 2^\circ > \cos 5^\circ > \frac{1}{2}.$$

Задача 5.

Какое из двух чисел больше:

$$\sqrt[3]{\log_2 3 \cdot \log_2 5} \quad \text{или} \quad \sqrt[3]{\log_3 2 \cdot \log_2 5}\,?$$

Решение.

Заметим, что подкоренные выражения в обоих числах содержат общий множитель $\log_2 5$, на основании свойств степеней сократим на него и полученные после этого степени обозначим соответственно через a и b.

Тогда $\log_2^3 a = \log_2 3$, $\log_2^3 b = \log_3 2 \cdot \log_2^3 3 = \log_2^2 3$, и поскольку $\log_2 3 > 1$, то $\log_2^3 b > \log_2^3 a$, так что $b > a$, и второе число из заданных чисел больше.

Задача 6.

Что больше: 1986^{1985} или 1985^{1986}?

Решение.

Рассмотрим функцию $y = x^{1/x}$ при $x = 1985$ и $x = 1986$. Производная этой функции $y' = x^{1/x-2}(1 - \ln x)$ отрицательна при $x > e$, так что на промежутке $(e;\ \infty)$ функция $y = x^{1/x}$ убывает. Поэтому

$$\sqrt[1986]{1986} < \sqrt[1985]{1985}, \text{ а значит, } 1986^{1985} < 1985^{1986}.$$

Задача 7.

Что больше: $\sqrt{9978} + \sqrt{9981}$ или $\sqrt{9979} + \sqrt{9980}$?

Решение.

Вычтем из одного числа другое

$$(\sqrt{9981} - \sqrt{9980}) - (\sqrt{9979} - \sqrt{9978}). \qquad (1)$$

Каждую разность радикалов умножим и одновременно разделим на их сумму:

$$\frac{(\sqrt{9981} - \sqrt{9980})(\sqrt{9981} + \sqrt{9980})}{\sqrt{9981} + \sqrt{9980}} -$$

$$- \frac{(\sqrt{9979} - \sqrt{9978})(\sqrt{9979} + \sqrt{9978})}{\sqrt{9979} + \sqrt{9978}}.$$

Поскольку $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a - b$, разность (1) равна

$$\frac{1}{\sqrt{9981}+\sqrt{9980}} - \frac{1}{\sqrt{9979}+\sqrt{9978}}.$$

Знаменатель первой дроби больше знаменателя второй дроби, откуда следует, что первое число меньше второго:

$$\sqrt{9978}+\sqrt{9981} < \sqrt{9979}+\sqrt{9980}.$$

Задача 8.

Верны ли неравенства: $63^7 < 16^{12}$; $32^9 < 18^{13}$?

Решение.

Данные неравенства верны. Действительно,

$$63^7 < 64^7 = 4^{21} < 4^{24} = 16^{12};$$

$$32^9 = 2^{45} < 2^{52} = 16^{13} < 18^{13}.$$

Задача 9.

Какое из чисел больше:

$$\log_5 2 \text{ или } \cos^3\frac{4}{5}?$$

Решение.

Поскольку $5 < 4^{\sqrt{2}}$, то

$$\log_5 2 = \frac{1}{\log_2 5} > \frac{1}{\log_2 2^{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

С другой стороны $\cos^3\frac{4}{5} < \cos^3\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, и поэтому первое число больше.

Задача 10.

Что больше: $e^{1/\pi - 1/e}$ или $(e/\pi)^e$?

Решение.

Записав неравенство $e^{1/\pi - 1/e} > (e/\pi)^e$ в виде

$$e^{1/\pi}\pi^e > e^{1/e}e^e, \text{ или } f(\pi) > f(e),$$

где $f(x) = e^{1/x} x^e$ $(x > 0)$, будем иметь

$$f'(x) = e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) x^e + e^{1/x} e\, x^{e-1} = e^{1/x} x\, e{-2}\,(ex - 1),$$

так что $f'(x) > 0 \Leftrightarrow ex - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1/e$.

Поэтому $f(\pi) > f(e)$, т.е. $e^{1/\pi} \pi^e > e^{1/e} e^e$.

Задача 11.

Какое из двух чисел больше: $4^{\sqrt{2}}$ или $3^{\sqrt{3}}$?

Решение.

Имеем $4^{\sqrt{2/3}} > 4^{\sqrt{0,64}} = 4^{4/5} > 3$, так что $4^{\sqrt{2}} > 3^{\sqrt{3}}$.

Задача 12.

Верно ли неравенство

$$\sqrt{40\sqrt{38\sqrt{36\sqrt{34\ldots\sqrt{6\sqrt{2}}}}}} < 105?$$

Решение.

Левая часть данного неравенства увеличится, если все числа 38, 36, 34,... заменим числом 40, но

$$\sqrt{40\sqrt{40\sqrt{40\sqrt{40\ldots\sqrt{40\sqrt{40}}}}}} = 40^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{20}}} < 40,$$

и, следовательно, заданное неравенство верно.

Задача 13.

Что больше: $4\,\mathrm{tg}\,5^\circ \cdot \mathrm{tg}\,9^\circ$ или $3\,\mathrm{tg}\,6^\circ \cdot \mathrm{tg}\,10^\circ$?

Решение.

Рассмотрим функцию f, определенную формулой

$$f(x) = \frac{\mathrm{tg}\,x}{x}.$$

Ясно, что на промежутке $\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$ ее производная

$$f'(x) = \frac{\dfrac{x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg} x}{x^2} = \frac{x - \sin x \cos x}{x^2 \cos^2 x} = \frac{2x - \sin 2x}{2x^2 \cos^2 x}$$

положительна, и, следовательно, на этом промежутке функция f возрастает, поэтому

$$\frac{6\pi}{180} \operatorname{tg} \frac{5\pi}{180} < \frac{5\pi}{180} \operatorname{tg} \frac{6\pi}{180} \text{ и } 6 \operatorname{tg} 5° < 5 \operatorname{tg} 6°.$$

Аналогично получаем неравенство

$$10 \operatorname{tg} 9° < 9 \operatorname{tg} 10°.$$

Перемножив два последних неравенства, мы получим, что $3 \operatorname{tg} 6° \cdot \operatorname{tg} 10° > 4 \operatorname{tg} 5° \cdot \operatorname{tg} 9°$.

Задача 14.

Что больше: $\lg 8$ или $\lg^2 9$?

Решение.

$$\lg^2 9 = (1 + \lg 0{,}9)^2 > 1 + 2 \lg 0{,}9 = \lg 8{,}1 > \lg 8.$$

Задача 15.

Доказать: $\sin 1 < \log_3 \sqrt{7}$.

Доказательство.

$$\sin 1 < \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{7}{8} < \log_3 \sqrt{7}$$

(последнее неравенство следует из того, что $3^7 < 7^4$).

Задача 16.

Что больше:

$$\lg^2 (5 + \sqrt{35}) \text{ или } \lg (6 + \sqrt{35})?$$

Решение.

Так как $(5 + \sqrt{35})^2 = 10 (6 + \sqrt{35})$, то положив

$$a = 5 + \sqrt{35},$$

получим $\lg^2 a - \lg \dfrac{a^2}{10} = (\lg a - 1)^2 > 0$, так что первое число больше.

Задача 17.

Что больше: $\log_4 2$ или $\log_{0,0625} 0,25$?

Решение.

Имеем: $\log_4 2 = \frac{1}{2}$; $\log_{0,0625} 0,25 = \log_{0,0625} 0,0625^{1/2} = \frac{1}{2}$,

$$\text{значит, } \log_4 2 = \log_{0,0625} 0,25.$$

Задача 18.

Что больше: $\log_{\log_3 2} \frac{1}{2}$ или 1?

Решение.

Имеем $\log_3 2 > \log_4 2 = \frac{1}{2}$, отсюда $\log_{\log_3 2} \frac{1}{2} > \log_{1/2} \frac{1}{2} = 1$.

Задача 19.

Что больше: $\log_4 26$ или $\log_6 17$?

Решение.

Имеем $\log_4 26 > \log_4 16 = 2$, а $\log_6 17 < \log_6 36 = 2$, значит, $\log_6 17 < 2$. Итак,

$$\log_4 26 > \log_6 17.$$

Задача 20.

Что больше: $\log_2 3$ или $\log_5 8$?

Решение.

Имеем: $\frac{2}{3}\log_2 3 = \log_2 \sqrt[3]{9} > 1$; $\frac{2}{3}\log_5 8 = \log_5 \sqrt[3]{64} < 1$; значит, $\log_2 3 > \log_5 8$.

Задача 21.

Что больше: $\log_9 10$ или $\log_{10} 11$?

Решение.

Имеем: $\log_9 10 + \log_{10} 9 > 2$; $\log_{10} 11 + \log_{10} 9 = \log_{10} 99 < 2$; значит, $\log_9 10 > \log_{10} 11$.

Задача 22.

Что больше: $\log_3 10 + 4\lg 3$ или 4?

Решение.

Имеем: $\log_3 10 + 4\lg 3 = 2\left(\dfrac{\log_3 10}{2} + \dfrac{2}{\log_3 10}\right) > 4.$

Задача 23.

Доказать, что

$$-\log_3 5 \cdot \log_2 17 \cdot \log_{1/5} 4 > 4.$$

Решение.

Имеем: $-\log_3 5 \cdot \log_2 17 \cdot \log_{1/5} 4 =$

$$= \log_2 17 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 4 =$$

$$= \log_2 17 \cdot \frac{\log_5 4}{\log_5 3} = \log_2 17 \cdot \log_3 4 > 4.$$

21. ДВА НЕИЗВЕСТНЫХ В ОДНОМ УСЛОВИИ

Задача 1.

Решить уравнение

$$\frac{\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}^2 y}{1 + \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}^2 y} = \sin^2 x + \sin^2 y.$$

Решение.

Если $a = \mathrm{tg}^2 x$, $b = \mathrm{tg}^2 y$, то уравнение принимает вид

$$\frac{a+b}{1+a+b} = \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}.$$

Но $\dfrac{a}{1+a+b} \leqslant \dfrac{a}{1+a}$; $\dfrac{b}{1+a+b} \leqslant \dfrac{b}{1+b}$,

и поэтому равенство выполняется только при условии, что $a = 0$.

Следовательно, решениями уравнения являются пары вида $(n\pi, c)$ и $(c, n\pi)$, где $n \in Z$, а c — любое действительное число, не равное $(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ $(k \in Z)$.

Задача 2.

Найти наибольшее значение выражения $x + 2y$, если x и y отрицательны и удовлетворяют неравенству

$$x^4 - 4xy + y^2 + 3 \leqslant 0.$$

Решение.

Выясним, при каких значениях a система

$$\begin{cases} x + 2y = a, \\ x^4 - 4xy + y^2 + 3 \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет решения $x < 0$, $y < 0$.

Наибольшее из этих значений и будет решением задачи. Подставляя $x = a - 2y$ в неравенство, приведем его к виду

$$13y^2 - 8ay + a^2 + 3 \leqslant 0.$$

Это неравенство имеет решения при $a^2 \geqslant 13$. При $a = -\sqrt{13}$ одним из его решений является $y = -\frac{4}{\sqrt{13}}$, а тогда решением системы является пара $\left(-\frac{5}{\sqrt{13}}; -\frac{4}{\sqrt{13}}\right)$.

Таким образом, искомое наибольшее значение равно $-\sqrt{13}$.

Задача 3.

Доказать, что не существует целых чисел x и y, для которых справедливо равенство

$$\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{y^2-y+1} = 11.$$

Решение.

Так как для любого целого числа x^2 и x либо оба четны, либо оба нечетны, то сумма x^2+x всегда четна. Поэтому выражение под первым знаком корня всегда представляет собой нечетное число, а следовательно, и корень из него — нечетное число. Точно так же нечетным числом является второе слагаемое в левой части данного равенства. Но сумма двух нечетных чисел не может быть равна 11, откуда и вытекает требуемое утверждение.

Задача 4.

Найти все целые числа x и y, удовлетворяющие уравнению

$$(2x+5y+1)(2^{|x|}+x^2+x+y) = 105.$$

Решение.

Так как 105 — число нечетное, то числа $2x+5y+1$ и $2^{|x|}+x^2+x+y$ также нечетные. Отсюда y — число четное, и поскольку число x^2+x при любом x четно, то число $2^{|x|}$ должно быть нечетным, а это возможно лишь при $x=0$.

Теперь получаем равенство $(5y+1)(y+1) = 105$, т.е. число 105 представлено в виде произведения двух множителей, разность которых делится на 4. Простым перебором можно убедиться, что это возможно лишь при $y=4$.

Итак, условию задачи удовлетворяют только числа $x=0$ и $y=4$.

Задача 5.

Решить в натуральных числах уравнение

$$5^x = 1 + 2^y.$$

Решение.

При четном x данное уравнение преобразуем следующим образом:

$$5^{2n} - 1 = 2^y;$$

$$(5^2 - 1)(5^{2n-2} + 5^{2n-4} + \ldots + 5^2 + 1) = 2^y;$$

$$24\,(5^{2n-2} + 5^{2n-4} + \ldots + 5^2 + 1) = 2^y.$$

Левая часть последнего равенства делится на 3, а правая нет, так что данное уравнение не имеет решений с четным x. При нечетном x аналогично получаем:

$$5^{2n+1} - 1 = 2^y. \text{ Имеем:}$$

$$(5 - 1)(5^{2n} + 5^{2n-1} + \ldots + 5 + 1) = 2^y;$$

$$4\,(5^{2n} + 5^{2n-1} + \ldots + 5 + 1) = 2^y.$$

В скобках левой части последнего равенства стоит сумма нечетного числа нечетных чисел, т.е. нечетное число, поэтому $n = 0$, откуда $x = 1$ и $y = 2$.

Задача 6.

Решить в целых числах уравнение

$$\sqrt{1 - x + x^2} + \sqrt{1 - y + y^2} = \sqrt{x^2 + xy + y^2}.$$

Решение.

Рассмотрим векторы

$$\bar{a} = (2x - 1,\ -\sqrt{3}),\quad \bar{b} = (y + 1,\ \sqrt{3} - \sqrt{3}y).$$

Тогда $\bar{a}^2 = 4x^2 - 4x + 4$, $\bar{b}^2 = 4y^2 - 4y + 4$,

$$(\bar{a} + \bar{b})^2 = (2x + y)^2 + 3y^2 = 4x^2 + 4xy + 4y^2$$

и данное уравнение означает, что $|\bar{a}| + |\bar{b}| = |\bar{a} + \bar{b}|$.

Это равенство выполняется только в случае, когда векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны и сонаправлены. Из равенства

$$\frac{y+1}{2x-1} = y-1$$

получаем, что $y+1$ делится на $y-1$, откуда

$$y \in \{-1,\ 0,\ 2,\ 3\}.$$

Соответствующие целые значения x получаются при $y \in \{0,\ 2\}$ и равны 0 и 2. При $x = y = 0$ векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеют противоположные направления, так что единственным целочисленным решением данного уравнения является пара (2, 2).

Задача 7.

При каком условии радикал $\sqrt{m+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ можно представить в виде суммы трех радикалов $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$, где x, y, z — положительные рациональные числа?

Решение.

Положим $\sqrt{m+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$. Возведем обе части равенства в квадрат. Получим

$$x+y+z=m,\quad 2\sqrt{xy}=\sqrt{a},\quad 2\sqrt{xz}=\sqrt{b},\quad 2\sqrt{yz}=\sqrt{c}.$$

Решим данную систему относительно x, y, z:

$$x=\frac{\sqrt{abc}}{2c},\quad y=\frac{\sqrt{abc}}{2b},\quad z=\frac{\sqrt{abc}}{2a},$$

т.е. abc должно быть точным квадратом:

$$m=\frac{ab+ac+bc}{2\sqrt{abc}}.$$

Задача 8.

Найти все натуральные числа x, y, z, удовлетворяющие равенству

$$x^y - 2^z = 1. \qquad (1)$$

Решение.

Ясно, что при $y = 1$, взяв произвольное число z и $x = 2^z + 1$, мы получим тройку чисел, удовлетворяющую равенству (1).

Пусть $y \neq 1$; перепишем равенство (1) в виде

$$x^y - 1 = 2^z, \text{ или} \tag{2}$$

$$(x-1)(x^{y-1} + x^{y-2} + \ldots + x + 1) = 2^z. \tag{3}$$

Отсюда видно, что $x - 1$ является делителем числа 2^z, т.е. имеет вид 2^t. Поэтому число x нечетно, а поскольку второй множитель в левой части равенства (3) должен быть четным, то y — число четное, $y = 2m$. При этом значении y равенство (2) принимает вид $x^{2m} - 1 = 2^z$, откуда следует, что 2^z делится на $x^2 - 1$, т.е. делится на $x + 1$. Но тогда $x + 1$ так же, как и $x - 1$, является степенью числа 2. Это возможно лишь при $x = 3$, и нам остается найти натуральные числа m и z такие, что $3^{2m} - 1 = 2^z$, или $(3^m - 1)(3^m + 1) = 2^z$.

Но в этом равенстве множители $3^m - 1$ и $3^m + 1$ снова являются последовательными четными числами и степенями числа 2, что возможно лишь при $m = 1$, а тогда $z = 3$.

Таким образом, равенству (1) удовлетворяют все тройки натуральных чисел вида $(2^z + 1;\ 1;\ z)$, где z — произвольное натуральное число, и тройка $(3;\ 2;\ 3)$.

Задача 9.

Найти двузначное число, равное неполному квадрату суммы его цифр.

Решение.

Согласно условию, $10x + y = x^2 + xy + y^2$, или

$$10x + y + xy = (x + y)^2.$$

Так как $x \leqslant 9$ и $y \leqslant 9$, то

$$10x + y + xy \leqslant 180, \quad (x + y)^2 \leqslant 180,$$

а тогда $x + y \leqslant 13$.

Но при $x + y = 13$ наибольшее значение выражение $10x + y + xy$ получит, очевидно, при $x = 9$, $y = 4$:

$$10x + y + xy \leq 130;$$

следовательно, $(x + y)^2 \leq 130$ и $x + y \leq 11$.

При $x + y = 11$ $10x + y + xy \leq 110$, откуда $x + y \leq 10$.

При $x + y = 10$ значение $x = 9$, $y = 1$ удовлетворяет условию задачи.

При $x + y = 9$ условию задачи удовлетворяют $x = 6$, $y = 3$.

При $x + y = 8$, $x + y = 7$, $x + y = 6$, $x + y = 5$, как нетрудно в этом убедиться, решений нет.

При $x + y = 4$ имеем решение $x = 1$, $y = 3$.

Ответ: 91, 63, 13.

Задача 10.

Существуют ли целые числа x и y, для которых

$$1988x^{1989} + 1989y^{1990} = 1991?$$

Решение.

Ясно, что число y должно быть нечетным, а тогда левая часть равенства при делении на 4 дает остаток 1, а правая часть — остаток 3. Поэтому требуемых чисел x и y не существует.

Задача 11.

Решить уравнение $x^2 + 6x\sin(xy) + 9 = 0$.

Решение.

$$(x + 3\sin(xy))^2 + 9(1 - \sin^2(xy)) = 0, \text{ или}$$

$$(x + 3\sin(xy))^2 + (3\cos(xy))^2 = 0;$$

$$x + 3\sin(xy) = 0 \text{ и } \cos(xy) = 0, \text{ т.е.}$$

$$x + 3\sin(xy) = 0 \text{ и } \sin(xy) = \pm 1.$$

Итак, мы имеем две системы:

$$\begin{cases} x + 3\sin(xy) = 0, \\ \sin(xy) = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 3\sin(xy) = 0, \\ \sin(xy) = -1. \end{cases}$$

Из первой системы $x=-3$, $xy=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, т.е. $x_1=-3$; $y_1=-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}$, а из второй

$$x=3;\ \ xy=-\frac{\pi}{2}+2\pi l,\ \text{т.е.}\ x_2=3;\ \ y_2=-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi l}{3},\ k,l\in Z.$$

Задача 12.

Решить уравнение

$$\sin^2 x+\sin^2 y=\sin x\sin y+\sin x\sin y-1.$$

Решение.

Домножив обе части уравнения на 2 и перенеся все его члены в левую часть, будем иметь:

$$(\sin^2 x-2\sin x+1)+(\sin^2 y-2\sin y+1)+$$
$$+(\sin^2 x+\sin^2 y-2\sin x\sin y)=0,\ \text{или}$$
$$(\sin x-1)^2+(\sin y-1)^2+(\sin x-\sin y)^2=0,$$

откуда $\sin x=1$, $\sin y=1$, $\sin x=\sin y$.

Таким образом, решением уравнения будет любая пара вида $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $y=\frac{\pi}{2}+2\pi n$ $(k,\ n\in Z)$.

Задача 13.

Найти все пары целых чисел x и y, которые удовлетворяют уравнению

$$x^2+x=y^4+y^3+y^2+y.$$

Решение.

Разложив на множители обе части данного уравнения, получим

$$x(x+1)=y(y+1)(y^2+1),\ \text{или}$$
$$x(x+1)=(y^2+1)(y^2+y).$$

Тогда равенство возможно, если левая и правая части равняются 0, или представляют собой произведение двух последовательных целых чисел. Поэтому, приравнивая к 0 возможные множители, получаем 4 пары искомых значений переменных:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = -1,$$
$$y_1 = 0, \quad y_2 = -1, \quad y_3 = 0, \quad y_4 = -1.$$

Произведение $(y^2 + 1)(y^2 + y)$ можно рассмотреть как произведение двух последовательных целых чисел, отличных от 0, только при $y = 2$. Поэтому $x(x + 1) = 30$, отсюда $x_5 = 5$, $x_6 = -6$. Итак, существует только две пары целых чисел, которые удовлетворяют данное уравнение:

$$x_5 = 5, \ y_5 = 2; \ x_6 = -6, \ y_6 = 2.$$

Задача 14.

Доказать, что не существует целых чисел x и y, которые бы удовлетворяли уравнению $x^2 + 1978 = y^2$.

Решение.

$$y^2 - x^2 = 1978, \ (y - x)(y + x) = 1978.$$

Числа x и y одной четности, поэтому $(x + y)$ и $(y - x)$ — четные числа. Их произведение должно делиться на 4, а число 1978 этого свойства не имеет.

Задача 15.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{3y} + \dfrac{1}{6z} = \dfrac{1}{\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{6}}, \\ x + y^2 + z^3 = 14 \quad (x, y, z > 0). \end{cases}$$

Решение.

Записав первое уравнение в виде

$$\left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{3y} + \frac{1}{6z}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6}\right) = 1,$$

$$\left(\frac{3}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z}\right)(3x + 2y + z) = 36,$$

$$6\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 3\left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) + 2\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) = 22,$$

и поскольку сумма взаимно обратных положительных чисел не меньше 2 и равна 2 только в случае их равенства, то $x = y = z$, и из второго уравнения получаем, что

$$x^3 + x^2 + x - 14 = 0.$$

Число 2 является корнем этого уравнения, и

$$x^3 + x^2 + x - 14 = (x - 2)(x^2 + 3x + 7),$$

так что система имеет единственное решение $x = y = z = 2$.

Задача 16.

Решить уравнение

$$x^4 + x^2\left(\frac{1}{y} - 4y\right) + 2\sqrt{2}\,x + 5y^2 + 1 = 0, \quad y > 0.$$

Решение.

Заданное уравнение запишем в виде:

$$(x^4 - 4x^2y + 4y^2) + \left(\frac{x^2}{y} + 2\sqrt{2}\,x + y^2 + 1\right) = 0, \text{ или}$$

$$(x^2 - 2y)^2 + \left(\frac{x^2}{y} + 2\sqrt{2}\,x + y^2 + 1\right) = 0.$$

Первое слагаемое в последнем уравнении обозначим через A, второе — через B.

1) $A \geqslant 0$;

2) Дискриминант выражения B равен

$$2 - \frac{y^2 + 1}{y} = 2 - \left(y + \frac{1}{y}\right) \leqslant 0, \text{ значит, } B \geqslant 0, \quad \frac{1}{y} > 0;$$

$$A + B = 0 \text{ при } A = 0,\ B = 0;$$

$$x = -\sqrt{2}, \quad y = 1.$$

Задача 17.

Найдите наибольшее из значений z, для которого существуют числа x, y, удовлетворяющие уравнению

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + xy + xz + yz = 4.$$

Решение.

Рассмотрим заданное уравнение как квадратное относительно x с коэффициентами, зависящими от y и z.

$$D = (y + z)^2 - 16y^2 - 8yz - 8z^2 + 32 \geqslant 0, \text{ или}$$

$$15y^2 + 6yz + 7z^2 - 32 \leqslant 0.$$

Квадратичное неравенство относительно y имеет решение лишь тогда, когда $9z^2 - 105z^2 + 15 \cdot 32 \geqslant 0$, т.е. при $z^2 \leqslant 5$, или $-\sqrt{5} \leqslant z \leqslant \sqrt{5}$, так что z не может быть больше $\sqrt{5}$. Если $z = \sqrt{5}$, то неравенство имеет единственное решение относительно y. Но тогда существует и x (тоже единственный) такой, что тройка $(x;\ y;\ z)$ удовлетворяет уравнению

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + xy + xz + yz = 4.$$

Ответ: $\sqrt{5}$.

Задача 18.

Сколько решений в положительных числах имеет система уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x^3 + y^3 + z^3 + xyz = x^4 + y^4 + z^4 + 1? \end{cases}$$

Решение.

Поскольку $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 - xyz =$

$$= 3x^2(y + z) + 3y^2(z + x) + 3z^2(x + y) + 5xyz > 0,$$

то, сложив это равенство со вторым уравнением, с учетом первого уравнения получаем:

$$1 = x^4 + y^4 + z^4 + 1 + 3x^2(y + z) + 3y^2(x + z) +$$

$$+ 3z^2(x + y) + 5xyz > 1.$$

Следовательно, в положительных числах система решений не имеет.

Задача 19.

Решить в целых числах систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - z^2 = 1, \\ y + z - x = 3. \end{cases}$$

Решение.

Из второго уравнения системы получаем

$$x = y + z - 3. \tag{1}$$

Подставляя значение x в первое уравнение системы, имеем $yz - 3y - 3z + 4 = 0$. Из этого уравнения находим

$$y = \frac{3z - 4}{z - 3} = \frac{3(z-3)+5}{z-3}, \text{ или}$$

$$y = 3 + \frac{5}{z-3}. \tag{2}$$

Для того, чтобы y и z, будучи целыми числами, удовлетворяли уравнению (2), необходимо и достаточно, чтобы разность $z - 3$ равнялась делителям пяти, т.е. $z - 3$ должно принимать значения ± 1 и ± 5, откуда

$$z_1 = 4, \quad z_2 = -2, \quad z_3 = 8, \quad z_4 = 2.$$

Подставляя эти значения z в равенство (2), получим

$$y_1 = 8, \quad y_2 = 2, \quad y_3 = 4, \quad y_4 = -2.$$

Подставляя соответствующие значения y и z в (1), получим $x_1 = 9$, $x_2 = -3$, $x_3 = 9$, $x_4 = -3$.

Ответ: (9, 8, 4); (–3, 2, 2); (9, 4, 8); (–3, –2, 2).

Задача 20.

Решить уравнение $2\sqrt{2}(\sin x + \cos x)\cos y = 3 + \cos 2y$.

Решение.

Заданное уравнение запишем в виде:

$$2\cos^2 y - 1 + 3 - 2\sqrt{2}(\sin x + \cos x)\cos y = 0, \text{ или}$$

$$\cos^2 y - \sqrt{2}(\sin x + \cos x)\cos y + 1 = 0,$$

$$\left(\cos y - \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1 - \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0.$$

Так как $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}} = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$, то последнее уравнение можно переписать так:

$$\left(\cos y - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)^2 + \sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Это уравнение эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} \cos y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right), \\ \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0. \end{cases}$$

Отсюда $x - \frac{\pi}{4} = k\pi$, и, значит, $\cos y = \cos k\pi$,

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad y = (2n \pm k)\pi,$$

где k и n — целые значения.

Задача 21.

Найти все действительные решения уравнения

$$\frac{36}{\sqrt{x-2}} + \frac{4}{\sqrt{y-1}} = 28 - 4\sqrt{x-2} - \sqrt{y-1}.$$

Решение.

Очевидно, что $x > 2$, $y > 1$ — допустимые значения неизвестных. Преобразуем заданное уравнение:

$$4\sqrt{x-2} + \frac{36}{\sqrt{x-2}} = \left(2\sqrt[4]{x-2} - \frac{6}{\sqrt[4]{x-2}}\right)^2 + 24;$$

$$\sqrt{y-1} + \frac{4}{\sqrt{y-1}} = \left(\sqrt[4]{y-1} - \frac{2}{\sqrt[4]{y-1}}\right)^2 + 4.$$

Получим уравнение:

$$\left(2\sqrt[4]{x-2} - \frac{6}{\sqrt[4]{x-2}}\right)^2 + \left(\sqrt[4]{y-1} - \frac{2}{\sqrt[4]{y-1}}\right)^2 = 0.$$

Из этого следует, что

$$2\sqrt[4]{x-2} - \frac{6}{\sqrt[4]{x-2}} = 0 \text{ и } \sqrt[4]{y-1} - \frac{2}{\sqrt[4]{y-1}} = 0.$$

Получим решение: $x = 11$, $y = 5$.

Задача 22.

Решить уравнения $(x,\ y)$:

1) $x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}=xy$;

2) $x\sqrt{x-1}+y\sqrt{y-1}=xy$.

Решение.

В обоих случаях $x=y=2$. Действительно,

$$x\sqrt{y-1}=x\sqrt{(y-1)\cdot 1}\leqslant x\frac{(y-1)+1}{2}=\frac{xy}{2};$$

$$y\sqrt{x-1}\leqslant\frac{xy}{2},\ \text{следовательно,}$$

$$x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}\leqslant xy.$$

Знак равенства — только при $x=y=2$.

22. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Функция $f(x)$ называется **периодической**, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого x_0, принадлежащего ОДЗ функции, $(x_0 - T)$ и $(x_0 + T)$ также принадлежат ОДЗ, и $f(x_0 + T) = f(x_0)$.

Если T — период функции $f(x)$, то nT, где $n \in Z$, $n \neq 0$ — тоже период. Наименьший положительный период функции называют также основным периодом. Основной период функции мы буде иногда называть просто периодом, если это не ведет к недоразумениям.

Задача 1.

Доказать, что для функции $y = \cos 2x$ число $T = -3\pi$ является периодом.

Доказательство.

1) Для любого действительного числа x числа $x - 3\pi$ и $x + 3\pi$ принадлежат области существования функции $y = \cos 2x$.

2) Справедливо равенство

$$\cos(2(x - 3\pi)) = \cos(2x - 6\pi) = \cos 2x, \quad x \in R.$$

Задача 2.

Найти наименьший положительный период функции

$$y = \cos nx.$$

Решение.

Пусть T — период данной функции. Тогда

$$\cos n(x + T) = \cos nx,$$

откуда $\cos(nx + nT) - \cos nx = 0$, или

$$2 \sin \frac{nT}{2} \sin\left(nx + \frac{nT}{2}\right) = 0.$$

При произвольном значении x это равенство возможно только при $\sin \frac{nT}{2} = 0$, откуда $\frac{nT}{2} = k\pi$; $T = \frac{2k\pi}{n}$; и при

$k = 1$ находим искомый период данной функции $T = \dfrac{2\pi}{n}$ (2π — период функции $y = \cos x$).

Задача 3.

Найти период функции

$$f(x) = \cos\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{3}.$$

Решение.

Период функции $y = \cos\dfrac{3x}{2}$ равен $T = 2\pi : \dfrac{3}{2} = \dfrac{4\pi}{3}$, а период функции $y = \sin\dfrac{x}{3}$ равен $T = 2\pi : \dfrac{1}{3} = 6\pi$. Так как наименьшее общее кратное для чисел $\dfrac{4\pi}{3} = 2 \cdot \dfrac{2\pi}{3}$ и $6\pi = 9 \cdot \dfrac{2\pi}{9}$ есть число $18 \cdot \dfrac{2\pi}{3} = 12\pi$, то 12π есть период функции $f(x)$.

Действительно,

$$f(x + 12\pi) = \cos\frac{3(x + 12\pi)}{2} - \sin\frac{x + 12\pi}{3} =$$

$$= \cos\left(\frac{3x}{2} + 18\pi\right) - \sin\left(\frac{x}{3} + 4\pi\right) =$$

$$= \cos\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{3} = f(x).$$

Заметим, что период суммы, вообще говоря, не равен общему наименьшему кратному периоду слагаемых. Но для выражений, с которыми мы встречаемся в средней школе, а именно — для выражений вида

$$f(x) = a_1 \sin n_1 x + b_1 \cos n_1 x + \ldots + a_k \sin n_k x + b_k \cos n_k x$$

(где n_k — рациональные положительные числа, все различные), наименьший положительный период равен $2\pi p$, где p — наименьшее кратное чисел $\dfrac{1}{n_1}, \dfrac{1}{n_2}, \ldots, \dfrac{1}{n_k}$.

Задача 4.

Доказать, что $T = 2\pi$ есть период функции

$$f(x) = 1 - \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Доказательство.

$$1 - \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1 - \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \pi\right) = 1 - \operatorname{tg}\frac{1}{2}(x + 2\pi).$$

Задача 5.

Найти период **функции** $f(x) = a\sin(\alpha x + \beta)$ $(\alpha \neq 0)$, где α, a, β — постоянные числа.

Решение.

Докажем, что $T = \dfrac{2\pi}{\alpha}$ есть период функции, т.е. для всех x выполняется равенство $f\left(x + \dfrac{2\pi}{\alpha}\right) = f(x)$. Действительно,

$$a\sin(\alpha x + \beta) = a\sin((x + \beta) + 2\pi) =$$

$$= a\sin\left(\alpha\left(x + \frac{2\pi}{\alpha}\right) + \beta\right).$$

Можно доказать, что число $\dfrac{2\pi}{\alpha}$ является и наименьшим положительным периодом.

Задача 6.

Найти период функции

$$y = x + \cos x.$$

Решение.

Если T — период **функции**, то при всех значениях x должно быть: $x + T + \cos(x + T) = x + \cos x$, откуда

$$\cos(x + T) - \cos x = -T, \text{ или}$$

$$-2\sin\frac{T}{2}\sin\left(x + \frac{T}{2}\right) = -T, \text{ откуда}$$

$$\sin\left(x + \frac{T}{2}\right) = \frac{T}{2\sin\frac{T}{2}}.$$

Так как правая часть этого равенства есть число постоянное, а левая часть изменяется с изменением x, то не существует такого числа T, при котором это равенство удовлетворялось бы при любом x, следовательно, данная функция не является периодической.

Задача 7.

Доказать, что функция $y = \sin(x^2)$ — непериодическая.

Доказательство.

Допустим обратное: пусть существует такое число $T \neq 0$, что при всех значениях x справедливо равенство

$$\sin(x^2) = \sin((x + T)^2).$$

Положив $x = 0$, будем иметь $0 = \sin(T^2)$. Но тогда $T^2 = \pi n$ $(n \in Z)$, следовательно, $T = \sqrt{n\pi}$. Подставив это значение T в равенство $\sin(x^2) = \sin((x + T)^2)$, получим

$$\sin(x^2) = \sin((x + \sqrt{n\pi})^2) = \sin(x^2 + 2x\sqrt{n\pi} + n\pi).$$

Пусть $x \neq \dfrac{2k\pi - n\pi}{2\sqrt{n\pi}}$, где $k \in Z$, тогда $2x\sqrt{n\pi} + n\pi \neq 2k\pi$. И, следовательно, $\sin(x^2) \neq \sin(x^2 + 2x\sqrt{n\pi} + n\pi)$.

Пришли к противоречию. Это доказывает, что $\sin(x^2)$ — непериодическая функция.

Задача 8.

Доказать, что функция $y = \sin\sqrt{x}$ не является периодической.

Решение.

Ясно, что $x \geqslant 0$. Допустим, что существует число $T \neq 0$ такое, что $\sin\sqrt{x + T} = \sin\sqrt{x}$. Это равенство должно выполняться при всех допустимых значениях x, поэтому доказательство требуемого утверждения можно свести к тому, чтобы при некоторых (удачно выбранных) частных значений x получить несовместную систему равенств.

Значение $x = 0$ является почти всегда удобным для этой цели, ибо дает простейшее уравнение для T; в данном случае

$$\sin\sqrt{T} = \sin 0 = 0, \text{ откуда } \sqrt{T} = \pi k.$$

Теперь зная, что $\sin\sqrt{T} = 0$, вторым значением можно взять $x = T$, и тогда получим $\sin\sqrt{2T} = \sin\sqrt{T} = 0$, откуда $\sqrt{2T} = n\pi$. Подставляя сюда значение $\sqrt{T} = k\pi$, получим $\sqrt{2}\cdot k\pi = n\pi$, откуда $\sqrt{2} = \frac{n}{k}$, что невозможно при целых n и k.

Задача 9.

Доказать, что если график функции $x = f(x)$, $x \in R$ симметричен относительно прямых $x = a$ и $x = b$ $(a \neq b)$, то функция $y = f(x)$ является периодической.

Доказательство.

Из условия симметрии графика функции $y = f(x)$ относительно прямых $x = a$ и $x = b$ при каждом t и каждом x из области определения функции имеем

$$f(a + x) = f(a - x);\quad f(b + t) = f(b - t).$$

Положим $b - a = d$. Пусть x_0 — любое число, принадлежащее ОДЗ. Имеем

$$f(x_0) = f(a + (x_0 - a)) = f(a - (x_0 - a)) = f(2a - x_0) =$$

$$= f(b + (2a - x_0 - b)) = f(b - (2a - x_0 - b)) =$$

$$= f(x_0 + 2(b - a)) = f(x_0 + 2d).$$

Таким образом, при каждом x_0 из области определения функции $f(x)$ имеем $f(x_0) = f(x_0 + 2d)$, следовательно, $f(x)$ является периодической с периодом $2(b - a)$.

Задача 10.

Найти основной период функции $y = |\cos x|$.

Решение.

Пусть T_0 — основной период данной функции. Тогда для всех x должно выполняться равенство

$$|\cos(x + T_0| = |\cos x|. \qquad (*)$$

Найдем, каким может быть T_0. Подставим в (*) $x = 0$. Получим $|\cos T_0| = 1$, значит, $\cos T_0$ может принимать только значения ± 1, откуда T_0 может принимать только значения π, 2π, 3π, 4π, ... (то есть T_0 может быть только среди этих чисел).

Поскольку $|\cos(x + \pi)| = |-\cos x| = |\cos x|$, то π — период данной функции, а из вышесказанного следует, что T — наименьший положительный период.

Задача 11.

Доказать, что функция $f(x) = \sqrt[4]{\log_5 \cos \frac{2\pi x}{\sqrt{13}}}$ является периодической, и найти один из ее периодов.

Доказательство.

Находим область существования функции $f(x)$:

$$\log_5 \cos \frac{2\pi x}{\sqrt{13}} \geqslant 0, \quad \cos \frac{2\pi x}{\sqrt{13}} \geqslant 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{2\pi x}{\sqrt{13}} = 1, \quad x = \sqrt{13}\,n, \quad n \in Z.$$

Таким образом, область существования функции $f(x)$ есть множество $X = \{\sqrt{13}\,n \mid n \in Z\}$.

Если взять, например, $T = \sqrt{13}$, то при любом $n \in Z$

$$\sqrt{13}\,n + T = \sqrt{13}\,(n + 1) \in X \quad \text{и}$$

$$\sqrt{13}\,n - T = \sqrt{13}\,(n - 1) \in X.$$

Так как при любом $n \in Z$ справедливо равенство

$$\cos \frac{2\pi(\sqrt{13}\,n + \sqrt{13})}{\sqrt{13}} = \cos 2\pi(n + 1) = 1 = \cos 2\pi n =$$

$$= \cos \frac{2\pi(\sqrt{13}\,n)}{\sqrt{13}}, \quad \sqrt[4]{\log_5 1} = 0,$$

то $f(x + 13) = f(x)$, поэтому $f(x)$ является периодической с периодом $\sqrt{13}$.

Задача 12.

Доказать, что функция $\cos\sqrt[3]{x}$ не является периодической.

Доказательство.

Предположим, что существует $T \neq 0$ такое, что при всех x будет

$$\cos\sqrt[3]{x+T} = \cos\sqrt[3]{x}. \tag{1}$$

Положим в выражении (1) $x = 0$. Тогда

$$\cos\sqrt[3]{T} = \cos 0 = 1, \tag{2}$$

и, значит,

$$\sqrt[3]{T} = 2k\pi \tag{3}$$

для некоторого $k \in Z$, $k \neq 0$.

Затем подставим в (1) значение $x = T \neq 0$. Тогда очевидно, будем иметь, (учитывая (1) и (2)):

$$\cos\sqrt[3]{2T} = \cos\sqrt[3]{T} = 1,$$

откуда

$$\sqrt[3]{2T} = 2l\pi. \tag{4}$$

Так как по предположению $T \neq 0$, то, разделив (4) на (3), получим $\sqrt[3]{2} = \frac{l}{k}$, где l и k — целые числа.

Последнее равенство противоречиво.

Задача 13.

Доказать, если для произвольного $x \in D(f)$ существует $T \neq 0$ такое, что $f(x+T) = -f(x)$, то f — периодическая функция с периодом $2T$.

Доказательство.

По условию

$$f(x+T) = -f(x). \tag{1}$$

Имеем из (1): $f(x+2T) = f(x+T+T) = -f(x+T) =$

$$= -(-f(x)) = f(x).$$

Задача 14.

Доказать, что если существует $T \neq 0$ такое, что для произвольного $x \in D(f)$

$$f(x+T) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)},$$

то f — периодическая функция с периодом $2T$.

Доказательство.

Используя условие: $f(x+2T) = f(x+T+T) =$

$$= \frac{1-f(x+T)}{1+f(x+T)} = \frac{1-\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}}{1+\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}} = f(x).$$

Задача 15.

Доказать, что функция $y = \cos x + \cos \lambda x$ непериодическая, когда λ — иррациональное число.

Решение.

Как известно, функция $f(x)$ называется периодической, если существует такое постоянное число $T \neq 0$, что для всех x из области определения функции $f(x)$ выполняется равенство

$$f(x+T) = f(x). \qquad (1)$$

Обозначим через T период функции $y = \cos x + \lambda \cos x$. Тогда для всех $x \in (-\infty;\ +\infty)$ должно выполняться:

$$\cos(x+T) + \cos\lambda(x+T) = \cos x + \cos \lambda x. \qquad (2)$$

Беря в выражении (2) $x = 0$, получим

$$\cos T + \cos \lambda T = 2. \qquad (3)$$

Поскольку $\cos\varphi \leqslant 1$, то из (3) следует:

$$\cos T = 1, \quad \cos \lambda T = 1.$$

Из последних равенств:

$$T = 2\pi k; \ \lambda T = 2\pi n, \qquad (4)$$

где k и n — целые числа. Исключая из (4) T, получим $\lambda = \frac{n}{k}$ — рациональное число, и мы пришли к выводу, что λ — рациональное число, что противоречит условию.

Задача 16.

Периодические функции $f(x)$ и $g(x)$ определены для всех действительных x. Наименьшие положительные функций $f(x)$ и $g(x)$ равны соответственно 1 и $\sqrt{2}$. Может ли функция $F(x) = f(x) + g(x)$ быть периодической?

Решение.

Приведем пример функций $f(x)$ и $g(x)$, удовлетворяющих условию задачи, сумма которых является периодической. Обозначив через C множество вида $a + b\sqrt{2}$ $(a, b \in Z)$, заметим, что всякое число из множества C в виде $a + b\sqrt{2}$ представимо однозначно.

Положим

$$f(x) = \begin{cases} b & \text{при } x = a + b\sqrt{2},\ a, b \in Z, \\ 0 & \text{при } x \notin C, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -a & \text{при } x = a + b\sqrt{2},\ a, b \in Z, \\ 0 & \text{при } x \notin C. \end{cases}$$

Если $x = a + b\sqrt{2}$, то

$$f(x + 1) = f(a + 1 + b\sqrt{2}) = b = f(x);$$

$$g(x + \sqrt{2}) = g(a + (b + 1)\sqrt{2}) = -a = g(x);$$

$$F(x + 1 + \sqrt{2}) = f(a + 1 + (b + 1)\sqrt{2}) + g(a + 1 + (b + 1)\sqrt{2}) =$$
$$= (b + 1) - (a + 1) = b - a = f(x) + g(x) = F(x).$$

Если же $x \notin C$, то $x + 1$, $x + \sqrt{2}$, $x + 1 + \sqrt{2} \notin C$ и

$$f(x + 1) = 0 = f(x), \quad g(x + \sqrt{2}) = 0 = g(x);$$

$$F(x + 1 + \sqrt{2}) = f(x + 1 + \sqrt{2}) + g(x + 1 + \sqrt{2}) = 0 =$$
$$= f(x) + g(x) = F(x).$$

Таким образом, функции $f(x)$, $g(x)$ и их сумма $F(x)$ — периодические, и остается доказать, что числа 1 и $\sqrt{2}$ являются наименьшими положительными периодами функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно.

Пусть $T > 0$ и $f(x + T) = f(x)$ для любого x; тогда

$$F(\sqrt{2} + T) = f(\sqrt{2}) = 1,$$

откуда $\sqrt{2} + T = a + \sqrt{2}$, т.е. $T = a \in Z$, следовательно, $T \geqslant 1$. Аналогично из равенства $g(x + T) = g(x)$ при $x = 1$ получаем, что $g(1 + T) = g(1) = -1$, т.е. $1 + T = 1 + b\sqrt{2}$, $T = b\sqrt{2}$, и поэтому $T \geqslant \sqrt{2}$.

Задача 17.

Является ли периодической функция

$$y = \frac{\sin x}{1 + \sin^2(x\sqrt{2})}?$$

Решение.

Пусть T — период данной функции, обозначаемой в дальнейшем через $f(x)$. Тогда $f(T) = f(0) = 0$, откуда $T = k\pi$, и поскольку $\sin(x + k\pi) = (-1)^k \sin x$, то k — четное число. Следовательно, T является общим периодом функций $f(x)$ и $\sin x$, и поэтому их частное $\frac{\sin x}{y} = 1 + \sin^2(x\sqrt{2})$ имеет период $k\pi$, что, как нетрудно убедиться, неверно. Таким образом, данная функция непериодическая.

Задача 18.

Доказать, что если периодическая функция при некотором $k \neq \pm 1$ и $k \neq 0$ удовлетворяет равенству $f(kx) = kf(x)$ для любого $x \in R$, то она не имеет наименьшего периода.

Решение.

Пусть $T > 0$ — период функции f, и $|k| > 1$, тогда для любого $x \in R$ $f(kx + T) = f(kx) = kf(x)$;

$$f(kx + T) = f\left(k\left(x + \frac{T}{k}\right)\right) = kf\left(x + \frac{T}{k}\right),$$

и поэтому $f(x) = f\left(x + \frac{T}{k}\right)$, т.е. $\frac{T}{|k|}$ — также период функции. Следовательно, любое число вида $\frac{T}{|k|^n}$, где $n \in N$, является периодом f, так что f не имеет наименьшего периода.

При $|k| < 1$ из равенств

$$f(kT + x) = f\left(k\left(T + \frac{x}{k}\right)\right) = kf\left(T + \frac{x}{k}\right) =$$

$$= kf\left(\frac{x}{k}\right) = f(x)$$

следует, что $|k|\,T$, а следовательно, и все числа вида $|k|^n\,T$ являются периодами функции f, так что и в этом случае f не имеет наименьшего периода.

Задача 19.

Доказать, что функция $f(x) = \cos \pi x + \cos x$ непериодическая.

Доказательство.

Пусть $T \neq 0$ — период функции, тогда для всех $x \in R$ справедливо равенство

$$\cos x + \cos \pi x = \cos (x + T) + \cos (\pi x + \pi T).$$

Положим $x = 0$; тогда $\cos T + \cos nT = 2$, но $\cos \alpha \leqslant 1$ для всех α. Значит, последнее равенство равносильно системе

$$\begin{cases} \cos T = 1, \\ \cos \pi T = 1, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} T = 2\pi k, & k \in Z, \\ T = 2n, & n \in Z. \end{cases}$$

Значит, существуют целые k и n, для которых $2\pi k = 2n$; если $k = 0$, то $n = 0$, т.е. $T = 0$ — противоречие; если $k \neq 0$, то $\pi = \frac{n}{k}$, т.е. π — рациональное число — противоречие.

Задача 20.

Доказать, что функция

$f(x) = \cos (x) + \cos (x\sqrt{2}) + \cos (x\sqrt{3}) + \ldots + \cos (x\sqrt{n})$ $(n \geqslant 2)$ — непериодическая.

Решение.

Очевидно следующее свойство любой периодической функции: любое свое значение она принимает бесконечное число раз.

В то же время уравнение $f(x) = n$ имеет единственное решение $x = 0$. В самом деле, поскольку $\cos x \leqslant 1$, то это уравнение равносильно системе

$$\cos x = 1, \ \cos(x\sqrt{2}) = 1, \ldots, \cos(x\sqrt{n}) = 1.$$

Однако общее ненулевое решение x первого и второго уравнения удовлетворяет равенствам

$$x_0 = 2k\pi, \ x_0 = \sqrt{2}\,n\pi,$$

что невозможно, так как $\sqrt{2} \notin Q$.

Таким образом, функция $f(x)$ не является периодической.

Существует функция, не имеющая наименьшего (основного) периода:

функция Дирихле:

$$\begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ — рационально,} \\ 1, & \text{если } x \text{ — иррационально.} \end{cases}$$

Задача 21.

Найти основной период функции Дирихле.

Решение.

Пусть T — некоторый период функции Дирихле. Тогда $f(x \pm T) = f(x)$, в частности, $f(T) = f(0) = 0$, значит, $T \in Q$, $T = \frac{p}{q}$. Докажем, что любое рациональное число, не равное 0, является периодом функции Дирихле.

Пусть $T = \frac{p}{q}$, а $x_0 \in Q$, т.е. $x_0 = \frac{m}{n}$. Тогда

$$x_0 \pm T = \frac{m}{n} \pm \frac{p}{q} = \frac{mq \pm np}{nq} \in Q, \text{ т.е.}$$

$$f(x_0) = f(x_0 \pm T) = 0.$$

Если же $x_0 \notin Q$, то $(x_0 \pm T) \notin Q$.

Действительно, предположив противное,

$$x_0 \pm T = \frac{m}{n}, \text{ и } x_0 = \frac{m}{n} \mp \frac{p}{q} = \frac{mq \mp np}{nq} \in Q,$$

что противоречит предположению.

Итак, $(x_0 \pm T) \notin Q$ и $f(x_0) = f(x_0 \pm T) = 1$.

Таким образом, среди положительных периодов функции Дирихле нет наименьшего.

Задача 25.

Может ли периодическая функция быть неограниченной?

Решение.

Да, например: $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$.

Задача 22.

Может ли периодическая функция не иметь наименьшего периода?

Решение.

Да, например, функция $y = c$ или функция Дирихле:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ — рациональное,} \\ 1, & \text{если } x \text{ — иррациональное.} \end{cases}$$

Задача 23.

Обязательно ли сумма периодических функций есть функция периодическая?

Решение.

Нет. Например, согласно задаче 15, функция $\cos x + \cos\frac{x}{\pi}$ непериодическая, хотя функции $\cos x$ и $\cos\frac{x}{\pi}$ — периодические.

Задача 24.

Может ли периодическая функция быть монотонной на всей области ее определения?

Решение.

Нет, не может.

Функция $y = f(x)$ называется периодической, если при всех x имеет место равенство $f(x + T) = f(x)$, где T — постоянное число, не равное нулю. Для условия монотонности должны выполняться неравенства: если $x_1 < x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$ или $f(x_1) > f(x_2)$. Если $x_2 = x_1 + T$, то условия монотонности нарушаются.

Задача 25.

Может ли периодическая функция иметь экстремум?

Решение.

Да, может. Например: $y = \cos x$; $y = \sin x$.

Задача 26.

Может ли периодическая функция быть:
а) четной; *б*) нечетной?

Решение.

Да, например: $y = \cos x$; $y = \sin x$.

Задача 27.

Является ли функция $y = \{x\} + \sin x$ периодической? ($\{x\}$ — дробная часть числа x.)

Решение.

Пусть для некоторого числа T при любом $x \in R$ выполняется равенство

$$\{x + T\} + \sin(x + T) = \{x\} + \sin x.$$

При $x = 0$ и при $x = -T$ получаем равенства

$$\{T\} + \sin T = 0, \quad \{-T\} - \sin T = 0,$$

откуда после сложения получаем, что

$$\{T\} + \{-T\} = 0.$$

Дробная часть любого числа неотрицательна, поэтому

$$\{T\} = \{-T\} = 0, \text{ а тогда и } \sin T = 0.$$

Таким образом, T — целое число и $T = k\pi$ $(k \in Z)$, откуда $T = 0$. Следовательно, данная функция — непериодическая.

Задача 28.

Существует ли функция, для которой все иррациональные числа являются периодами, а рациональные не являются?

Решение.

Не существует. Действительно, предположив противное, получим, что для любого иррационального числа x_0 $f(x_0) = f(0)$, значит, значения функции во всех иррациональных точках равны (и равны значению функции в нуле).

Рассмотрим некоторое рациональное число q, не равное 0. Число $p = q + \sqrt{2}$ иррационально (иначе $\sqrt{2} = (p - q) \in Q$), значит, $f(q + \sqrt{2}) = f(p) = f(0)$; но поскольку по условию $\sqrt{2}$ — период функции, то $f(q) = f(q + \sqrt{2}) = f(0)$, итак, во всех рациональных точках значение функции совпадает со значением в нуле, т.е. $f(x) = \text{const}$, и любое рациональное число является периодом.

Задача 29.

Дана периодическая функция $f(x)$, дифференцируемая на всей области определения. Доказать, что ее производная $f'(x)$ — также периодическая функция (имеющая тот же период).

Решение.

Пусть T — период функции $f(x)$, X — ее ОДЗ. Тогда для всех $x \in X$ $f(x) = f(x + T)$.

Пусть $g(x) = f(x + T)$, тогда для всех $x \in X$ $g(x) = f(x)$, значит, $g(x) \equiv f(x)$, откуда $g'(x) \equiv f'(x)$, т.е. для всех $x \in X$ $f'(x + T) = f'(x)$, итак, $f'(x)$ — периодическая функция.

Задача 30.

Доказать, что функция $y = x^2$ непериодическая.

Доказательство.

Действительно, если функция $y = x^2$ периодическая, то и ее производная $y = 2x$ также периодична, что невозможно, так как она монотонна.

Совершенно очевидно, что справедливо и более общее утверждение: целая рациональная функция

$$f(x) = a_0 x^n + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

не может быть периодической (если, конечно, она не равна постоянной). Для доказательства достаточно естественным образом обобщить сформулированное выше утверждение: если функция периодична, то и любая ее производная имеет тот же период. Но производная порядка $n - 1$ от целой рациональной функции степени n представляет собой линейную, т.е. монотонную функцию и не может быть, следовательно, периодичной.

Задача 31.

Доказать, что функция $y = x^2 + \sin x$ не является периодической.

Доказательство.

Пусть T — период рассматриваемой функции, тогда T — период ее второй производной $y'' = 2 - \sin x$, а в этом случае T является периодом и суммы $y + y'' - 2 = x^2$. Однако функция x^2, как доказано в предыдущей задаче, не является периодической и полученное противоречие показывает, что исходная функция $y = x^2 + \sin x$ также является периодической.

Задача 32.

Доказать, что функция

$$y = 2 \sin x - 3 \cos x + x^{37} - 2x^{18} + 16$$

не является периодической.

Решение.

Если число T — период функции y, то оно является периодом и ее производной порядка 40, и поскольку

$$y^{(40)} = 2 \sin x - 3 \cos x,$$

то T — период разности $y - y^{(40)}$.

Мы получили тем самым, что T — период функции $y = x^{37} - 2x^{18} + 16$, что неверно. Полученное противоречие показывает, что исходная функция не имеет периода.

Задача 33.

Даны функции $f(x)$ и $g(x)$, причем $g(x)$ — периодическая. Доказать, что функция $h(x) = f(g(x))$ — также периодическая (причем имеет тот же период).

Доказательство.

Пусть T — период функции $g(x)$, значит, для всех x_0, принадлежащих ОДЗ функции $g(x)$, $f(x_0 + T) = g(x_0)$.

Пусть x_1 принадлежит ОДЗ функции $h(x)$, тогда x_1 принадлежит и ОДЗ функции $g(x)$.

Имеем $h(x_1 + T) = f(g(x_1 + T)) = f(g(x_1)) = h(x_1)$, т.е. $h(x)$ периодическая с периодом T.

Задача 34.

Может ли быть периодической сумма двух функций, если:

а) каждая из них непериодическая;

б) одна из них периодическая, а другая непериодическая?

Решение.

а) Да; например, $f_1(x) = x + \sin x$, $f_2 = -x$ — непериодические функции, а $f(x) = f_1(x) + f_2(x) = \sin x$ — периодическая;

б) да; например, $f_1(x) = \cos \pi x + \cos x$ непериодическая, $f_2(x) = -\cos x$ периодическая, $f(x) = f_1(x) + f_2(x) = \cos \pi x$ — периодическая.

Задача 35.

Доказать, что функция $f(x) = \sqrt{8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1}$ периодическая. Найти период.

Решение.

Имеем $8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 = 2(4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1) -$

$$- 1 = 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 = 2\cos^2 2x - 1 = \cos 4x.$$

Итак, $f(x) = \sqrt{\cos 4x}$ функция, согласно задаче 33, периодическая. $T = \frac{\pi}{2}$.

Задача 36.

Найти период функции

$$f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 3\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right).$$

Решение.

Имеем $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где $f_1(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ — периодическая с периодом $T_1 = \pi$; $f_2(x) = 3\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$ — периодическая с периодом $T_2 = \frac{2\pi}{3}$. Тогда $f(x)$ периодическая с периодом T, равным наименьшему общему кратному T_1 и T_2, т.е. $T = 2\pi$.

Задача 37.

Доказать, что функция $y = x + \sin x$ — непериодическая.

Доказательство.

Докажем методом от противного. Пусть $T \neq 0$ — период функции $f(x)$, тогда для любого $x \in R$ $f(x) = f(x + T)$, т.е. $x + \sin x = x + T + \sin(x + T)$, откуда

$$T = -2\sin T\cos\left(x + \frac{T}{2}\right),$$

что невозможно для каждого $x \in R$, поскольку в правой части равенства — функция от x, не являющейся постоянной, а в левой части число T, от x не зависящее.

Задача 38.

Найти все рациональные a, при которых функции

$$f(x) = \cos\left(\frac{2x}{a^3 + \sqrt{3}}\right) \text{ и } g(x) = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{5a - a^2 + \sqrt{48}}\right)$$

имеют общий период.

Решение.

Известно, что функция $\cos kx$ имеет периоды $T = \frac{2n\pi}{k}$, $n \in Z$, $n \neq 0$, а функция $\operatorname{tg} kx$ имеет периоды $T = \frac{m\pi}{k}$, $m \in Z$, $m \neq 0$.

Таким образом, период $f(x)$ $T_1 = nT(a^3 + \sqrt{3})$, $n \in Z$, $n \neq 0$, а период $g(x)$ $T_2 = mT(5a - a^2 + 4\sqrt{3})$.

При некотором a, если найдутся такие m и n, что $T_1 = T_2$, то тогда (и только тогда) при этом $f(x)$ и $g(x)$ имеют общий период. Пусть при некотором рациональном $a = a_0$ $f(x)$ и $g(x)$ имеют общий период. Имеем

$$n(a_0^3 + \sqrt{3}) = m(5a_0 - a_0^2 + 4\sqrt{3}), \text{ т.е.}$$

$$na_0^3 + ma_0^2 - 5ma_0 = (4m - n)\sqrt{3}.$$

Поскольку левая часть рациональна, то правая равна нулю (иначе она иррациональна), итак, $4m = n$, значит,

$$a_0(4ma_0^2 + ma_0 - 5m) = 0.$$

Поскольку $m \neq 0$, $a_0(a_0 - 1)(4a_0 + 5) = 0$.

Итак, a может принимать одно из трех значений: 0; 1; $-\frac{5}{4}$. Проверка показывает, что все эти значения подходят.

Ответ: 0; 1; $-\frac{5}{4}$.

Глава IV. ПЛАНИМЕТРИЯ

23. ЗАДАЧИ-МАТРЕШКИ

В начале факультатива по геометрии Петр Иванович нарисовал на доске три окружности (рис. 23.1) и предложил решить такую задачу:

Три окружности одинакового радиуса R пересекаются в общей точке S и в точках M, N, P. Докажите, что точки M, N, P лежат на окружности того же радиуса R.

Подумали мы немного. Ничего не получается: не видно, как приступить к задаче. Тогда Петр Иванович поставил на стол маленькую матрешку и написал на доске:

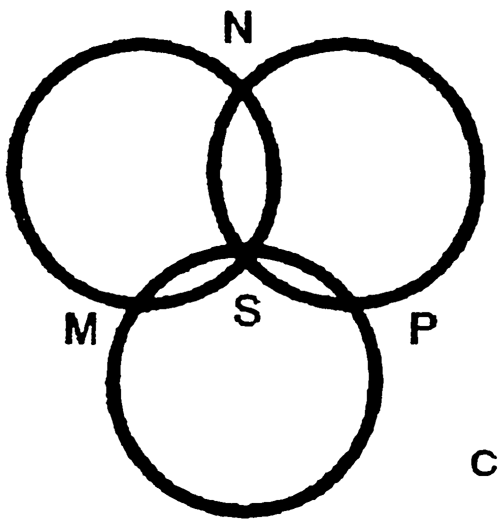


Рис. 23.1

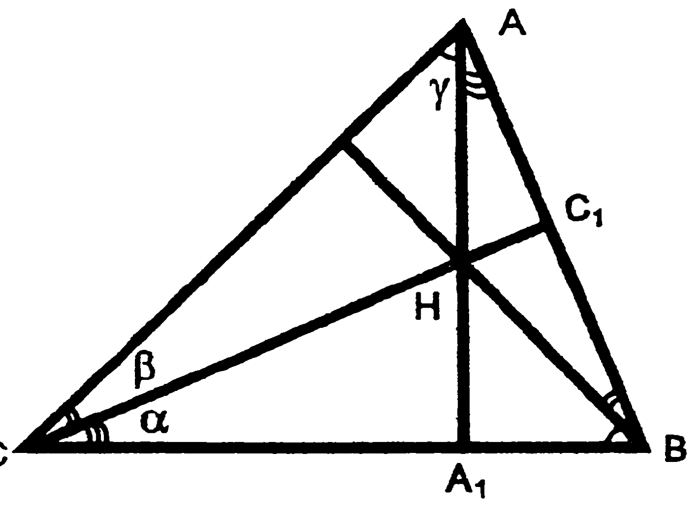


Рис. 23.2

Задача 1.

Внутри треугольника ABC дана такая точка H, что $\angle HAC = \angle HBC$, $\angle HBA = \angle HCA$, $\angle HCB = \angle HAB$. Тогда H — ортоцентр треугольника ABC, то есть точка пересечения его высот.

Мы это доказали почти сразу. В обозначениях, которые появились в чертеже на доске (рис. 23.2), очевидно,

$$2(\alpha + \beta + \gamma) = 180^\circ, \text{ откуда } \alpha + \beta + \gamma = 90^\circ.$$

Но тогда внешний угол AA_1B треугольника ACA_1 равен $(\alpha + \beta) + \gamma = 90^\circ$, значит, AA_1 — высота. Аналогично BB_1 и CC_1 и, стало быть, H — ортоцентр.

— Правильно, — сказал Петр Иванович, поставил рядом с первой матрешкой вторую, чуть побольше, а на доске написал:

Задача 2.

Точка, симметричная ортоцентру относительно стороны треугольника, лежит на его описанной окружности.

По чертежу, нарисованному на доске (рис. 23.3), в котором D обозначает точку пересечения высоты AA_1 с описанной окружностью, мы быстро усмотрели равенства $\angle HBC = \angle CAD$ (так как каждый из этих углов составляет 90° вместе с углом $\angle B_1CB$) и $\angle CAD = \angle CBD$ (углы опираются на общую дугу $\smile CD$). Поэтому $\angle HBC = \angle DBC$ и точка D симметрична H относительно CB.

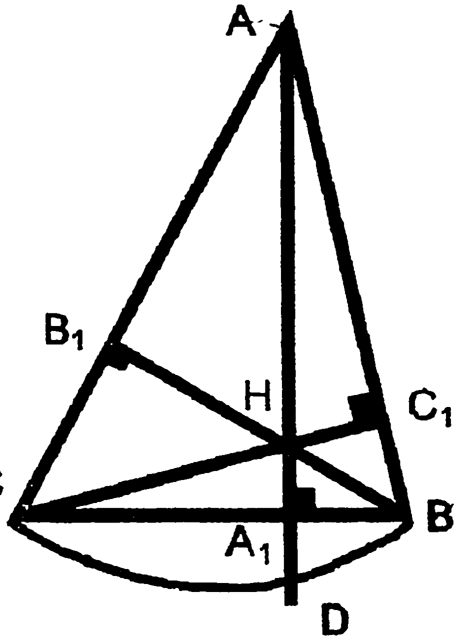


Рис. 23.3

Тут на столе Петра Ивановича появилась третья матрешка, а на доске — такая запись:

Задача 3.

Радиус описанной окружности треугольника равен радиусу окружности, проходящей через две вершины и ортоцентр.

На предыдущем чертеже (см. рис. 23.3) Петр Иванович дорисовал окружность, проходящую через точки C, H, B, и отрезки CD и DB. С места ему мы стали говорить, что треугольники CBH и CDB равны по предыдущей задаче, поэтому их описанные окружности — одинакового радиуса. Петр Иванович вторую матрешку спрятал в третью.

— А еще есть матрешки? — спросили мы.

— Есть, — ответил Петр Иванович, вынув самую маленькую матрешку, — но задача будет устная, и написал:

Задача 4.

Дуги окружностей равных радиусов, соединяющие две их точки пересечения, равны.

— Дуги, конечно, равны, ведь они симметричны относительно прямой, проходящей через точки пересечения, — ответили мы (рис. 23.4).

— Ну, а теперь любой из вас должен решить первоначальную задачу про три окружности, — сказал Петр Иванович и... вызвал меня к доске.

Я начал говорить что-то невнятное, но тут прозвучал спасительный звонок. Тогда Петр Иванович достал пятую, самую большую матрешку, многозначительно вложил матрешки друг в друга и сказал:

— Чтобы к следующему разу все решили эту задачу.

Дома я ее довольно быстро решил. А вы?

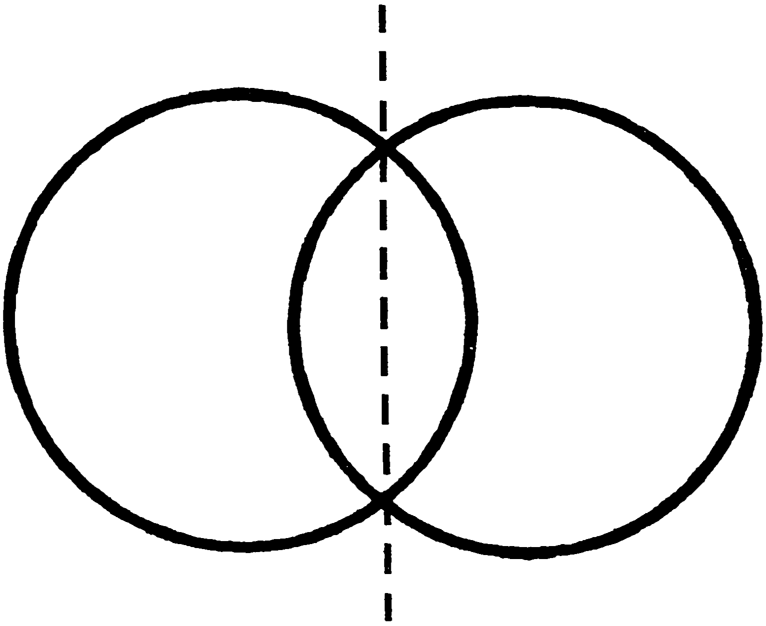


Рис. 23.4

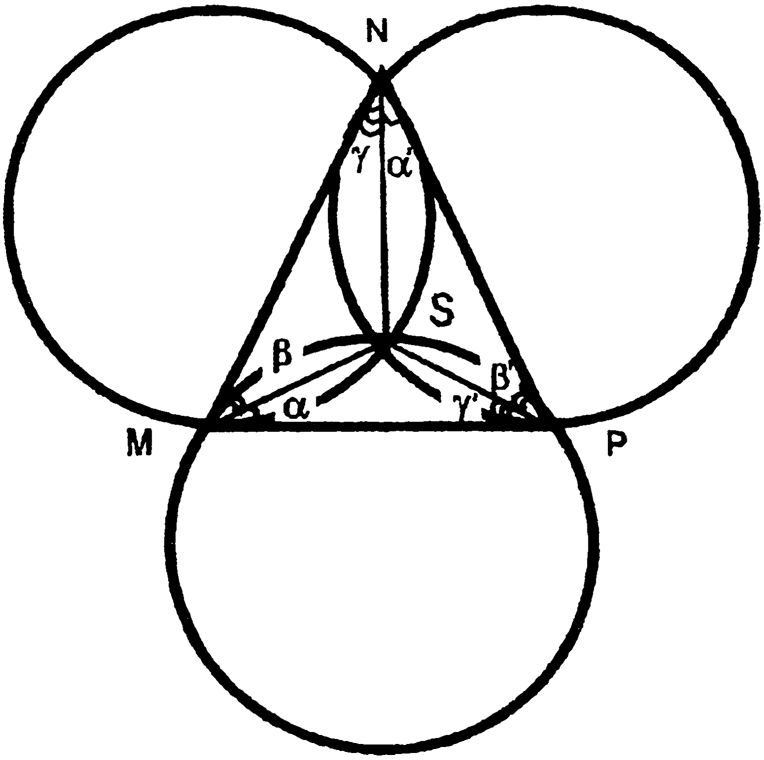


Рис. 23.5

1 Соединим между собой точки M, N, P, S (рис. 23.5). В силу задачи 4 углы α, β, γ соответственно равны α', β', γ', поэтому, по задаче 1, S — ортоцентр треугольника NMP. Но тогда по задаче 3 окружность описанная около NMP, имеет тот же радиус, что любая из трех данных окружностей, то есть R.

24. УРОК ОДНОЙ ЗАДАЧИ

Задача 1.

В трапеции, основания которой a и b, проведена через точку пересечения диагоналей прямая, параллельная основаниям. Найдите длину отрезка этой прямой, отсекаемого от нее боковыми сторонами.

Иван Петрович вызвал одного из нас к доске, и на доске появился чертеж (рис. 24.1).

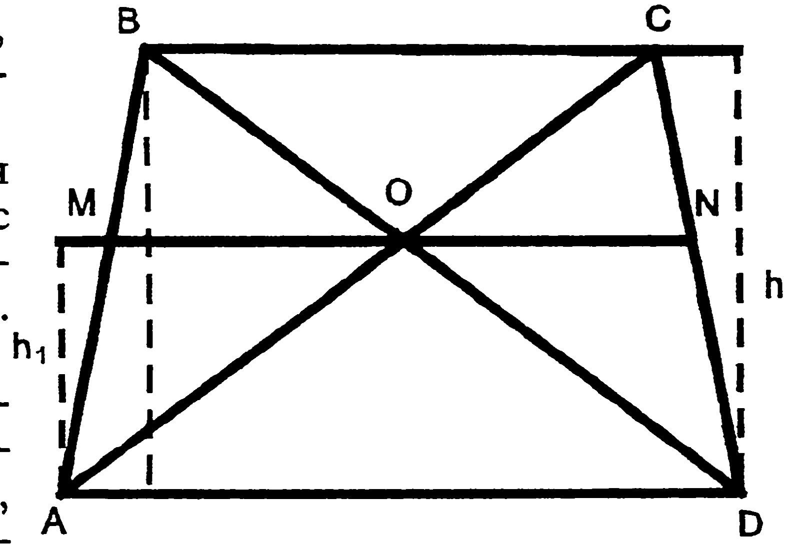


Рис. 24.1

Мы сразу заметили подобие треугольников AMO и ABC, MBO и ABD, и на доске написали формулы:

$$\frac{x}{b}=\frac{h_2}{h},\quad \frac{x}{a}=\frac{h_1}{h},$$

в которых h, h_1, h_2 — высоты треугольников ABD, MBO, AMO, а $x = MO$. Сложив эти равенства, мы получили:

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=\frac{h_1+h_2}{h}=1,\text{ то есть } x=\frac{ab}{a+b}.$$

Аналогично $ON=\dfrac{ab}{a+b}$, откуда и ответ: $MN=\dfrac{2ab}{a+b}$.

— Иван Петрович, — послышалось из класса, — я уже вижу, как из этой задачи можно составить новую задачу. — На доске появилась такая запись:

Задача 2.

Докажите, что в трапеции отрезок прямой, параллельной основаниям, которому принадлежит точка пересечения диагоналей и концы которого находятся на боковых сторонах трапеции, делится в этой точке пополам.

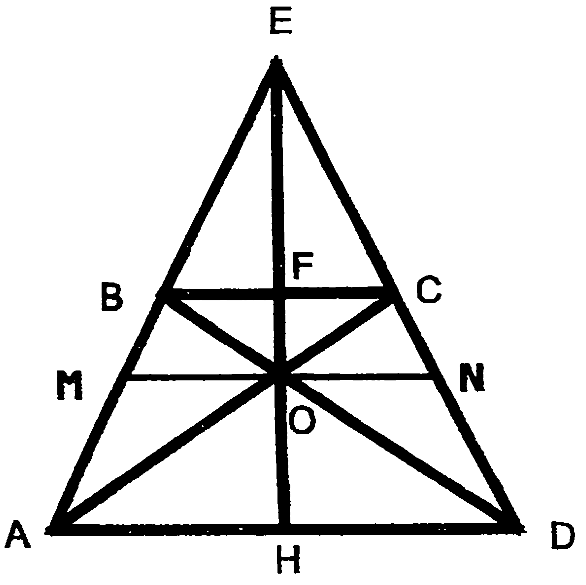


Рис. 24.2

— Хорошая задача, — похвалил Иван Петрович, — а теперь я изменю рисунок, — и он, продлив боковые стороны трапеции до пересечения в точке E, провел через точки O и E прямую. Точки пересечения прямой с основаниями учитель обозначил F и H (рис. 24.2).

— Обращаю внимание ваше, — продолжил он, — на такую задачу:

Задача 3.

Докажите, что в произвольной трапеции середины оснований, пересечение боковых сторон и пересечение диагоналей принадлежат одной прямой.

Решение получилось сразу: ведь оно следует из предыдущей задачи, так как EH — медиана в треугольниках EBC, EMN, EAD.

— Правильно, — заметил Иван Петрович. — А как решить эту задачу другим способом?

Мы задумались...

— Тогда пусть это будет ваше домашнее задание. Подсказываю: примените гомотетию.

— Иван Петрович, а я знаю, почему вы обращаете внимание на эту задачу, — ведь с ее помощью можно решать задачи на построение с одной линейкой. Вот, например, на районной олимпиаде была такая задача:

Задача 4.

На прямой даны три точки A, B, C, из которых B находится посредине между A и C. Через произвольную точку K, не принадлежащую отрезку AC, с помощью одной линейки проведите n прямых, параллельных AC.

— Тоже хорошая задача, — согласился Иван Петрович, — но о ней мы поговорим в следующий раз, а сегодня рассмотрим более сложную задачу:

Задача 5.

На каждой из двух параллельных прямых расположены по одному отрезки длиной a и b. С помощью одной линейки построить отрезок: $x = \frac{ab}{a+b}$.

Сами мы быстро не справились бы, если бы не помощь Ивана Петровича:

— Продлим стороны трапеции $ABCD$, у которой основания — заданные отрезки a и b. Точки пересечения диагоналей AC и BD и отрезков AB и DC обозначим O и E. Проведем прямую EO, которая пересечет основания трапеции в точках F и H. Соединим точки D и F, A и F, B и H, C и H, получим точки K и L (рис. 24.3). Отрезок KL — искомый. Действительно, треугольники BKF и AKH, CFL и LHD подобны, поэтому

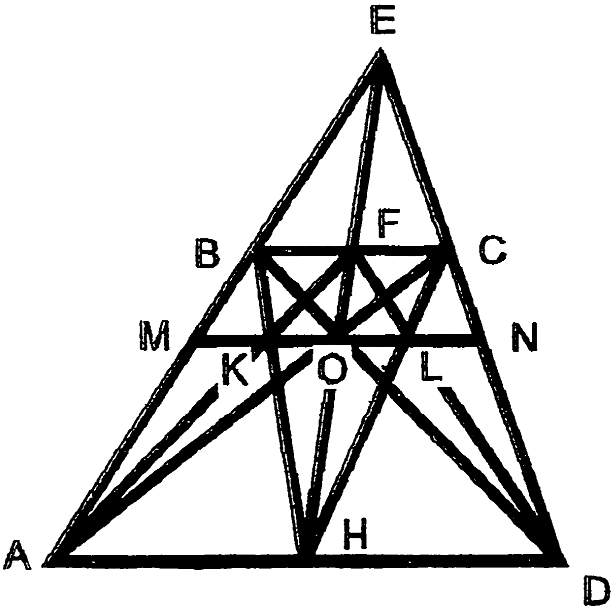


Рис. 24.3

$$\frac{BK}{KH} = \frac{BF}{AH}; \quad \frac{FL}{LD} = \frac{FC}{HD},$$

но $BF = FC$ и $AH = HD$ (задача 2), значит, $\frac{BK}{KH} = \frac{FL}{LD}$, следовательно, отрезок KL параллелен основаниям BC и AD. А поскольку точка O принадлежит отрезку KL и $MK = KO$, а $OL = LN$ (задача 2), получаем

$$OL = \frac{1}{2}\frac{ab}{a+b}, \quad KL = \frac{ab}{a+b}.$$

— А чтобы вы глубже разобрались в таких задачах, дома сделайте еще и такие задачи:

Задача 6.

Отрезки длиной a и b принадлежат одной из параллельных прямых, а отрезок длиной c — другой из них. При помощи одной линейки построить отрезок длиной x, чтобы $\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Задача 7.

Даны параллельные отрезки. Разделите с помощью одной линейки один из них пополам.

Задача 8.

С помощью одной линейки разделите трапецию на две равновеликие фигуры.

Задача 9.

Даны две параллельные прямые. Проведите через данную точку третью прямую, параллельную данным, с помощью одной линейки.

Задача 10.

Увеличьте данный отрезок, лежащий на одной из двух прямых, с помощью одной линейки в 2, 3, ... , n раз.

Задача 11.

Найдите половину, треть, ... , n-ю часть такого отрезка.

— И все эти задачи, — напомнил учитель, — решаются с помощью той первой задачи, с которой мы познакомились сегодня.

— Кто же придумал эту задачу?

— Первого автора задачи я вам назвать не могу, — сказал Иван Петрович, — но известно, что она встречается в трактате XII века индийского математика Бхаскары «Венец астрономического учения» в таком виде:

Задача 12.

Зная длины a и b двух палок бамбука, вертикально воткнутых в землю на известном расстоянии, вычислить длину перпендикуляра в земле, опущенного из точки пересечения прямых, соединяющих верхний конец одной палки с основанием другой, и длины между основанием этого перпендикуляра и основаниями палок.

— И, наконец, — заканчивая занятие, развернул таблицу с чертежом Иван Петрович, — наша задача связана с неравенствами: отрезок MN является геометрической интерпретацией среднего гармонического чисел a и b (здесь они основания трапеции). Отрезок MN меньше отрезка L_1L_2 — среднего геометрического чисел a и b, который изображается отрезком, параллельным основаниям и расположенным так, что трапеции BL_1L_2C и L_1L_2DA подобны (рис. 24.4).

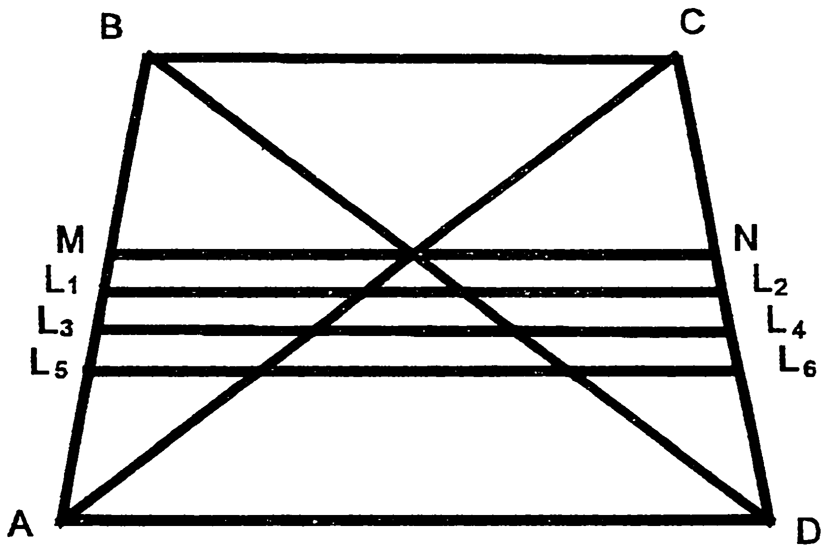


Рис. 24.4

Отрезок MN меньше отрезка L_3L_4 — средней линии трапеции, — он является интерпретацией среднего арифметического двух чисел, и, наконец, отрезок MN меньше отрезка L_5L_6 — среднего квадратичного двух чисел a и b — отрезка, разбивающего трапецию на две равновеликие части и параллельного основаниям, то есть

$$\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\,.$$

25. ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ПОСЛЕДНИХ ДЕСЯТИЛЕТИЙ

Задача 1.

Противоположные стороны вписанного четырехугольника равны a и b, угол между диагоналями равен α. Найти радиус окружности, описанной около этого четырехугольника.

Решение.

Пусть во вписанном четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке K (рис. 25.1), причем $\angle AKB = \alpha$. Полусумма дуг AB и CD равна a. Возьмем на окружности точку M так, чтобы дуга DCM равнялась сумме дуг DC и AB. Тогда $CM = AB = a$ и $\angle DCM = 180° - \alpha$. Таким образом будем иметь

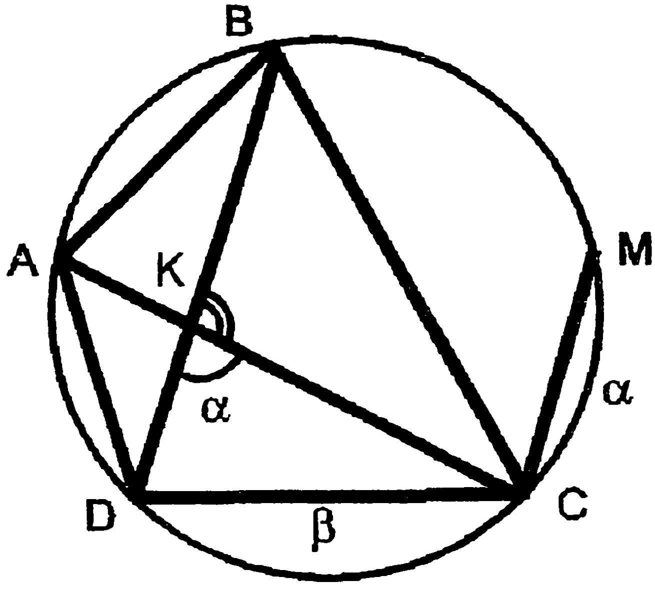


Рис. 25.1

$$R = \frac{DM}{2\sin(180° - \alpha)} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}}{2\sin\alpha}.$$

Аналогично рассматривается случай, когда
$$\angle AKB = 180° - \alpha.$$

Ответ: $R = \dfrac{1}{2\sin\alpha}\sqrt{a^2 + b^2 \pm 2\cos\alpha\cdot ab}$.

Задача 2.

В трапецию $ABCD$ ($AB \parallel BC$) диагонали пересекаются в точке O.

а) Перпендикуляры, проведенные из точек B и C соответственно на AC и BD, пересекаются в точке M, а перпендикуляры из A и D соответственно на BD и AC — в точке K. Доказать, что точки M, K и O лежат на одной прямой.

б) Перпендикуляры, проведенные к диагоналям AC и BD в точках B и C соответственно, пересекаются в точке P, а перпендикуляры к ним в точках A и D пересекаются в точке N. Доказать, что точки P, N и O лежат на одной прямой.

Решение.

Заметим, что треугольники AOD и BOC гомотетичны, центром гомотетии является точка O. При гомотетии, переводящей треугольник AOD в треугольник BOC, точка K переходит в точку M, а точка N — в точку P. Отсюда следует справедливость утверждений обоих пунктов.

Задача 3.

Даны прямая l и две точки A и B вне ее. Найти на прямой l такую точку M, для которой $AM^2 + BM^2$ достигает наименьшего значения.

Решение.

Пусть D — середина AB (рис. 25.2).

Тогда по формуле длины медианы имеем:

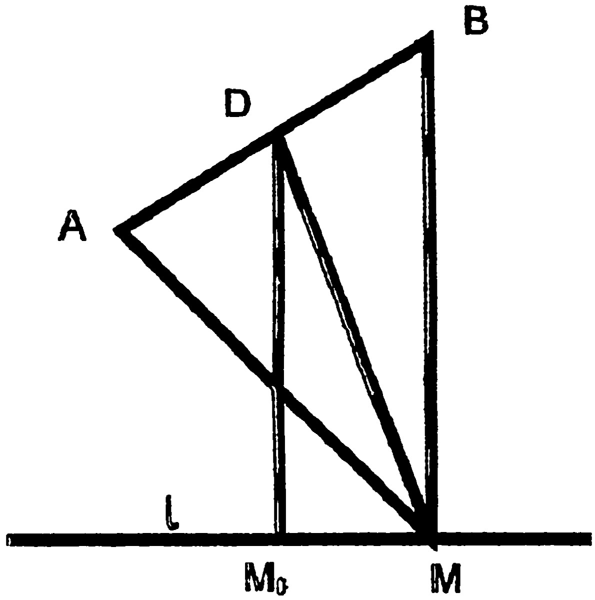


Рис. 25.2

$$DM^2 = \frac{1}{2}(AM^2 + BM^2) - \frac{1}{4}AB^2.$$

Таким образом, $AM^2 + BM^2$ достигает наименьшего значения, когда наименьшей является медиана MD в треугольнике AMB. Следовательно, искомой точкой является точка M_0 — проекция D на прямую l.

Задача 4.

Окружность, построенная на высоте AD прямоугольного треугольника ABC как на диаметре, пересекает катет AB в точке K, а катет AC — в точке M. Отрезок KM пересекает высоту AD в точке

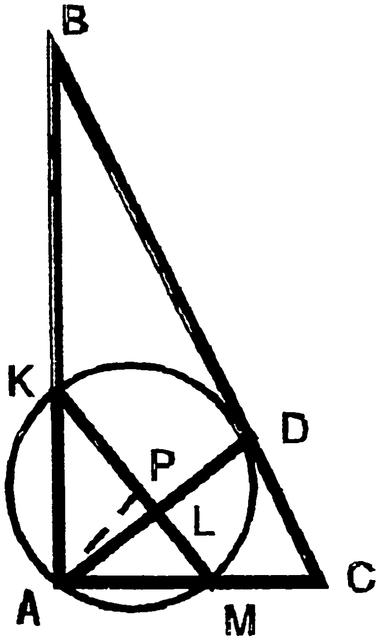


Рис. 25.3

L. Известно, что отрезки AK, AL и AM составляют геометрическую прогрессию. Найти острые углы треугольника ABC.

Решение.

Нетрудно доказать, что $AKDM$ — прямоугольник, и L — его центр. Опустим перпендикуляр AP на KM (рис. 25.3). Тогда $AL^2 = AK \cdot AM = KM \cdot AP = 2AL \cdot AP$, $\angle PLA = 30°$, а поскольку $AL = KL = ML$, отсюда следует, что острые углы треугольника AKM равны 15° и 75°. Такие же острые углы имеет и треугольник ABC: $\angle C = \angle BAD = \angle AKM$.

Задача 5.

В треугольнике ABC угол A равен 30°. На стороне AB взята точка K так, что AK равно расстоянию от центра описанной около ABC окружности до AC.

Найти BK, если $AC = a$.

Решение.

Проведем через центр описанной около ABC окружности — точку O — прямую, перпендикулярную AB и обозначим через M точку ее пересечения с AC (рис. 25.4). Треугольник AMB равнобедренный с углами при основании 30°. Если D — середина AC, то $AD = \frac{a}{2}$. Пусть $OD = x$; имеем:

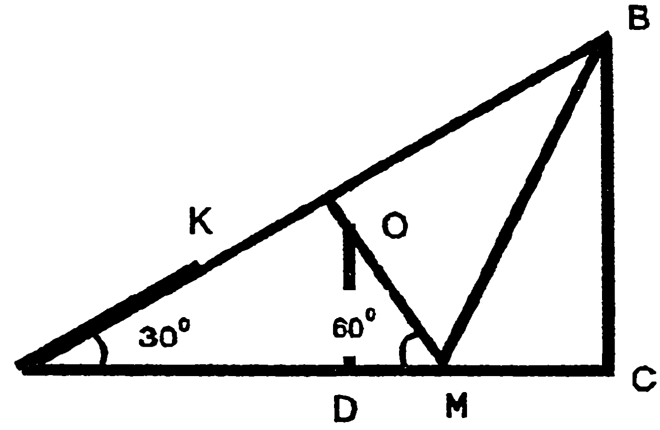


Рис. 25.4

$$AM = \frac{a}{2} + x\sqrt{3}, \quad AB = AM\sqrt{3} = \frac{a}{2}\sqrt{3} + x,$$

$$KB = AB - OD = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

Задача 6.

В равнобедренном треугольнике ABC боковые стороны AB и BC равны a. На основании AC взяты точки K и M так, что $\angle KBM = 90°$. Найти MB, если $\frac{1}{AM} = \frac{1}{MK} + \frac{1}{MC}$.

Решение.

Проведем в ΔABC высоту BD и обозначим $MB = x$, $MD = y$ (рис. 25.5). Затем найдем:

$$MK = \frac{x^2}{y},\ AD = DC = \sqrt{a^2 - BD^2} = \sqrt{a^2 - x^2 + y^2},$$

$$AM = \sqrt{a^2 - x^2 + y^2} - y,\ \ MC = \sqrt{a^2 - x^2 + y^2} + y.$$

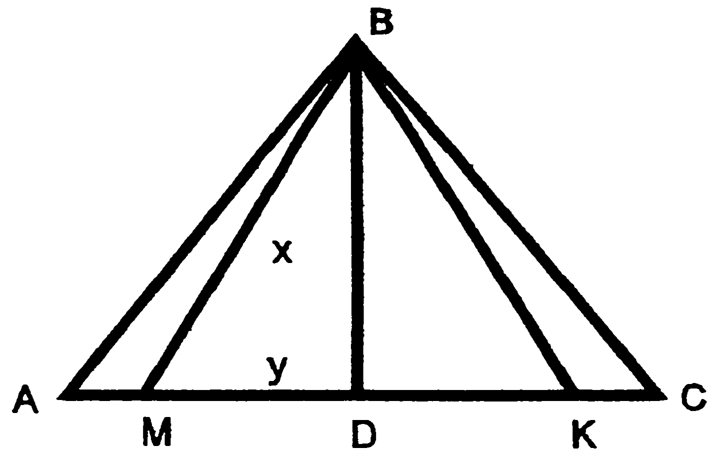


Рис. 25.5

Заменив в соотношении, заданном в условии, все величины, получим уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 + y^2} - y} = \frac{y}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 + y^2} + y}.$$

Перенеся второе слагаемое из правой части в левую, будем иметь: $\dfrac{2y}{a^2 - x^2} = \dfrac{y}{x^2}$, откуда $x = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Задача 7.

Равносторонний треугольник ABC содержит квадраты $M_1M_2M_3M_4$ и $M_2M_5M_6M_7$, причем $\{M_1, M_2, M_5\} \in [AB]$, $M_6 \in [BC]$, $M_4 \in [AC]$. При какой зависимости между длинами сторон квадратов сумма их площадей будет наименьшей?

Решение.

Пусть $AB = 1$, $M_1M_2 = x$ (рис. 25.6). Из прямоугольных треугольников AM_1M_4 и BM_5M_6 находим, что

$$M_1M_2 : AM_1 = M_2M_5 : M_5B = \sqrt{3}.$$

Следовательно,

$$AM_1 = \frac{x}{\sqrt{3}},\ M_2B = -\frac{x(\sqrt{3}+3)}{3},$$

$$M_2M_5 = -x + \frac{3-\sqrt{3}}{2}.$$

Составим сумму $S(x)$ площадей рассматриваемых квадратов:

$$S(x) = x^2 + |M_2M_5|^2 = 2x^2 - x(3-\sqrt{3}) + \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

Функция $S(x)$ имеет минимум при значении x_0 переменной x. Приравниваем нулю $S'(x)$:

$$S'(x) = 4x + \sqrt{3} - 3 = 0,\ x_0 = \frac{3-\sqrt{3}}{4}.$$

В этом случае $M_2M_5 = -x + \frac{3-\sqrt{3}}{2} = \frac{3-\sqrt{3}}{4}$, т.е. сумма площадей квадратов $M_1M_2M_3M_4$ и $M_2M_5M_6M_7$ будет наименьшей в случае равенства длин их сторон.

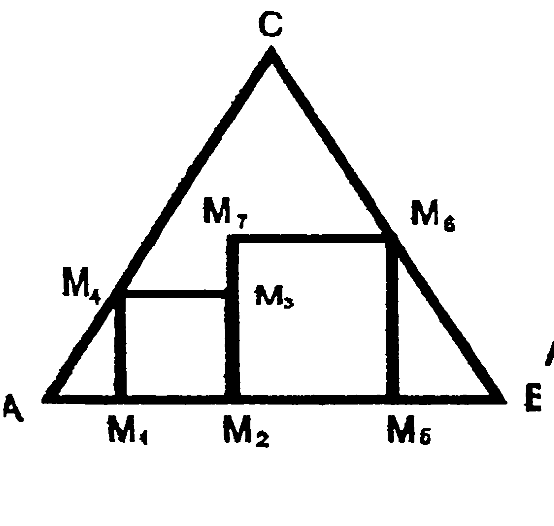


Рис. 25.6

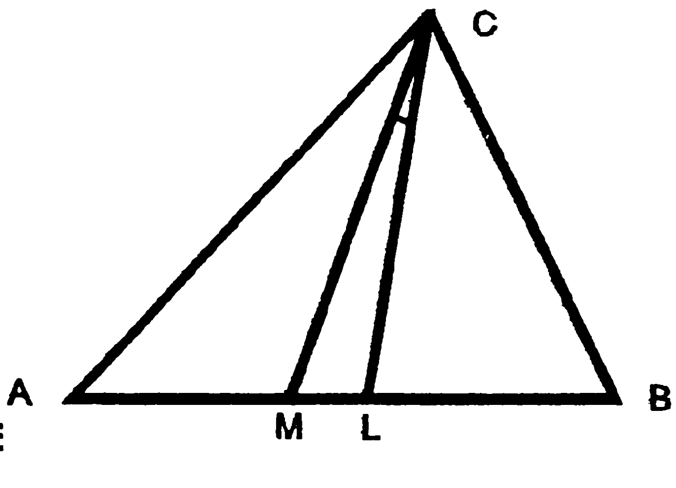


Рис. 25.7

Задача 8.

Выразить угол между медианой и биссектрисой треугольника, выходящими из одной вершины, через углы треугольника.

Решение

Проведем в треугольнике ABC медиану CM и биссектрису CL (рис. 25.7). Обозначим угол MCL через x. Применим теорему синусов к треугольникам ACM и BCM.

Имеем: $$\frac{\sin\left(\frac{\angle C}{2}-x\right)}{\sin\angle A}=\frac{\sin\left(\frac{\angle C}{2}+x\right)}{\sin\angle B}=\frac{MB}{CM}=\frac{AM}{MC}.$$

Поскольку правые части этих пропорций равны, то

$$\frac{\sin\left(\frac{\angle C}{2}-x\right)}{\sin\angle A}=\frac{\sin\left(\frac{\angle C}{2}+x\right)}{\sin\angle B},\text{ или}$$

$$\sin\frac{\angle C}{2}\cos x\,(\sin\angle B-\sin\angle A)-$$

$$-\cos\frac{\angle C}{2}\sin x\,(\sin\angle A+\sin\angle B)=0.$$

Отсюда находим:

$$\operatorname{tg} x=\frac{\sin\angle B-\sin\angle A}{\sin\angle A+\sin\angle B}\cdot\operatorname{tg}\frac{\angle C}{2};$$

$$\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}^2\frac{\angle C}{2}\operatorname{tg}\frac{\angle B-\angle A}{2}.$$

Задача 9.

Касательная к окружности в вершине вписанного треугольника перпендикулярна к противолежащей стороне. Найти зависимость между сторонами треугольника.

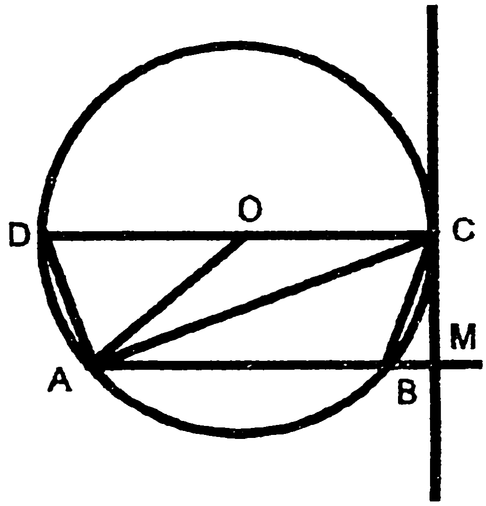


Рис. 25.8

Решение. *Первый способ.*

Пусть касательная к описанной окружности в вершине C треугольника ABC перпендикулярна к стороне AB (рис. 25.8). Построим диаметр CD окружности. Очевидно, что $AD = CB = a$, поэтому $a^2 + b^2 = 4R^2$. Применим к трапеции $ABCD$ теорему Птолемея: $b^2 = a^2 + 2Rc$. Отсюда

$$(b^2 - a^2)^2 = 4R^2c^2 \text{ и } (a^2 - b^2)^2 = c^2(a^2 + b^2).$$

Второй способ.

Легко доказать, что для треугольника ABC $(b > a)$ $\angle B - \angle A = 90°$. Отсюда

$$\sin(\angle B - \angle A) = 1, \text{ или } \sin\angle B\cos\angle A - \sin\angle A\cos\angle B = 1.$$

Но $\sin\angle A = \frac{a}{2R}$, $\sin\angle B = \frac{b}{2R}$,

$$\cos\angle A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \ \cos\angle B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Поэтому

$$\frac{b}{2R} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} - \frac{a}{2R} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = 1.$$

После упрощений получим: $b^2 - a^2 = 2Rc$.

Но $4R^2 = a^2 + b^2$, следовательно, $(b^2 - a^2)^2 = c^2(a^2 + b^2)$.

Третий способ.

Для трапеции имеет место предложение: сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов ее боковых сторон и удвоенного произведения оснований. Поэтому можно записать:

$$2b^2 = 2a^2 + 2 \cdot 2Rc.$$

Отсюда $b^2 - a^2 = 2Rc$ и $(b^2 - a^2)^2 = c^2(a^2 + b^2)$.

Задача 10.

Какая из сумм $a + h_a$, $b + h_b$, $c + h_c$ является наибольшей и какая — наименьшей, если a, b, c — стороны треугольника, а h_a, h_b, h_c — его соответствующие высоты?

Решение.

Пусть $a \geqslant b \geqslant c$. Воспользовавшись непосредственно проверяемыми соотношениями

$$a + h_a - (b + h_b) = (a - b)(ab - 2S) : ab, \quad ab \geqslant 2S,$$

где S — площадь треугольника, получим:

$$a + h_a \geqslant b + h_b \geqslant c + h_c.$$

Задача 11.

Площадь прямоугольного треугольника равна S. Найти площадь треугольника с вершинами в основаниях перпендикуляров, проведенных из точки пересечения медиан данного треугольника на катеты и гипотенузу.

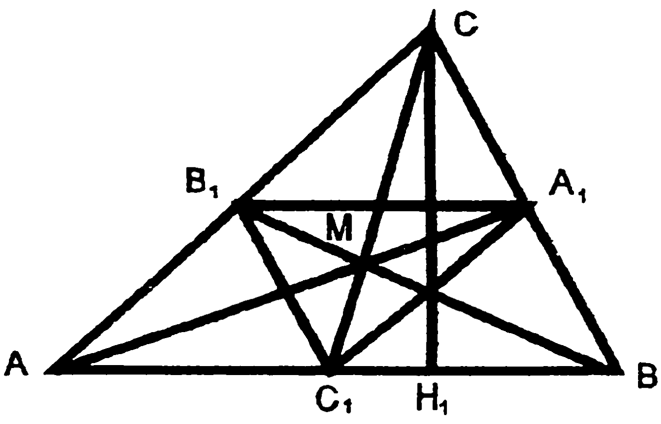


Рис. 25.9

Решение.

Пусть $BC = a$ и $AC = b$ — катеты прямоугольного треугольника ABC. Высота, проведенная к гипотенузе, равна h, острый угол при вершине A равен α (рис. 25.9). Тогда расстояние от точки M — точки пересечения медиан треугольника ABC до сторон треугольника — будут равны $\frac{b}{3}$, $\frac{a}{3}$ и $\frac{h}{3}$, а площадь искомого треугольника

$$S' = S_{\Delta A_1MB_1} + S_{\Delta B_1MC_1} + S_{\Delta C_1MA_1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{3}\cdot\frac{b}{3} + \frac{a}{3}\cdot\frac{h}{3}\sin\alpha + \frac{b}{3}\cdot\frac{h}{3}\cos\alpha\right).$$

Но $a\sin\alpha + b\cos\alpha = c$, где c — гипотенуза треугольника ABC. Следовательно, искомая площадь

$$S' = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}hc\right) = \frac{2}{9}S.$$

Задача 12.

Медиана треугольника, выходящая из одной вершины, равна высоте, проведенной из другой вершины и равна 1. Высота, проведенная из третьей вершины, равна $\sqrt{3}$. Найти площадь треугольника.

Решение.

Пусть в треугольнике ABC медиана CM равна 1, высота, выходящая из вершины A, также равна 1, а высота, проведенная из вершины B, равна $\sqrt{3}$. Следовательно, расстояния от точки M до сторон BC и AC соответственно равны $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \angle MCB = \frac{1}{2}$; $\sin \angle MCA = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Таким образом, угол MCB равен 30° или 150°, а угол MCA может равняться 60° или 120°. Поскольку их сумма меньше 180°, то имеет место две возможности:

1) $\angle MCB = 30°$, $\angle MCA = 60°$ (рис. 25.10, *а*) и

2) $\angle MCB = 30°$, $\angle MCA = 120°$ (рис. 25.10, *б*).

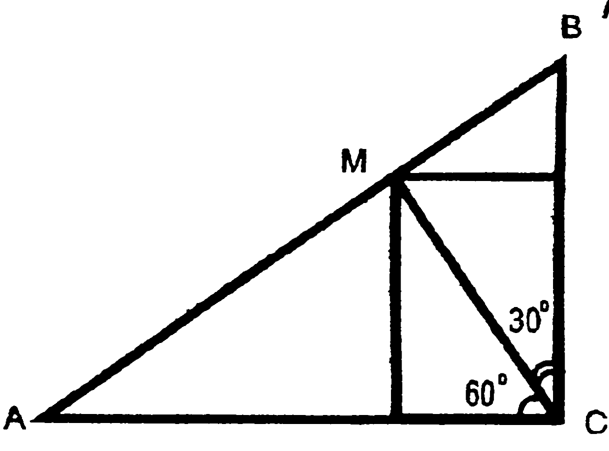


Рис. 25.10 (*а*)

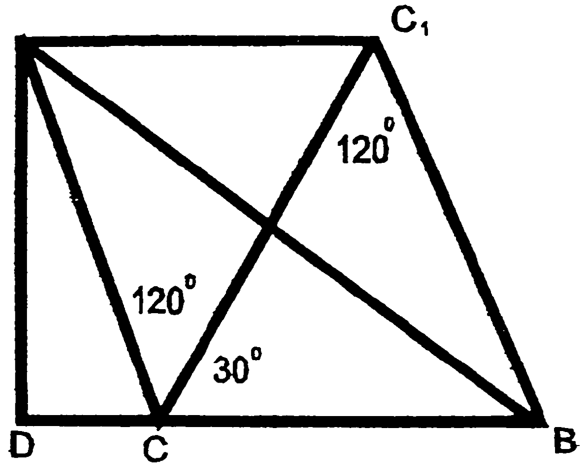


Рис. 25.10 (*б*)

В первом случае имеем прямоугольный треугольник ABC с катетом 1 и $\sqrt{3}$, его площадь равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Во втором случае продолжим медиану CM на ее длину. Получим параллелограмм $ACBC_1$. Треугольник CC_1B равновелик треугольнику ABC. Но треугольник CC_1B, как легко видеть, равнобедренный: $CC_1 = C_1B = 2$, $\angle CC_1B = 120°$.

Следовательно, $S_{ABC} = S_{CC_1B} = \sqrt{3}$. Итак, искомая площадь равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\sqrt{3}$.

Задача 13.

Через вершину C квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке K, а серединный перпендикуляр к стороне AB — в точке M. Найти $\angle DCK$, если $\angle AKB = \angle AMB$.

Решение. *Первый случай.*

Точка M на отрезке CK (рис. 25.11, *а*). Из равенства углов AKB и AMB следует, что четырехугольник $AKMB$ является вписанным. По условию $AM = MB$. Кроме того, $\angle AKB = \angle BKC$, следовательно,

$$\angle MAB = \angle MKB = \angle AKB = \angle AMB, \text{ т.е. } AB = MB.$$

Таким образом, ΔAMB — правильный, значит,

$$\angle CKB = 60°, \text{ а тогда } \angle DCK = 60° - 45° = 15°.$$

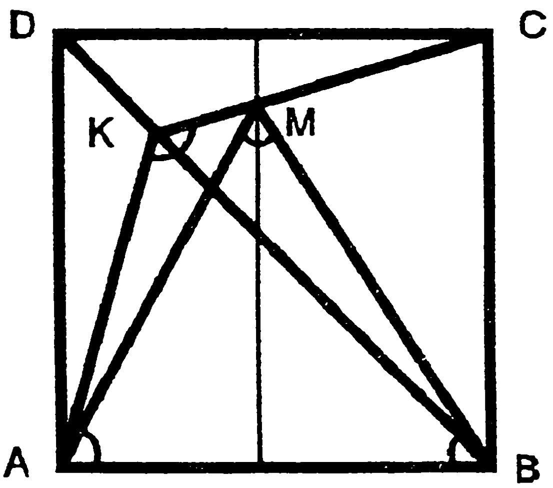


Рис. 25.11 (*а*)

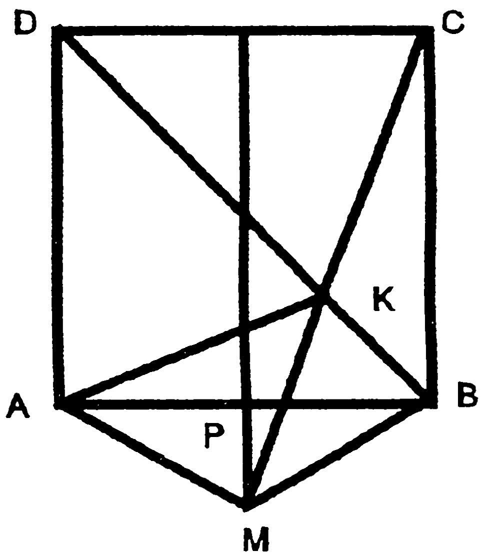


Рис. 25.11 (*б*)

Второй случай.

Точка M на продолжении CK (рис. 25.11, *б*).

Если $\angle DCK = \varphi$, то $\angle AKB = \angle BKC = 45° + \varphi$. Пусть (для удобства) сторона квадрата равна 2, тогда

$$MP = MQ = PQ = \operatorname{tg}\varphi - 2, \quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}\angle AMB = \frac{PB}{PM} = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi - 2},$$

$$\operatorname{tg}\angle AMB = \frac{\dfrac{2}{\operatorname{tg}\varphi - 2}}{1 - \dfrac{1}{(\operatorname{tg}\varphi - 2)^2}} = \frac{2(\operatorname{tg}\varphi - 2)}{(\operatorname{tg}\varphi - 3)(\operatorname{tg}\varphi - 1)}.$$

Так как $\angle AMB = \angle AKB = 45° + \varphi$, то

$$\operatorname{tg}\angle AMB = \frac{1 + \operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}\varphi}.$$

Приравнивая два выражения для $\operatorname{tg} \angle AMB$, получим для $\operatorname{tg}\varphi$ уравнение, из которого $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{7}$.

Итак, задача имеет два решения. Искомый угол равен или 15°, или $\operatorname{arctg}\sqrt{7}$.

Задача 14.

В треугольнике ABC угол B равен 36°, угол C равен 42°. На стороне BC взята точка M так, что $BM = R$, где R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC. Найти угол MAC.

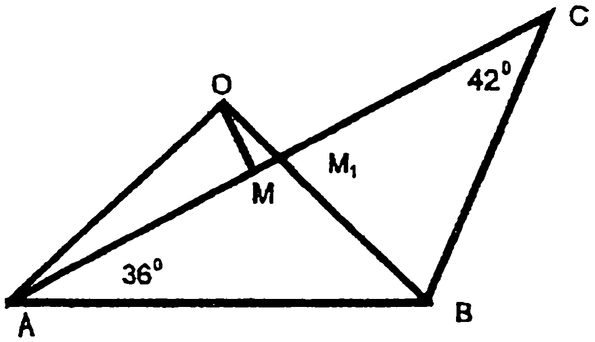


Рис. 25.12 (*а*)

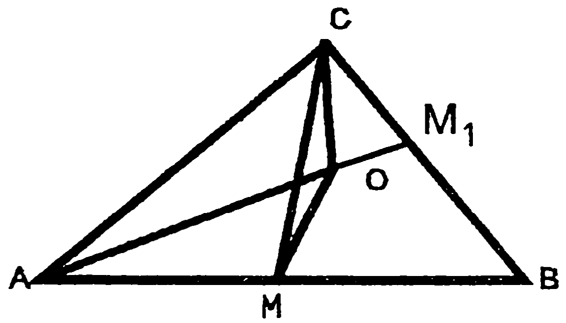


Рис. 25.12

Решение.

Пусть O — центр описанной около ΔABC окружности. Обозначим через M_1 точку пересечения OA и BC (рис. 25.12). Докажем, что точка M_1 совпадает с точкой M. Имеем:

$$\angle AOB = 84°, \quad \angle OAB = 90° - 42° = 48°,$$

$$\angle BM_1O = 36° + 48° = 84°.$$

Следовательно, $BM_1 = BO = R$, т.е. M_1 совпадает с точкой M. Искомый угол равен 54°.

Задача 15.

В прямоугольном треугольнике ABC один из острых углов равен 30°, M — середина гипотенузы AB, O — центр вписанной окружности. Чему равен угол OMC?

Решение

Пусть угол A равен 30°. Тогда

$$\angle OCM = \angle OCA - \angle MCA = 15° = \angle OAM$$

(или $\angle AOC = \angle AMC = 120°$) (рис. 25.12, *а*).

Значит, точки A, M, O и C лежат на одной окружности. Следовательно, $\angle OMC = \angle OAC = 15°$.

Задача 16.

Стороны треугольника выражаются числами

$$\sqrt{14},\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{12},\ \operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}.$$

Вычислить площадь треугольника.

Решение.

Имеем

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2-\sqrt{3};$$

$$\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}.$$

Так как $(2-\sqrt{3})^2 + (2+\sqrt{3})^2 = 14$, то данный треугольник прямоугольный и его площадь равна

$$\frac{1}{2}(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = \frac{1}{2}\ \text{(кв. ед.)}.$$

Задача 17.

Сколько имеется прямоугольных треугольников, длины сторон которых выражаются целыми числами, если один из катетов этих треугольников равен 15?

Решение.

Если x — гипотенуза, y — неизвестный катет прямоугольного треугольника, то

$$x^2 - y^2 = 15^2;\ (x-y)(x+y) = 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5.$$

Так как $(x-y)$ и $(x+y)$ — натуральные числа, причем $x+y > x-y$, то возможны лишь четыре случая:

$$\begin{cases} x-y=1,\\ x+y=225,\end{cases} \quad \begin{cases} x-y=3,\\ x+y=75,\end{cases} \quad \begin{cases} x-y=5,\\ x+y=45,\end{cases} \quad \begin{cases} x-y=9,\\ x+y=25.\end{cases}$$

Таким образом, имеется четыре прямоугольных треугольника с указанными свойствами — со сторонами

(15; 112; 113), (15; 36; 36), (15; 20; 25), (15; 8; 17).

Задача 18.

Дан квадрат $ABCD$, M — середина CD. На отрезке AC взята точка P так, что $\angle ABP = \angle CPM = \alpha$. Найти величину α и соотношение, в котором P делит AC.

Решение.

Считая сторону квадрата равной 1 и обозначив длину отрезка AP через P, из подобия ΔABP и ΔCPM будем иметь $1 : (\sqrt{2} - p) = p : \frac{1}{2}$.

Из этого равенства легко получаем, что $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$, т.е. точка P — середина диагонали квадрата, а угол α равен 45°.

Задача 19.

Дан отрезок AB, $AB = c$. Найти множество таких точек C, для которых $|CA|^2 + |CB|^2 = 2c^2$. Найти промежуток, в котором изменяется отношение $a : b$, где $a = BC$, $b = CA$. Вычислить наибольшее значение угла ACB.

Решение.

Будем решать эту задачу методом координат, примем середину O отрезка AB за начало координат и положим $A\left(-\frac{c}{2};\ 0\right)$, $B\left(\frac{c}{2};\ 0\right)$, $C\,(x;\ y)$. Тогда

$$\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 + \left(x + \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 = 2c^2.$$

Отсюда получаем $x^2 + y^2 = \frac{3c^2}{4}$. Итак, искомое множество точек C есть окружность с центром в середине данного отрезка AB радиуса $\frac{c\sqrt{3}}{2}$. Далее

$$a^2 = \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 = x^2 + y^2 - cx + \frac{c^2}{4},\ \ a^2 = c^2 - cx.$$

Аналогично, $b^2 = c^2 + cx$. Имеем $a : b = \sqrt{\dfrac{c-x}{c+x}}$, причем $|x| \leqslant \dfrac{c\sqrt{3}}{2}$.

На промежутке $\left[-\dfrac{c\sqrt{3}}{2}; \dfrac{c\sqrt{3}}{2}\right]$ функция $\sqrt{\dfrac{c-x}{c+x}}$ монотонно убывает, так как функция $\sqrt{\dfrac{c-x}{c+x}}$ на этом интервале отрицательна. Следовательно, наибольшее значение отношение $a : b$ принимает при $x = -\dfrac{c\sqrt{3}}{2}$, а наименьшее — при $x = \dfrac{c\sqrt{3}}{2}$.

$$(a:b)_{\max} = \sqrt{\frac{c + \frac{c\sqrt{3}}{2}}{c - \frac{c\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} = 2+\sqrt{3};$$

$$(a:b)_{\min} = \sqrt{\frac{c - \frac{c\sqrt{3}}{2}}{c + \frac{c\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = 2-\sqrt{3}.$$

Отношение $a : b$ изменяется на промежутке

$$[2-\sqrt{3};\ 2+\sqrt{3}].$$

Наибольшее значение угла ACB равно 60°. В самом деле,

$$\cos\angle ACB = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{c^2}{2c\sqrt{c^2-x^2}} = \frac{c}{2\sqrt{c^2-x^2}}.$$

Угол ACB принимает наибольшее значение, когда $\cos\angle ACB$ имеет наименьшее значение, $c^2 - x^2$ — наибольшее. Но это может быть при $x = 0$, т.е. при $a^2 = b^2 = c^2$.

Задача 20.

В треугольнике ABC угол A равен α. Прямая, проходящая через A перпендикулярно биссектрисе угла BAC, пересекает прямую BC в такой точке M, что $BM = BA + AC$. Найти углы B и C треугольника ABC.

Решение.

Возможны два случая.

1. Точка C лежит между B и M (рис. 25.13, *а*). На продолжении BA возьмем точку C_1 так, что $AC_1 = AC$. Поскольку AM есть биссектриса угла CAC_1, то треугольники AMC и AMC_1 равны. Кроме того, по условию

$$BC_1 = BA + AC = BM.$$

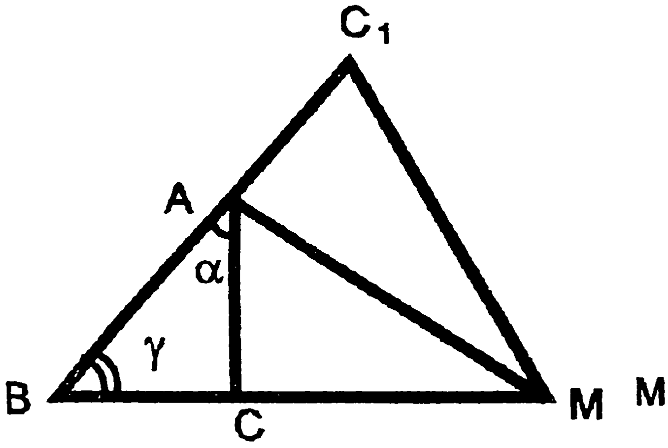


Рис. 25.13 (*а*)

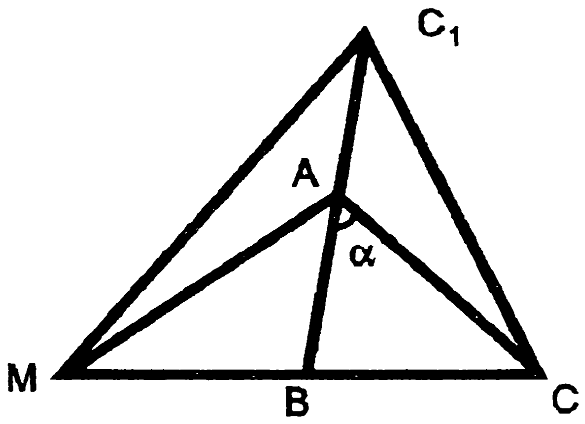


Рис. 25.13 (*б*)

Следовательно, если угол B исходного треугольника равен φ, то $\angle ACM = \angle AC_1M = 90° - \frac{\varphi}{2} = \alpha + \varphi$, $\varphi = 60° - \frac{2}{3}\alpha$.

Этот случай возможен при $0 < \alpha < 90°$.

2. Точка B лежит между M и C (рис. 25.13, *б*). Определяя точку C_1 так же, как в предыдущем случае, будем иметь

$$MB = BC_1, \qquad MC = MC_1, \qquad \angle ACB = \angle AC_1M = \angle C_1MB = \frac{\varphi}{2},$$

$$\varphi + \frac{\varphi}{2} + \alpha = 180°, \ \varphi = 120° - \frac{2}{3}\alpha.$$

Этот случай возможен при любых α.

Ответ: если α острый угол, возможны два ответа:

$$\angle B = 60° - \frac{2}{3}\alpha, \ \angle C = 120° - \frac{\alpha}{3}$$

$$\text{или } \angle B = 120° - \frac{2}{3}\alpha, \ \angle C = 60° - \frac{\alpha}{3};$$

для остальных α $\angle B = 120^\circ - \frac{2}{3}\alpha$; $\angle C = 60^\circ - \frac{\alpha}{3}$.

Задача 21.

Отрезок $BC = a$ движется своими концами по сторонам угла A; найти геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольника ABC.

Решение.

Возьмем какое-либо одно из положений отрезка $BC = a$. Из треугольника ABC имеем:

$$\frac{BC}{\sin A} = 2R, \quad R = \frac{a}{2\sin A}$$

Так как a и A — данные постоянные величины, то $R = AO$ является величиной постоянной. Следовательно, геометрическим местом центров будет окружность радиуса $R = \frac{a}{2\sin A}$, описанная из A, как из центра.

Задача 22.

Внутри ΔABC взята точка O. Прямая BO пересекает AC в точке M, прямая CO пересекает AB в точке N. Площади треугольников MOC, COB, BON равны S_1, S_2, S_3 соответственно. Найти площадь ΔABC.

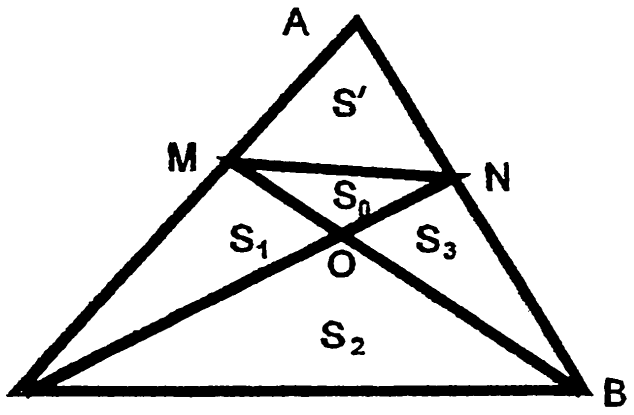


Рис. 25.14

Решение.

Обозначим площади треугольников MON и MAN через S_0 и S' соответственно (рис. 25.14). Тогда

1) $\frac{S_0}{S_3} = \frac{S_1}{S_2} \Leftrightarrow S_0 = \frac{S_1 S_3}{S_2}$,

2) $\frac{S'}{S_0 + S_3} = \frac{S' + S_0 + S_1}{S_2 + S_3} \Leftrightarrow$

$$S'(S_2+S_3) = S'(S_0+S_3) + (S_0+S_3)(S_0+S_1) \Leftrightarrow$$

$$S' = \frac{(S_0+S_3)(S_0+S_1)}{S_2-S_0} \Leftrightarrow S' = \frac{\left(\frac{S_1S_3}{S_2}+S_3\right)\left(\frac{S_1S_3}{S_2}+S_1\right)}{S_2-\frac{S_1S_3}{S_2}} \Leftrightarrow$$

$$S' = \frac{S_1S_3}{S_2} \cdot \frac{(S_1+S_2)(S_2+S_3)}{S_2^2-S_1S_3},$$

3) $S_{ABC} = S_1+S_2+S_3+S_0+S' =$

$$= S_1+S_2+S_3+\frac{S_1S_3}{S_2}+\frac{S_1S_3}{S_2}\cdot\frac{(S_1+S_2)(S_2+S_3)}{S_2^2-S_1S_3} =$$

$$= S_1+S_2+S_3+\frac{S_1S_3}{S_2(S_2^2-S_1S_3)}\cdot(S_2^2-S_1S_3+S_2(S_1+S_3)+$$

$$+S_2^2+S_1S_3) = S_1+S_2+S_3+\frac{S_1S_3(S_1+S_3+2S_2)}{S_2^2-S_1S_3} =$$

$$= S_1+S_2+S_3+\frac{S_1S_3(S_1+S_2+S_3)}{S_2^2-S_1S_3}+\frac{S_1S_3}{S_2^2-S_1S_3}\cdot S_2 =$$

$$= (S_1+S_2+S_3)\cdot\frac{S_1S_3+S_2^2-S_1S_3}{S_2^2-S_1S_3}+\frac{S_1S_3}{S_2^2-S_1S_3}\cdot S_2 =$$

$$= \frac{S_2(S_1S_3+S_2(S_1+S_2+S_3))}{S_2^2-S_1S_3} = \frac{S_2(S_1S_3+S_2S_3+S_2(S_1+S_2))}{S_2^2-S_1S_3} =$$

$$= \frac{S_2(S_1+S_2)(S_2+S_3)}{S_2^2-S_1S_3}.$$

Ответ: $S_{ABC} = \dfrac{S_2(S_1+S_2)(S_2+S_3)}{S_2^2-S_1S_3}.$

Задача 23.

Дан угол величиной α с вершиной O. На одной из его сторон взяты точки A и B так, что $OA = a$, $OB = b$. Найти радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся противоположной стороны угла.

Решение.

Пусть O_1 — центр окружности, R — ее радиус, C — точка касания, D — середина отрезка AB, F — точка пересечения прямых O_1D и OC (рис. 25.15 и рис. 25.16).

Тогда $OD = \dfrac{a+b}{2}$, $O_1D \perp AB$ и по теореме о касательной и секущей $OC = \sqrt{ab}$.

1. Если угол α острый (рис. 25.15), то $\angle CO_1F = \alpha$ и $OC = OF - CF$, следовательно, $\sqrt{ab} = \dfrac{a+b}{2} \cdot \dfrac{1}{\cos\alpha} - R\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

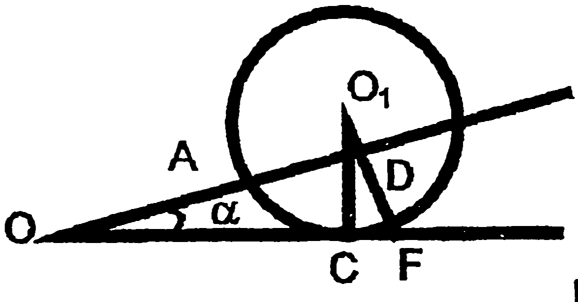


Рис. 25.15

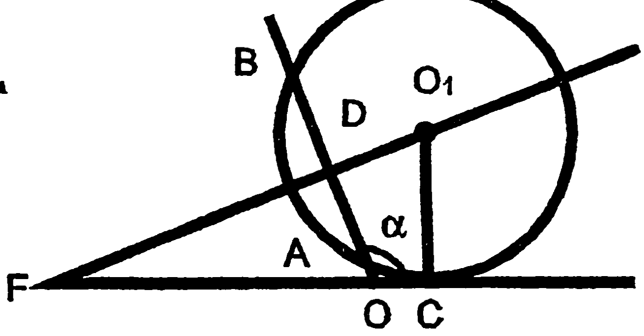


Рис. 25.16

2. Если угол α — тупой (рис. 25.16), то

$$FO = OD : \cos(180^\circ - \alpha) = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{1}{\cos\alpha};$$

$$FC = O_1C \cdot \mathrm{tg}\,(180^\circ - \alpha) = -R\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

и $OC = FC - OF$ — следовательно,

$$\sqrt{ab} = -R\,\mathrm{tg}\,\alpha + \frac{a+b}{2} \cdot \frac{1}{\cos\alpha}.$$

3. Если угол α — прямой, то $R = O_1C = OD$. Таким образом, во всех случаях $R = \dfrac{a+b}{2\sin\alpha} - \sqrt{ab}\,\mathrm{ctg}\,\alpha$.

Задача 24.

Стороны AC, BC, AB треугольника ABC равны a, b и c. Найти радиус окружности, касающийся прямых CA и CB и внешним образом окружности, описанной около данного треугольника.

Решение.

Пусть $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC, p — его полупериметр, R_x — искомый радиус. Из прямоугольного треугольника CO_2K находим $CO_2 = \dfrac{R_x}{\sin\frac{C}{2}}$ (рис. 25.17).

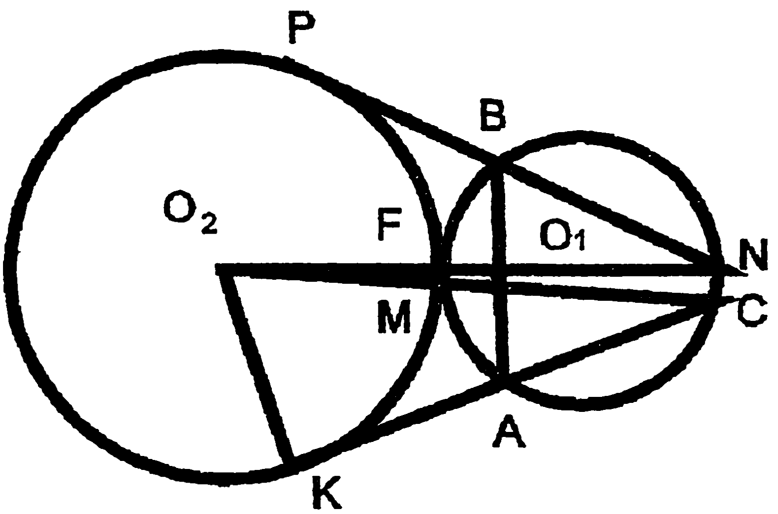


Рис. 25.17

Так как $\angle AMC = B$, то $\angle MAC = 180° - \left(B + \frac{C}{2}\right)$. По теореме синусов из треугольника ACM имеем

$$\frac{CM}{\sin\left(180° - \left(B + \frac{C}{2}\right)\right)} = \frac{CA}{\sin B}, \text{ или } CM = \frac{b\sin\left(B + \frac{C}{2}\right)}{\sin B}.$$

Далее $O_2M = \dfrac{R_x}{\sin\frac{C}{2}} - \dfrac{b\sin\left(B + \frac{C}{2}\right)}{\sin B}$.

Используя теорему о секущих окружности, запишем:

$$O_2C \cdot O_2M = O_2N \cdot O_2F, \text{ или}$$

$$\frac{R_x}{\sin\frac{C}{2}}\left(\frac{R_x}{\sin\frac{C}{2}} - \frac{b\sin\left(B + \frac{C}{2}\right)}{\sin B}\right) = (2R + R_x)\,R_x.$$

Решая это уравнение относительно R_x, находим

$$R_x = 4R \cdot \frac{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos^2\frac{C}{2}}.$$

Применив формулы $R = \frac{abc}{4}$, $\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$,

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}, \ \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}},$$

$$\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}},$$

окончательно получим $R_x = \frac{ab}{p-b}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$.

Задача 25.

Найти угол C треугольника ABC, если

$$2h_C = AB, \ \angle A = 75°.$$

Решение.

Положим $AB = c$, $BC = a$ и допустим, что $c > a$. Тогда $\angle C > 75°$ и $\angle B < 30°$. Опустив из вершины C высоту CC_1, мы у прямоугольного треугольника CC_1B находим, что

$$h_C = CC_1 < \frac{a}{2} < \frac{c}{2}, \text{ т.е. } 2h_C < c,$$

что противоречит условию задачи. Таким же путем устанавливается невозможность противоположного неравенства $c < a$. Итак, остается, что $c = a$, $\angle C = 75°$.

Задача 26.

Внутри треугольника имеются две точки. Расстояния от одной из них до сторон треугольника равны 1, 3, и 15, а от другой (в том же порядке) — 4, 5, и 11. Найти радиус окружности, вписанной в данный треугольник.

Решение.

Пусть M_1 и M_2 — данные точки, O — такая точка, для которой M_2 есть середина OM_1. По известному свойству средней линии трапеции расстояние от точки O до сторон треугольника будут равны соответственно

$$2 \cdot 4 - 1 = 7,\ 2 \cdot 5 - 3 = 7,\ 2 \cdot 11 - 15 = 7 \text{ (рис. 25.18)}.$$

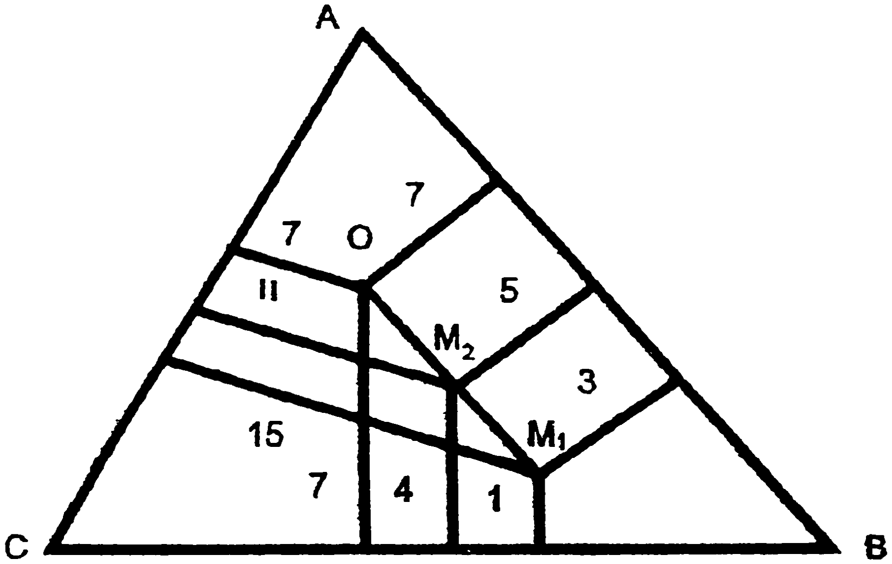


Рис. 25.18

А поскольку отрезок OM_1 не может пересекать ни одной стороны треугольника, то O — центр вписанной в данный треугольник окружности, а ее радиус равен 7.

Задача 27.

В окружность радиуса 1 вписан правильный десятиугольник. Найти сумму квадратов расстояний от произвольной точки окружности до всех вершин этого десятиугольника.

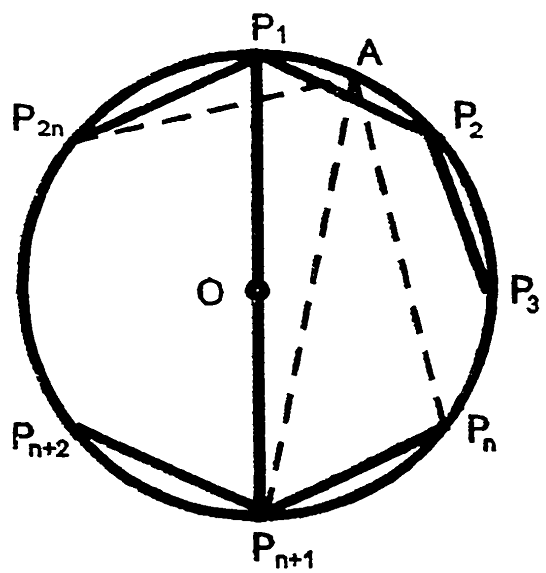


Рис. 25.19

Решение.

Приводим решение для многоугольников с любым нечетным числом сторон. Для каждой вершины многоугольника имеется диаметрально противоположная (рис. 25.19). Поэтому

$$AP_1^2 + AP_2^2 + \ldots + AP_{2n}^2 = (AP_1^2 + AP_{n+1}^2) +$$

$$+ (AP_2^2 + AP_{n+2}^2) + \ldots + (AP_n^2 + AP_{2n}^2) =$$

$$= (2R)^2 + \ldots + (\cong R)^2 = 4nR^2.$$

Для многоугольника с нечетным числом n сторон имеет место аналогичный результат. Сумма квадратов хорд, соединяющих точку на описанной окружности с вершинами правильного n-угольника, равна $2n\,R^2$, однако доказательство этого факта более сложно.

Задача 28.

На плоскости отмечены две точки A и B. Найти геометрическое место точек C плоскости таких, что медиана к стороне BC перпендикулярна AC.

Решение.

Проведем через C прямую, параллельную медиане AM. Пусть эта прямая пересекает прямую AB в точке D (рис. 25.20). Имеем $AD = AB$. Кроме того, из условия следует, что $\angle ACD = 90°$. Значит, точка C лежит на окружности с диаметром AD. В искомое геометрическое место входят все точки этой окружности, за исключением A и D.

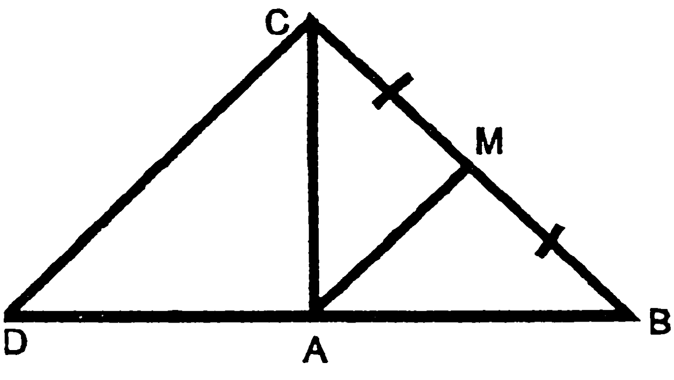


Рис. 25.20

Задача 29.

В параллелограмме $ABCD$ угол ABD равен $40°$. Найти угол DBC, если известно, что центры окружностей,описанных около ΔABC и CDA, лежат на диагонали BD.

Решение.

Если центры указанных окружностей не совпадают, то, как нетрудно доказать, диагональ BD является осью симметрии данного параллелограмма, а значит, $ABCD$ — ромб и $\angle DBC = 40°$. Если же эти центры совпадают, то $ABCD$ — прямоугольник и угол DBC равен $50°$.

Итак, задача имеет два решения: искомый угол равен либо 40°, либо 50°.

Задача 30.

Дана четверть круга AOB (центр в O) радиуса R и полуокружность с центром в O, построенная на AO так, как на диаметре (внутри данной четверти круга). Радиус этой полуокружности, перпендикулярной к OA, встречает окружности O и O_1 в точках M и N. Найти периметр и площадь криволинейной трапеции $MNOB$.

Решение.

Периметр трапеции

$$P = \smile BM + MN + \smile NO + OB. \tag{1}$$

В ΔMO_1O гипотенуза $OM = R$, а катет $OO_1 = \frac{R}{2}$, следовательно, $\angle OMO_1 = 30°$. Но тогда и $\angle BOM = 30°$, т.е. $\smile BM$ равна $\frac{1}{12}$ окружности O.

$$\smile BM = \frac{2\pi R}{12} = \frac{\pi R}{6}. \tag{2}$$

Из ΔMO_1O находим $MO_1 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Тогда

$$MN = O_1M - NO_1 = \frac{R\sqrt{3}}{2} - \frac{R}{2} = \frac{R(\sqrt{3}-1)}{2}. \tag{3}$$

Далее находим:

$$\smile NO = \frac{1}{4} 2\pi \frac{R}{2} = \frac{\pi R}{4}; \tag{4}$$

$$OB = R. \tag{5}$$

Подставляя (2), (3), (4) и (5) в (1), получим:

$$P = R\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right).$$

Площадь трапеции найдем как

$$S = S_{сект.\ BOM} + S_{\Delta MOO_1} - S_{сект.\ OO_1N}.$$

Находим последовательно:

$$S_{\text{сект. } BOM} = \frac{1}{12}\pi R^2, \quad S_{\Delta MOO_1} = \frac{R^2\sqrt{3}}{8};$$

$$S_{\text{сект. } NOO_1} = \frac{\pi R^2}{16}, \quad S = R^2\left(\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{48}\right).$$

Задача 31.

Дана окружность, диаметр которой AB и касательная AX. Требуется найти на окружности точку M, чтобы расстояние от этой точки до касательной равнялось бы расстоянию от этой же точки до другого конца диаметра B.

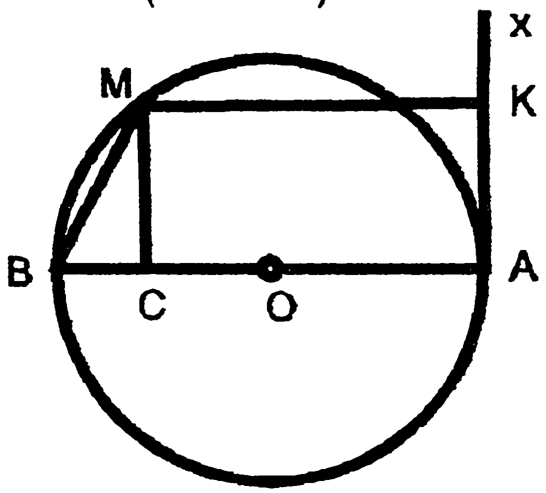


Рис. 25.21

Решение.

Допустим, что точка M найдена, тогда

$$MK = MB \text{ (рис. 25.21)} \qquad (1)$$

и $MB^2 = AB \cdot BC$. Но $MK = 2R - BC$. Получим:

$$(2R - BC)^2 = 2R \cdot BC, \text{ или } BC^2 - 6R \cdot BC + 4R^2 = 0,$$

так как $BC < 2R$. Отсюда $BC = 2R - \sqrt{9R^2 - 4R^2}$.

Следовательно, BC можно построить как разность двух отрезков: $3R$ и $\sqrt{9R^2 - 4R^2}$.

Задача 32.

В четырехугольнике $ABCD$ углы A и C равны 90°. Доказать, что периметр вписанного в $ABCD$ четырехугольника не меньше, чем $2AC$.

Решение.

Рассмотрим вписанный в $ABCD$ четырехугольник $KLMN$ (рис. 25.22). Пусть P_1E и Q — середины KL, NL и NM соответственно. Поскольку $AP = \frac{1}{2}KL$, $PE = \frac{1}{2}KN$,

$$EQ = \frac{1}{2}LM, \quad QC = \frac{1}{2}NM,$$

то длина ломаной $APEQC$ равна половине периметра четырехугольника $KLMN$. Из этого и следует утверждение задачи.

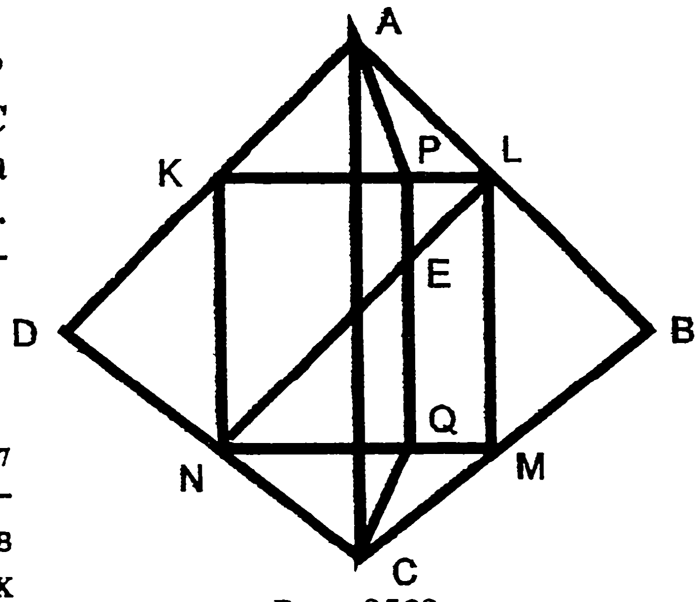


Рис. 25.22

Задача 33.

Пусть $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ — выпуклый семиугольник. Найти сумму углов двух семиконечных «звезд»: $A_1A_4A_7A_3A_6A_2A_5$ и $A_1A_3A_5A_2A_4A_6$.

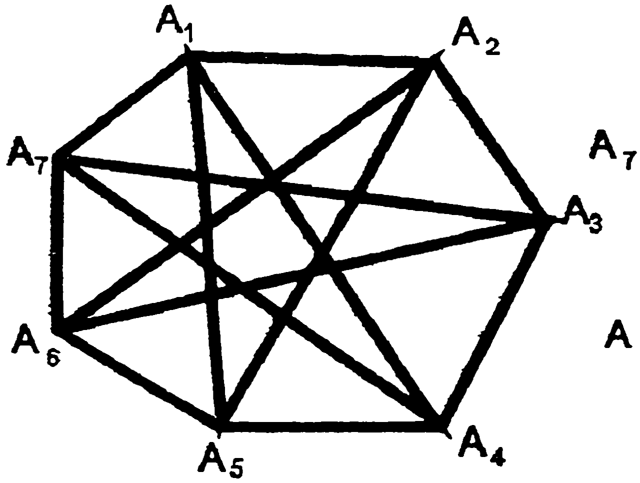


Рис. 25.23 (*а*)

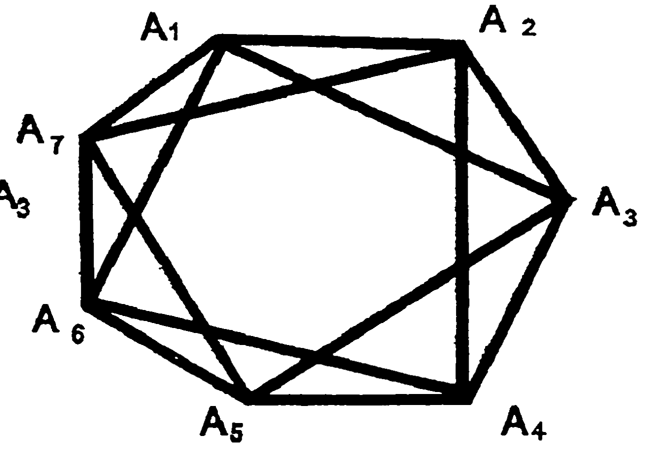


Рис. 25.23 (*б*)

Решение.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_7$ — углы «звезды» $A_1A_4A_7A_3A_6A_2A_5$, S_1 — их сумма, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_7$ — углы «звезды» $A_1A_3A_5A_2A_4A_6$, S_2 — их сумма, S — сумма углов семиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ ($S = 900°$). Сложив равенства

$$\alpha_1 + \angle A_1A_4A_5 + \angle A_1A_5A_4 = 180°, \ldots,$$

$$\alpha_7 + \angle A_7A_3A_4 + \angle A_7A_4A_3 = 180° \text{ (рис. 25.23, } a\text{)},$$

получаем: $2S_1 + S = 7 \cdot 180°$ (это следует из равенства вида $\angle A_1A_4A_5 + \angle A_7A_4A_3 = \alpha_4 + \angle A_3A_4A_5$). Отсюда $S_1 = 180°$.

Сложив равенства

$$\beta_1 + \angle A_7A_1A_6 + \angle A_2A_1A_3 = \angle A_7A_1A_2, \ldots,$$

$$\beta_7 + \angle A_6A_7A_5 + \angle A_1A_7A_2 = \angle A_6A_7A_1 \text{ (рис. 25.23, } б\text{)},$$

получаем: $S_2 + (\angle A_2A_1A_3 + \angle A_2A_3A_1 + \ldots +$

$$+ (\angle A_1A_2A_7 + \angle A_1A_7A_2) = S, \text{ или}$$

$$S_2 + 7 \cdot 180^\circ - S = S, \text{ откуда } S_2 = 540^\circ.$$

Задача 34.

В равнобедренном треугольнике радиус описанной окружности R, а радиус вписанной — r. Найти стороны треугольника.

Решение.

Пусть a — основание треугольника, $b = c$ — боковые стороны. $r = \frac{S}{p}$, $R = \frac{abc}{4S}$. Перемножив их левые части, будем иметь: $rR = \frac{abc}{4p}$, или

$$rR = \frac{ab^2}{2(a + 2b)}. \quad (1)$$

Вычислим высоту H треугольника двумя способами:

$$H = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}. \quad (2)$$

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{ab^2}{4S}; \quad 4SR = ab^2, \quad 2aHR = ab^2,$$

$$H = \frac{ab^2}{2R}. \quad (3)$$

Из (2) и (3) имеем: $b^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{b^4}{4R^2}$, отсюда

$$a = \frac{b}{R}\sqrt{4R^2 - b^2}. \quad (4)$$

Подставив это значение a в (1), получим уравнение относительно b:

$$2Rr\left(\frac{b}{R}\sqrt{4R^2-b^2}+2b\right) = \frac{b^3\sqrt{4R^2-b^2}}{R},$$

откуда, сделав соответствующие преобразования, получим:

$$(2Rr-b^2)\sqrt{4R^2-b^2} = -4Rr.$$

Возведя обе части в квадрат и преобразовав, получим:

$$b^4-4R(R+r)b^2+4R^2r(4R+r)=0.$$

Из этого находим b, а из (4) находим a.

Задача 35.

Внутри круга с центром O и радиусом R взята точка K на расстоянии a от центра. Через K проведены две взаимно перпендикулярные хорды, одна из которых образует с диаметром, проходящим через K, угол в 45° Найдите площадь вписанного в круг четырехугольника, диагоналями которого являются эти хорды.

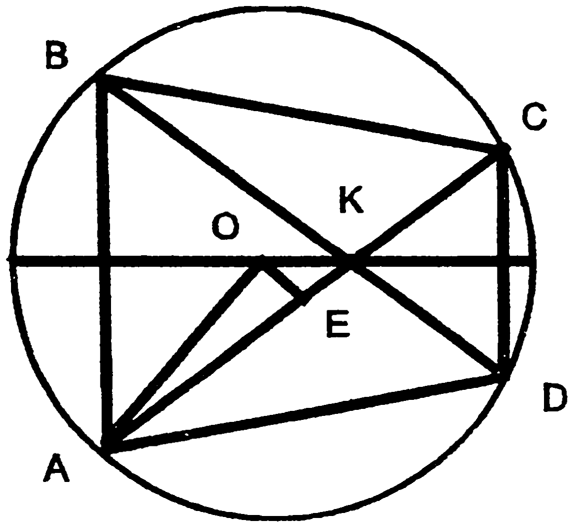


Рис. 25.24

Решение.

Так как диагонали четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны (рис. 25.24), то $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$. Но $AC = BD$. Значит, $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC^2$. В треугольнике AOE

$$OA = R,\ OE = d,\ AE = \sqrt{R^2-d^2},$$

$$AC = 2AE,\ AC = 2\sqrt{R^2-d^2},\ d = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

$$S_{ABCD} = 2(R^2-d^2) = 2\left(R^2-\frac{a^2}{2}\right).$$

Задача 36.

В ΔABC $\angle A = 45°$, $\angle B = 75°$. На стороне AB как на диаметре построена окружность, которая пересекает стороны AC и BC в точках D и E. Определите площадь ΔABC, если $DE = 1$.

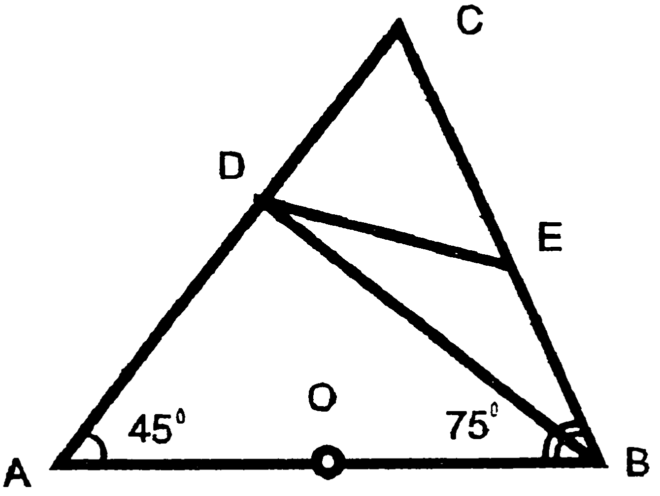


Рис. 25.25

Решение.

Соединим точку D с точками E и B. Тогда $\angle ADB = 90°$, $\angle ABD = 45°$, и, следовательно, $\angle DBE = 30°$, $\angle DEB = 135°$, $\angle BDE = 15°$, а $\angle ACB = 60°$ (рис. 25.25). Имеем:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin A, \quad \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C},$$

$$AC = AB \cdot \frac{\sin B}{\sin C}, \quad \frac{DB}{DE} = \frac{\sin 135°}{\sin 30°}, \quad DB = DE \cdot \frac{\sin 45°}{\sin 30°},$$

$$DB = 1 \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot 2}{2}, \quad DB = \sqrt{2}, \quad AB = 2;$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB^2 \cdot \frac{\sin B \sin A}{\sin C}.$$

Выполнив вычисления, получим $S_{\Delta ABC} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Задача 37.

В прямоугольном треугольнике проведена высота к гипотенузе. Расстояние между центрами окружностей, вписанных в два образовавшихся треугольника, равна a. Найти радиус окружности, вписанной в исходный треугольник.

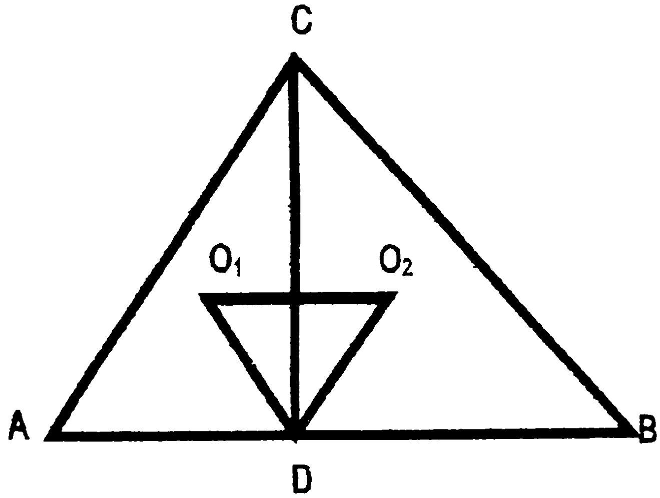


Рис. 25.26

Решение.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, в котором проведена высота CD к гипотенузе AB, $BC = a$ и $AC = b$ — катеты этого треугольника, $AB = c$ — гипотенуза (рис. 25.26). Пусть l_a, l_b и l_c — любые сходственные линейные элементы треугольников BCD, ACD и ABC соответственно. Тогда ввиду пропорциональности этих элементов катетам a и b и гипотенузе справедливо равенство $l_a^2 + l_b^2 = l_c^2$ (обобщенная теорема Пифагора).

Обозначим через O_1 и O_2 центры окружностей, вписанных соответственно в треугольники BCD и ACD. Треугольник O_1DO_2 — прямоугольный. Если r_a и r_b радиусы окружностей, вписанных в треугольники BCD и ACD, то катеты треугольника O_1DO_2 будут равны $DO_1 = r_a\sqrt{2}$ и $O_2D = r_b\sqrt{2}$. Таким образом, $d^2 = O_1O_2^2 = 2\,(r_a^2 + r_b^2)$. Но по обобщенной теореме Пифагора $r_a^2 + r_b^2 = r_c^2$.

Значит, радиус вписанной в ABC окружности равен $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Задача 38.

Центры четырех кругов радиуса a лежат в вершинах квадрата со стороной a. Определить площадь общей части этих кругов.

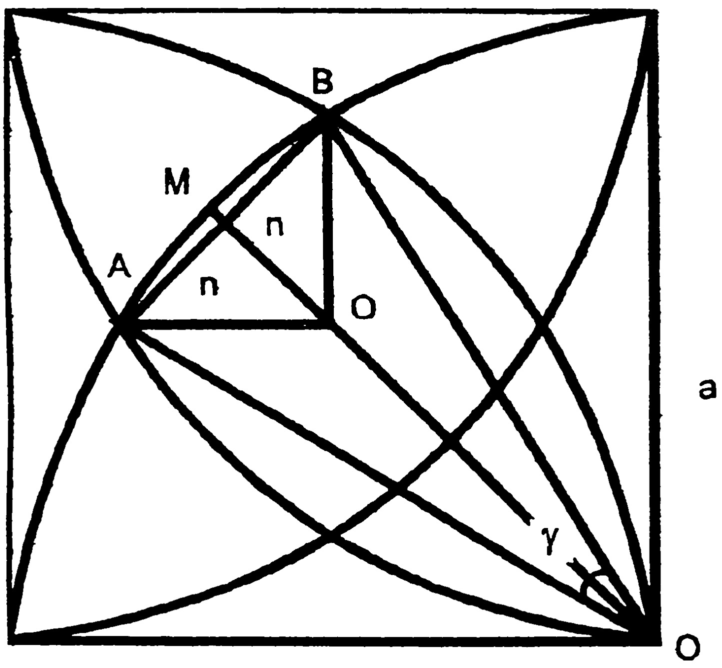


Рис. 25.27

Решение.

Площадь общей части этих кругов

$$S = 4\,(S_{сект.AnB} + S_{\Delta AOB}).$$

Пусть $\angle ACB = \varphi$ (рис. 25.27). По теореме косинусов $AB^2 = 2a^2 - 2a^2 \cos\varphi$.

Из ΔAOB по Пифагору $AO^2 = a^2\,(1 - \cos\varphi)$;

$$S = 4\left(\frac{\pi a^2 \varphi}{2\pi} - \frac{1}{2}a^2 \sin\varphi + \frac{1}{2}a^2\,(1 - \cos\varphi)\right) =$$

$$= 2a^2\,(\varphi - \sin\varphi + 1 - \cos\varphi),$$

где φ — радианная мера $\angle ACB$.

$$OM = MB = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2\,(1 - \cos\varphi)}\ ;\ \ OC = \frac{a\sqrt{2}}{2};$$

$$MC = OM + OC\ =\ \frac{a\sqrt{1 - \cos\varphi}}{\sqrt{2}} + \frac{a}{\sqrt{2}}. \qquad (1)$$

С другой стороны, из ΔCMB

$$MC = a\cos\frac{\varphi}{2}. \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), получаем:

$$a\sin\frac{\varphi}{2} + \frac{a}{\sqrt{2}}\ =\ a\cos\frac{\varphi}{2};\ \ \cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Умножим обе части уравнения на $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Заметим, что $\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$.

$$\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2},\ \ \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{3}\ \text{откуда}\ \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Тогда $S = a^2\left(\frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}\right)$.

Ответ: $a^2\left(\frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}\right)$.

Задача 39.

Доказать, что сумма диагоналей выпуклого пятиугольника больше его периметра.

Решение.

Ввиду того, что данный пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$ выпуклый, заключаем, что пять четырехугольников, получаемых из пятиугольника удалением по одной вершине, также выпуклые. Но сумма диагоналей выпуклого четырехугольника больше суммы двух его противоположных сторон.

Поэтому $A_1A_3 + A_2A_4 > A_1A_2 + A_3A_4$,

$$A_1A_4 + A_2A_5 > A_1A_2 + A_4A_5;$$

$$A_2A_4 + A_3A_5 > A_2A_3 + A_4A_5;$$

$$A_1A_3 + A_2A_5 > A_2A_3 + A_5A_1;$$

$$A_3A_5 + A_4A_1 > A_3A_4 + A_5A_1 .$$

После почленного сложения этих неравенств и сокращений на два получим

$$A_1A_3 + A_2A_4 + A_3A_5 + A_4A_1 + A_5A_2 >$$

$$> A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + A_4A_5 + A_5A_1 ,$$

что и требовалось доказать.

Задача 40.

Углы треугольника равны α, β, γ, а соответственные стороны его видны из точки пересечения медиан под углами α', β', γ'. Доказать, что углы треугольника, построенного из медиан данного треугольника, равны $180° - \alpha'$, $180° - \beta'$, $180° - \gamma'$, а стороны его видны из точки пересечения медиан под углами $180° - \alpha$, $180° - \beta$, $180° - \gamma$.

Доказательство.

Пусть A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, AC, AB треугольника ABC (рис. 25.28). Построим параллелограмм CB_1BC_2. Стороны треугольника CC_1C_2 соответственно равны и параллельны медианам данного треугольника, так как $AC_1C_2A_1$ — параллелограмм и поэтому отрезки A_1A и C_1C_2

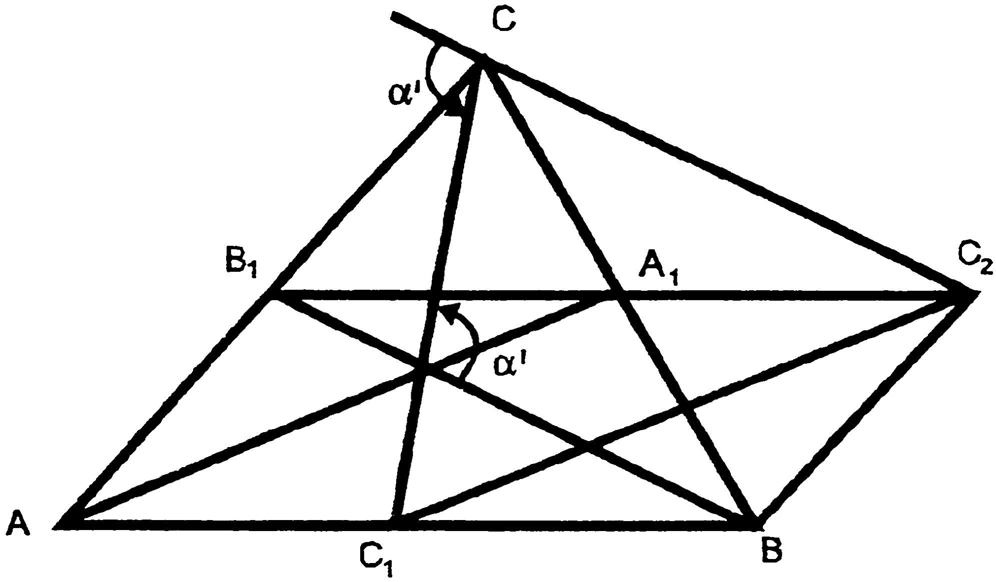


Рис. 25.28

равны и параллельны. Внешние углы треугольника CC_1C_2 равны углам α', β', γ'. Поэтому углы этого треугольника равны $180° - \alpha'$, $180° - \beta'$, $180° - \gamma'$. Далее, точка A_1 является центроидом треугольника CC_1C_2 и из этой точки стороны треугольника видны под углами $180° - \alpha$, $180° - \beta$, $180° - \gamma$.

Задача 41.

Около окружности описан шестиугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны. Доказать, что противоположные стороны попарно равны.

Решение.

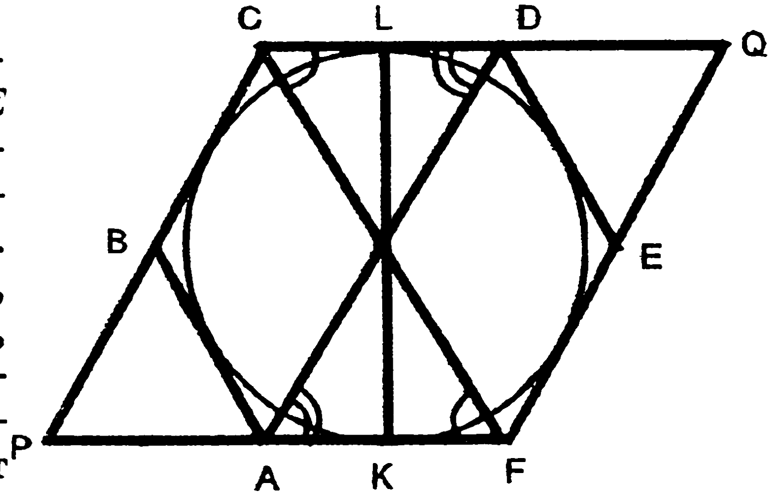


Рис. 25.29

Продолжив стороны CB, CD, FA и FE данного шестиугольника, получим четырехугольник $PCQF$ (рис. 25.29), являющийся, очевидно, ромбом, описанным около данной окружности; диагональ CF проходит через центр окружности. Точно так же можно показать, что диагонали AD и BE также проходят через центр O.

Пусть OK и OL — высоты треугольников AOF и COD, тогда $OK = OL = R$. Так как $\Delta AOF \backsim \Delta COD$ и их высоты, опущенные на соответствующие стороны равны, то

$$\Delta AOF = \Delta COD \text{ и } AF = CD.$$

Аналогично доказывается равенство других противоположных сторон.

Задача 42.

Через точку M, взятую внутри треугольника, проведены три прямые, соответственно параллельные его сторонам. Эти прямые образуют со сторонами треугольника три треугольника. Доказать, что если S_1, S_2, S_3 — площади этих треугольников, а S — площадь данного треугольника, то

$$S_1 + S_2 + S_3 \geqslant \frac{1}{3}S.$$

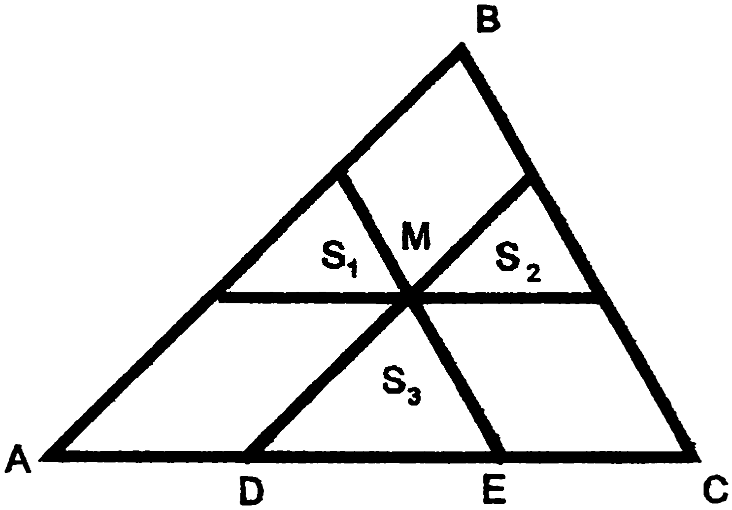


Рис. 25.30

Решение.

Так как все три треугольника подобны данному, то (рис. 25.30)

$$\sqrt{\frac{S_1}{S}} = \frac{AD}{AC}, \quad \sqrt{\frac{S_2}{S}} = \frac{EC}{AC}, \quad \sqrt{\frac{S_3}{S}} = \frac{DE}{AC}.$$

Сложив почленно эти равенства, найдем

$$\frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{1}{AC}(AD + EC + DE) = \frac{1}{AC} \cdot AC = 1,$$

откуда $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} = \sqrt{S}$. Возведя обе части последнего равенства в квадрат и заменив среднее геометрическое на среднее арифметическое, получим

$$3S_1 + 3S_2 + 3S_3 \geqslant S, \text{ или } S_1 + S_2 + S_3 \geqslant \frac{1}{3}S.$$

Задача 43.

В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность и вокруг него описана окружность. Доказать, что

$$S = p^2 \left(\operatorname{tg}\frac{\angle A}{2} + \operatorname{tg}\frac{\angle B}{2} + \operatorname{tg}\frac{\angle C}{2} + \operatorname{tg}\frac{\angle D}{2}\right)^{-1},$$

где S — площадь, $2p$ — периметр четырехугольника.

Решение.

Пусть $w(O_1, r)$ — вписанная в четырехугольник $ABCD$ окружность (рис. 25.31). Известно, что центр этой окружности лежит на биссектрисах внутренних углов четырехугольника. Проведем радиусы O_1K, O_1M, O_1N, O_1P в точке касания. Очевидно,

$$S = pr, \qquad (1)$$

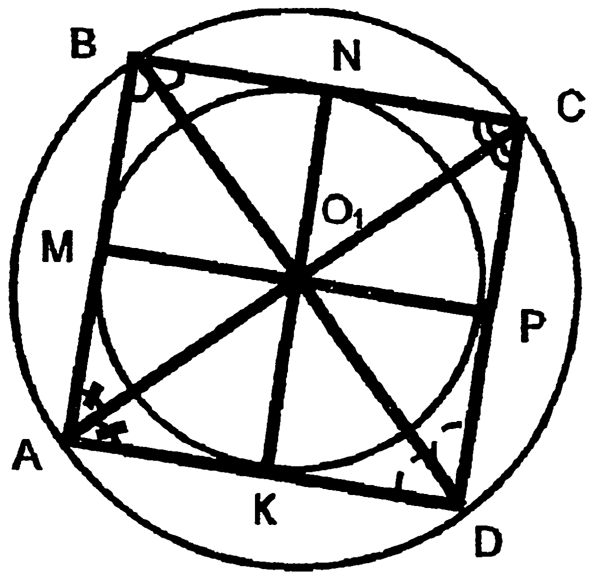


Рис. 25.31

где

$$p = \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA).$$

Но $AB = AM + MB = r_x \cdot \operatorname{ctg}\frac{\angle A}{2} + r\operatorname{ctg}\frac{\angle B}{2}$. Аналогично

$$BC = r\operatorname{ctg}\frac{\angle B}{2} + r\operatorname{ctg}\frac{\angle C}{2},\ CD = r\operatorname{ctg}\frac{\angle C}{2} + r\operatorname{ctg}\frac{\angle D}{2},$$

$$AD = r\operatorname{ctg}\frac{\angle D}{2} + r\operatorname{ctg}\frac{\angle A}{2}.$$ Поэтому

$$r = p\left(\operatorname{ctg}\frac{\angle A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\angle B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\angle C}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\angle D}{2}\right)^{-1}. \qquad (2)$$

Так как четырехугольник вписан в окружность, то

$$\angle A = 180° - \angle C,\ \angle B = 180° - \angle D.$$

Следовательно, $\operatorname{ctg}\frac{\angle A}{2} = \operatorname{tg}\frac{\angle C}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{\angle B}{2} = \operatorname{tg}\frac{\angle D}{2}$,

$$\operatorname{ctg}\frac{\angle C}{2} = \operatorname{tg}\frac{\angle A}{2}, \quad \operatorname{ctg}\frac{\angle D}{2} = \operatorname{tg}\frac{\angle B}{2}.$$

Учитывая это, равенство (2) запишем так:

$$r = p\left(\operatorname{tg}\frac{\angle A}{2} + \operatorname{tg}\frac{\angle B}{2} + \operatorname{tg}\frac{\angle C}{2} + \operatorname{tg}\frac{\angle D}{2}\right)^{-1}. \tag{3}$$

Подставив (3) и (1), получим

$$S = p^2\left(\operatorname{tg}\frac{\angle A}{2} + \operatorname{tg}\frac{\angle B}{2} + \operatorname{tg}\frac{\angle C}{2} + \operatorname{tg}\frac{\angle D}{2}\right)^{-1}.$$

Задача 44.

Доказать для вписанного пятиугольника $ABCDE$ теорему:

$$\frac{AB}{\sin(\angle C + \angle E)} = \frac{BC}{\sin(\angle D + \angle A)} = \frac{CD}{\sin(\angle C + \angle B)} =$$

$$= \frac{DE}{\sin(\angle A + \angle C)} = \frac{EA}{\sin(\angle B + \angle D)}.$$

Решение.

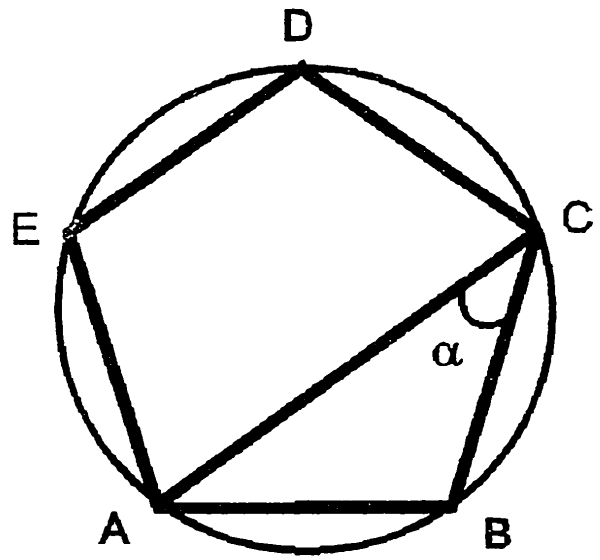


Рис. 25.32

Соединим вершины A и C (рис. 25.32). Из четырехугольника $ACDE$ находим:

$$\angle ACD + \angle E = 180°.$$

Если $\angle ACB = d$, то

$$\angle C + \angle E = 180° + d.$$

Следовательно,

$$\frac{AB}{\sin(\angle C + \angle E)} = -\,2R.$$

Аналогично доказываем, что и другие отношения равны $-\,2R$, т.е.

$$\frac{AB}{\sin(\angle C + \angle E)} = \frac{BC}{\sin(\angle D + \angle E)} = \ldots = \frac{EA}{\sin(\angle B + \angle D)} = -\,2R.$$

Задача 45.

В равносторонний треугольник ABC вписана окружность $w(O; R)$. Касательная к ней пересекает стороны CA и CB в точках M и N. На этих сторонах построены отрезки AM_1 и BN_1 так, что $AM_1 = CM$ и $BN_1 = CN$. Доказать, что прямая M_1N_1 проходит через центр окружности.

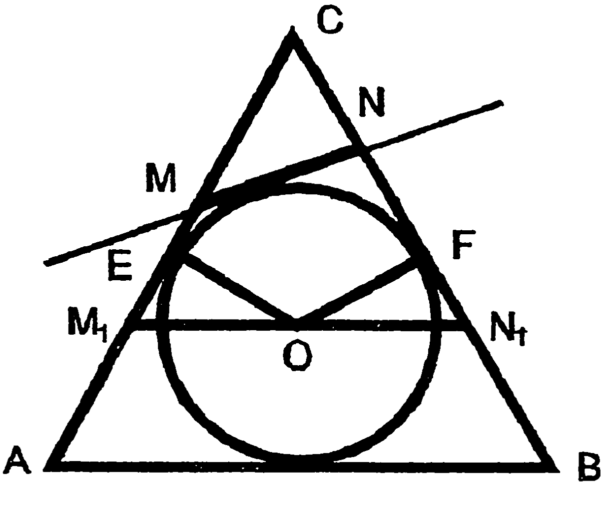


Рис. 25.33

Доказательство.

Легко проверить, что $\angle NOM = 60°$ (рис. 25.33). Пусть E и F — середины сторон AC и BC. Поскольку $\angle EOF = 120°$, то $\angle EOM + \angle FON = 60°$. Но тогда и

$$\angle EOM_1 + \angle FON_1 = 60° \text{ и } \angle N_1OM_1 = 180°,$$

т.е. прямая проходит через центр O.

Задача 46.

Прямая q пересекает стороны BC, CA и AB треугольника ABC и его средние линии B_1B_1, C_1A_1 и A_1B_1 (или их продолжения) соответственно в точках x и x_1, y и y_1, z и z_1. Доказать справедливость равенства $\frac{1}{xx_1} + \frac{1}{yy_1} + \frac{1}{zz_1} = 0$, где отрезки xx_1, yy_1 и zz_1 являются направленными ($\overline{xx_1} = -\overline{x_1x}$).

Доказательство.

Докажем сначала вспомогательное предложение: если через вершины A, B и C треугольника ABC проведены три параллельные прямые, пересекающие прямые BC, CA и AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно, то $\frac{1}{AA_1} + \frac{1}{BB_1} + \frac{1}{CC_1} = 0$. Действительно, пусть, например, точка C_1 принадлежит отрезку AB; $\Delta AA_1B \backsim \Delta CC_1B$, откуда $\overline{C_1C} : \overline{AA_1} = \overline{BC_1} : \overline{BA}$;

$$\Delta BB_1A \backsim \Delta CC_1A, \text{ откуда } \overline{C_1C} : \overline{BB_1} = \overline{C_1A} : \overline{BA}.$$

Складывая почленно полученные равенства, убедимся в справедливости вспомогательного предложения. Утверждение задачи следует из доказанного соотношения, так как, проведя через точки A_1, B_1, C_1 прямые, параллельные q, пересекающие B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 соответственно в точках A_2, B_2, C_2, получаем: $\overline{A_1A_2} = \overline{xx_1}$, $\overline{B_1B_2} = \overline{yy_1}$, $\overline{C_1C_2} = \overline{zz_1}$.

Задача 47.

В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) проведены биссектрисы AD и BF. Из оснований биссектрис опущены перпендикуляры DN и FM на гипотенузу. Доказать, что $\angle MCN = 45°$.

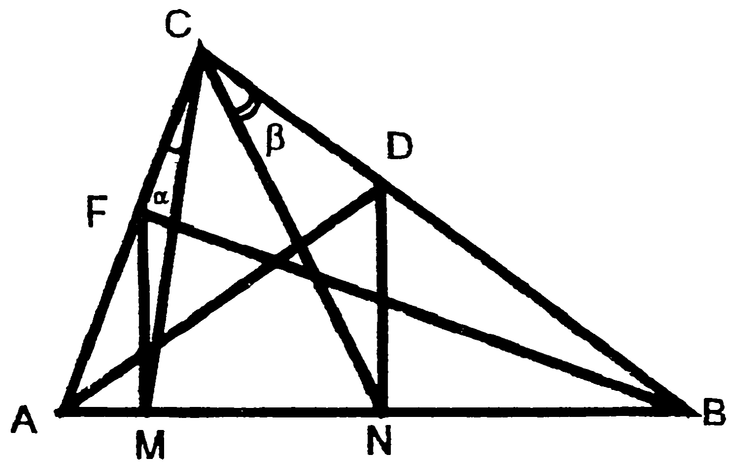


Рис. 25.34

Решение.

$\angle FCM = \angle FMC = \alpha$ (рис. 25.34), так как по свойству биссектрисы $FC = FM$. Аналогично $\angle DCN = \angle DNC = \beta$, $\angle BAC + 2\alpha = 90°$ и $\angle ABC + 2\beta = 90°$. Сложив два последних равенства, получим $\alpha + \beta = 45°$.

Следовательно, $\angle MCN = 45°$.

Задача 48.

На плоскости дано n точек. Известно, что среди любых трех из них имеются две, расстояние между которыми не больше 1. Доказать, что на плоскость можно положить два круга радиуса 1, которые закроют все эти точки.

Решение.

Возьмем две точки A и B из данных n точек, расстояние между которыми — наибольшее, и наложим на плоскость два круга радиуса 1 с центром в точках A и B соответственно. Тогда любая из данных n точек попадет, по крайней мере, в один из этих кругов.

Действительно, если C — одна из данных n точек, то и AC, и BC не превосходят длины отрезка AB, значит, либо AC, либо BC имеют длину, не превосходящую 1.

Задача 49.

В выпуклом четырехугольнике сумма квадратов сторон и диагоналей равна m. Доказать, что его площадь не превосходит $\frac{m}{8}$.

Доказательство.

Пусть b, a, c, d, e, f — длины сторон четырехугольника и его диагоналей. Если S — площадь четырехугольника, то очевидно $S \leqslant \frac{1}{2}(ab + cd)$, $S \leqslant \frac{1}{2}ef$.

Далее, используя неравенство о среднем, будем иметь:

$$m = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 \geqslant 2ab + 2cd + 2ef \geqslant$$

$$\geqslant 4S + 4S = 8S, \text{ т.е. } S \leqslant \frac{m}{8}.$$

Задача 50.

Даны две непересекающиеся окружности, к которым проведены две общие касательные (рис. 25.35). Рассмотрим равнобедренный треугольник, основание которого лежит на одной касательной, противоположная вершина — на другой, а каждая из боковых сторон касается одной из данных окружностей. Доказать, что высота треугольника равна сумме радиусов окружностей.

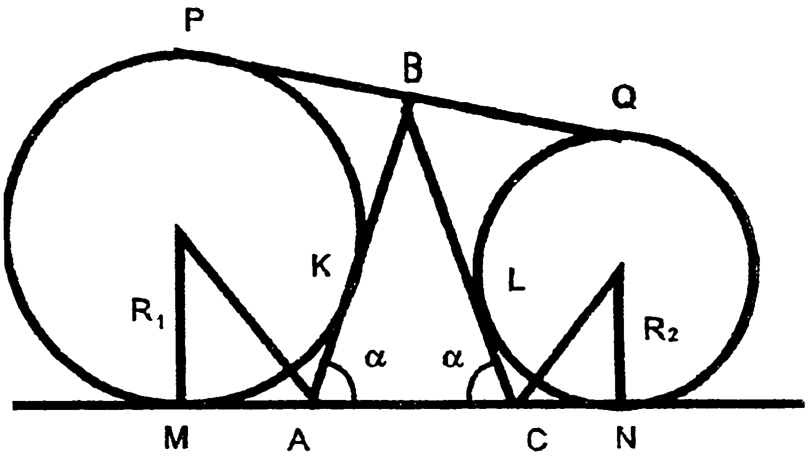


Рис. 25.35

Доказательство.

Обозначим $AB = BC = a$, $AC = 2b$, h — высота ΔABC, проведенная к стороне AC. Тогда, если $AK = x$, $CL = y$, то из равенства касательных $MN = PQ$ получим:

$$x + 2b + y = a - x + a - y, \quad x + y = a - b.$$

Далее имеем:

$$R_1 + R_2 = (x + y)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = (a - b)\frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} =$$

$$= (a - b)\frac{1 + \frac{b}{a}}{\frac{h}{2}} = \frac{a^2 - b^2}{h} = h,$$

что и требовалось доказать.

Задача 51.

В треугольник вписана окружность O. Точки касания ее с двумя сторонами соединены отрезком. Во вновь образовавшийся треугольник вписана окружность O_1. Доказать, что центр этой окружности принадлежит окружности O.

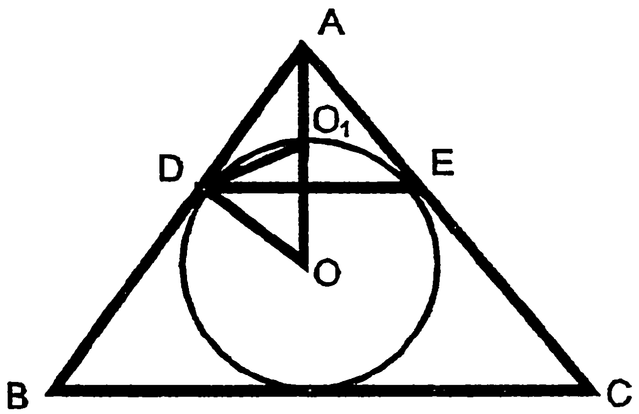


Рис. 25.36

Доказательство.

Треугольник ADE — равнобедренный, AO — биссектриса $\angle A$ (рис. 25.36). Пусть AO пересекает дугу, лежащую внутри ΔADE в точке O_1. Тогда $\smile DO_1 = \smile O_1E$. Поэтому $\angle ADO_1 = \angle O_1DE$. Следовательно, O_1 — центр окружности, вписанной в ΔDAE.

Задача 52.

Доказать, что площадь равнобедренного треугольника не превосходит $\frac{2}{3}$ квадрата длины медианы треугольника, проведенной к его боковой стороне.

Доказательство.

Пусть ABC — равнобедренный треугольник, $AC = BC$. Если AA_1 — длина его медианы, то необходимо доказать неравенство $S \leqslant \frac{2}{3}AA_1^2$.

Чтобы убедиться в истинности этого неравенства, проведем вторую медиану BB_1. Очевидно, ABA_1B_1 — равнобокая трапеция, причем $S_{ABA_1B_1} = \frac{3}{4} S_{ABC}$.

Но $S_{ABA_1B_1} = \frac{1}{2} AA_1 \cdot BB_1 \sin (\widehat{\overline{AA_1}, \overline{BB_1}}) \leqslant \frac{1}{2} AA_1^2$.

Следовательно, $\frac{3}{4} S_{ABC} \leqslant \frac{1}{2} AA_1^2$ или $S_{ABC} \leqslant \frac{2}{3} AA_1^2$.

Равенство достигается только тогда, когда медианы перпендикулярны. Пусть $AB = c$, $AC = b$, тогда

$$AA_1^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}, \text{ или } AA_1^2 = \frac{2c^2 + b^2}{4}.$$

Если G — точка пересечения медиан, то

$$AG^2 = BG^2 = \frac{4}{9} \cdot \frac{2c^2 + b^2}{4} = \frac{2c^2 + b^2}{9}.$$

Отсюда $c^2 = \frac{2}{9} (2c^2 + b^2)$, и, следовательно, $b = \frac{\sqrt{10}}{2} c$.

Задача 53.

На сторонах AD и CD ромба построены правильные ΔADK и ΔCDM, причем точка K расположена по ту же сторону от AD, что и BC, а точка M расположена по другую сторону от CD, чем AB. Доказать, что точки B, K и M лежат на одной прямой.

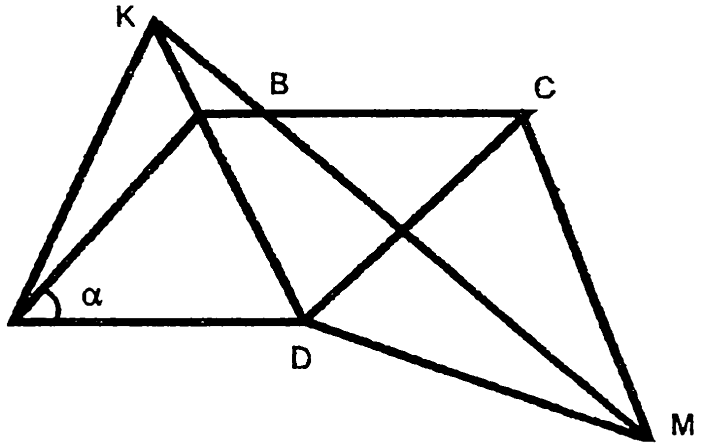


Рис. 25.37

Доказательство.

Обозначим угол BAD данного ромба через α и будем считать, что $\alpha < 60°$. Тогда из ΔKAD получаем, что $\angle KAD = 60° - \alpha$, а угол AKB при основании ΔAKB равен $60° + \frac{\alpha}{2}$ (рис. 25.37).

С другой стороны, точки A, K, M, C лежат на окружности с центром D, и поэтому

$$\angle ADM = 360^\circ - \angle ADC - \angle CDM =$$
$$= 360^\circ - (180^\circ - \alpha) - 60^\circ = 120^\circ + \alpha,$$

а вписанный угол AKM равен его половине, т.е. равен углу AKB. А это и означает, что точки K, B и M лежат на одной прямой.

Аналогично рассматривается конфигурация с углом $\alpha \geqslant 60^\circ$.

Задача 54.

Если среднее арифметическое трех сторон треугольника равно среднему гармоническому двух сторон, то отрезок, которому принадлежат центроид и инцентр перпендикулярен биссектрисе угла, противоположного третьей стороне.

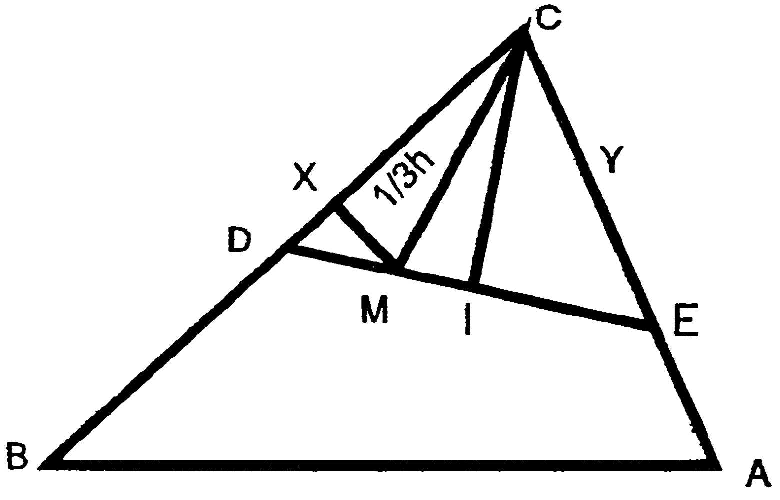


Рис. 25.38

Доказательство.

Пусть M — центроид, I — инцентр ΔABC.

Дано:

$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{2ab}{a+b}. \qquad (1)$$

Доказать, что $CI \perp MI$ (рис. 25.38).

Запишем (1) в виде:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{2S}{a} + \frac{2S}{b}\right) = \frac{4S}{p}, \text{ или } h_a + h_b = 6r. \qquad (2)$$

Обозначим $CD = x$, $CE = y$. Докажем, что $CD = CE$ (или $x = y$). Выразим S_{CDE}:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}h_a x + \frac{1}{3}h_b y\right) = \frac{1}{2}rx + \frac{1}{2}ry, \text{ или}$$

$$h_a x + h_b y = 3r(x + y) = \frac{h_a + h_b}{2}(x + y) \text{ (из (2)), или}$$

$$x(h_a - h_b) - y(h_a - h_b) = 0, \ (x - y)(h_a - h_b) = 0, \ x = y.$$

Задача 55.

Дан угол величиной 75° с вершиной в точке O. На его сторонах взяты точки A и B так, что $OA = \sqrt{2}$, $OB = \sqrt{3}$. Внутри угла взята точка C так, что $OC = \frac{\sqrt{6}}{2}$ и $\angle COA = 30°$. Доказать, что точки A, B и C лежат на одной прямой.

Доказательство.

По теореме косинусов из треугольников AOC и BOC получаем, что $AC = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $BC = \frac{\sqrt{6}}{2}$ (рис. 25.39), откуда по теореме, обратной теореме Пифагора, заключаем, что углы OCA и OCB — прямые. Следовательно, точки A и B лежат на перпендикуляре к OC, проходящем через точку C, так что три эти точки лежат на одной прямой.

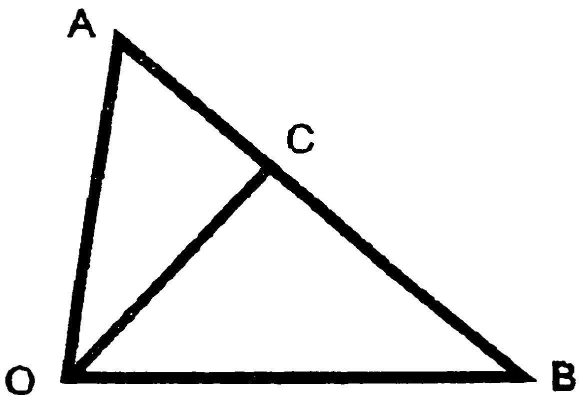


Рис. 25.39

Задача 56.

Из точек A и B, которые лежат на поверхности озера, видно всю поверхность озера. Доказать, что из каждой точки отрезка AB также видно всю поверхность озера.

Доказательство.

Допустим противоположное. Пусть на отрезке AB есть точка D, из которой не видно точку C на поверхности озера. Это значит, что на отрезке DC есть препятствие P. Все точки отрезка AC лежат на поверхности озера (в противном случае из A не видно было бы C), поэтому каждую из них видно из точки B. А теперь проведем прямую через точки B и P и продлим ее до пересечения с отрезком AC в точке K. Поскольку P — препятствие, то точку K не видно из точки B. Противоречие.

Задача 57.

На круглом столе радиуса R лежит одним слоем n монет радиуса r так, что больше нельзя положить ни единой монеты. Доказать, что $\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}-1\right) < \sqrt{n} < \frac{R}{r}$.

Доказательство.

По условию задачи (монеты лежат одним слоем) $n\pi r^2 < \pi R^2$, откуда $\sqrt{n} < \frac{R}{r}$. Представим себе теперь, что центр каждой монеты остается неподвижным, а ее радиус увеличивается в два раза. Тогда монеты сплошь накроют круг радиусом $R-r$ (если б какая-то точка не была бы накрыта, то на столе можно было бы поместить еще одну монету с центром в этой точке). Поэтому $n\pi(2r)^2 > \pi(R-r)^2$, откуда $\sqrt{2} > \frac{1}{2}\frac{R-r}{r}$.

Задача 58.

Доказать, что центр окружности, вписанной в треугольник, находится внутри треугольника, образованного средними линиями данного треугольника.

Доказательство. Первый способ

Известно, что $S_{ABC} = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$, где a, b, c — стороны треугольника, h_a, h_b, h_c — высоты, проведенные к сторонам a, b, c соответственно. С другой стороны $S_{ABC} = rp$, где r — радиус вписанной окружности, p — полупериметр треугольника ABC.

Имеем: $\frac{1}{2}h_a = \frac{S}{a}$, $r = \frac{S}{p}$. Но так как $p > a$, то

$$\frac{h_a}{2} = \frac{S}{a} > \frac{S}{p} = r, \text{ т.е. } \frac{1}{2}h_a > r.$$

Аналогично можно доказать, что

$$\frac{1}{2}h_b > r, \quad \frac{1}{h_c} > r.$$

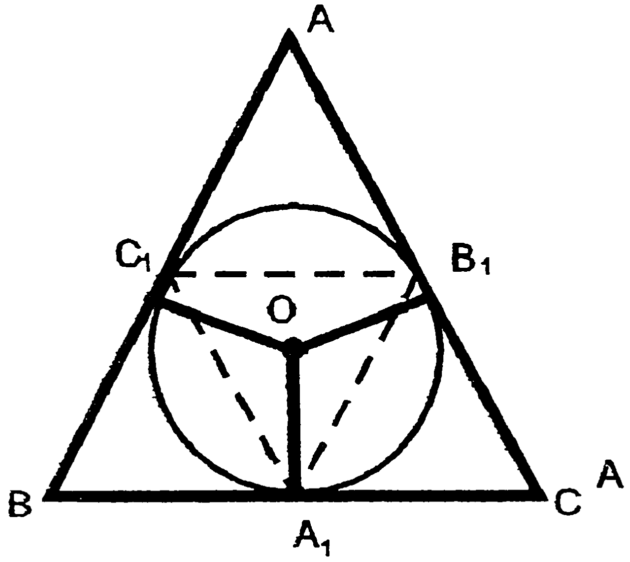


Рис. 25.40 (*а*)

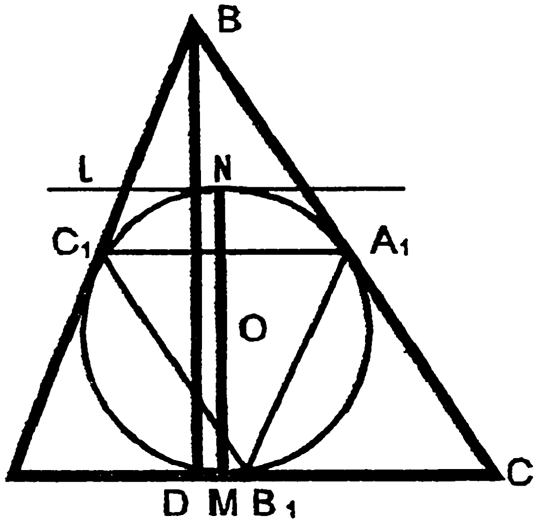


Рис. 25.40 (*б*)

Таким образом, радиус вписанной в треугольник окружности меньше половины каждой высоты, а значит, центр окружности находится с каждой из вершин треугольника по разные стороны от соответствующей средней линии (рис. 25.40, *а*), т.е. центр принадлежит треугольнику, ограниченному средними линиями данного треугольника.

Второй способ.

Проведем касательную l к окружности, вписанной в треугольник, параллельно какой-либо стороне треугольника. Так как все точки вписанной в треугольник окружности принадлежат треугольнику, то диаметр NM меньше высоты BD (рис. 25.40, *б*), т.е. $h > 2r$ или $\frac{h}{2} = r$. Дальнейшие рассуждения такие же, как и в решении 1.

Задача 59.

Доказать, что если P_n и p_n периметры правильных n-угольников, соответственно описанного около окружности радиуса R и вписанного в ту же окружность, то

$$\frac{1}{2}(p_n + P_n) > 2\pi R.$$

Доказательство.

Очевидно, что $p_n = 2Rn\sin\frac{\pi}{n}$, $P_n = 2Rn\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$. Следовательно, $\frac{1}{2}(p_n + P_n) = Rn\left(\sin\frac{\pi}{n} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right)$.

Так как $n \geqslant 3$, то $0 < \frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{2}$ и $\sin\frac{\pi}{n} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{n} > 2\frac{\pi}{n}$, что следует из неравенства $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x$ для $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Итак,

$$\frac{1}{2}(p_n + P_n) > 2\pi R, \text{ так как } \frac{1}{2}(p_n + P_n) > 2n\,2\frac{\pi}{n}.$$

Задача 60.

Около окружности радиуса r описан правильный 12-угольник $A_1A_2 \ldots A_{12}$. Доказать, что $A_1A_2 + A_1A_4 = 2r$.

Доказательство.

Рассмотрим равнобедренную трапецию $A_1A_2A_3A_4$, для которой $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = a_{12}$. Острый угол трапеции равен 30°, поэтому $A_1A_4 = a_{12} + 2a_{12}\cos 30° = a_{12}(1 + \sqrt{3})$. Поэтому остается доказать, что $a_{12} + a_{12}(1 + \sqrt{3}) = 2r$, $a_{12}(2 + \sqrt{3}) = 2r$. Но $a_{12} = 2r\operatorname{tg} 15°$, причем, как легко доказать,

$$\operatorname{tg} 15° = 2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}.$$ Отсюда находим:

$$a_{12} = \frac{2r}{2 + \sqrt{3}}, \text{ или } 2r = a_{12}(2 + \sqrt{3}),$$

что и требовалось доказать.

Задача 61.

На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены прямоугольники $ABLK$, $BCNM$, $CAQP$. Доказать, что прямые, проходящие через A, B и C перпендикулярно соответственно KQ, LM и NP, пересекаются в одной точке.

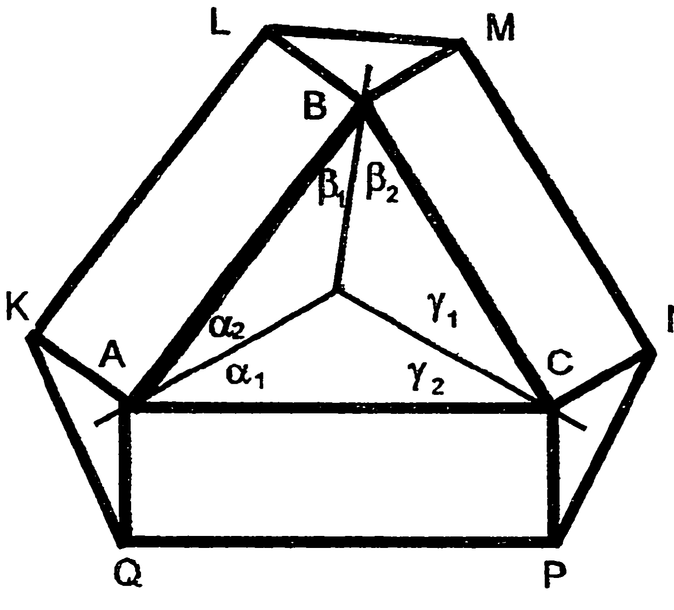


Рис. 25.41 ′

Доказательство.

Пусть стороны прямоугольника, построенных на AB, BC и CA, отличные от сторон треугольника, равны соответственно

x, y, z. Обозначим также через α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2 углы, образованные построенными перпендикулярами со сторонами треугольника, как на рис. 25.41. В соответствии с тригонометрической формой теоремы Чевы нам достаточно доказать выполнение равенства

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = 1.$$

Рассмотрим треугольник AKQ. Легко убедиться, что углы в этом треугольнике при вершинах Q и K либо равны соответственно α_1 и α_2, либо дополняют их до 180°. Следовательно,

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{AK}{AQ} = \frac{x}{z}.$$

Заменяя также другие отношения, убеждаемся в выполнении условий теоремы Чевы.

Задача 62.

Около окружности с центром O описан четырехугольник $ABCD$, прямые AB и CD пересекаются в точке K, а прямые BC и AD пересекаются в точке M, причем точка D принадлежит отрезкам CK и AM. Доказать, что $\angle AOK = \angle COM$.

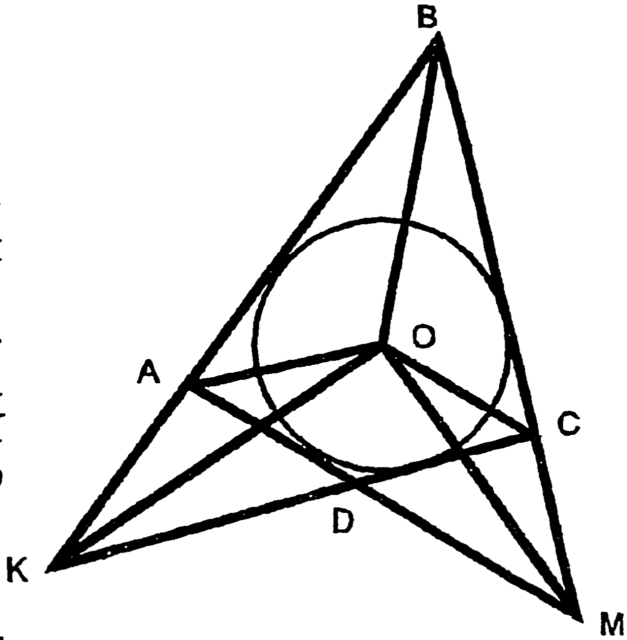


Рис. 25.42

Доказательство.

По теореме о внешнем угле треугольника (рис. 25.42)

$$2\angle AOK = 2\angle AOB - 2\angle OKB;$$

$$2\angle COM = 2\angle OCB - 2\angle OMB,$$

а поскольку KO и MO — биссектрисы углов треугольников BKC и AMB, то

$$2\angle OCB + 2\angle OKB + \angle MBK = 180° =$$

$$= 2\angle OMB + 2\angle OAB + \angle MBK,$$

так что $\angle OCB + \angle OKB = \angle OMB + \angle OAB$. Из полученных двух равенств и вытекает доказываемое утверждение.

Задача 63.

Стороны треугольника составляют геометрическую прогрессию. Доказать, что такой треугольник подобен треугольнику, сторонами которого служат высоты данного.

Доказательство.

Пусть $a < b < c$, тогда $h_c < h_b < h_a$. Нужно доказать, что

$$a : b : c = h_c : h_b : h_a = \frac{2S}{c} : \frac{2S}{b} : \frac{2S}{a} = \frac{1}{c} : \frac{1}{b} : \frac{1}{a}, \text{ или что}$$

$$\frac{a}{b^2} : \frac{1}{b} : \frac{c}{b^2} = \frac{1}{c} : \frac{1}{b} : \frac{1}{a}.$$

Но по условию $b^2 = ac$, значит, действительно,

$$\frac{a}{b^2} : \frac{1}{b} : \frac{c}{b^2} = \frac{a}{ac} : \frac{1}{b} : \frac{c}{ac} = \frac{1}{c} : \frac{1}{b} : \frac{1}{a}.$$

Задача 64.

Доказать, что если квадраты сторон треугольника составляют арифметическую прогрессию, то треугольник, сторонами которого служат медианы данного, подобен данному.

Доказательство.

По условию задачи $2b^2 = a^2 + c^2$. Поэтому

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} = \frac{3}{4}c^2; \quad m_b^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4} = \frac{3}{4}b^2;$$

$$m_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} = \frac{3}{4}a^2.$$

Отсюда $m_a : m_b : m_c = c : b : a$.

Задача 65.

Доказать, что если в треугольнике стороны удовлетворяют соотношению $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$, то один из его углов равен 60°.

Доказательство.

Приведем данное соотношение к целому виду:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c};\quad \frac{b+c+a+b}{ab+ac+b^2+bc}=\frac{3}{a+b+c};$$

$$(a+2b+c)(a+b+c)=3\,(ab+ac+b^2+bc).$$

Перемножив и приведя подобные члены, получим:

$$b^2=a^2+c^2-ac. \qquad (1)$$

С другой стороны имеем:

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B. \qquad (2)$$

Из сравнения (1) и (2) находим:

$$2\cos B=1;\quad \cos B=\frac{1}{2};\quad \angle B=60^\circ.$$

Задача 66.

Доказать, что в четырехугольнике, вписанном в окружность, имеет место равенство:

$$\sin A:\sin B=(ad+bc):(ab+cd),$$

где A и B — два соседних угла, стороны a и b примыкают к углу A; c и d — к углу C.

Доказательство.

$$S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ACD}=S_{ABC}+S_{BCD}\ \text{(рис. 25.43)}.$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\sin B; \qquad (1)$$

$$S_{ACD}=\frac{1}{2}ad\sin D=$$
$$=\frac{1}{2}\sin(\pi-B)=$$
$$=\frac{1}{2}ad\sin B;$$

$$S_{ABD}=\frac{1}{2}ab\sin A;$$

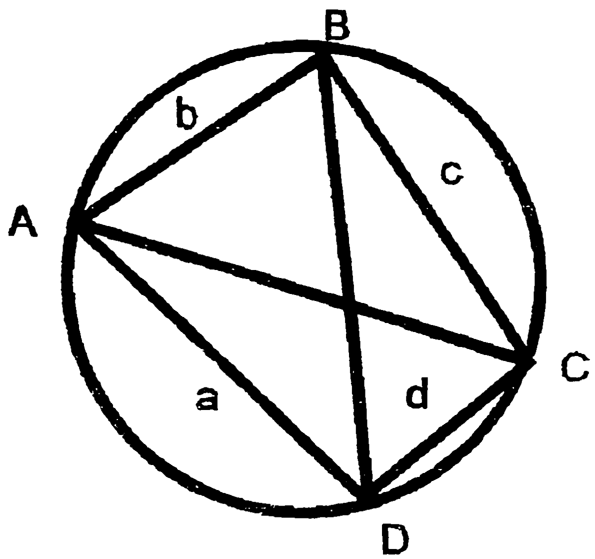


Рис. 25.43

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} cd \sin C = \frac{1}{2} cd \sin A.$$

Из (1) следует, что

$$\frac{1}{2}(bc + ad) \sin B = \frac{1}{2} ab \sin A + \frac{1}{2} cd \sin A,$$

а отсюда $\sin A : \sin B = (ad + bc) : (ab + cd)$.

Задача 67.

В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ сторона AB равна диагонали BD, кроме того, $\angle BAC = 30°$, $\angle ADC = 150°$. Доказать, что диагональ AC служит биссектрисой угла BCD.

Доказательство.

Обозначим через B_1 точку, симметричную B относительно прямой AC. Луч BB_1 должен проходить внутри $\angle ABD$ (рис. 25.44) так как из условия следует, что $\angle ABD$ больше $60°$. Нам достаточно доказать, что точка B_1 лежит на прямой CD. ΔABB_1 является равносторонним (он равнобедренный с углом $60°$). Значит, $BB_1 = BA$. Таким образом, точки A, B_1 и D лежат на окружности с центром в B и

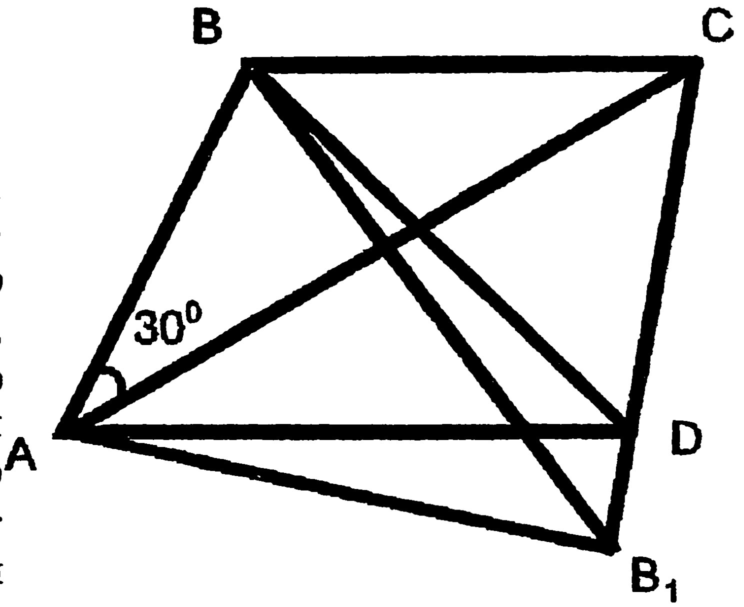


Рис. 25.44

$$\angle ADB_1 = \frac{1}{2} \angle ABB_1 = 30°.$$

Из последнего равенства следует, что B_1 лежит на прямой CD, что и требовалось доказать.

Задача 68.

Пусть O — центр одной из вневписанных окружностей треугольника ABC. Доказать, что центр окружности, описанной около ΔABO, лежит на окружности, описанной около ABC.

Доказательство.

Пусть окружность с центром O касается продолжения AB (рис. 25.45). Тогда $\angle AOB = \angle OBM - \angle OAB =$

$$= 90° - \frac{1}{2}\angle ABC - \frac{1}{2}\angle CAB = \frac{1}{2}\angle ACB.$$

Значит, если P — центр окружности, описанной около AOB, то

$$\angle APB = 2\angle AOB = \angle ACB,$$

т.е. P лежит на окружности, описанной около ABC.

Точно так же рассматривается случай, когда окружность с центром ? касается стороны AB.

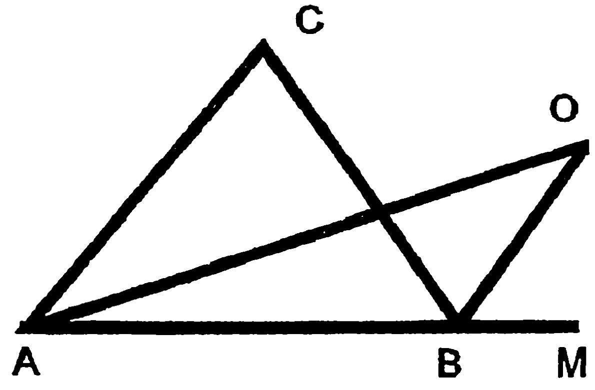


Рис. 25.45

Задача 69.

Отрезок AC с серединой K пересекает отрезок BD в его середине S. Доказать, что середины M и N отрезков AB и CD симметричны относительно середины отрезка SK.

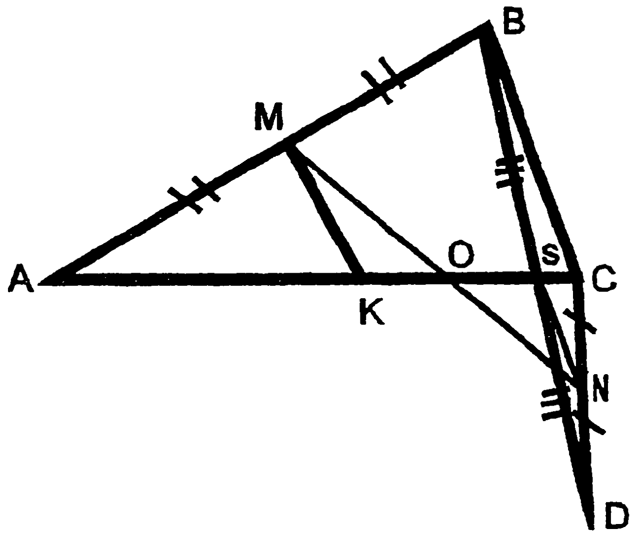


Рис. 25.46

Доказательство.

Отрезок MK — средняя линия треугольника ABC, а SN — средняя линия треугольника DBC (рис. 25.46). Из этого следует, что

$$MK \parallel BC,\ SN \parallel BC \text{ и } MK = \frac{1}{2}BC,\ SN = \frac{1}{2}BC.$$

Отсюда можно сделать заключение, что $MKNS$ — параллелограмм, и его диагональ проходит через середину O диагонали SK, т.е. точки M и N симметричны относительно середины O отрезка SK.

Задача 70.

Две окружности пересекаются в точках A и B. Прямая, проведенная через центры окружностей O_1 и O_2, пересекает внешние дуги окружностей в точках M и N. К окружностям проведена общая касательная TS. Через точки касания T и S проведены прямые MS и NT, пересекающиеся в точке P. Докажите, что:

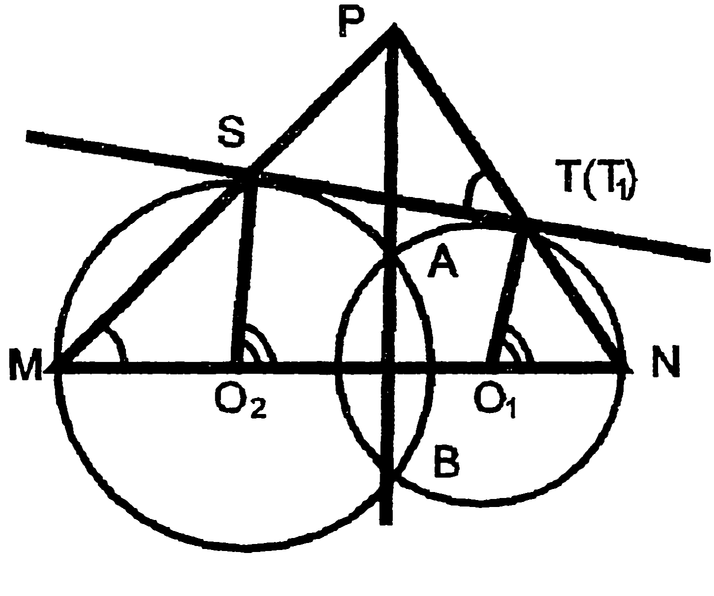


Рис. 25.47

а) точки P, A и B лежат на одной прямой;

б) $PA \cdot PB \cdot MN = PM \cdot PN \cdot TS$.

Доказательство.

Пусть P — точка пересечения MS и AB. Докажем, что PN проходит через T.

а) Точку пересечения PN с окружностью O_1 обозначим T_1 (рис. 25.47). Тогда по свойству: если из точки, взятой вне окружности, провести несколько секущих, то произведение каждой секущей на ее внешнюю часть есть величина постоянная, равная квадрату касательной, имеем:

$$PS \cdot PM = PT_1 \cdot PN = PA \cdot PB.$$

С другой стороны, $\Delta SPT \backsim \Delta MPN$ (докажите, рассмотрев углы). Значит, $\frac{PS}{PN} = \frac{PT}{PM}$. Отсюда $PT = PT_1$, т.е. точки T и T_1 совпадают. Значит, все три прямые проходят через точку P.

б) Из подобия треугольников PST и PMN имеем:

$$\frac{ST}{MS} = \frac{PS}{PN} = \frac{PT}{PM}.$$

Отсюда получаем $\frac{ST^2}{MN^2} = \frac{PS \cdot PT}{PN \cdot PM}$. Поэтому

$$ST^2 \cdot PM \cdot PN = MN^2 \cdot PS \cdot PT. \qquad (1)$$

Из пропорции $\dfrac{ST}{MN} = \dfrac{PT}{PM}$ имеем

$$MN \cdot PT = ST \cdot MP, \qquad (2)$$

а по свойству секущих

$$PS \cdot PM = PA \cdot PB. \qquad (3)$$

Перемножим равенства (1), (2) и (3). Получим:

$$ST^2 \cdot PM \cdot PN \cdot MN \cdot PT \cdot PS \cdot PM =$$

$$= MN^2 \cdot PS \cdot PT \cdot ST \cdot PM \cdot PA \cdot PB.$$

Отсюда $ST \cdot PM \cdot PN = MN \cdot PA \cdot PB$.

Задача 71.

Площадь выпуклого четырехугольника равна S, его диагонали пересекаются в точке M. Доказать, что если площади S_1 и S_2 треугольников MAB и MCD удовлетворяют условию $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$, то данный четырехугольник есть трапеция.

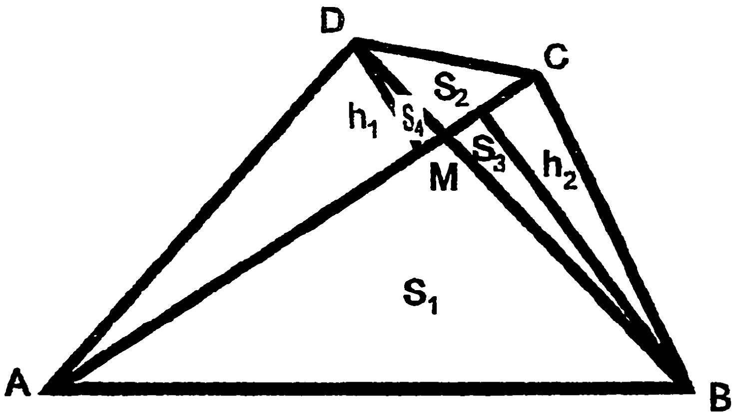


Рис. 25.48

Доказательство.

Пусть $S_{MAB} = S_1$, $S_{MCD} = S_2$, $S_{MBC} = S_3$, $S_{MAD} = S_4$ (рис. 25.48). Согласно условию задачи,

$$\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} \text{ или } S = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2}.$$

С другой стороны $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$, значит,

$$S_3 + S_4 = 2\sqrt{S_1 S_2}. \qquad (1)$$

Треугольники AMD и CMD имеют общую высоту h_1, а треугольники AMB и CBM — высоту h_2. Следовательно,

$$\frac{S_1}{S_3} = \frac{S_4}{S_2} = \frac{AM}{MC} \text{ и } S_1 S_2 = S_3 S_4.$$

Из равенства (1) следует, что

$$S_3 + S_4 = 2\sqrt{S_3 S_4} \text{ или } S_3 = S_4.$$

Отсюда треугольники ADB и ACB равновелики и имеют общее основание AB. Вследствие этого $DC \parallel AB$, и данный четырехугольник — трапеция.

Задача 72.

Окружность радиуса, равного высоте правильного треугольника, катится по одной из сторон этого треугольника так, что остальные стороны высекают из окружности некоторую дугу. Доказать, что дуга при любом положении окружности равна 60°.

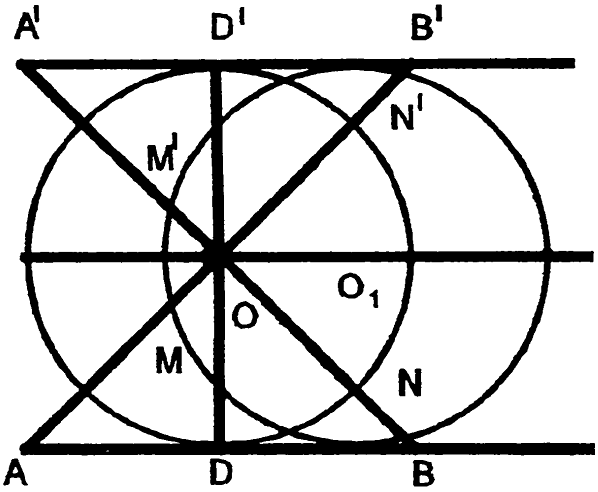


Рис. 25.49

Доказательство.

Через точку O проводим диаметр, параллельный стороне AB, и строим $\Delta OA'B'$, симметричный ΔABO относительно этой оси. $\angle MON$ измеряется $\frac{1}{2}(\smile MN + \smile M'N')$ (рис. 25.49).

Так как OO_1 — ось симметрии пересекающихся окружностей, то $\smile MN = \smile M'N'$, и, так как $\angle MON = 60°$, то $\smile MN = 60°$.

Задача 73.

Доказать, что если фигура имеет два центра симметрии, то она имеет бесчисленное количество центров симметрии.

Доказательство.

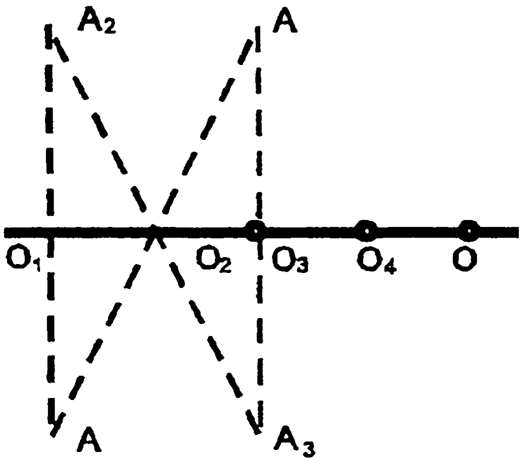


Рис. 25.50

Пусть фигура имеет два центра симметрии O_1 и O_2 (рис. 25.50). Отразим точку O_1 симметрично относительно O_2 и покажем, что полученная точка O_3 так же будет центром симметрии. Пусть A —

произвольная точка фигуры. Тогда A_1, симметричная A относительно O_2, также принадлежит фигуре, ибо O_2 — центр симметрии. По той же причине принадлежат фигуре A_2, симметричная A_1 относительно O_1, и A_3, симметричная A_2 относительно O_2. Легко видеть, что отрезок AO_3 равен и параллелен отрезку A_1O_1, а значит, и отрезку A_2O_1. Но A_3O_3 равно и параллельно O_1A_2, следовательно, $AO_3 = O_3A_3$ и точки A_1, O_3, A_3 лежат на одной прямой. Это значит, что A_3, симметричная A относительно O_3, принадлежит нашей фигуре, т.е. O_3 — центр симметрии. Аналогично строятся центры симметрий O_4, O_5 и т.д.

Задача 74.

На прямой дано p отрезков. Доказать, что если каждые два из них имеют общую точку, то существует по крайней мере одна точка, принадлежащая всем отрезкам.

Доказательство.

Пусть $A_1, \dots, A_p$ — левые, а $B_1, B_2, \dots, B_p$ — правые концы данных отрезков. Тогда любая точка A_i $(i = 1, 2, \dots, p)$ лежит левее любой точки B_j $(j = 1, 2, \dots, p)$ или совпадает с ней. Действительно, если бы точка A_i лежала правее точки B_j, то отрезки A_jB_j и A_iB_i не имели бы общих точек. Выберем теперь среди точек A_i самую правую точку A_k, а среди B_j — самую левую точку B_l. Тогда отрезок A_kB_l принадлежит всем данным отрезкам A_iB_i $(i = 1, 2, \dots, p)$. В самом деле, точки A_k и B_l принадлежат каждому их данных отрезков, следовательно, это же верно и для отрезка A_kB_l. Нетрудно убедиться в том, что точки A_k и B_l могут совпадать, тогда отрезок A_kB_l превращается в точку.

Задача 75.

Доказать, что если плоский многоугольник имеет несколько осей симметрии, то они пересекаются в одной точке.

Доказательство.

Можно доказать, что любые две оси симметрии пересекаются внутри многоугольника. Покажем, что третья ось симметрии пройдет через точку пересечения двух данных.

Для доказательства предположим противное. Тогда три оси симметрии образуют некоторый ΔABC. Выберем внутри треугольника ABC произвольную точку O (рис. 25.51). Любая точка M плоскости лежит, очевидно, по ту же сторону, что и O, по крайней мере от одной из осей симметрии. Соединим точку O с наиболее удаленной от нее точкой M многоугольника. Пусть O и M лежат по одну сторону от оси AB. Точка M_1, симметричная M относительно AB, также принадлежит многоугольнику. Пусть OO_1 — перпендикуляр, опущенный из точки O на MM_1. Ввиду симметрии точек M и M_1 $M_1N = NM$. В то же время $M_1O_1 > MO$, значит, $OM_1 > OM$, что противоречит тому, что M — самая далекая от O точка многоугольника. Полученное противоречие доказывает утверждение.

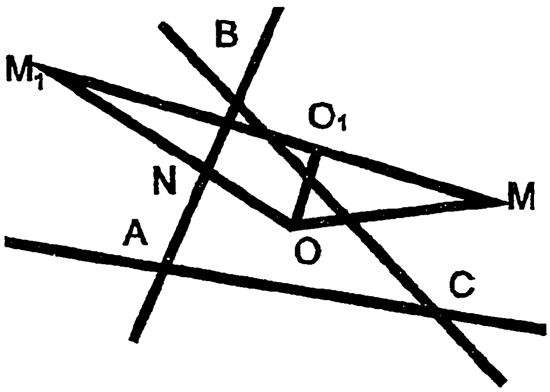


Рис. 25.51

Задача 76.

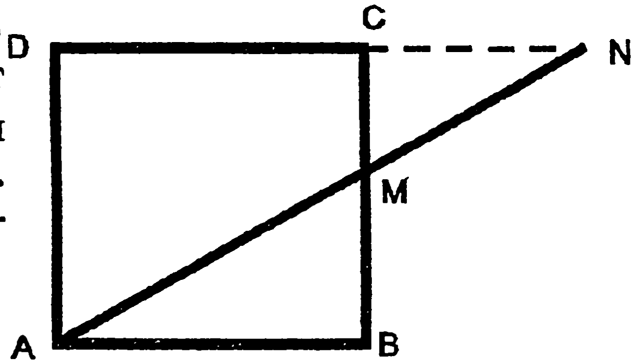


Рис. 25.52

Через вершину A квадрата $ABCD$ со стороной a проведена произвольная прямая, пересекающая сторону BC в точке M, а продолжение стороны DC — в точке N. Доказать, что

$$\frac{1}{CM} - \frac{1}{CN} = \frac{1}{a}.$$

Доказательство.

Пусть $BM = b$, тогда $CM = a - b$. Из подобия ΔABM и ΔNCM получим (рис. 25.52):

$$CN = \frac{a(a-b)}{b}, \text{ следовательно,}$$

$$\frac{1}{CM} - \frac{1}{CN} = \frac{1}{a-b} - \frac{b}{a(a-b)} = \frac{1}{a}.$$

Задача 77.

Доказать, что если медианы, проведенные к двум катетам прямоугольного треугольника, образуют угол x, то $\cos x \geqslant \frac{4}{5}$.

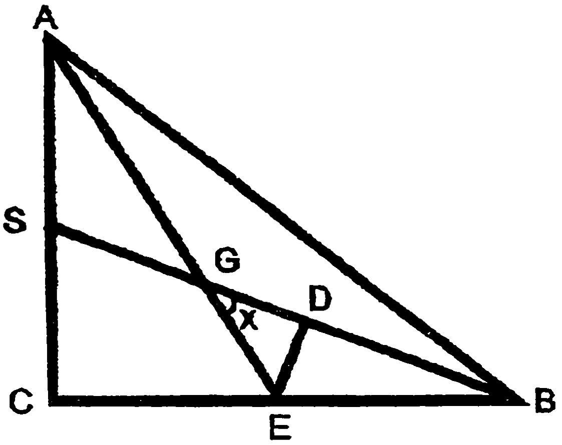


Рис. 25.53

Доказательство.

Первый способ.

Пусть a и b — катеты прямоугольного треугольника, c — его гипотенуза, S — середина AC, E — середина BC; $DE \perp BG$ (G — центроид треугольника). Имеем (рис. 25.53):

$$BS^2 = \frac{1}{2}(c^2 + a^2) - \frac{1}{4}b^2 =$$

$$= \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}(c^2 - a^2) = \frac{1}{4}(3a^2 + c^2).$$

Отсюда $BS = \frac{1}{2}\sqrt{3a^2 + c^2}$. Аналогично $AE = \frac{1}{2}\sqrt{3b^2 + c^2}$.

Из подобия треугольников BDE и BSC следует:

$$\frac{BD}{a} = \frac{a}{\sqrt{c^2 + 3a^2}}, \quad BD = \frac{a^2}{\sqrt{c^2 + 3a^2}}. \text{ Но}$$

$$BG = \frac{2}{3}BS - BD = \frac{1}{3}\sqrt{c^2 + 3a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{c^2 + 3a^2}} =$$

$$= \frac{c^2}{3\sqrt{c^2 + 3a^2}}.$$

Второй способ.

Примем центроид G прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) за полюс. Положим

$$\overline{GA} = \overline{A}, \quad \overline{GB} = \overline{B}. \text{ Тогда } \overline{CA} = \overline{2A} + \overline{B}, \quad \overline{CB} = \overline{2B} + \overline{A}$$

$$\text{и } (\overline{2A} + \overline{B})(\overline{2B} + \overline{A}) = 0. \text{ Отсюда}$$

$$\overline{5A} \cdot \overline{B} + 2(\overline{A}^2 + \overline{B}^2) = 0 \text{ и}$$

$$\cos x = \frac{2(\overline{A}^2 + \overline{B}^2)}{5|\overline{A}| \cdot |\overline{B}|} \geqslant \frac{4|\overline{A}| \cdot |\overline{B}|}{5|\overline{A}| \cdot |\overline{B}|} = \frac{4}{5}.$$

Задача 78.

В треугольнике ABC через вершину A проведена такая прямая, пересекающая сторону BC в точке D, что на ней существует такая точка X, что

$$\angle ABC = \angle BXD \text{ и}$$

$$\angle ACB = \angle CXD.$$

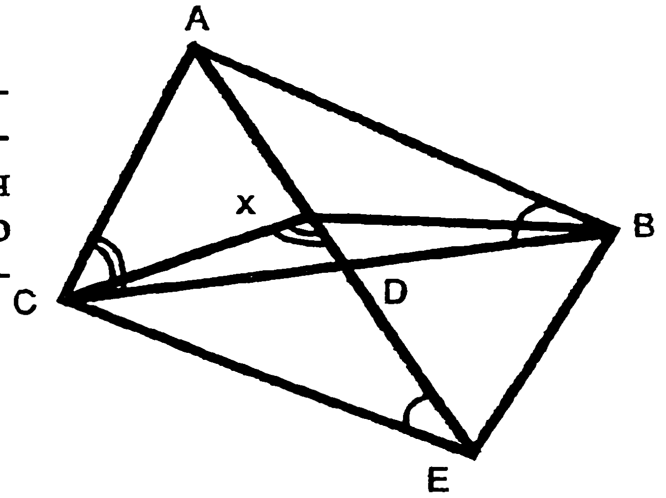


Рис. 25.54

Через вершины B и C проведены аналогичные прямые. Доказать, что все они пересекутся в одной точке.

Доказательство.

Докажем, что каждая такая прямая будет медианой (рис. 25.54).

$$\left.\begin{aligned}\angle ABC = \angle AEC,\\ \angle ABC = \angle BXE.\end{aligned}\right\}$$

Следовательно, $\angle AEC = \angle BXE$. Аналогично

$$\angle CXE = \angle BXE.$$

Четырехугольник $BECX$ является параллелограммом, следовательно, $CD = BD$, значит, AD — медиана.

Так как три полученные прямые являются медианами, то они пересекаются в одной точке.

Задача 79.

На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ во внешнюю сторону построены правильные треугольники BCK и CDM. Доказать, что AKM — также правильный треугольник.

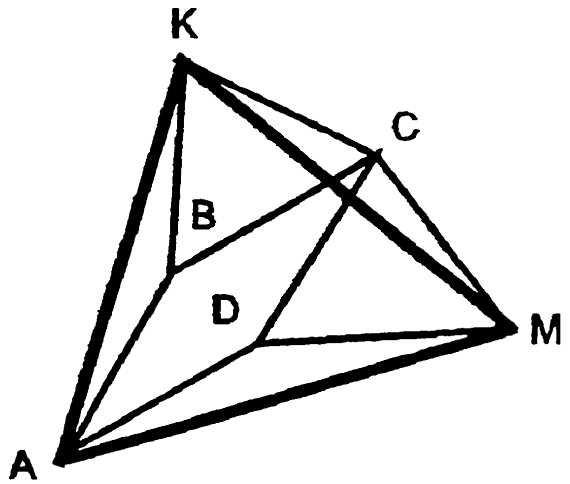


Рис. 25.55

Доказательство.

Треугольники ABK, ADM, KCM равны между собой. У них есть по паре равных сторон, кроме того, равны соответствующие углы, например, $\angle BAD = \alpha = 60^\circ$ (рис. 25.55).

$$\angle ABK = 360^\circ - (\angle ABC + 60^\circ) = 60^\circ - (180^\circ - \alpha + 60^\circ) =$$

$$= 120^\circ + \alpha, \quad \angle KCM = \alpha + 120^\circ.$$

Задача 80.

Доказать, что произвольный треугольник можно разрезать на четыре неравных между собой треугольника, образующих две пары подобных треугольников.

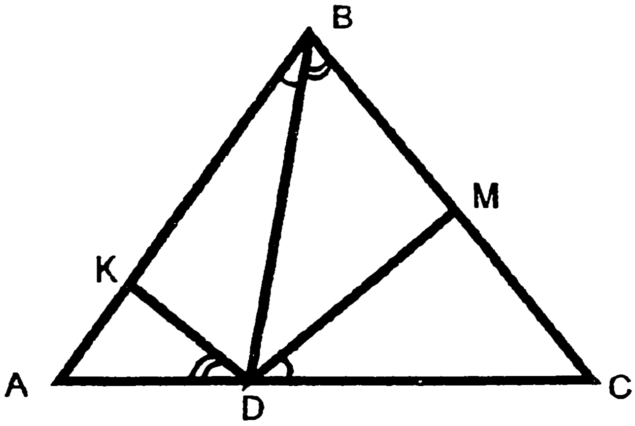


Рис. 25.56

Доказательство.

Возьмем на стороне AC некоторую точку D (вообще говоря, произвольно). Теперь на BC и AB возьмем точки M и K так, что

$$\angle MDC = \angle ABD, \quad \angle KDA = \angle DBC \text{ (рис. 25.56).}$$

Тогда будем иметь: $\angle BDM = \angle KAD$, $\angle BDK = \angle MCD$. Таким образом, $\Delta AKD \backsim \Delta DMB$, $\Delta CMD \backsim \Delta DKB$.

Задача 81.

В треугольнике ABC проведены биссектрисы внутренних углов AA_1, BB_1, CC_1. Доказать, что периметр треугольника $A_1B_1C_1$ не превышает половины периметра треугольника ABC.

Доказательство.

Обозначим $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $a + b + c = 2p$. Можно доказать, что

$$A_1B_1^2 = \frac{abc^2}{(a+c)(b+c)} - 2p\,(a-b)^2\,\frac{abc}{(a+c)^2(b+c)^2}.$$

Сначала находим CA_1 и CB_1 по теореме о биссектрисе внутреннего угла треугольника, затем по теореме косинусов из треугольника A_1CB_1 находим A_1B_1. Выражаем косинус угла через стороны исходного треугольника, после чего полученное выражение можно преобразовать к указанному виду. Таким образом, $A_1B_1^2 \leqslant \dfrac{abc^2}{(a+c)(b+c)}$.

Далее по неравенству о среднем будем иметь:

$$A_1B_1 \leqslant \frac{\sqrt{ab}\cdot c}{\sqrt{a+c}\cdot\sqrt{b+c}} \leqslant \frac{\sqrt{qb}\cdot c}{\sqrt{2\sqrt{ab}}\sqrt{2\sqrt{bc}}} =$$

$$= \frac{\sqrt[4]{ac}\cdot\sqrt[4]{bc}}{2} \leqslant \frac{\sqrt{ac}+\sqrt{bc}}{4} \leqslant \frac{a+c}{8} + \frac{b+c}{8} = \frac{a+b+2c}{8}.$$

Получив аналогичное неравенство для двух оставшихся сторон B_1C_1 и C_1A_1 и сложив их, получим

$$A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1 \leqslant \frac{a+b+2c}{8} + \frac{b+c+2a}{8} +$$

$$+ \frac{c+a+2b}{8} = \frac{a+b+c}{2} = p,$$

что и требовалось доказать.

Задача 82.

На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки K и M соответственно. Доказать, что если $\angle CKM$ больше $\angle BKM$, то $\angle AMK$ меньше $\angle BMK$.

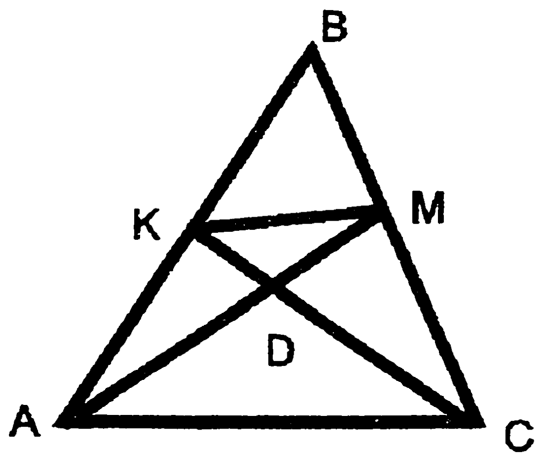


Рис. 25.57

Доказательство.

Пусть отрезки AM и CK пересекаются в точке D. Имеем: $\angle ADC > \angle ABC$ (рис. 25.57), но

$$\angle CKM + \angle AMK = 180^\circ - \angle ADC <$$

$$< 180^\circ - \angle ABC = \angle BKM + \angle BMK.$$

Теперь понятно, что если $\angle CKM > \angle BKM$, то

$$\angle AMK < \angle BMK.$$

Задача 83.

Доказать, что прямые, соединяющие последовательные центры квадратов, построенных на сторонах параллелограмма и примыкающих к ним извне, образуют квадрат.

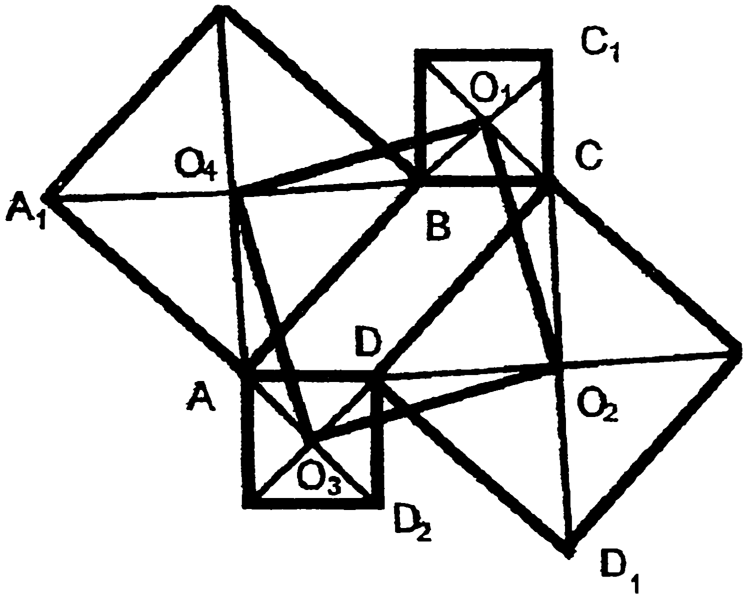


Рис. 25.58

Доказательство.

Достаточно доказать, что пары треугольников равны. Покажем, например, что $\Delta O_1CO_2 = \Delta O_2DO_3$ (рис. 25.58). В остальных случаях рассуждения аналогичны.

Действительно, $O_1C = O_3D$, $O_2C = O_2D$ как половины диагоналей равных квадратов.

$$\angle O_1CO_2 = 90^\circ + \angle BCD = 90^\circ + \angle D_1DD_2 = \angle O_2DO_3.$$

Следовательно, указанные треугольники равны, ибо у них равны две стороны и угол между ними.

Задача 84.

На плоскости проведена замкнутая ломаная линия, все звенья которой имеют длину l и любые два соседних звена взаимно перпендикулярны. Доказать, что число звеньев кратно четырем.

Доказательство.

Проведем две взаимно перпендикулярные прямые, параллельные соответственно звеньям ломаной линии. Очевидно, что звеньев ломаной линии, параллельных первой прямой, будет столько же, сколько звеньев, параллельных второй прямой. В то же время число звеньев, параллельных каждой из прямых, будет четным. Следовательно, число всех звеньев будет равно сумме равных четных чисел, то есть будет кратно 4.

Задача 85.

Если все квадраты, вписанные в треугольник так, что две вершины расположены на стороне треугольника, а две другие вершины на двух других сторонах треугольника равны между собой, то треугольник равносторонний. Доказать.

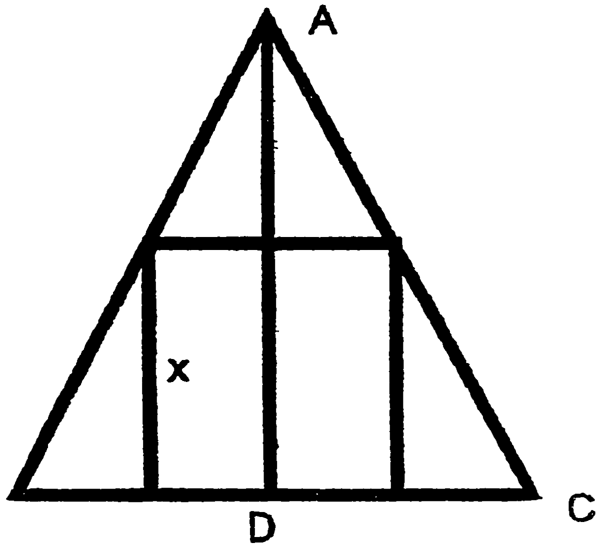


Рис. 25.59

Доказательство.

Обозначив сторону квадрата через x, получим (рис. 25.59): $\frac{a}{x} = \frac{h_a}{h_a - x}$, откуда $x = \frac{ah_a}{h_a + a} = \frac{2S}{a + \frac{2S}{a}}$.

Если $ab = 2S$, то $\angle C = 90°$, и из равенства $b + \frac{2S}{b} = c + \frac{2S}{c}$ найдем: либо $\angle A = 90°$, либо $b = c$, что невозможно. Поэтому $a = b = c$, то есть $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$.

Задача 86.

Если произведение диагоналей четырехугольника равно сумме произведенеий противоположных сторон, то около него можно описать окружность. Доказать.

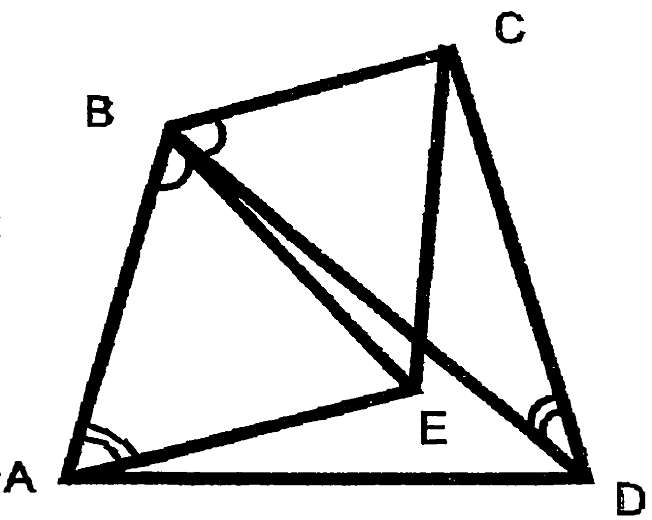


Рис. 25.60

Доказательство.

Пусть в четырехугольнике $ABCD$

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD,$$

где AC и BD — диагонали четырехугольника. Дополнительно построим $\angle BAE = \angle BDC$ и $\angle ABE = \angle DBC$. $\Delta ABE \backsim \Delta BCD$ (рис. 25.60).

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{CD} = \frac{BE}{BC}, \tag{1}$$

откуда

$$AB \cdot CD = AE \cdot BD. \tag{2}$$

В треугольниках ABD и BEC $\angle ABD = \angle CBE$, так как $\angle ABD = \angle ABE + \angle EBD$ и $\angle CBE = \angle CBD + \angle EBD$.

Кроме того, из (1) $\frac{AB}{BD} = \frac{BE}{BC}$, поэтому

$$\frac{AB}{BE} = \frac{BD}{BC} = \frac{AC}{CE}, \tag{3}$$

откуда

$$BC \cdot AD = BD \cdot CE. \tag{4}$$

Складывая равенства (2) и (4), получим:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = BD\,(AE + EC). \tag{5}$$

Сравнив равенство (5) с данным, прийдем к выводу: $AE + EC = AC$, то есть в данном четырехугольнике точка E должна лежать на AC, но в этом случае окружность, проведенная через вершины A, B, C, пройдет также через вершину D (так как $\angle BDC = \angle BAE$). Утверждение доказано. Около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.

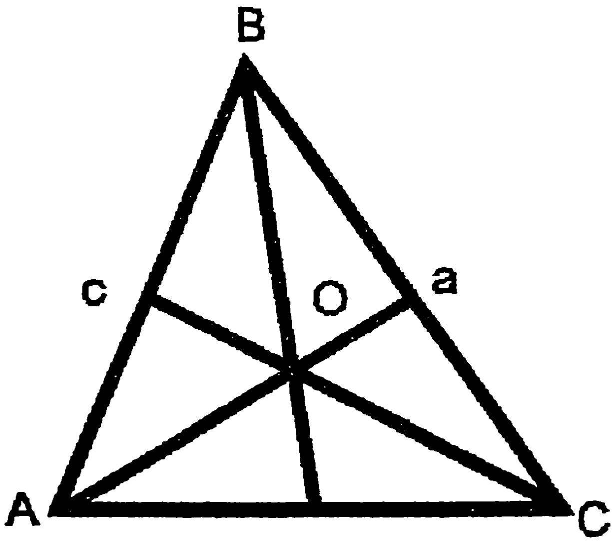


Рис. 25.61

Задача 87.

a, b, c — стороны треугольника ABC, R — радиус описанного круга, l, m, n — расстояния центра тяжести от сторон треугольника. Доказать, что

$$R = \frac{ab + bc + ac}{6\,(l + m + n)}.$$

Доказательство.

Центр тяжести O треугольника находится в точке пересечения медиан (рис. 25.61), поэтому площадь каждого из треугольников AOB, BOC и AOC равна $\frac{1}{3}$ площади S данного ΔABC, то есть имеем:

$$\frac{al}{2} = \frac{bm}{2} = \frac{cn}{2} = \frac{S}{3} \text{ или } al = bm = cn = \frac{2S}{3}.$$

Делим все члены этого равенства на abc:

$$\frac{l}{bc} = \frac{m}{ac} = \frac{n}{ab} = \frac{2S}{3abc}.$$

По свойству равных отношений:

$$\frac{l + m + n}{ab + bc + ac} = \frac{2S}{3abc}.$$

Но $R = \frac{abc}{4S}$, следовательно, $\frac{S}{abc} = \frac{1}{4R}$; $\frac{2S}{3abc} = \frac{1}{6R}$. Сделав подстановку, получим $\frac{l + m + n}{ab + bc + ac} = \frac{1}{6R}$, и отсюда

$$R = \frac{ab + bc + ac}{6\,(l + m + n)}.$$

Задача 88.

В треугольнике ABC угол B равен 100°. В этом треугольнике проведена биссектриса угла C, пересекающая AB в точке E, и на стороне AC взята точка D так, что угол CBD равен 20°. Доказать, что угол CED равен 10°.

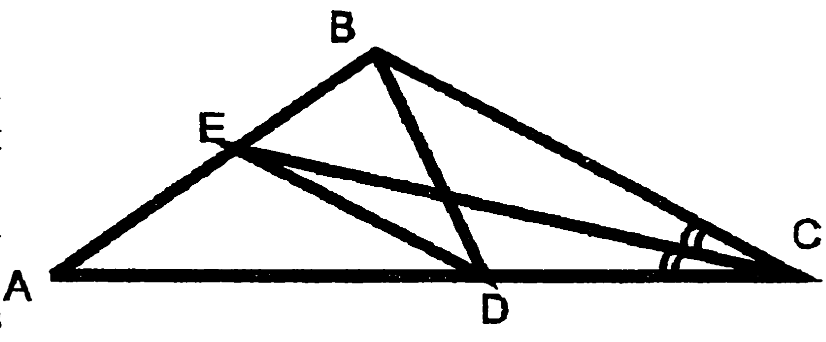


Рис. 25.62

Доказательство.

Легко видеть, что BE является биссектрисой угла, смежного с углом CBD (рис. 25.62). А поскольку CE — биссектриса угла BCD, то по отношению к треугольнику CBD точка E

является центром вневписанной окружности (DE — биссектриса угла BDA). Таким образом,

$$\angle CED = \angle EDA - \angle ECA = \frac{1}{2}(\angle BDA - \angle BCA) =$$

$$= \frac{1}{2}\angle CBD = 10^\circ$$

Задача 89.

Дан остроугольный треугольник ABC, внутри которого взята точка M. Эту точку соединили со всеми вершинами треугольника. Получившиеся отрезки образуют с высотами треугольника соответственно углы α, β и γ. Докажите, что сумма произведений каждого из этих отрезков на косинус угла (соответственно α, β, γ) и на сторону треугольника (соответственно BC, AC, AB) равна учетверенной площади данного треугольника.

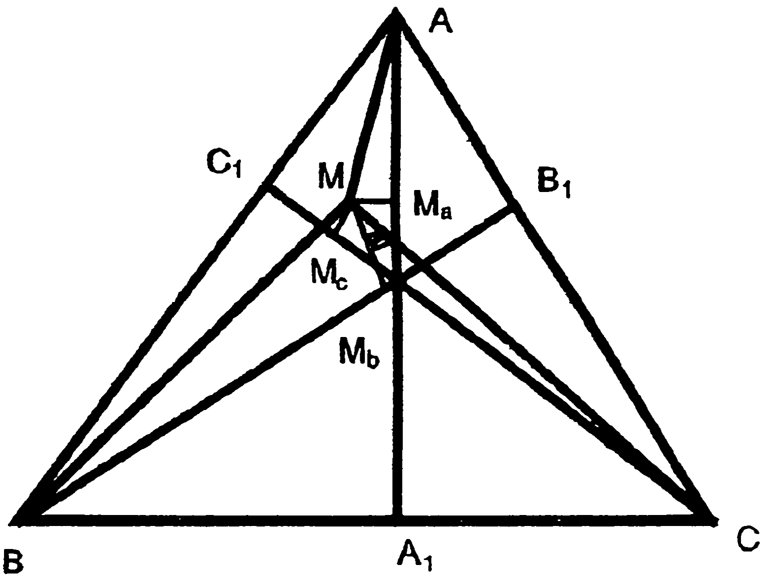


Рис. 25.63

Доказательство.

Соединим точку M с вершинами треугольника ABC и опустим из M перпендикуляры на высоты треугольника (рис. 25.63). Тогда

$$S_{\Delta BMC} = \frac{1}{2}BC \cdot A_1M_a = \frac{1}{2}BC \cdot (AA_1 - AM_a) =$$

$$= S_{\Delta ABC} - \frac{1}{2}BC \cdot AM_a.$$

Аналогично $S_{\Delta CMA} = S_{\Delta ABC} - \frac{1}{2}CA \cdot BM_b$,

$$S_{\Delta AMB} = S_{\Delta ABC} - \frac{1}{2}AB \cdot CM_c$$

(M_a, M_b, M_c — проекции точки M на высоты AA_1, BB_1, CC_1).

Сложим полученные равенства почленно. Получим, что площадь данного треугольника равна

$$S_{\Delta ABC} = 3\,S_{\Delta ABC} - \frac{1}{2}(BC \cdot AM_a + CA \cdot BM_b + AB \cdot CM_c).$$

Отсюда получим, что

$$CB \cdot AM_a + CA \cdot BM_b + AB \cdot CM_c = 4\,S_{\Delta ABC}.$$

Но $AM_a = AM\cos\alpha$, $BM_b = BM\cos\beta$, $CM_c = CM\cos\gamma$, откуда имеем

$$AM \cdot BC\cos\alpha + BM \cdot AC\cos\beta + CM \cdot AB\cos\gamma = 4\,S_{\Delta ABC}.$$

Задача 90.

Точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC; AD, BE, CF — высоты этого треугольника. Доказать, что $AB + BC + CA \geqslant 2\sqrt{3}(HD + HE + HF)$.

Доказательство.

Из треугольников BHF и BCF имеем соответственно:

$$HF = BF\operatorname{ctg} A \text{ и } BF = BC\cos B.$$

Следовательно, $HF = BC\cos B\operatorname{ctg} A = 2R\sin A\cos B\operatorname{ctg} A$ или $HF = 2R\cos A\cos B$.

Аналогично, $HD = 2R\cos B\cos C$, $HE = 2R\cos C\cos A$.

Пусть $BC < AC$, тогда $\cos A > \cos B$ и

$$\frac{HD}{HE} = \frac{2R\cos B\cos C}{2R\cos C\cos A} = \frac{\cos\angle B}{\cos\angle A} < 1.$$

Значит, $HD < HE$. Таким образом, если $BC \leqslant AB \leqslant CA$, то $HD \leqslant HF \leqslant HE$. В таком случчае имеет место неравенство Чебышева: $(BC + AB + CA)(HD + HF + HE) \leqslant$

$$\leqslant 3\,(BC \cdot HD + AB \cdot HF + CA \cdot HE) = 6\,S_{\Delta ABC}.$$

Разделив обе части последнего равенства на

$$(BC + AB + CA)^2,$$

получим:

$$\frac{HD + HF + HE}{BC + AB + CA} \leqslant \frac{6\,S_{\Delta ABC}}{4p^2}.$$

Но, как известно, $\frac{S}{4p^2} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{36}$. Следовательно,

$$\frac{6S}{4p^2} \leqslant \frac{6\sqrt{3}}{36} = \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Итак, $\frac{HD + HF + HE}{BC + AB + CD} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{3}}$,

$$2\sqrt{3}(HD + HF + HE) \leqslant (BC + AB + CD).$$

Равенство достигается лишь при $A = B = C = 60°$.

Задача 91.

Пусть S — площадь равнобедренного треугольника с боковой стороной b и углом при вершине $10°$.

Доказать, что

$$\left(\frac{4S}{b^2}\right)^2 + \frac{b^2}{4S} = 3.$$

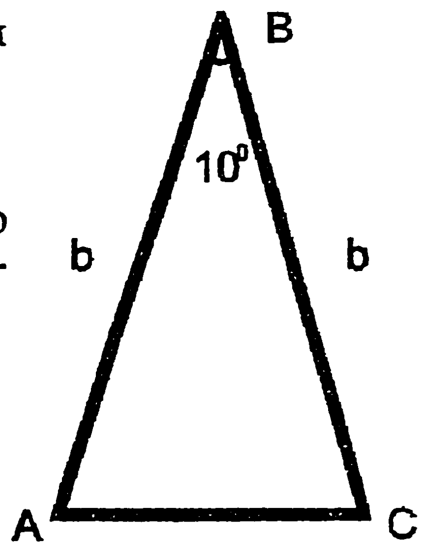


Рис. 25.64

Доказательство.

$S = \frac{1}{2} b^2 \sin 10°$ (рис. 25.64), откуда

$$\frac{b^2}{2S} = \frac{1}{\sin 10°} \quad \text{или} \quad \frac{4S}{b^2} = 2\sin 10°.$$

Тогда получим

$$\left(\frac{4S}{b^2}\right)^2 + \frac{b^2}{4S} = (2\sin 10°)^2 + \frac{1}{2\sin 10°} =$$

$$= \frac{8\sin^3 10° + 1}{2\sin 10°} = \frac{4\sin 10°\,(1 - \cos 20°) + 1}{2\sin 10°} =$$

$$= \frac{4\sin 10° - 2\,(\sin 30° - \sin 10°) + 1}{2\sin 10°} = 3,$$

что и требовалось доказать.

Задача 92.

Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. На продолжении AB откладывали $BM = AB$, на продолжении BC — $CN = BC$ и т.д. Доказать, что площадь четырехугольника $MNPQ$ в пять раз больше площади $ABCD$.

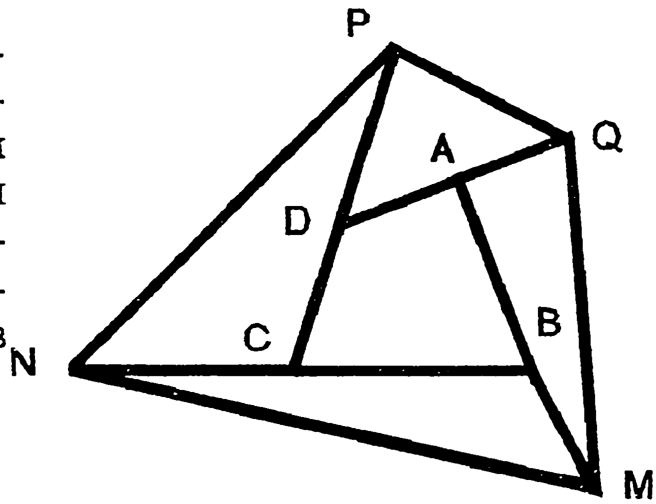


Рис. 25.65

Доказательство.

Имеем (рис. 25.65):

$$S_{\Delta BMN} = 2\,S_{\Delta ABC} = 2S_1$$

$$\left(AB = BM;\;\; BC = \frac{1}{2}BN\right);$$

$$S_{\Delta PCN} = 2\,S_{\Delta DBC} = 2S_2 \quad \left(BC = CN;\;\; DC = \frac{1}{2}PC\right);$$

$$S_{\Delta PQD} = 2\,S_{\Delta ADC} = 2S_3 \quad \left(PD = DC;\;\; AD = \frac{1}{2}QD\right);$$

$$S_{\Delta AQM} = 2\,S_{\Delta ABD} = 2S_4 \quad \left(AQ = AD;\;\; AB = \frac{1}{2}AM\right).$$

Имеем:

$$S_{PQMN} - S_{ABCD} = 2\,(S_1 + S_2 + S_2 + S_3 + S_4 + S_3 + S_1 + S_4);$$

$$S_{PQMN} = S_{ABCD} + 4S_{ABCD} = 5\,S_{ABCD},$$

что и требовалось доказать.

Задача 93.

Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Провести через C прямую, пересекающую продолжение сторон AD и AB в точках K и M соотвественно, так, чтобы $\dfrac{1}{S_{BCM}} + \dfrac{1}{S_{DCK}}$ принимало наименьшее значение.

Решение.

Докажем, что искомая прямая параллельна BD. Проведем через C прямую, параллельную BD, и обозначим через M_0

и K_0 ее точки пересечения с прямыми AB и AD (рис. 25.66). Пусть теперь некоторая прямая пересекает отрезок BM_0 в точке M, а прямую AD — в точке K. Нам надо доказать, что

$$\frac{1}{S_{BCM}}+\frac{1}{S_{DCK}}>\frac{1}{S_{BCM_0}}+\frac{1}{S_{DCK_0}}$$

или

$$\frac{1}{S_{BCM}}-\frac{1}{S_{BCM_0}}>\frac{1}{S_{DCK_0}}-\frac{1}{S_{DCK}};$$

$$\frac{S_{MCM_0}}{S_{DCM}\cdot S_{BCM_0}}>\frac{S_{KCK_0}}{S_{DCK}\cdot S_{DCK_0}}.$$

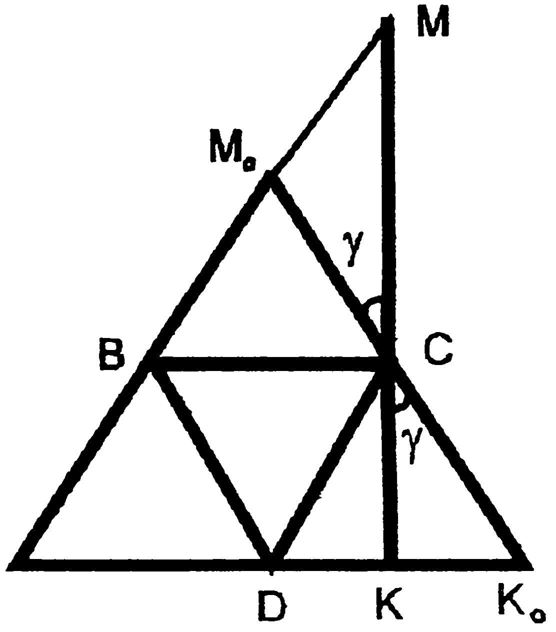


Рис. 25.66

Учитывая, что $\angle MCM_0=\angle KCK_0=\varphi$, после сокращения обеих частей на $\frac{1}{2}\sin\varphi$, получим неравенство:

$$\frac{MC}{S_{BCM}}\cdot\frac{CM_0}{S_{BCM_0}}>\frac{KC}{S_{DCK}}\cdot\frac{CK_0}{S_{DCK_0}}.$$

Но в треугольниках BCM_0 и DCK_0 высоты, проведенные к CM_0 и CK_0, равны между собой. Осталось доказать неравенство $\frac{MC}{S_{DCM}}>\frac{KC}{S_{DCK}}$. Оно очевидно — расстояние от B до CM меньше, чем расстояние от B до CM_0, а расстояние от D до CK больше, чем расстояние от D до CK_0.

Задача 94.

В параллелограмме $ABCD$ угол ABD равен 40°. Найти угол DBC, если известно, что центры окружностей, описанных около треугольников ABC и CDA, лежат на диагонали BD.

Решение.

Если центры указанных окружностей не совпадают, то, как нетрудно доказать, диагональ BD является осью симметрии данного параллелограмма, а значит, $ABCD$ — ромб, и угол DBC равен 40°. Если же эти центры совпадают, то $ABCD$ — прямоугольник, и угол DBC равен 50°.

Итак, задача имеет два решения: искомый угол равен либо 40°, либо 50°.

Задача 95.

Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC, M — середина AC. Доказать, что прямая MH проходит через точку пересечения окружности, описанной около ΔABC и окружности с диаметром BH.

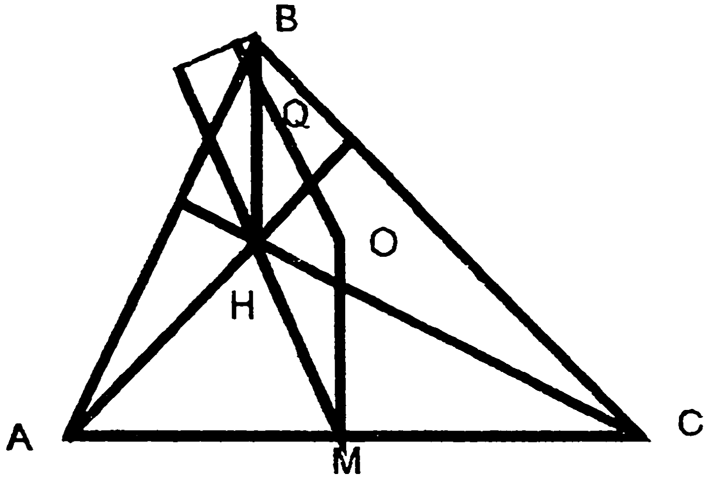


Рис. 25.67

Решение.

Пусть Q — середина BH, O — центр описанной около ABC окружности. Воспользуемся известным фактом, что $BH = 2 \cdot OM$, откуда $OM = HQ$, т.е. $OMHQ$ — параллелограмм (рис. 25.67). Поскольку окружности с центрами O и Q проходят через точку B, то вторая их точка пересечения симметрична B относительно прямой OQ. Следовательно, эта точка лежит на прямой MH, что и требовалось доказать.

Задача 96.

Пусть $ABCD$ и $BKMN$ — два квадрата. Докажите, что, продолжая медиану BE треугольника ABN за вершину B, получим высоту в треугольнике KBC (рис. 25.68).

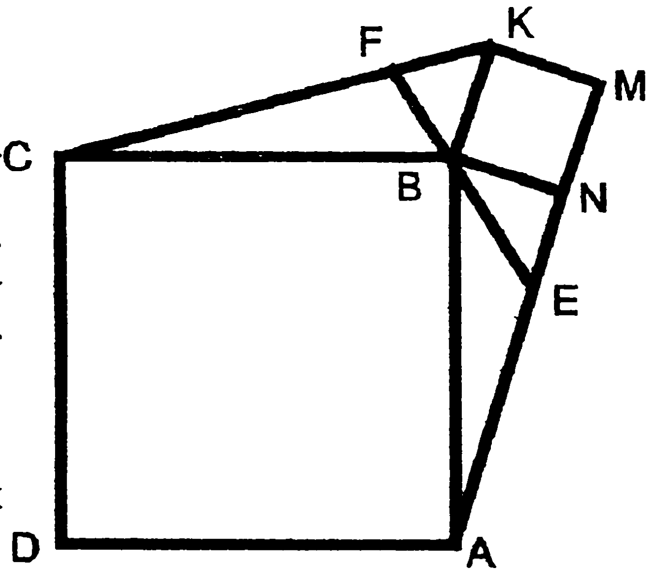


Рис. 25.68

Указание..

Повернуть треугольник ABN вокруг точки B на 90° так, чтобы BN совпала с BK, и доказать, что фигура

$CBA'K$ — треугольник, а BE' — его средняя линия. Показать, что $\angle FBE = 180°$ (рис. 25.69).

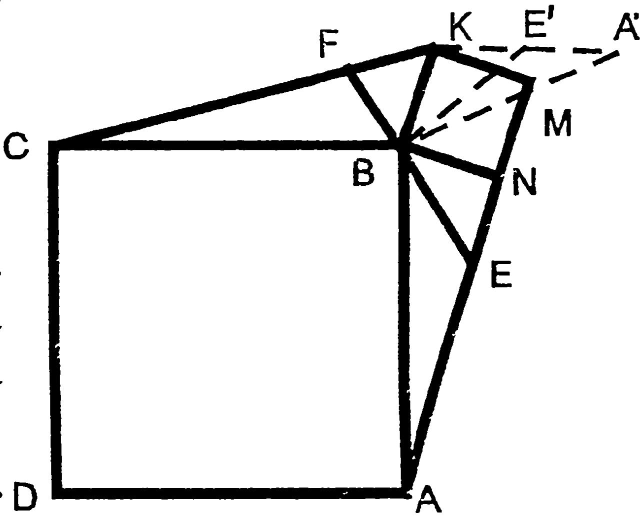


Рис. 25.69

Задача 97.

Доказать, что медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC перпендикулярны тогда и только тогда, когда

$\operatorname{ctg} \angle C = 2(\operatorname{ctg} \angle A + \operatorname{ctg} \angle B)$.

Доказательство.

Пусть $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|AC| = b$, $[AA_1] \perp [BB_1]$ (рис. 25.70), тогда $\overline{AA_1} \cdot \overline{BB_1} = 0$. Очевидно, что $\overline{AA_1} = \overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC}$ и $\overline{BB_1} = \frac{1}{2}\overline{AC} - \overline{AB}$, поэтому

$$(2\overline{AB} + \overline{BC})(\overline{AC} - 2\overline{AB}) = 0, \text{ или}$$

$$2bc\cos\angle A + ab\cos\angle C + 2ac\cos\angle B = 4c^2, \text{ или}$$

$$\frac{2bc\cos\angle A}{2S} + \frac{ab\cos\angle C}{2S} + \frac{2ac\cos\angle B}{2S} = \frac{4c^2}{2S},$$

где S — площадь треугольника ABC.

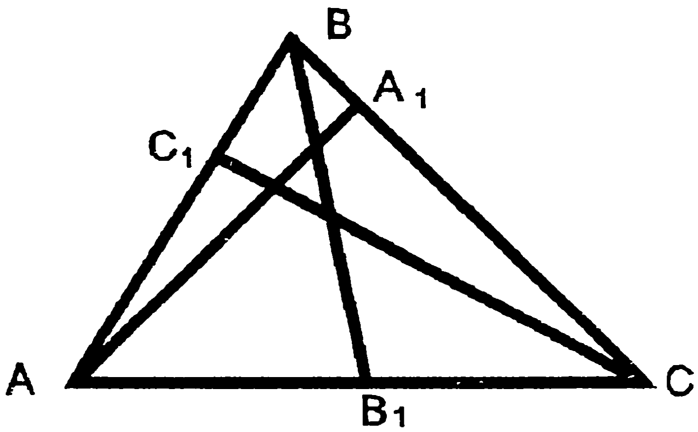


Рис. 25.70

Учитывая, что

$$2S = bc\sin\angle A = ab\sin\angle C = ac\sin\angle B = ch_c,$$

получаем

$$\frac{2bc\cos\angle A}{bc\sin\angle A}+\frac{ab\cos\angle C}{ab\sin\angle C}+\frac{2ac\cos\angle B}{ac\sin\angle B}=\frac{4c^2}{ch_c}$$

или

$$2\operatorname{ctg}\angle A+\operatorname{ctg}\angle C+2\operatorname{ctg}\angle B=\frac{4c}{h_c}.$$

С другой стороны, из треугольников ACD и DCB, где $CD\perp AB$, следует, что $c=h_c(\operatorname{ctg}\angle A+\operatorname{ctg}\angle B)$. Тогда

$$2\operatorname{ctg}\angle A+\operatorname{ctg}\angle C+2\operatorname{ctg}\angle B=4(\operatorname{ctg}\angle A+\operatorname{ctg}\angle B).$$

Значит,

$$\operatorname{ctg}\angle C=2(\operatorname{ctg}\angle A+\operatorname{ctg}\angle B).$$

Нетрудно провести рассуждения в обратном порядке и показать, что если $\operatorname{ctg}\angle C=2(\operatorname{ctg}\angle A+\operatorname{ctg}\angle B)$, то

$$\overline{AA_1}\cdot\overline{BB_1}=0,\ \text{а тогда}\ (AA_1)\perp(BB_1).$$

Задача 98.

На плоскости дан угол с вершиной O и окружность внутри угла. На окружности заданы точки A и B. Найти на окружности точку M, чтобы прямая AM пересекала одну сторону угла, а прямая BM — другую сторону в точках, равноудаленных от вершины O.

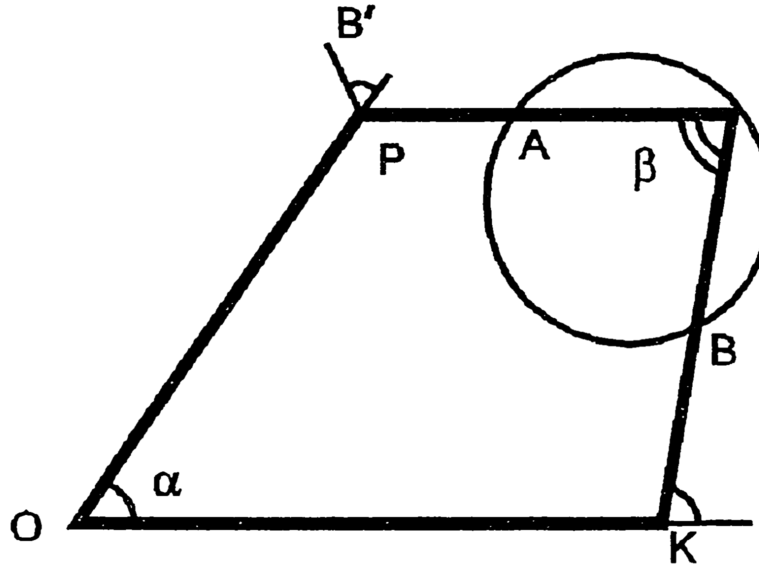


Рис. 25.71

Решение.

Обозначения понятны из рис. 25.71. Сделаем поворот вокруг O на угол $POK=\alpha$. Тогда точка K должна перейти в точку P. Пусть точка B перейдет в B'. Если точка M расположена на окружности так, что ей соответствует угол β, то $\angle MPB'=\alpha+\beta$, то есть этот угол известен, а поскольку известны и точки A и B', мы можем, построив на AB сегмент, вмещающий угол $\alpha + \beta$, найти точку P, а затем и M. Вторая точка пересечения этой окружности со стороной угла дает нам точку P', которой соответствует второе решение задачи (точка M').

Задача 99.

Из вершины некоторого угла выходят два луча, расположенные внутри угла. Некоторая прямая пересекает стороны угла в точках A и B, а лучи — в точках K и M. Доказать, что отношение $\frac{KM}{AB}$ будет наибольшим при условии $KA = MB$.

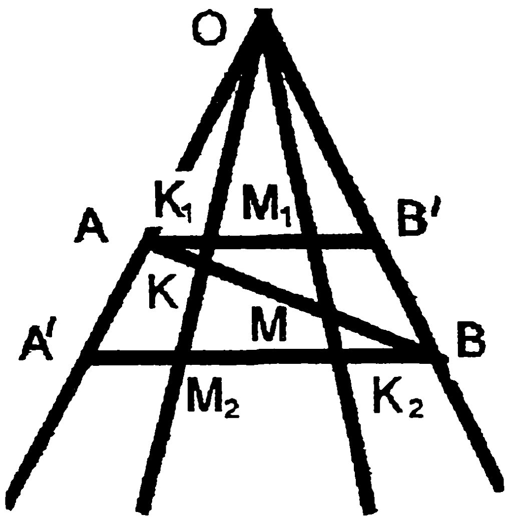


Рис. 25.72

Доказательство.

Пусть $AK \neq MB$. Проведем через A прямую, пересекающую другую сторону и лучи соотвественно в точках B', K_1 и M_1, а через B — параллельную ей прямую (рис. 25.72). Обозначим

$$AK_1 = M_1B' = x,\ K_1M_1 = y,\ M_1A' = K_2B = \lambda x,$$

$$M_2K_2 = \lambda y,\ AB = l.$$

Используя соответствующее подобие, найдем

$$AK = \frac{lx}{x + \lambda x + \lambda y},\quad AM = \frac{l(x+y)}{x + y + \lambda x},$$

а затем

$$KM = l\left(\frac{x+y}{x+y+\lambda x} - \frac{x}{x+\lambda x+\lambda y}\right) =$$

$$= l\frac{\lambda y(2x+y)}{((\lambda+1)x+y)((\lambda+1)x+\lambda y)}.$$

Нам осталось доказать неравенство

$$\frac{\lambda y\,(2x+y)}{((\lambda+1)\,x+y)((\lambda+1)\,x+\lambda y)} \leqslant \frac{y}{2x+y}$$

или (после очевидных преобразований)

$$(\lambda-1)^2\,x\,(x+y) \geqslant 0, \text{ что очевидно.}$$

Задача 100.

В равнобедренном треугольнике для угла α при основании выполняется соотношение

$$\sin^3\alpha + \sin^2\alpha + \sin\alpha = 1.$$

Найти отношение периметра треугольника к диаметру описанной окружности.

Решение.

Обозначим через P и R соответственно периметр треугольника ABC и радиус окружности, описанной около него;

$$BC = CA, \quad \angle A = \alpha < 90^\circ.$$

Имеем:

$$\frac{P}{2R} = \frac{AB+2AC}{2R} = \sin\angle C + 2\sin\angle A =$$

$$= \sin 2\alpha + 2\sin\alpha = 2\sin\alpha\,(1+\cos\alpha). \qquad (1)$$

Из данного равенства следует, что

$$1-\sin\alpha = \sin^3\alpha + \sin^2\alpha,$$

а тогда

$$(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha) = (\sin^3\alpha+\sin^2\alpha)(1+\sin\alpha);$$

$$\cos^2\alpha = \sin^2\alpha\,(1+\sin\alpha)^2, \quad \cos\alpha = \sin\alpha\,(1+\sin\alpha);$$

$$\cos\alpha + 1 = 1 + \sin\alpha + \sin^2\alpha.$$

Согласно (1) получим:

$$\frac{P}{2R} = 2\sin\alpha\,(1+\sin\alpha+\sin^2\alpha) =$$

$$= 2\,(\sin\alpha+\sin^2\alpha+\sin^3\alpha) = 2.$$

Задача 101.

Для каждой точки X треугольника ABC проводятся три секущие, параллельные ее сторонам. В результате этого построения образуются три треугольника, ограниченные двумя секущими и стороной треугольника. Пусть площади этих треугольников равны $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$. Найти точку минимума функции $f(x) = S_1(x) + S_2(x) + S_3(x)$.

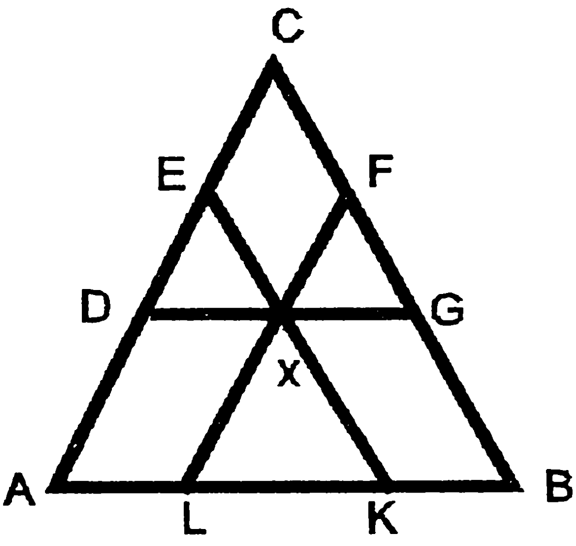


Рис. 25.73

Решение. *Первый способ.*

Введем следующие обозначения: $AB = c$, $DX = AL = u$, $GX = BK = v$, тогда $LK = c - u - v$ (рис. 25.73). Используя формулу для площади треугольника, имеем

$$S_{\Delta DEX} = \frac{u^2 \sin\angle A \sin\angle B}{2\sin^2\angle C} = S_1(x),$$

$$S_{\Delta FGX} = \frac{v^2 \sin\angle A \sin\angle B}{2\sin^2\angle C} = S_2(x);$$

$$S_{\Delta XLK} = \frac{(c-u-v)^2 \sin\angle A \sin\angle B}{2\sin^2\angle C} = S_3(x).$$

Таким образом,

$$f(x) = \frac{\sin\angle A \sin\angle B}{2\sin^2\angle C}\left(u^2 + v^2 + (c-u-v)^2\right).$$

Для данного треугольника ABC выражение

$$\frac{\sin\angle A \sin\angle B}{2\sin^2\angle C}$$

постоянно, поэтому нужно найти наименьшее значение выражения $u^2 + v^2 + (c-u-v)^2$. Используя неравенство между средним квадратичным и средним арифметическим, получим:

$$\sqrt{\frac{u^2 + v^2 + (c - u - v)^2}{3}} \geqslant \frac{u + v + (c - u - v)}{3},$$

$$u^2 + v^2 + (c - u - v)^2 \geqslant \frac{c^2}{3}.$$

Равенство достигается при $u = v = c - u - v = \frac{c}{3}$. При этом ясно, что точка X — точка пересечения медиан треугольника ABC. Итак, точка минимума функции $f(x)$ — точка пересечения медиан треугольника ABC.

Второй способ.

Треугольники с площадями S_1, S_2, S_3 гомотетичны треугольнику с площадью S, поэтому

$$S_1 : S = k_1^2,\ \ S_2 : S = k_2^2,\ \ S_3 : S = k_3^2, \text{ где}$$

$$k_1 = u : c,\ \ k_2 = v : c,\ \ k_3 = (c - u - v) : c,\ \ k_1 + k_2 + k_3 = 1.$$

Очевидно, что $f(x) = S\,(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)$, причем

$$k_1 + k_2 + k_3 = 1.$$

Но когда $\sqrt{\frac{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}{3}} \geqslant \frac{k_1 + k_2 + k_3}{3}$, откуда следует, что $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \geqslant \frac{1}{3}$, $f(x) \geqslant \frac{1}{3}S$.

Минимум $f(x)$ достигается при $k_1 = k_2 = k_3 = \frac{1}{3}$. Это значит, что точка X — точка пересечения медиан треугольника ABC.

Задача 102.

Центры трех попарно касающихся друг друга внешним образом окружностей расположены в вершинах прямоугольного треугольника с периметром $2p$. Найти радиус окружности, которой все три данные окружности касаются изнутри.

Решение.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC. Пусть радиусы окружностей с центрами в A, B и C равны соответственно x, y, z, причем

$$x + y + z = p,\quad AB = x + y,\quad BC = y + z,\quad CA = z + x.$$

Рассмотрим прямоугольник $ABCD$ и построим с центром в D окружность радиусом p. Поскольку

$$DA = p - x,\ DB = p - y,\ DC = p - z,$$

то данные окружности касаются последней изнутри. Остается доказать, что искомая окружность единственна.

Задача 103.

Через середину боковой стороны трапеции провести прямую, разбивающую трапецию на два равновеликих четырехугольника.

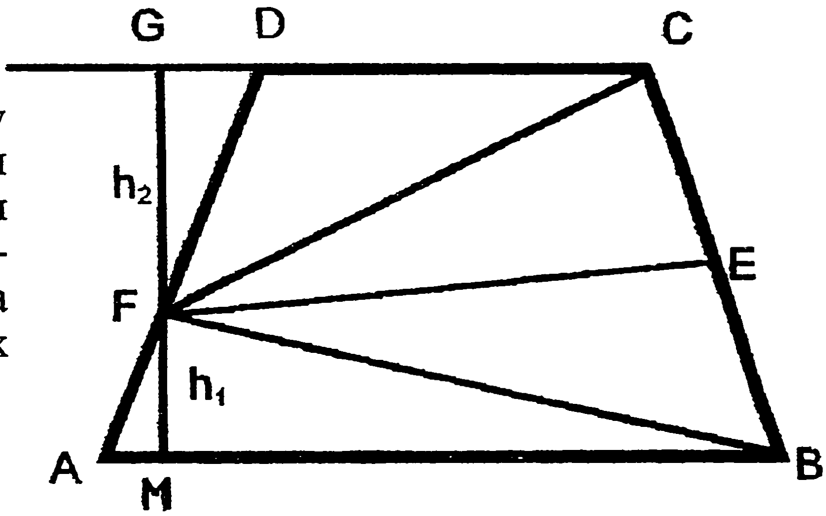


Рис. 25.74

Решение.

Пусть $CE = BE$, $AB = a$, $DC = b$, $FM = h_1$ — высота треугольника AFB, $FG = h_2$ — высота треугольника FDC (рис. 25.74).

Если EF — искомая прямая, то

$$S_{ABEF} = S_{CDFE}. \tag{1}$$

Так как FE — медиана треугольника BCF, то

$$S_{BEF} = S_{CFE}. \tag{2}$$

Вычитая почленно равенство (2) из равенства (1), получим:

$$(S_{ABF} = S_{CDF}) \Rightarrow \left(\frac{1}{2}ah_1 = \frac{1}{2}bh_2\right) \Rightarrow \left(\frac{h_1}{h_2} = \frac{b}{a}\right). \tag{3}$$

С другой стороны, из подобия треугольников FAH и FGD следует:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{AF}{FD}. \tag{4}$$

Сопоставляя равенства (3) и (4), видим, что $\frac{AF}{FD} = \frac{a}{b}$. Так как b и a даны, то точку F находим, разделив отрезок AD в отношении $b : a$.

Задача 104.

Через точку, лежащую внутри угла, провести прямую так, чтобы она образовала со сторонами угла треугольник наименьшей площади.

Решение.

Докажем, что отрезок MN искомой прямой, заключенный внутри угла MAN, делится в данной точке D пополам. Для этого достаточно провести через точку D любую другую прямую $M'N'$, пересекающую прямую AMB в точке M', прямую AN в точке N' (пусть, например, $DN' > PM'$), и убедиться, что площадь треугольника DMM' меньше площади треугольника DNN'. Последнее сразу становится очевидным, если провести через точку M прямую, параллельную прямой AN. Построенная прямая пересекает продолжение отрезка $M'N'$.

Задача 105.

Пересечь AC и BC треугольника ABC прямой в точках M и N так, чтобы отрезки AM, MN и NB были равны между собой.

Решение.

Предполагая, что точки M и N построены, проводим через точку N прямую, параллельную DC, и через точку A — прямую, параллельную MN. Пусть D — точка пересечения построенных прямых. $AMND$ — ромб, BND — равнобедренный треугольник с углом при вершине, равным углу C треугольника ABC; далее $\angle ABD = \angle ABC - 90° + \frac{1}{2}\angle BCA$ (рассматриваем случай, когда точка D лежит внутри треугольника ABC; рассмотрение других равнозначных случаев предоставим читателю). Для решение задачи достаточно:

1) построить равнобедренный треугольник $B'N'D'$ с углом при вершине N, равным углу C данного треугольника ABC;

2) построить треугольник $A'B'D'$ со стороной $A'D'$, равной $D'N'$ и углом B' при вершине B', равным

$$B + \frac{1}{2}C - 90°;$$

3) провести прямую $A'C'$, параллельную $D'N'$, пересекающуюся с прямой $B'N'$ в точке C';

4) выполнить преобразование подобия.

Задача 106.

Разрезать прямоугольный треугольник с углом 30° на четыре части, из которых можно сложить квадрат.

Решение.

Пусть A_1 и B_1 соотвественно середины катетов CB и CA прямоугольного треугольника ABC с острым углом A, равным 30°. Проведем через A_1 и B_1 параллельные прямые A_1K и B_1M, расстояние между которыми равно корню из площади данного треугольника (равно стороне искомого квадрата) (рис. 25.75). Пусть угол KMB_1 острый. Проведем перпендикуляр из точки K на B_1M. Нетрудно показать, что основание этого перпендикуляра — точка L — лежит на отрезке MB_1. Разрежем треугольник ABC на четыре части: треугольники A_1KB, B_1MA, KML и пятиугольник $CAKLB_1$. Переложив эти части так, как показано на рисунке, получим квадрат $QKLN$.

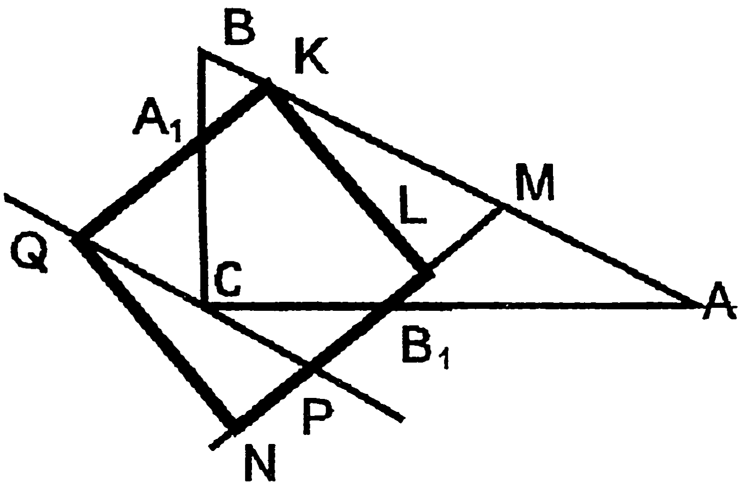


Рис. 25.75

Задача 107.

Пусть имеется циркуль и линейка с целочисленными делениями. Для каких натуральных n с помощью этих инструментов можно построить отрезок длиной $\sqrt{n}$, если каждый из них разрешается применять не более двух раз?

Решение.

Пусть $k \geqslant 1$ — натуральное число, отложим с помощью данной линейки на некоторой прямой в одном направлении точки A, D, E, F, O (рис. 25.76) таким образом, чтобы

$$AE = EO = k,$$

$$DE = EF = 1,$$

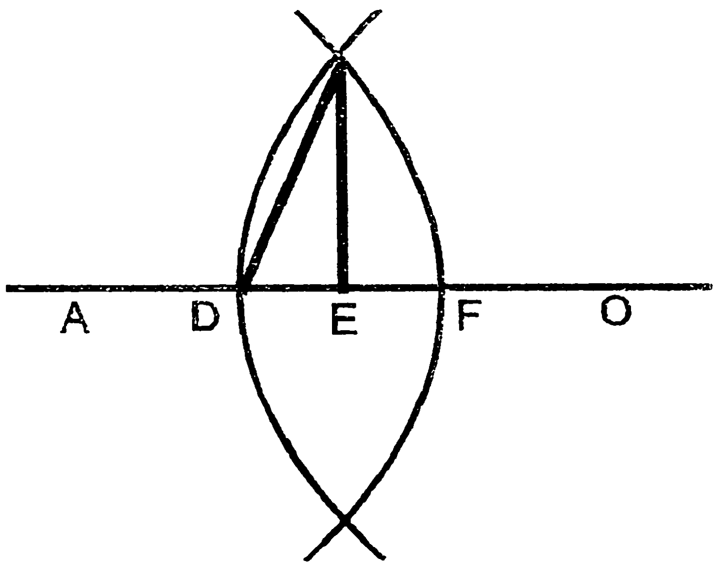


Рис. 25.76

и проведем окружности радиуса $k+1$ с центрами в точках A и O. Тогда

$$CE = \sqrt{(k+1)^2 - k^2} = \sqrt{2k+1}, \quad CD = \sqrt{2k+2},$$

и поэтому при $n = 2k+1$ искомым отрезком является CE, а при $n = 2k+2 \geqslant 4$ — отрезок CD. При $n = 2$ следует взять $AF = 2$, $DO = 2$ — тогда $CD = \sqrt{2}$.

Задача 108.

Окружность касается прямых AB и BC соответственно в точках D и E. Точка A лежит между точками B и D, а точка C — между B и E. Найти площадь ΔABC, если длины сторон AB и AC соответсвенно равны 13 и 1, а точки A, D, E и C лежат на одной окружности.

Решение.

Имеем $BD = DE$ как касательные к одной окружности (по условию). Докажем, что $\Delta ABC \backsim \Delta EBD$.

Поскольку четырехугольник $ACED$, по условию, вписанный, то, следовательно, ΔABC, как и ΔDBE, равнобедренный: $AB = BC$. Площадь будет равна $\frac{15}{4}\sqrt{3}$.

Задача 109.

На диаметре окружности ω (O, R) по разные стороны от точки O даны точки A и B. Построить равные хорды MC и MD даной окружности, из которых одна проходит черех точку

A, а другая — через точку B. Вычислить MA и MB, если $OA = 3$, $OB = 2$, $R = 6$ единицам длины.

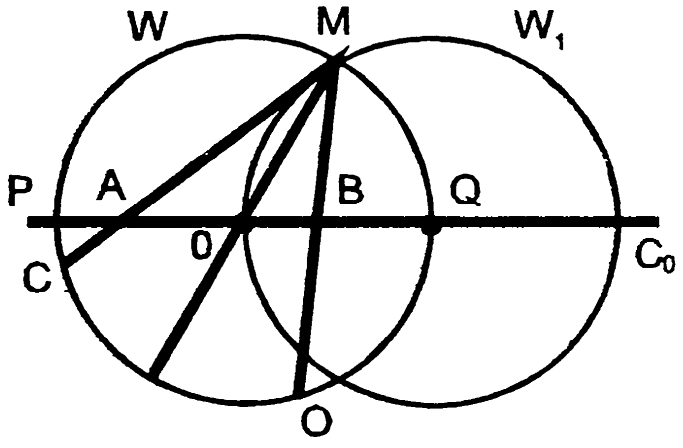


Рис. 25.77 (*а*)

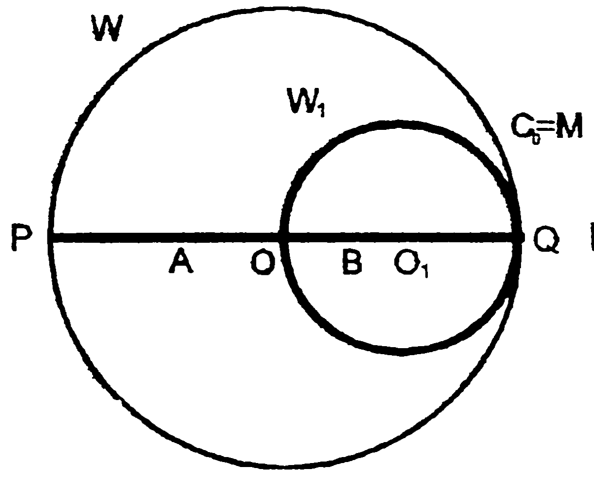


Рис. 25.77 (*б*)

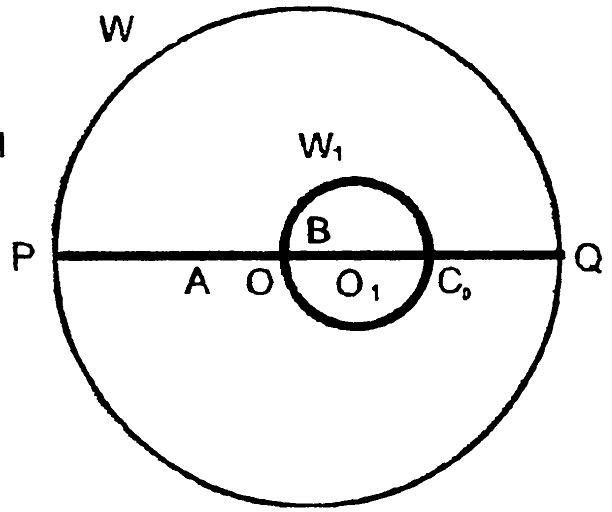


Рис. 25.77 (*в*)

Решение.

Концы диаметра PQ, содержащего данные точки A и B, относятся к чисмлу искомых точек. Будем искать точки M, отличные от P и Q.

Так как MO — биссектриса угла AMB (рис. 25.77, *а*), то $MA : MB = a : b$. Это означает, что при $a \neq b$ точка M принадлежит также и другой окружности ω_1 — окружности Аполлония. Строим на прямой AB (вне отрезка AB) точку C_0 такую, чтобы $AC_0 : C_0B = a : b$. Эта точка существует и единственная, так как $a \neq b$. Окружность ω_1 с диаметром OC_0 и является окружностью Аполлония. В зависимости от взаимного расположения ω и ω_1, эта задача имеет два решения (рис. 25.77, *а*), одно (рис. 25.77, *б*) или ни одного (рис.

25.77, *в*). Вычислим $x = MA$ и $y = MB$, если $OA = a$, $OB = b$. Из условия задачи следует, что MO есть биссектриса угла AMB. Поэтому по известным формулам имеем:

$$R^2 = xy - ab \text{ и } x : y = a : b.$$

Отсюда

$$x = \sqrt{\frac{a}{b}(ab + R^2)}\,, \quad y = \sqrt{\frac{b}{a}(ab + R^2)}\,.$$

Если $a > b$, то $BC_0 = \dfrac{b(a+b)}{a-b}$. Для того, чтобы окружность ω_1 пересекала ω, необходимо, чтобы $BC_0 > R - b$. Значит,

$$\frac{b(a+b)}{a-b} > R - b \text{ и } R < \frac{2ab}{a-b}.$$

В этом случае задача имеет два решения; при $R > \dfrac{2ab}{a-b}$ имеем одно решение; при $R = \dfrac{2ab}{a-b}$ решений нет. По условию задачи $6 < \dfrac{2 \cdot 3 + 2}{3 - 2} = 12$, поэтому имеем две точки M_1 и M_2, для которых $x = 2\sqrt{7}$, $y = 2\sqrt{7}$.

Задача 110.

В данный треугольник вписать параллелограмм наибольшей площади с данным острым углом так, чтобы две вершины параллелограмма лежали на основании, а две другие — на боковых сторонах.

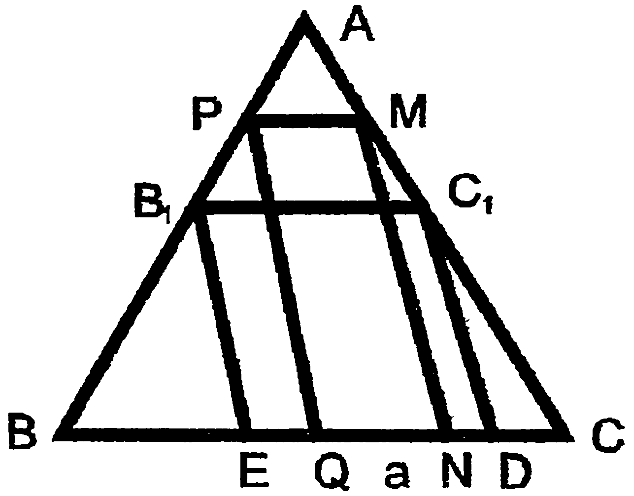


Рис. 25.78

Решение.

Пусть в треугольник ABC вписан произвольный параллелограмм $PMNQ$ с данным острым углом и параллелограмм B_1C_1DE, где B_1C_1 — средняя линия треугольника, равная $\dfrac{a}{2}$ (рис. 25.78). Площадь параллелограмма B_1C_1DE

равна $\frac{ah}{4}$, где a — сторона BC, а h — высота треугольника, опущенная на сторону BC. Площадь параллелограмма $PMNQ$ равна $\left(\frac{a}{2} - x\right)\left(\frac{h}{2} - y\right)$. Из подобия треугольников APM и AB_1C_1 имеем:

$$\frac{\frac{a}{2} - x}{\frac{h}{2} - y} = \frac{a}{h}; \quad \frac{a}{2} - x = \frac{a\left(\frac{h}{2} - y\right)}{h};$$

$$S_{PMNQ} = \frac{a\left(\frac{h}{2} - y\right)\left(\frac{h}{2} + y\right)}{h} = \frac{ah}{4} - \frac{ay^2}{h}.$$

Значит, $S_{PMNQ} < S_{B_1C_1DE}$. Таким образом, параллелограмм B_1C_1DE является искомым.

Задача 111.

Разделить прямую на пять равных частей.

Решение.

Разделим прямую на части следующим образом:

Первая часть состоит из всех полуинтервалов вида $[5k;\ 5k + 1]$, вторая — из полуинтервалов $[5k + 1;\ 5k + 2]$, третья — $[5k + 2;\ 5k + 3]$, четвертая — $[5k + 3;\ 5k + 4]$, пятая — $[5k + 4;\ 5k + 5]$, где $k = 0; \pm 1; \pm 2, \ldots$. Хотя каждая из частей не является связной, из равенство (конгруэнтность) очевидно.

Задача 112.

Построить такой равнобедренный треугольник, чтобы периметр всякого вписанного прямоугольника был бы величиной постоянной.

Решение.

Пусть в прямоугольнике $KLMN$ сторона $KL = MN = x_1$, $KN = LM = y_1$ и в прямоугольнике $DEFQ$ сторона $DE = QF = x_2$, $DQ = EF = y_2$ (рис. 25.79). По условию задачи должно быть $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$, или $x_2 - x_1 = y_1 - y_2$.

Из подобия треугольников LPE и ASB находим:

$$\frac{BS}{AS} = \frac{EP}{LP};$$

$$\frac{BS}{AS} = \frac{x^2 - x_1}{\frac{y_1}{2} - \frac{y_2}{2}} = $$

$$= \frac{2(x_2 - x_1)}{y_1 - y_2}.$$

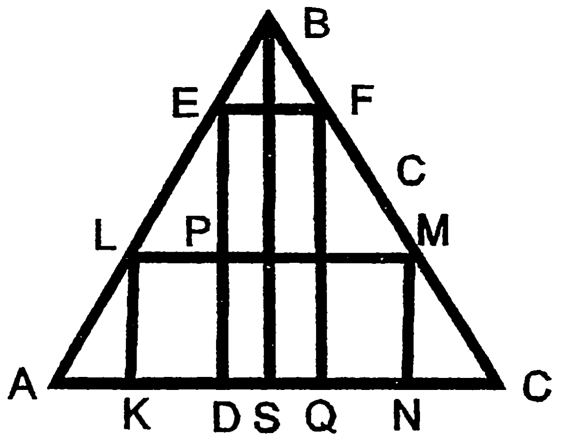


Рис. 25.79

Так как $x_2 - x_1 = y_1 - y_2$, $\frac{BS}{AS} = 2$; $BS = 2AS$; $BS = AC$, то есть в треугольнике высота равна основанию. Следовательно, решение задачи сводится к построению равнобедренного треугольника, у которого высота равна основанию.

Задача 113.

Через точку внутри квадрата провести прямую, отсекающую от него фигуру с наименьшей площадью.

Решение.

Если данная точка совпадает с центром квадрата, то любая прямая, проходящая через эту точку, делит квадрат на две равновеликие части. Если точка P расположена внутри квадрата $ABCD$, притом ближе к диагонали AC, чем к диагонали BD, и внутри треугольника AOB (O — точка пересечения диагоналей), то искомой фигурой будет треугольник B_1AD_1 с точкой D_1 на стороне AD, точкой B_1 на стороне AB и с точкой P — в середине гипотенузы B_1D_1 (рис. 25.80).

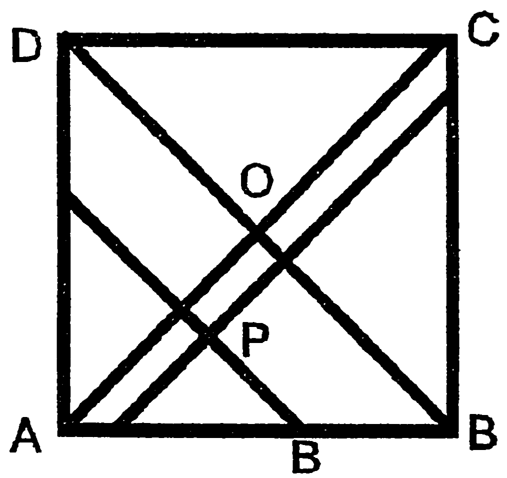


Рис. 25.80

Задача 114.

Биссектриса угла B треугольника ABC пересекает описанную около ABC окружность в точке M, P — точка, симметричная центру вписанной в ABC окружности относительно середины AC. Прямая MP вторично пересекает описанную около ABC окружность в точке K. Доказать, что из трех отрезков KA, KB и KC один равен сумме двух других.

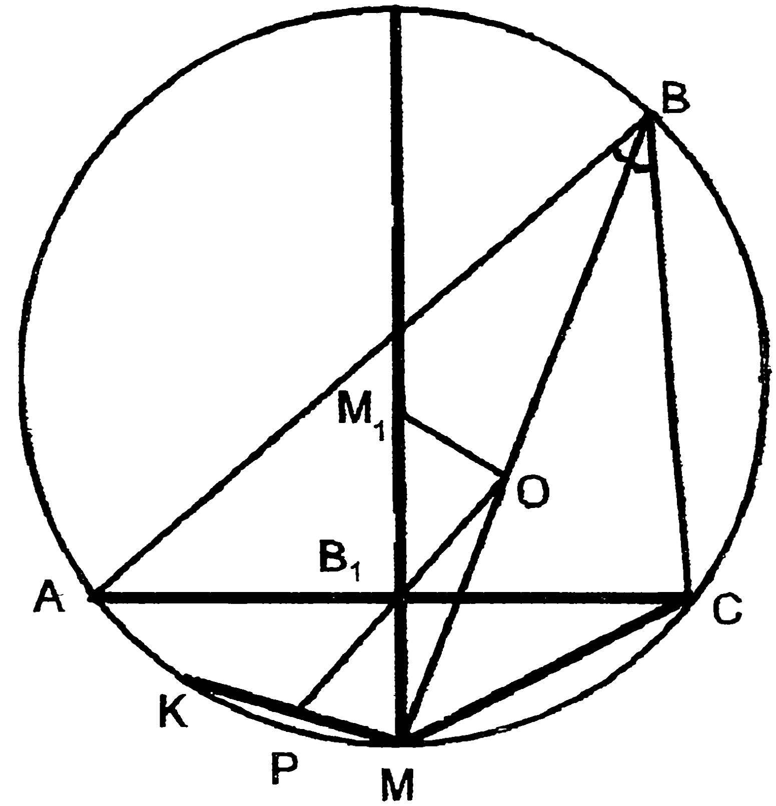


Рис. 25.81

Решение.

Пусть B_1 — середина C (рис. 25.81). Обозначим, углы: $\angle B_1MO = \alpha$, $\angle B_1MK = \beta$, $M_1MC = \varphi$.

Поскольку хорды в окружности пропорциональны синусам опирающихся на них углов, то нам достаточно доказать, что из трех чисел

$$\sin(\varphi - \beta),\ \sin(\varphi + \beta),\ \sin(\alpha + \beta)$$

одно равно сумме двух других.

Далее воспользуемся известным фактом, что

$$MA = MC = MO$$

(O — центр вписанной в ABC окружности). Пусть эти отрезки равны a.

Рассмотрим треугольник PMO, в котором медиана $MB_1 = a\cos\varphi$ и образует углы α и β со сторонами $MO = a$ и MP. Возьмем точку M_1 симметричную точке M относительно точки B_1 и запишем теорему синусов для треугольника MOM_1:

$$\frac{2a\cos\varphi}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{a}{\sin\beta};$$

$$2\cos\varphi\sin\varphi = \sin(\alpha+\beta).$$

Отсюда

$$\sin(\varphi+\beta) - \sin(\varphi-\beta) = \sin(\alpha+\beta),$$

что и требовалось доказать.

Глава V. СТЕРЕОМЕТРИЯ

26. ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ

Задача 1.

Двугранный угол при боковом ребре правильной четырехугольной пирамиды равен утроенному двугранному углу при ее основании. Найти объем пирамиды, если ее высота равна h.

Решение.

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ обозначим двугранный угол при ребре основания α, при боковом ребре — β. Их линейные углы $\angle SLO = \alpha$, $\angle BKD = \beta$. Обозначим далее $\angle SDC = \varphi$, сторону основания — a, $SL = l$. Найдем соотношения между α и φ (рис. 26.1).

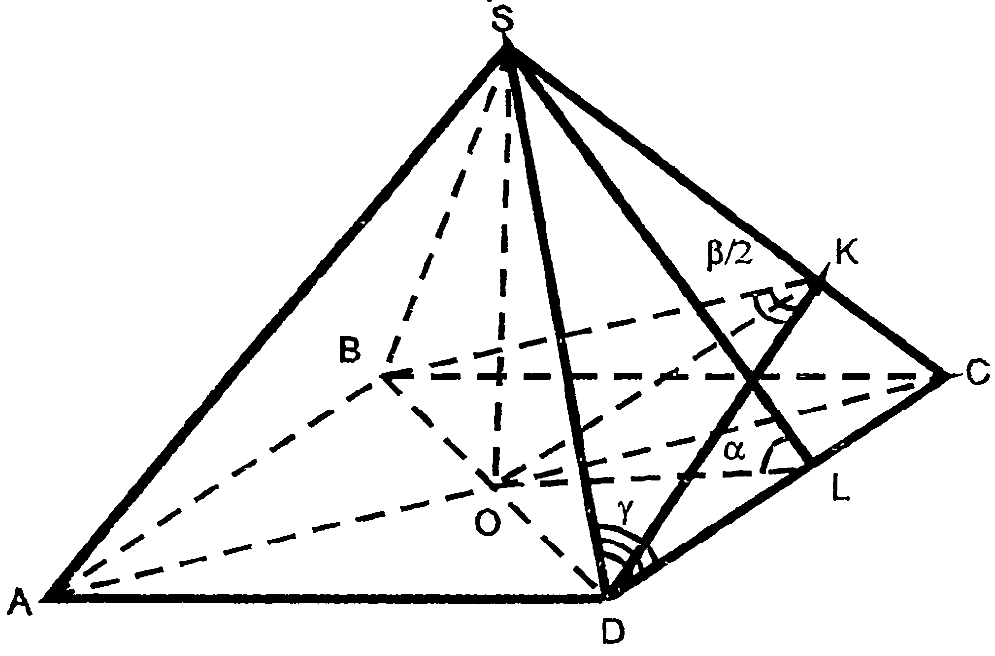


Рис. 26.1

Из треугольника SOL: $SL = \dfrac{a}{2\cos\alpha}$.

Из треугольника SDL: $SL = \dfrac{a}{2} \cdot \operatorname{tg}\varphi$, значит,

$$\operatorname{ctg}\varphi = \cos\alpha,$$

$$\sin^2\varphi\cos^2\alpha + \sin^2\varphi = 1. \qquad (1)$$

Найдем соотношение между углами β и φ.

Из треугольника OKD: $DK = \dfrac{a\sqrt{2}}{2\sin\dfrac{\beta}{2}}$.

Из треугольника DKC: $DK = a\sin\varphi$, значит,

$$\sqrt{2}\sin\frac{\beta}{2} = \frac{1}{\sin}\varphi. \qquad (2)$$

Учитывая (1): $\sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$, значит выражение (2) запишется так:

$$\sqrt{2}\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{1+\cos^2\alpha}\text{, отсюда}$$

$$2\sin^2\frac{\beta}{2} = 1+\cos^2\alpha\text{, или}$$

$$1-2\sin^2\frac{\beta}{2} = -\cos^2\alpha,\ \ \cos\beta = -\cos^2\alpha.$$

Так как по условию $\beta = 3\alpha$, то

$$\cos 3\alpha = -\cos^2\alpha.$$

Решим это уравнение, применив формулу тройного угла:

$$4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = -\cos^2\alpha,$$

$$\cos\alpha\,(4\cos^2\alpha + \cos\alpha - 3) = 0;$$

$$\cos\alpha = 0;\ \ \cos\alpha = \frac{3}{4};\ \ \cos\alpha = 1.$$

Учитывая условие, оставляем только $\cos\alpha = \dfrac{3}{4}$.

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4},\ \ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{\sqrt{7}}.$$

Находим $\dfrac{a}{2} = h\operatorname{ctg}\alpha$, $a = 2h\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{6h}{\sqrt{7}}$. Значит,

$$V = \frac{1}{3}ha^2 = \frac{12}{7}h^3.$$

Задача 2.

Разность между апофемой и высотой правильной четырехугольной пирамиды равна m, а угол между ними — α. Найти объем пирамиды.

Решение.

Пусть O — центр основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, а SK — апофема пирамиды.

Обозначим $SO = h$; $SK = l$ (рис. 26.2).

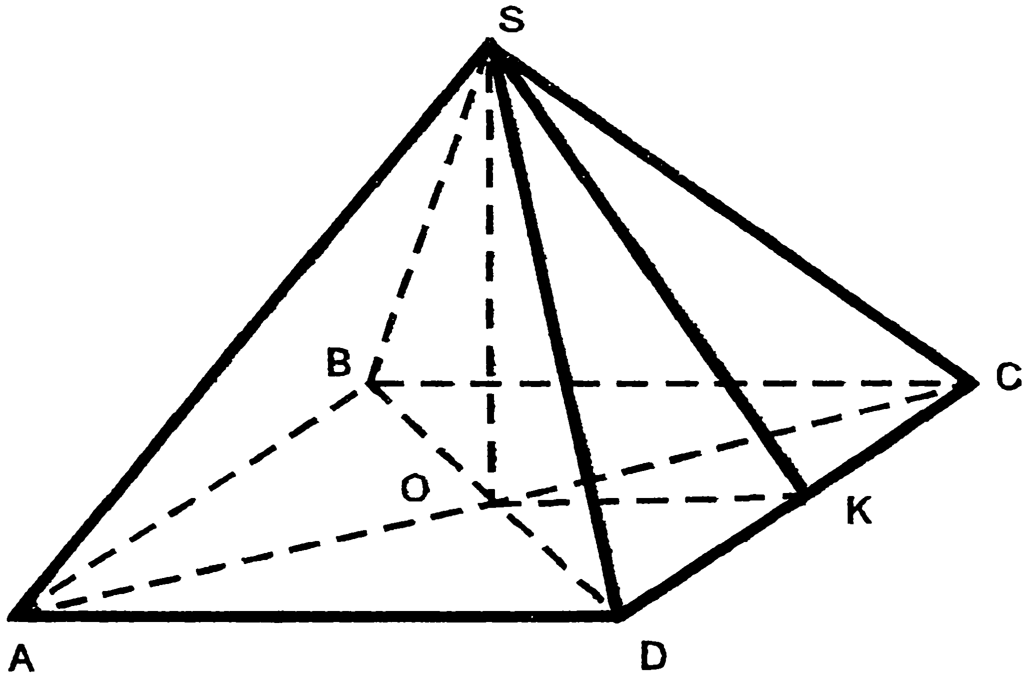


Рис. 26.2

Из треугольника SOK имеем:

$$h = l\cos\alpha.$$

Поскольку по условию $l - h = m$, то

$$h = \frac{m\cos\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

Из треугольника SOK:

$$OK = h\operatorname{tg}\alpha = \frac{m\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

Но $OK = \frac{1}{2}AD$, откуда

$$AD = \frac{2m\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

Пусть S — площадь основания пирамиды:

$$S = \frac{4m^2 \sin^2 \alpha}{(1-\cos\alpha)^2},$$

объем пирамиды

$$V = \frac{4}{3} m^3 \frac{\sin^2\alpha \cos\alpha}{(1-\cos\alpha)^3}.$$

Задача 3.

Определить углы, составляемые с основанием боковым ребром и боковой гранью правильной пятиугольной пирамиды, у которой боковые грани — равносторонние треугольники.

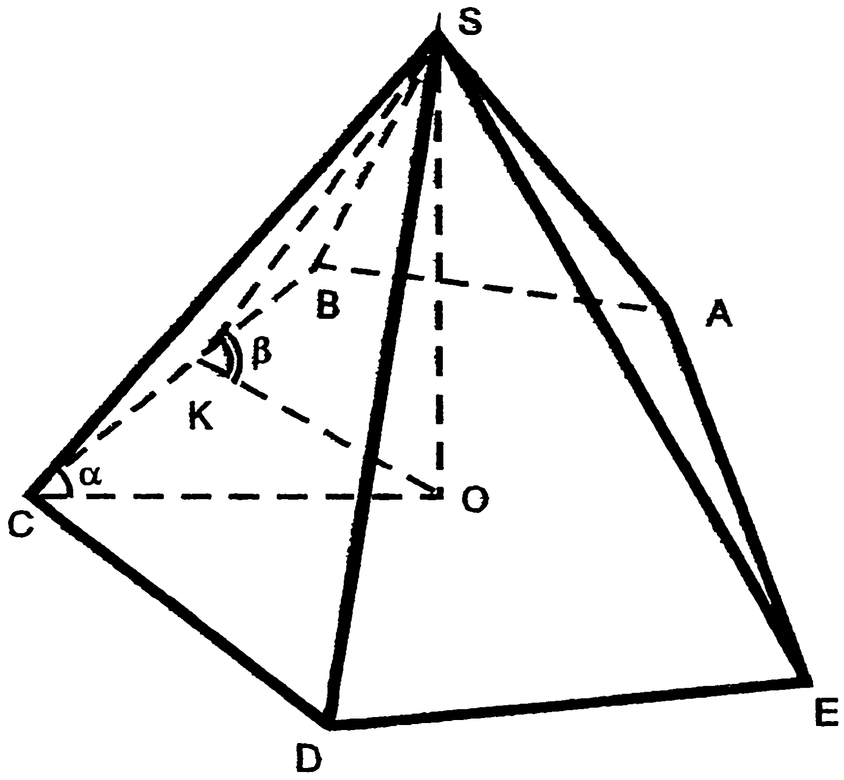


Рис. 26.3

Решение.

Пусть в заданной пирамиде с вершиной S и основанием $ABCDE$ (рис. 26.3) $SB = SC = a$.

Поскольку пирамида правильная, то ее вершина S проектируется в точку O — центр окружности, описанной около правильного пятиугольника $ABCDE$. Обозначим $\angle SCO = \alpha$. Из треугольника SCO:

$$\cos\alpha = \frac{OC}{SC}.$$

Проведем $OK \perp BC$. Поскольку $\angle COK = 36^\circ$, то

$$OC = \frac{a}{2\sin 36^\circ}, \text{ где } a = SC = SB, \text{ значит,}$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{a \cdot 2\sin 36^\circ} = \frac{1}{2\sin 36^\circ}.$$

Найдем угол $SKO = \beta$. Из треугольника SKO:

$$\cos\beta = \frac{OK}{SK} = \frac{2 \cdot a \operatorname{ctg} 36^\circ}{2a\sqrt{3}} = \frac{\operatorname{ctg} 36^\circ}{\sqrt{3}}.$$

Итак,

$$\alpha = \arccos\frac{1}{2\sin 36^\circ}; \quad \varphi = \arccos\frac{\operatorname{ctg} 36^\circ}{\sqrt{3}}.$$

Задача 4.

Определить угол наклна бокового ребра правильной n-угольной пирамиды к плоскости основания, если сторона основания равна a, объем пирамиды равен V.

Решение.

Пусть $SABCD...$ — часть n-угольной пирамиды (рис. 26.4). Обозначим $AB = BC = ... = a$. Пусть $OK \perp AB$. Тогда

$$OK = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}.$$

Пусть Q — площадь основания. Тогда

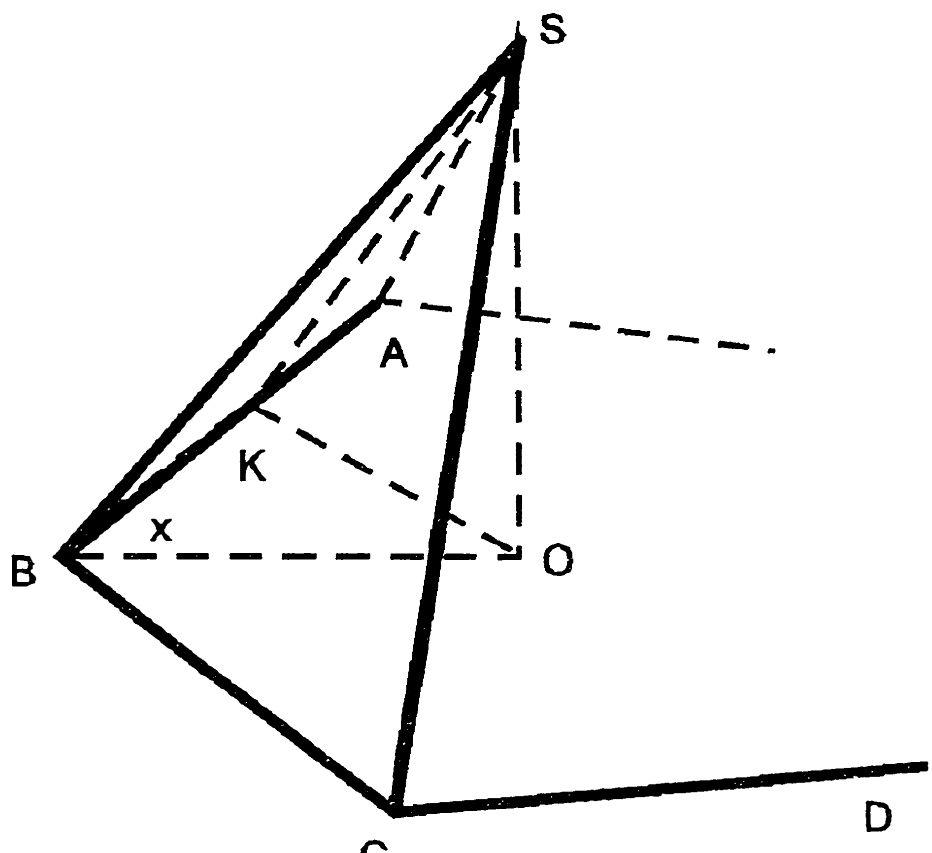


Рис. 26.4

$$Q = \frac{na}{2} \cdot \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{180°}{n} = \frac{na^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{180°}{n}.$$

Обозначим h — высоту пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} Qh, \text{ находим}$$

$$h = \frac{3V}{Q} = \frac{12V}{na^2} \operatorname{tg} \frac{180°}{n}.$$

Искомый угол $OBS = x$, имеем

$$\operatorname{tg} x = \frac{h}{OB}, \text{ где}$$

$$OB = \frac{a}{2 \sin \frac{180°}{n}}, \text{ значит,}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{24V \sin \frac{180°}{n} \operatorname{tg} \frac{180°}{n}}{na^3};$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{24V \sin \frac{180°}{n} \operatorname{tg} \frac{180°}{n}}{na^3}.$$

Задача 5.

Найти двугранный угол, образованый боковой гранью и основанием правильной треугольной усеченной пирамиды, если в нее можно вписать шар, касающийся всех ребер пирамиды.

Решение.

Пусть $AA_1BB_1CC_1$ — правильная усеченная треугольная пирамида (рис. 26.5). Так как существует сфера, касающаяся всех ее ребер, то

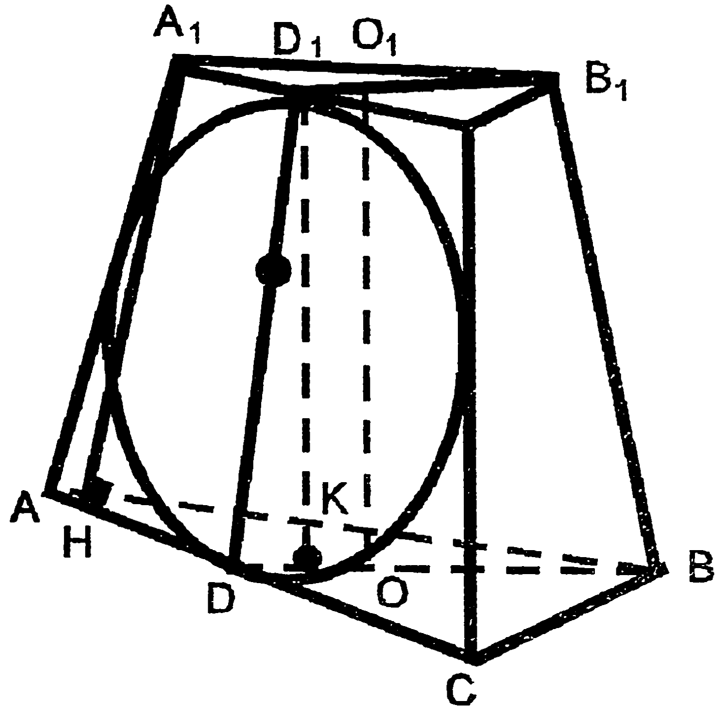


Рис. 26.5

в сечении этой сферы боковой гранью AA_1C_1C получаем окружность, вписанную в трапецию AA_1C_1C.

Введем вспомогательные отрезки $AC = a$, $A_1C_1 = b$. С помощью этих отрезков выразим двояко отрезок DD_1, где D и D_1 — середины сторон AC и A_1C_1. Пусть A_1H — высота трапеции AA_1C_1C. Тогда

$$A_1H = \sqrt{AA_1^2 - AH^2}.$$

Учитывая, что $AA_1 + CC_1 = AC + A_1C_1$, имеем

$$A_1H = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}.$$

Поскольку $A_1H = DD_1$, то

$$DD_1 = \sqrt{ab}. \qquad (1)$$

Рассмотрим далее сечение пирамиды плоскостью DD_1B_1B. Этому сечению принадлежат центры оснований пирамиды O и O_1. Кроме того, плоскость сечения пересекает вписанную в пирамиду сферу по окружности, которая касается прямых BD, B_1D_1 и DD_1 соответственно в точках O, O_1 и E. Так как касательные к окружности, проведенные из одной точки равны, то

$$DD_1 = DE + ED_1 = DO + D_1O_1.$$

Но $DO = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; $D_1O_1 = \frac{b\sqrt{3}}{6}$, значит,

$$DD_1 = \frac{(a+b)\sqrt{3}}{6}. \qquad (2)$$

Пусть D_1K — высота пирамиды. Из прямоугольного треугольника DD_1K имеем:

$$D_1K = \sqrt{DD_1^2 - DK^2}.$$

Но $DD_1 = \frac{(a+b)\sqrt{3}}{6}$,

$$DK = DO_1 - D_1O_1 = \frac{(a-b)\sqrt{3}}{6}, \text{ значит,}$$

$$D_1K = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{12} - \frac{(a-b)^2}{12}} = \sqrt{\frac{ab}{3}}.$$

Найдем $\sin \angle D_1DK$ из прямоугольного треугольника D_1DK:

$$\sin \angle D_1DK = \frac{D_1K}{DD_1} = \frac{\sqrt{\frac{ab}{3}}}{\frac{(a+b)\sqrt{3}}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Задача 6.

Прямой двугранный угол пересечен плоскостью, которая образует с каждой гранью угол α. Найти угол между линиями пересечения этой плоскости с гранями двугранного угла.

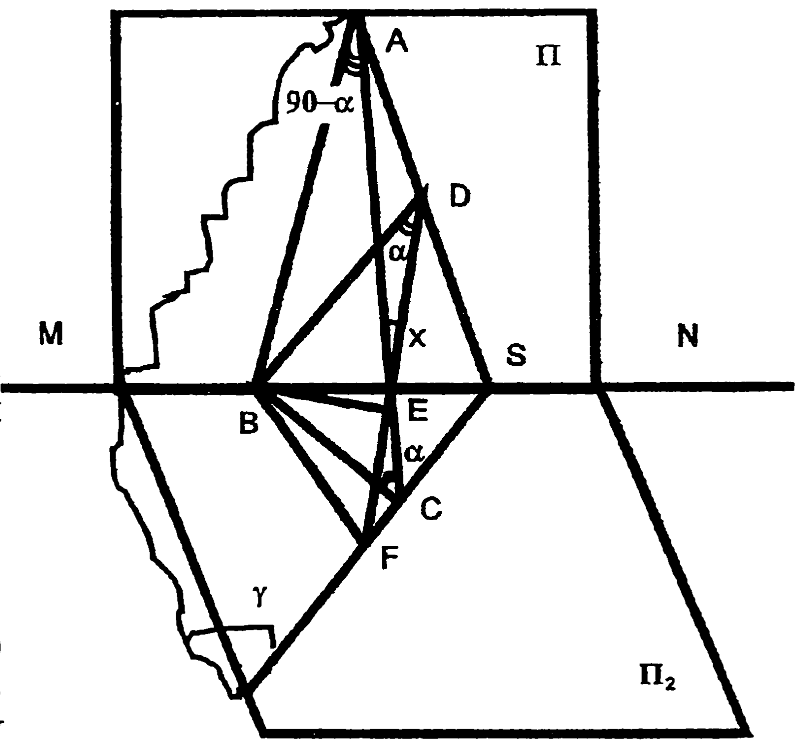


Рис. 26.6

Решение.

Пусть π_1 и π_2 — грани двугранного угла с общим ребром — прямой MN (рис. 26.6). На ребре MN возьмем точку B и построим перпендикуляры BA и BF к плоскостям π_1 и π_2.

Поскольку двугранный угол прямой, то эти перпендикуляры принадлежат плоскостям π_1 и π_2. Пусть AS и FS — линии пересечения плоскости φ с плоскостями π_1 и π_2. Построим линейные углы BCA и BDF. По условию они равны α.

Требуется найти $\angle ASF = x$. Поскольку $AC \perp FS$ и $FD \perp AS$, то $\angle AED = x$, где E — точка пересечения отрезков AC и FD. Плоскости ABC и FBD перпендикулярны к плоскости φ, следовательно, линия их пересечения BE перпендикулярна к плоскости φ.

Из треугольника AED:

$$\cos AED = \cos x = \frac{ED}{AE}.$$

Пусть $BE = a$. Из треугольника BED:

$$ED = a \operatorname{ctg} \alpha.$$

Из треугольника BEA:

$$AE = a \operatorname{ctg} (90° - \alpha) = a \operatorname{tg} \alpha.$$

Значит, $\cos x = \dfrac{a \operatorname{ctg} \alpha}{a \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{ctg}^2 \alpha;$

$$x = \arccos \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

Задача 7.

Найти объем треугольной пирамиды, если площади ее граней равны S_0, S_1, S_2, S_3 и двугранные углы, принадлежащие к грани с площадью S_0, равны между собой.

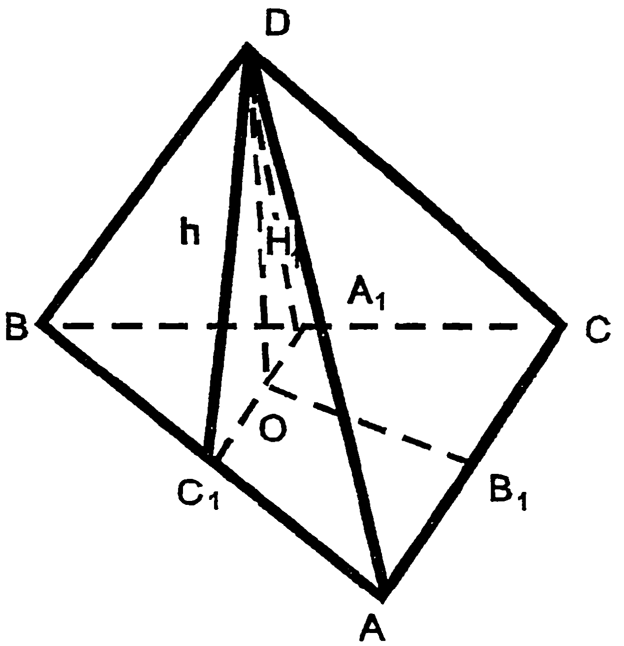


Рис. 26.7

Решение.

Примем грань с площадью S_0 за основание ABC данной пирамиды $ABCD$. Пусть DO — высота пирамиды, DA_1, DB_1, DC_1 — высоты боковых граней (рис. 26.7).

Обозначим $DO = H$, $DC_1 = DA_1 = DB_1 = h$,

$$OC_1 - OA_1 = OB_1 = r, \ S_1 + S_2 + S_3 = S.$$

$$V = \frac{1}{3} S_0 H, \tag{1}$$

$$H = \sqrt{h^2 - r^2}\,, \tag{2}$$

$$p = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) = \frac{S_3}{h} + \frac{S_1}{h} + \frac{S_2}{h} = \frac{S}{h};$$

$$p - AB = \frac{S}{h} - \frac{2S_3}{h} = \frac{S - 2S_3}{h};$$

$$p - BC = \frac{S - 2S_1}{h}; \quad p - AC = \frac{S - 2S_2}{h};$$

и по формуле Герона:

$$S_0^2 = p(p - AB)(p - BC)(p - AC) = \frac{S(S - 2S_1)(S - 2S_2)(S - 2S_3)}{h^4},$$

отсюда

$$h = \frac{\sqrt[4]{S(S - 2S_1)(S - 2S_2)(S - 2S_3)}}{\sqrt{S_0}}. \qquad (3)$$

Далее $S_0 = pr = \frac{S}{h}r$, откуда $r = h \cdot \frac{S_0}{S}$.

Подставив в (2), имеем

$$H = \sqrt{h^2 - h^2 \cdot \frac{S_0^2}{S^2}} = \frac{h}{S}\sqrt{S^2 - S_0^2}.$$

Подставив сюда значение h из (3) и внеся этот результат в (1), получим

$$V = \frac{1}{3}\sqrt{S_0(S^2 - S_0^2)}\sqrt[4]{\frac{(S - 2S_1)(S - 2S_2)(S - 2S_3)}{S_3}}.$$

Задача 8.

Найти плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды, если центры шара, вписанного в эту пирамиду, и шара, описанного около нее, совпадают.

Решение.

Пусть в пирамиде $SABCD$ H — центр основания, O — центр вписанной и описанной сферы, $HK \perp DC$. Обозначим (рис. 26.8). $AD = 2a$, $OS = OC = R$, $OH = OE = r$.

E — точка касания вписанной сферы и грани SDC, R и r — радиусы вписанной и описанной сферы. Искомый угол $DSC = x$.

Треугольники SOE и COH равны, следовательно, $SE = HC = a\sqrt{2}$. Так как треугольники OEK и OHK равны, то $EK = HK = a$. Значит,

$$SK = SE + EK =$$

$$= a\sqrt{2} + a =$$

$$= a(\sqrt{2} + 1),$$

и из треугольника SKC:

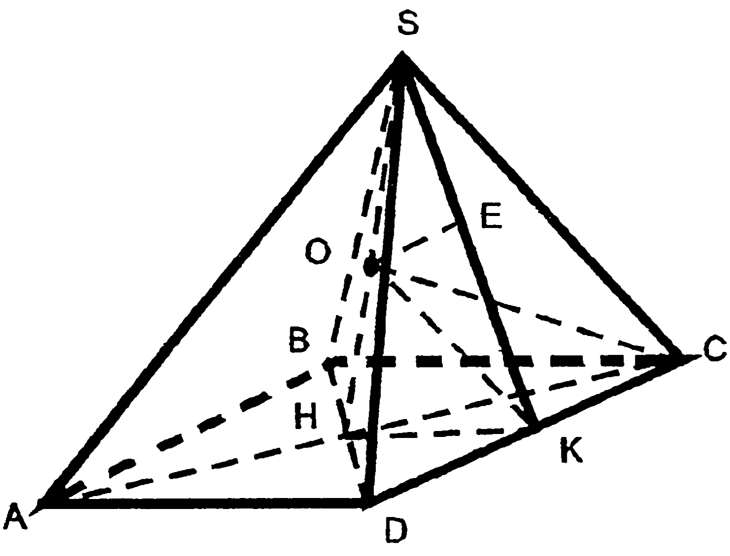


Рис. 26.8

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{KC}{SK} =$$

$$= \frac{a}{a(\sqrt{2} + 1)} = \sqrt{2} - 1.$$

Отсюда $\frac{x}{2} = 22°30'$, $x = 45°$.

Задача 9.

Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доказать, что

$$AC_1^2 = AC^2 + AB_1^2 + AD_1^2 - (AB^2 + AD^2 + AA_1^2).$$

Доказательство.

Первый способ.

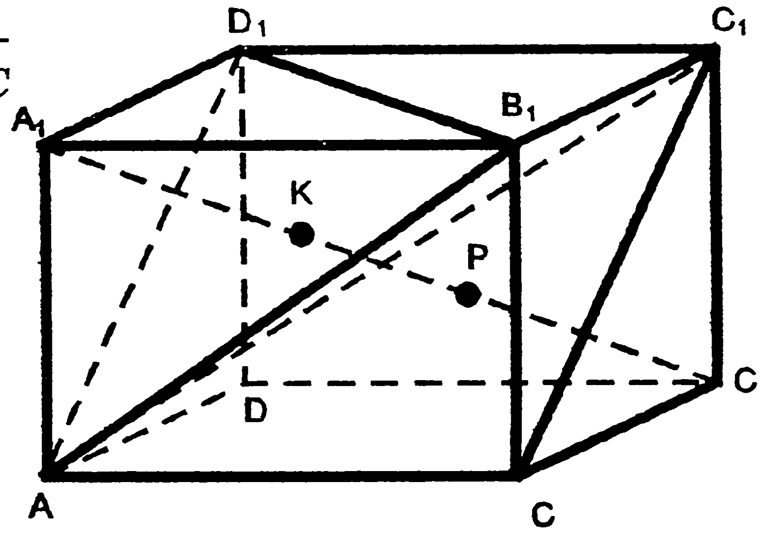
Из параллелограммов AB_1C_1D и AA_1C_1C (рис. 26.9) имеем:

$$AC_1^2 + B_1D^2 =$$

$$= 2\,AB_1^2 + 2\,AD^2;$$

$$AC_1^2 + A_1C^2 =$$

$$= 2\,AC^2 + 2\,AA_1^2,$$



откуда

Рис. 26.9

$$2\,AC_1^2 = 2\,(AB_1^2 + AD^2 + AC^2 + AA_1^2) - (B_1D^2 + A_1C^2).$$

Из параллелограммов A_1B_1CD и AA_1D_1D:

$$B_1D^2 + A_1C^2 = 2\,A_1B_1^2 + 2\,A_1D^2 =$$

$$= 2\,AB^2 + 2\,(2\,AA_1^2 + 2\,AD^2 - AD_1^2).$$

Подставляя эту сумму в выражение для $2\,AC_1^2$, получим треубемое равенство.

Второй способ.

Имеем векторные равенства

$$\overline{AC_1} = \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA_1},$$

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD},\quad \overline{AB_1} = \overline{AB} + \overline{AA_1},\quad \overline{AD_1} = \overline{AD} + \overline{AA_1}.$$

Тогда правая часть доказываемого равенства равна

$$(\overline{AB} + \overline{AD})^2 + (\overline{AB} + \overline{AA_1})^2 + (\overline{AD} + \overline{AA_1})^2 -$$

$$- (\overline{AB}^{\,2} + \overline{AD}^{\,2} + \overline{AA}_1^{\,2}) = AB^2 + AD^2 + AA_1^2 + 2\,\overline{AB}\cdot\overline{AD} +$$

$$+ 2\,\overline{AB}\cdot\overline{AA_1} + 2\,\overline{AD}\cdot\overline{AA_1} = \overline{AC}_1^{\,2} = AC_1^2.$$

Задача 10.

Доказать, что не существует многогранника с нечетным числом граней, все грани которого являются многоугольниками с нечетным числом сторон.

Доказательство.

Пусть многогранник имеет l ребер и m граней, причем число сторон в гранях $n_1, n_2, \dots, n_m$. Так как каждое ребро является общей стороной двух смежных граней, то ребер у многогранника в два раза меньше числа всех сторон всех его граней, т.е.

$$n_1 + n_2 + \dots + n_m = 2l.$$

Но это равенство невозможно, если все числа $n_1, n_2, \dots, n_m$ будут нечетными и число их нечетно, так как тогда сумма таких чисел дает нечетное число, в то время как $2l$ — четное.

Задача 11.

Доказать, что в прямоугольном параллелепипеде кратчайшее расстояние между скрещивающимися диагоналями смежных граней не превышает трети диагонали.

Доказательство.

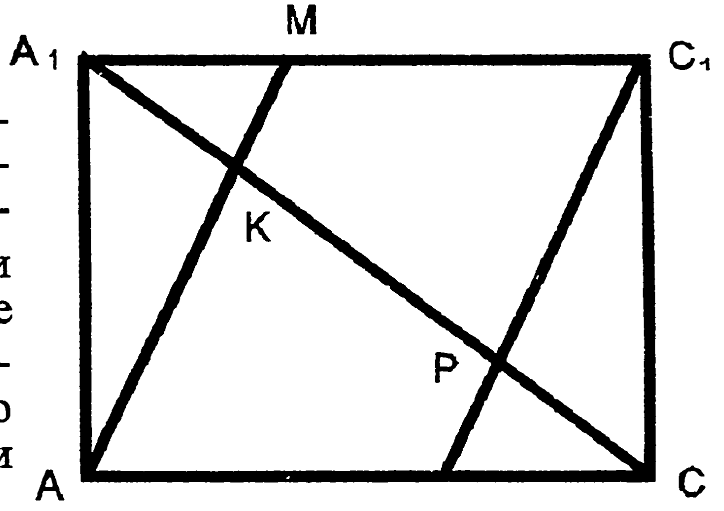


Рис. 26.10

Рассмотрим прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Проведем в нем плоскости AB_1D_1 и DBC_1. Расстояние между этими плоскостями равно расстоянию между диагоналями AB_1 и BC_1 двух смежных граней. Это следует из того, что построенные плоскости параллельны и содержат указанные диагонали. Пусть указанные плоскости пересекают диагональ A_1C в точках K и P (рис. 26.9). Расстояние между этми плоскостями не больше KP. Легко показать, что $KP = \frac{1}{3}A_1C$. Для этого рассмотрим сечение параллелепипеда ACC_1A_1 (рис. 26.10). Поскольку AK проходит через M — середину A_1C_1, то $\frac{A_1K}{KC} = \frac{A_1M}{AC} = \frac{1}{2}$, т.е. $A_1K = \frac{1}{3}A_1C$, а значит, и $KP = \frac{1}{3}A_1C$ и искомое расстояние не превосходит $KP = \frac{1}{3}A_1C$.

Задача 12.

Дана правильная четырехугольная призма, сторона которой равна 6, а боковые ребра — 10. Определить площадь части боковой поверхности призмы, вырезанной шаром, касающимся верхнего и нижнего оснований призмы в их центрах.

Решение.

Площадь искомой части боковой поверхности призмы $S = 4S_1$, где S_1 — часть площади круга радиуса O_1B, состоящая из прямоугольника $ABCD$ и двух сегментов BmD и AnC. Таким образом,

$$S = 4S_1 = 4\,(AB \cdot AC + 2S_{сегм.} \cdot AnC).$$

Диаметр шара равен высоте призмы, следовательно, радиус шара $OA = 5$. Через BD и AC проведем плоскости, параллельные основаниям призмы. В сечении получатся квадраты со стороной 6, отстоящие от оснований призмы на расстояния, равные KM (рис. 26.11).

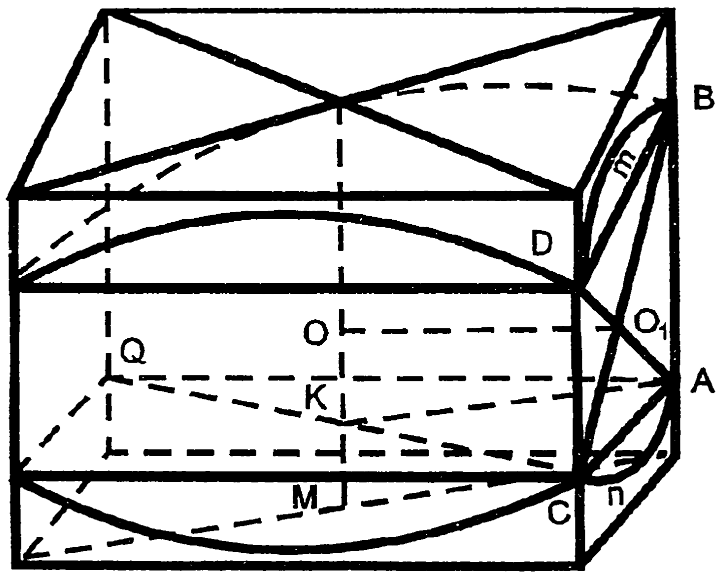


Рис. 26.11

Диагональ квадрата $ACPQ$ равна $6\sqrt{2}$, когда $AK = 3\sqrt{2}$. Из ΔAOK: $OK = \sqrt{OA^2 - AK^2} = \sqrt{7}$;

$$KM = OM - OK = 5 - \sqrt{7};\quad AB = 10 - 2KM = 2\sqrt{7}.$$

Из ΔABC $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 8$, тогда

$$O_1C = \frac{1}{2}BC = 4;\quad \angle AO_1C = 2\arcsin\frac{3}{4};$$

$$S_{сект.AO_1Cn} = \frac{\pi \cdot O_1C^2 \cdot 2\arcsin\frac{3}{4}}{2\pi} = 16\arcsin\frac{3}{4};$$

$$S_{\Delta AO_1C} = \frac{1}{2}AC \cdot \frac{1}{2}AB = 3\sqrt{7};$$

$$S_{сегм.AnC} = S_{сект.AO_1Cn} - S_{\Delta AO_1C} = 16\arcsin\frac{3}{4} - 3\sqrt{7}.$$

Тогда $S = 8\left(16\arcsin\frac{3}{4} + 3\sqrt{7}\right)$.

Ответ: $8\left(16\arcsin\frac{3}{4} + 3\sqrt{7}\right)$ кв.ед.,

где $\arcsin\frac{3}{4}$ — в радианах.

Задача 13.

Основанием пирамиды служит параллелограмм $ABCD$. Через сторону AB и середину K бокового ребра проведена плоскость. Найти отношение объемов получившихся частей.

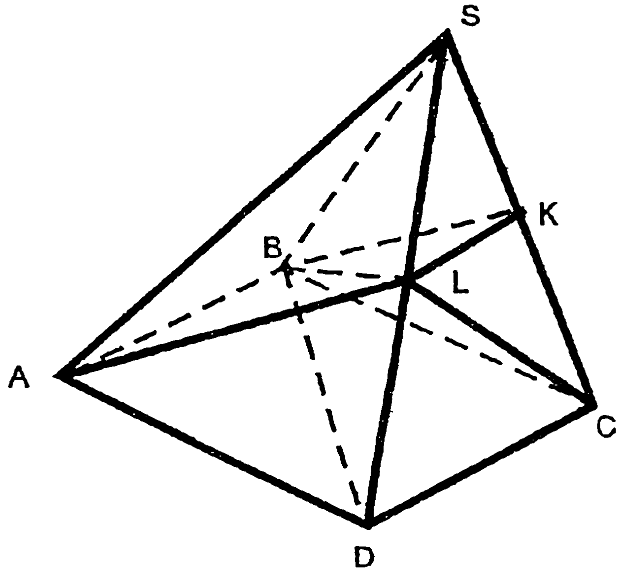


Рис. 26.12

Решение.

Сечение $ABKL$ — трапеция (доказать!)

$KL = \frac{1}{2}CD$ (рис. 26.12). Пусть $S_{ABKL} = S_0$.

Длины перпендикуляров, опущенных из точек S, C, D на плоскость сечения, равны. Пусть длина перпендикуляра равна p. Имеем:

$$V_{SABKL} = \frac{1}{3}S_0 \cdot p; \quad S_{ABKL} = S_0 = S_{\Delta ABL} + S_{\Delta BKL};$$

$$S_{\Delta ABL} = 2 \cdot S_{\Delta BKL}; \quad V_{ABCDKL} = V_{ABDL} + V_{BCDL} + V_{CBKL};$$

$$S_{\Delta ABL} = \frac{2}{3}S_0; \quad S_{\Delta BKL} = \frac{1}{3}S_0; \quad V_{CBKL} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}S_0 \cdot p = \frac{1}{9}S_0 \cdot p;$$

$$V_{BCDL} = V_{ABDL} = V_{DABL} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}S_0 \cdot p;$$

$$V_{ABCDKL} = \frac{5}{9}S_0 \cdot p.$$

Отсюда отношение объема верхней части пирамиды к объему нижней равно $\frac{3}{5}$.

Ответ: $\frac{3}{5}$.

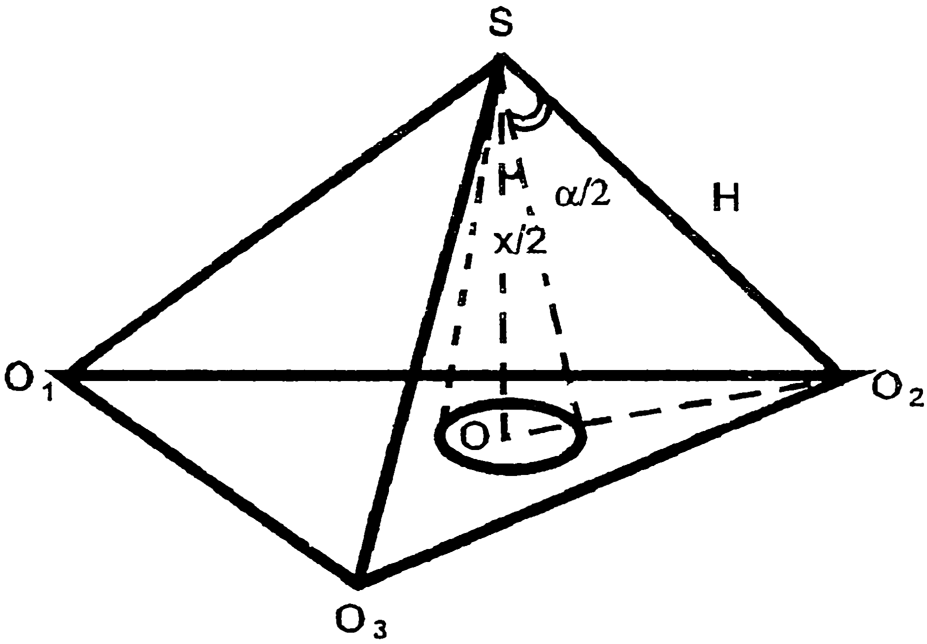


Рис. 26.13

Задача 14.

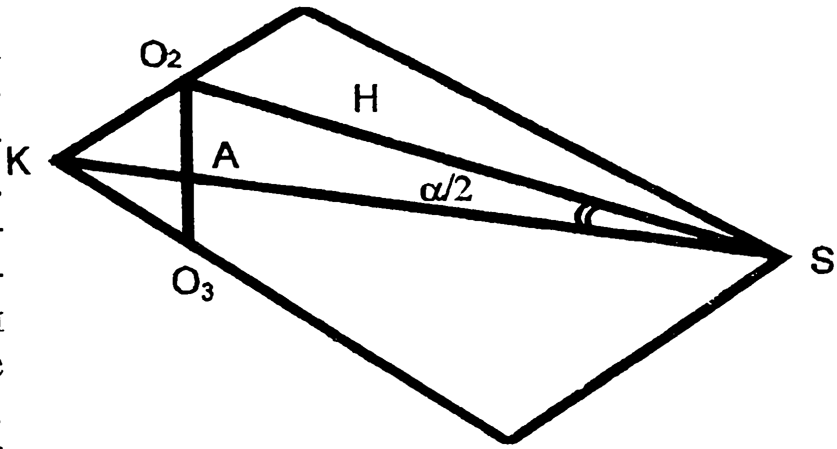


Рис. 26.14

Три равных конуса имеют общую вершину и касаются друг друга. Кроме того, имеются еще два конуса — внутренний и внешний, которые расположены так, что каждый из них касается первых трех. Определить угол в осевых сечениях этих конусов, если угол в осевом сечении каждого из данных конусов равен α.

Решение.

Обозначим через O_1, O_2, O_3 центры оснований данных конусов, через H — их высоты (рис. 26.13). Пусть точка O — центр треугольника $O_1O_2O_3$. Имеем (рис. 26.14):

$$AO_2 = H\sin\frac{\alpha}{2};\quad O_1O_2 = O_2O_3 = O_1O_3 = 2H\sin\frac{\alpha}{2};$$

$$OO_2 = \frac{2}{3}\cdot O_1O_2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}H\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Если через x обозначим угол в осевом сечении внутреннего конуса, касающегося трех данных конусов внешним образом, то

$$\sin\frac{x+\alpha}{2} = \frac{OO_2}{H} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\alpha}{2}, \text{ откуда}$$

$$x = 2\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\alpha}{2}\right) - \alpha.$$

Уже в осевом сечении внешнего конуса, касающегося трех данных конусов внутренним образом,больше угла осевого сечения внутреннего конуса на 2α. Значит, этот угол равен

$$2\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\alpha}{2}\right) + \alpha.$$

Ответ: $2\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\alpha}{2}\right) + \alpha.$

Задача 15.

Доказать, что сечение параллелепипеда плоскостью не может быть правильным пятиугольником.

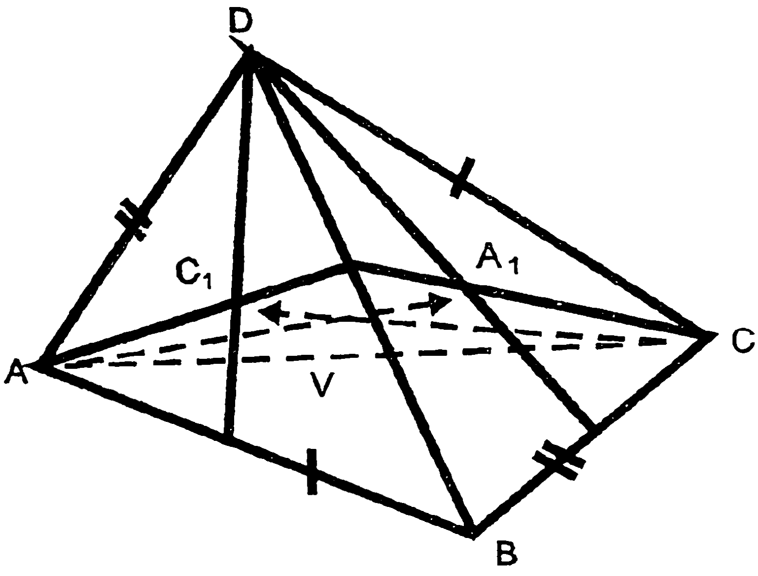


Рис. 26.15

Доказательство.

Если бы плоскость пересекла все боковые ребра параллелепипеда и одно основание, то две стороны образовавшегося пятиугольника были бы параллельными между собой, чего нет в правильном пятиугольнике.

Задача 16.

Противоположные ребра тетраэдра $ABCD$ попарно равны: $AB = DC = c$, $BC = DA = a$, $AC = DB = b$. Доказать, что это является необходимым и достаточным условием, чтобы медианы AA_1 и CC_1 тетраэдра были перпендикулярны (A_1 и C_1 — точки пересечения медиан граней BCD и DAB). Привести одно решение при помощи векторов, другое — без применения векторов.

Доказательство. Первый способ.

Имеем (рис. 26.15):

$$\overline{AA_1} = \frac{1}{3}(\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD}),$$

$$\overline{CC_1} = \overline{AC_1} - \overline{AC} = \frac{1}{3}(\overline{AB} + \overline{AD}) - \overline{AC}.$$

Следовательно,

$$9\,\overline{AA_1} \cdot \overline{CC_1} = (\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD})(\overline{AB} + \overline{AD} - 3\,\overline{AC}),\ \text{или}$$

$$9\,\overline{AA_1} \cdot \overline{CC_1} = (\overline{AB} + \overline{AD})^2 - 2\,(\overline{AB} + \overline{AD}) \cdot \overline{AC} - 2\,\overline{AC}^{\,2}.$$

Отсюда

$$9\,\overline{AA_1} \cdot \overline{CC_1} = c^2 + a^2 + a^2 + c^2 - b^2 -$$

$$- (b^2 + c^2 - a^2) - (a^2 + b^2 - c^2) - 3b^2,\ \text{или}$$

$$9\,\overline{AA_1} \cdot \overline{CC_1} = 2\,(a^2 + c^2 - 3b^2).$$

Медианы AA_1 и CC_1 перпендикулярны тогда и только тогда, когда $\overline{AA_1} \cdot \overline{CC_1} = 0$, или когда $a^2 + c^2 = 3b^2$.

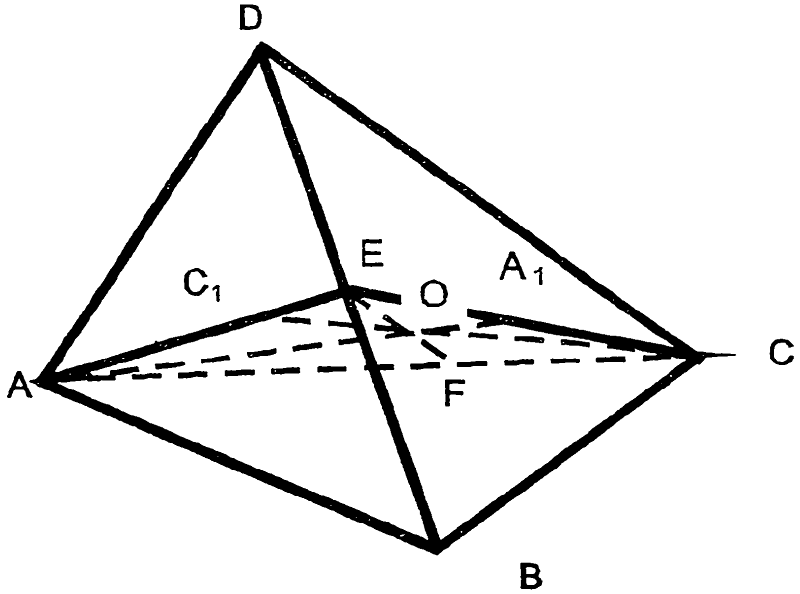


Рис. 26.16

Второй способ.

Выразим длинв медиан треугольников через длины их сторон (рис. 26.16):

$$AE^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}, \quad CE^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4},$$

$$EF^2 = \frac{AE^2 + CE^2}{2} - \frac{b^2}{4}, \text{ тогда}$$

$$EF^2 = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}.$$

Далее заметим, что точка O — пересечения медиан делит EF пополам. Но треугольник AOC равнобедренный, поэтому $OA \perp OC$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{a^2 + c^2 - b^2}{8} = \frac{b^2}{4}, \text{ т.е. когда } a^2 + c^2 = 3b^2.$$

Задача 17.

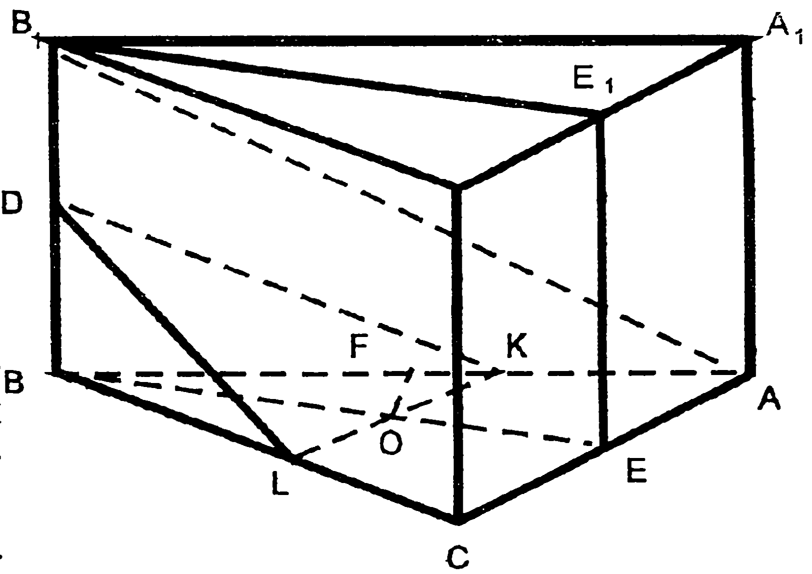


Рис. 26.17

В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ $AB_1 = d$ и $\angle AB_1B = \alpha$. На прямой, являющейся пересечением плоскости ABC и плоскости симметрии призмы, содержащей прямую BB_1, взята точка O, которая удалена на одинаковое расстояние от точек A, B и C. Через точку O параллельно прямой A_1C_1 проведена плоскость, пересекающая отрезок BB_1 в точке D, причем $B_1D : DB = 1 : 2$. Определите площадь сечения призмы этой плоскостью, если известно, что $\angle ABC = \beta$.

Решение.

Поскольку в призме имеется плоскость симметрии, проходящая через BB_1, то $BC = BA$. По условию $AB_1 = d$, $\angle AB_1B = \alpha$. Из условия следует, что O — центр окружности, описанной около ΔABC, $O \in BE$, $BE \perp AC$, $CE = AE$, $B_1D : DB = 1 : 2$, $AB = d \sin\alpha$, $BB_1 = d \cos\alpha$ (рис. 26.17). Значит, $BD = \frac{2}{3} d \cos\alpha$. Проводим $OF \perp AB$. Тогда $OB = OA$ как радиусы описанной около треугольника ABC окружности. $BF = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} d \sin\alpha$; в треугольнике BOF

$$OB = \frac{BF}{\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{d \sin\alpha}{2\cos\frac{\beta}{2}};$$

в треугольнике OBK

$$OK = OB \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{d\sin\alpha}{2\cos\frac{\beta}{2}} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2};$$

$$KL = 2 \cdot OK = \frac{d\sin\alpha}{\cos\frac{\beta}{2}} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.$$

В треугольнике BDO

$$DO = \sqrt{BD^2 + OB^2} = \sqrt{\frac{4}{9} d^2\cos^2\alpha + \frac{d^2\sin^2\alpha}{4\cos^2\frac{\beta}{2}}};$$

$$S_{\Delta OKL} = \frac{1}{2} KL \cdot DO = \frac{1}{2} \frac{d\sin\alpha}{\cos\frac{\beta}{2}} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{4}{9} d^2\cos^2\alpha + \frac{d^2\sin^2\alpha}{4\cos^2\frac{\beta}{2}}} =$$

$$= \frac{d^2\sin^2\alpha \sin\frac{\beta}{2}}{12\cos^3\frac{\beta}{2}} \sqrt{16\operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\frac{\beta}{2} + 9}.$$

Задача 18.

В кубе с ребром a проведено сечение, проходящее через центр куба и середины двух ребер куба, выходящих из одной вершины. Вычислить площадь полученного сечения.

Решение.

В сечении получается правильный шестиугольник $EFKLMN$ (рис. 26.18).

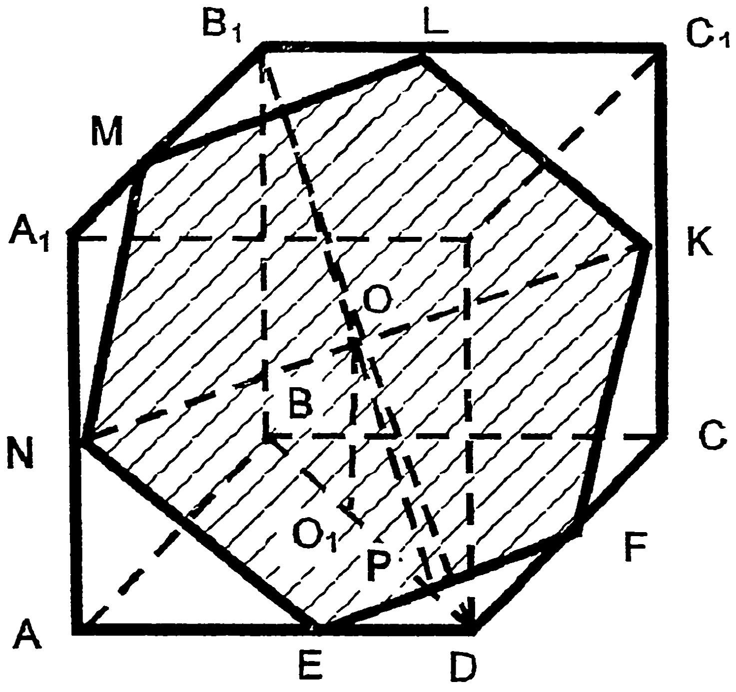


Рис. 26.18

$$S_{сеч.} = 2\,S_{EFKN} =$$

$$= 2 \cdot \frac{NK + EF}{2} \cdot OP;$$

$$KN = a\sqrt{2},$$

$$EF = \frac{1}{2}a\sqrt{2}.$$

В треугольнике OO_1P $OO_1 \perp BD$,

$$OO_1 = \frac{a}{2},\ O_1P = \frac{1}{4}a\sqrt{2};$$

$$OP = \sqrt{OO_1^2 + O_1P^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{2a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{6}}{4};$$

$$S_{сеч.} = \frac{a\sqrt{2} + \frac{1}{2}a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Задача 20.

Все плоские углы при вершине треугольной пирамиды прямые. Доказать, что отношение площади боковой поверхности этой пирамиды (т.е. сумма площадей трех граней, содержащих указанную вершину) к площади основания не превосходит $\sqrt{3}$.

Доказательство.

Пусть P, Q, R — площади боковых граней данной пирамиды, а S — площадь ее основания. Для пирамид рассматриваемого вида справедливо равенство $P^2 + Q^2 + R^2 = S^2$. Докажем его.

Пусть α, β, γ — двугранные углы при основании этой пирамиды. Поскольку боковые грани можно рассматривать как проекции основания пирамиды, то

$$P = S\cos\alpha, \quad Q = S\cos\beta, \quad R = S\cos\gamma$$

С другой стороны,

$$S = p\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma = \frac{P^2}{S} + \frac{Q^2}{S} + \frac{R^2}{S},$$

откуда $S^2 = P^2 + Q^2 + R^2$.

Теперь утверждение задачи следует из доказанного равенства и неравенства

$$R + P + Q \leqslant \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} \cdot \sqrt{3} = S\sqrt{3}.$$

Задача 21.

Все плоские углы при вершине D пирамиды $ABCD$ прямые; $DA = a$, $DB = b$, $DC = c$ $(a \leqslant b \leqslant c)$. Через D проведена прямая l. Чему равно наименьшее значение суммы расстояний от точек A, B, C до прямой l?

Решение.

Пусть x, y и z — синусы углов, образованных прямой l с прямыми DA, DB и DC соответственно. Поскольку сумма квадратов косинусов этих углов равна 1, то $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Таким образом, нам надо найти наименьшее значение выражения $ax + by + cz$ при условии $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

Докажем, что искомый минимум равен $a + b$ и достигается, если l совпадает с прямой DC. Поскольку

$$x + y + z \geqslant x^2 + y^2 + z^2 = 2 \quad (x \geqslant x^2,\ y \geqslant y^2,\ z \geqslant z^2),$$

то $y + z - 1 \geqslant 1 - x$.

Обе части последнего неравенства неотрицательны. Следовательно, тем более $b(y + z - 1) \geqslant a(1 - x)$, откуда

$$a + b \leqslant ax + by + bz \leqslant ax + by + cz,$$

что и требовалось доказать.

Задача 22.

Найти наименьшее значение периметра пространственного четырехугольника, вершины которого расположены по одной на гранях правильного тетраэдра с ребром 1.

Решение.

Докажем сначала одно вспомогательное утверждение:

Пусть P и Q середины отрезков EF и GM (расположенных в пространстве). Тогда имеет место неравенство:

$$PQ \leqslant \frac{1}{2}(FG + EH).$$

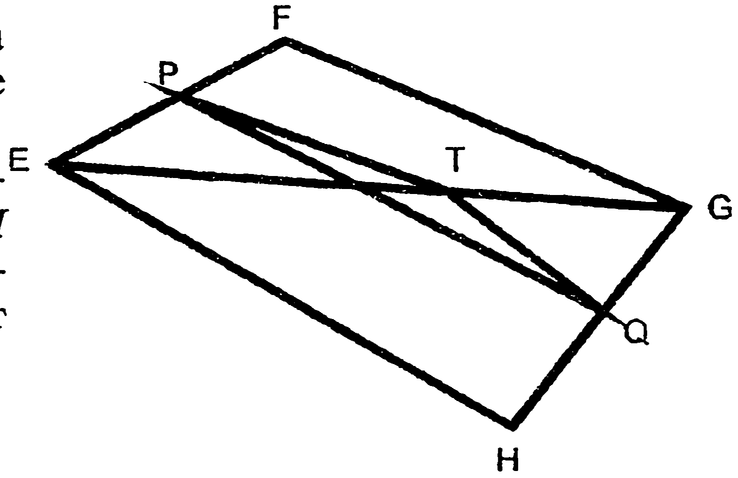


Рис. 26.19

Доказательство.

Пусть T — середина EG, тогда (рис. 26.19)

$$PQ \leqslant PT + TQ = \frac{1}{2}FG + \frac{1}{2}EH.$$

Перейдем теперь к нашей задаче.

Рассмотрим тетраэдр $ABCD$ с ребром a. Пусть вершины четырехугольника $KLMN$ последовательно расположены на гранях ABD, BDC, ABC и ACD. Рассмотрим точки K_1, L_1, M_1 и N_1, симметричные K, L, M и N относительно плоскости DEC, где E — середина AB. Понятно, что точки K_1 и M_1 останутся на тех же гранях, что и точки K и M (ABD и ABC соответственно), а N_1 будет на грани CBD, L_1 — на грани ACD. Периметр четырехугольника $K_1L_1M_1N_1$ равен периметру $KLMN$ (рис. 26.20).

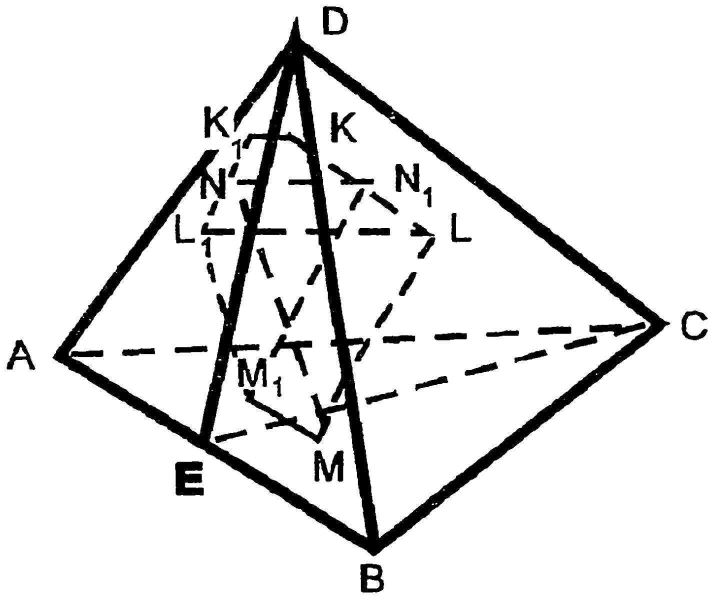


Рис. 26.20

Пусть K_2, L_2, M_2 и N_2 соответственно середины KK_1, N_1L, MM_1 и L_1N. В соответствии с доказанным утверждением периметр $K_2L_2M_2N_2$ не превосходит периметра исходного четырехугольника $KLMN$. При этом две его вершины K_2 и M_2 лежат на медианах DE и CE соответствующих граней.

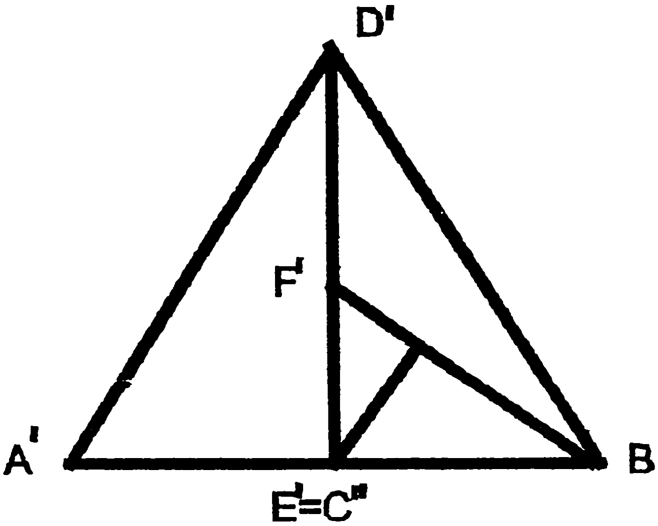


Рис. 26.21

Отразив теперь вершины последнего четырехугольника ($K_2L_2M_2N_2$) относительно плоскости ABF, где F — середина DC и, взяв середины соответствующих отрезков, мы прийдем к четырехугольнику $K_4L_4M_4N_4$, все вершины которого последовательно расположены на отрезках DE, BF, CE и AF, периметр которого не превосходит периметра исходного четырехугольника. Таким образом, наименьший периметр равен учетверенному расстоянию между прямыми CE и BF.

Для нахождения расстояния между CE и BF спроектируем наш тетраэдр на плоскость, перпендикулярную CE (рис. 26.21). Расстояние между CE и BF равно расстоянию от E' до $B'F'$ (F' — середина $E'D'$, $E'D' = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ — высота тетраэдра). В прямоугольном треугольнике $F'E'B'$ известны катеты $E'F' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$, $B'E' = \frac{a}{2}$. Высота к гипотенузе $B'F'$ равна

$$\frac{E'F' \cdot E'B'}{F'B'} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{a}{2}}{\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{4}}} = \frac{a}{\sqrt{10}}.$$

Наименьший периметр равен $\frac{4a}{\sqrt{10}}$.

Задача 23.

Основанием пирамиды служит прямоугольник с углом α между диагоналями. Боковые ребра образуют с плоскостью основания угол φ. Определить объем пирамиды, если радиус описанного шара равен R.

Решение.

Пусть центр описанного шара лежит на высоте пирамиды $\left(\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$. Через SA и SC проведем сечение; SE — диаметр сечения; $\angle SEA = \angle SAO = \varphi$. Пусть $SO = h$.

Из ΔASO $AS = \frac{h}{\sin\varphi}$;

$$AS^2 = \frac{h^2}{\sin^2\varphi}. \tag{1}$$

Из ΔAES

$$AS^2 = 2Rh. \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) имеем: $\frac{h^2}{\sin^2\varphi} = 2Rh$, откуда

$$h = 2R\sin^2\varphi; \quad AO = h\operatorname{ctg}\varphi = R\sin 2\varphi;$$

$$AB = 2\cdot AO\cdot\sin\frac{\alpha}{2} = 2R\sin 2\varphi\cdot\sin\frac{\alpha}{2};$$

$$AD = 2AO\cdot\sin\frac{\pi-\alpha}{2} = 2R\sin 2\varphi\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Объем пирамиды

$$V = \frac{1}{3}AB\cdot AD\cdot h = \frac{4}{3}R^3\sin^2 2\varphi\sin^2\varphi\sin\alpha.$$

Заметим, что при $\varphi = \frac{\pi}{4}$ основание высоты пирамиды и центр шара совпадают; при $0<\varphi<\frac{\pi}{4}$ центр шара лежит вне пирамиды. Выражение для объема шара во всех случаях будет одним и тем же.

Ответ: $\frac{4}{3}R^3\sin^2 2\varphi\sin^2\varphi\sin\alpha$.

Задача 24.

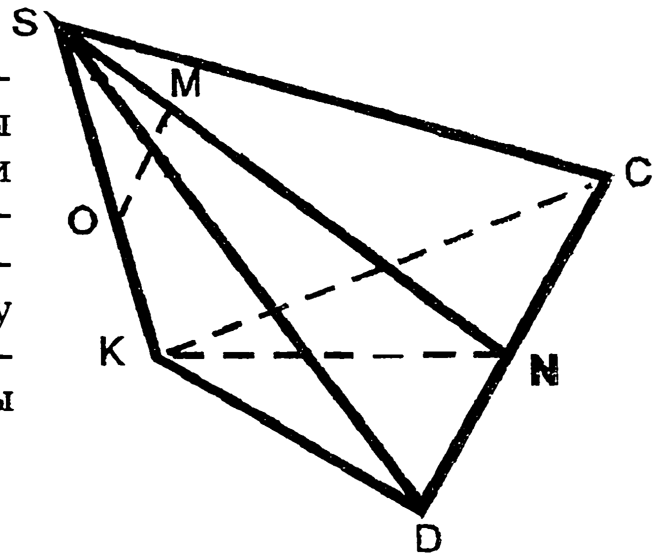


Рис. 26.22

Высота правильной четырехугольной пирамиды равна h, плоский угол при вершине α. На высоте пирамиды, как на диаметре, построен шар. Вычислить длину кривой, по которой пересекаются поверхности пирамиды и шара.

Решение.

Рассмотрим часть заданной пирамиды — $SKCD$ (K — проекция точки S на основание $ABCD$). Длина кривой, по которой пересекаются поверхности пирамиды и шара, равна сумме длин четырех равных дуг окружностей, радиусы которых равны SM (рис. 26.22).

Пусть $\angle SNK = \beta$, $OM \perp$ пл. SDC, точка O — центр шара.

Получим: из ΔSOM $SM = SO\sin\beta = \frac{h}{2}\sin\beta$; из ΔSKN

$$SN = \frac{h}{\sin\beta}, \quad KN = h\operatorname{ctg}\beta, \quad DN = KN = h\operatorname{ctg}\beta. \qquad (1)$$

Из ΔSND

$$DN = SN\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{h}{\sin\beta}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}. \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), получаем:

$h\cdot\operatorname{ctg}\beta = \frac{h}{\sin\beta}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, откуда находим $\cos\beta = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Тогда $SM = \frac{h}{2}\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

Ответ: $4h\alpha\cdot\dfrac{\sqrt{\cos\alpha}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$, где $\angle\alpha$ — в радианах $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

Задача 25.

Развертка пирамиды представляет собой правильный n-угольник со стороной a. Определить объем пирамиды.

Указание.

Поскольку плоскими углами при вершине пирамиды будут внутренние углы многоугольника, то каждый из них должен быть меньше, чем $360^\circ : 3 = 120^\circ$. Значит, $n < 6$ (рис. 26.23).

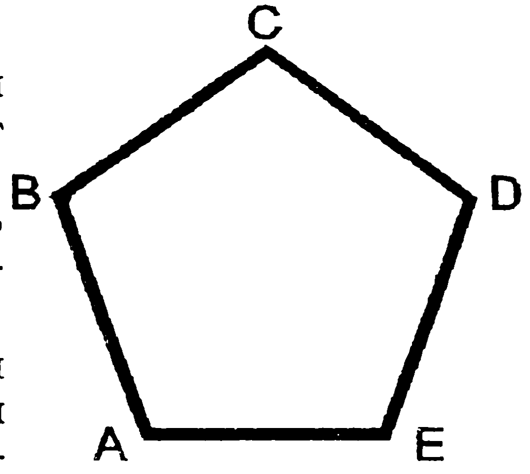


Рис. 26.23

Выясним положение основания пирамиды при развертке. При $n = 3$ основание ограничено средними линиями развертки. Если развертка — квадрат $ABCD$, то вершинами основания могут быть, например, вершина A, середина BC и середина CD.

Если развертка пирамиды — правильный пятиугольник $ABCDE$, то вершинами основания могут быть, например, A, C и середина DE (концы диагонали и середина параллельной стороны пятиугольника CD).

Установив вид пирамды, читатель сможет легко самостоятельно найти ее объем.

Задача 26.

В тетраэдре $ABCD$ двугранные углы при ребрах BC, BD и AC — прямые, а вершина двугранных углов при ребрах AB и CD равна 15°. Найдите радиус шара, вписанного в тетраэдр, если $CD = 2$.

Решение.

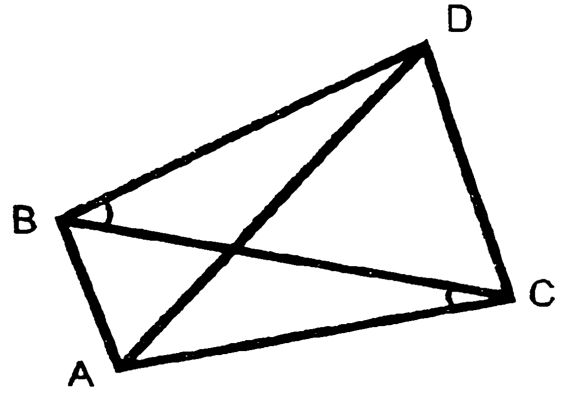


Рис. 26.24

Так как шар вписан в тетраэдр, то объем тетраэдра можно вычислить по формуле: $V = \frac{1}{3} r \cdot S$, где r — радиус вписанного шара, а S — площадь полной поверхности тетраэдра. Из этой формулы, можно будет найти r. С другой стороны, $V = \frac{1}{3} DC \cdot BC \cdot AB$, где DC, AB и BC — взаимно перпендикулярные ребра тетраэдра (докажите!). $DC = 2$,

$BC = DC \cdot \operatorname{ctg} 15°$, $BC = 2 \operatorname{ctg} 15°$, $AB = BC \operatorname{tg} 15°$, $AB = 2$.

Отсюда находим $V = \frac{4}{3}(2 + \sqrt{3})$ (рис. 26.24).

$$AC = \frac{BC}{\cos 15°} = \frac{2 \operatorname{ctg} 15°}{\cos 15°} = \frac{2}{\sin 15°};$$

$$DB = \frac{DC}{\sin 15°} = \frac{2}{\sin 15°};$$

$$S = \frac{1}{2}\left(2 \cdot 2 \cdot \operatorname{ctg} 15° + 2 \cdot \frac{2}{\operatorname{ctg} 15°} + 2 \operatorname{ctg} 15° \cdot 2 + 2 \cdot \frac{2}{\sin 15°}\right) =$$

$$= 4 \cdot \frac{1 + \sqrt{\frac{1 + \cos 30°}{2}}}{\sqrt{\frac{1 - \cos 30°}{2}}} = 4 \cdot \frac{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}} =$$

$$= 4\left(2\sqrt{2 + \sqrt{3}} + 2 + \sqrt{3}\right).$$

Подставив найденные значения V и S в формулу

$V = \frac{1}{3} r S$, найдем $r = 4(3\sqrt{6} + \sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 3)$.

Задача 27.

Правильный тетраэдр спроектирован на плоскость, параллельную двум его несмежным ребрам. Докажите, что в проекции получился квадрат.

Доказательство.

Проекции несмежных ребер произвольного тетраэдра при указанном его расположении взаимно перпендикулярны и равны этим ребрам, т.е. равны между собой. Кроме того, плоскости проектирования, проведенные через данные ребра перпендикулярно плоскости проекции, будут плоскости симметрии данного тетраэдра и, значит будут делить пополам как другое ребро, так и его проекцию. Таким образом, проекции ребер точкой пересечения будут делиться пополам. Значит, в проекции получится квадрат.

Задача 28.

В четырехугольной пирамиде $SABCD$ основанием является трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$), $BC = \frac{4}{3}AD$, $\angle ASD = \angle CDS = \frac{\pi}{2}$. Все вершины пирамды лежат на окружностях оснований цилиндра, высота которого равна 2, а радиус основания равен $\frac{5}{3}$. Найти объем пирамиды.

Решение.

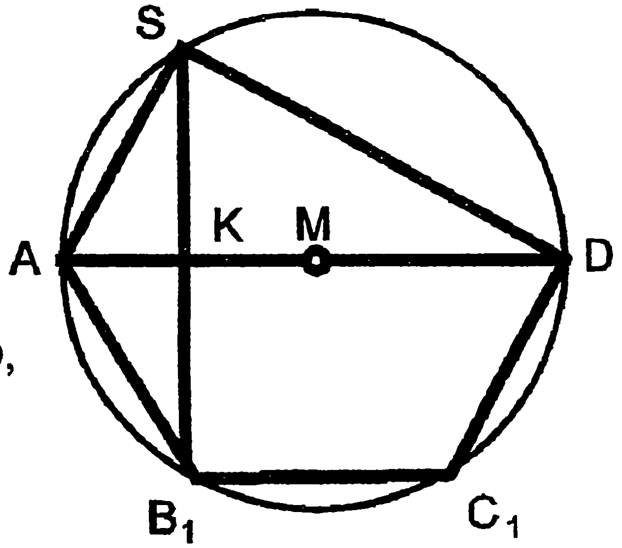


Рис. 26.25

Заметим, что если A и D лежит на окружности одного основания, то и S лежит на той же окружности. В самом деле, если M — середина AD, то по условию

$$SM = \frac{1}{2}AD \leqslant \frac{5}{3},$$

а если бы S лежала на окружности другого основания, то было бы $SM = 2$ (2 — высота цилиндра). Из этого следует, что никакая из трех вершин основания пирамиды не может лежать на окружности одного основания, ибо в этом случае на этой же окружности лежали бы все четыре вершины, основания пирамиды, а значит, на ней лежала бы и вершина S.

Далее, поскольку из всех пар прямых, образованных при попарном соединении точек A, B, C и D, не пересекаются лишь прямые AD и BC, то A и D лежат в плоскости одного основания цилиндра (там же расположена и точка S), B и C — другого.

Рассмотрим проекцию нашей пирамиды на плоскость основания цилиндра, содержащего A, D и S (рис. 26.25) (B_1 и C_1 — проекции B и C). Поскольку C_1 — проекция C, то $\angle C_1DS = 90°$, AD — диаметр основания цилиндра:

$$AD = \frac{10}{3}; \quad B_1C_1 = BC = \frac{4}{5} \cdot \frac{10}{3} = \frac{8}{3}.$$

Если K — проекция B_1 на AD, то

$$AK = \frac{1}{2}(AD \cdot B_1C_1) = \frac{1}{3}, \quad KD = 3;$$

$$KB_1 = \sqrt{AK \cdot KD} = 1.$$

Так как SC_1 — диаметр окружности, то высота треугольника ASD равна $KB1 = 1$. Значит, площадь треугольника ASD равна $\frac{5}{3}$. Объем пирамиды $ASDC$ (ASD — основание, высота равна высоте цилиндра) равен $\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{9}$. Объемы пирамид $ADCS$ и $ABCS$ относятся, как площади треугольников ADC и ABC, а значит, как $AD : BC$. Таким образом, объем пирамиды $ABCS$ равен $\frac{4}{5} \cdot \frac{10}{9} = \frac{8}{9}$, а объем данной пирамиды равен $\frac{10}{9} + \frac{8}{9} = 2$.

Задача 29.

Пусть дан тетраэдр $OABC$, G — точка пересечения медиан треугольника ABC. Положим $OG = d$, $CA = b_1$, $OA = a$, $AB = c_1$, $OB = b$, $OC = c$, $BC = a_1$. Доказать, что

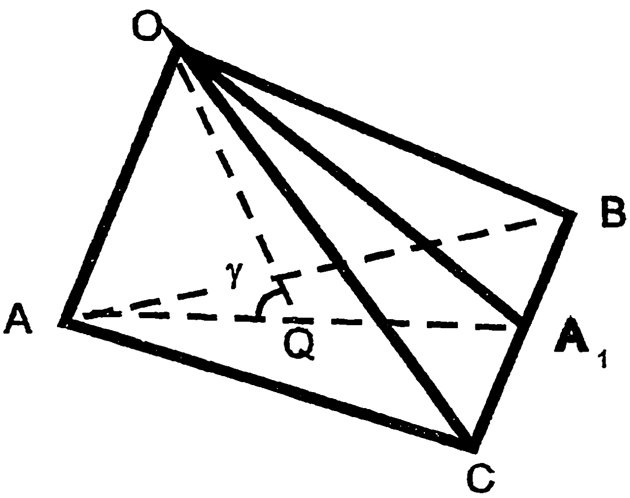


Рис. 26.26

$$d^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{9}(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2).$$

Доказательство.

По теореме косинусов из треугольников OAG и OA_1G:

$$a^2 = d^2 + AG^2 - 2d\,AG\cos\varphi =$$

$$= d^2 + \frac{4}{9}AA_1^2 - \frac{4}{3}d\,AA_1\cos\varphi, \quad \varphi = \angle OGA \text{ (рис. 26.26)}.$$

$$OA_1^2 = d^2 + A_1G^2 + 2d\,A_1G \cdot \cos\varphi = d^2 + \frac{1}{9}AA_1^2 +$$

$$+\frac{2}{3}d\,AA_1\cdot\cos\varphi.$$

Исключая φ, находим

$$a^2+2OA_1^2=3d^2+\frac{2}{3}AA_1^2.\ \text{Но}$$

$$OA_1^2=\frac{1}{2}(b^2+c^2)-\frac{a_1^2}{4};$$

$$AA_1^2=\frac{1}{2}(b_1^2+c_1^2)-\frac{a_1^2}{4}\ \text{(формула медианы).}$$

Подставляя значение OA_1^2 и AA_1^2, получим:

$$a^2+b^2+c^2-\frac{a_1^2}{2}=3d^2+\frac{b_1^2+c_1^2}{3}-\frac{a_1^2}{6}.$$

Отсюда $3d^2=a^2+b^2+c^2-\dfrac{a_1^2+b_1^2+c_1^2}{3}$ или

$$d^2=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)-\frac{1}{9}(a_1^2+b_1^2+c_1^2).$$

Задача 30.

Доказать, что если через произвольную точку O, лежащую внутри тетраэдра $ABCD$, провести отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 (точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат в гранях, противолежащих соответственным вершинам A, B, C, D), то

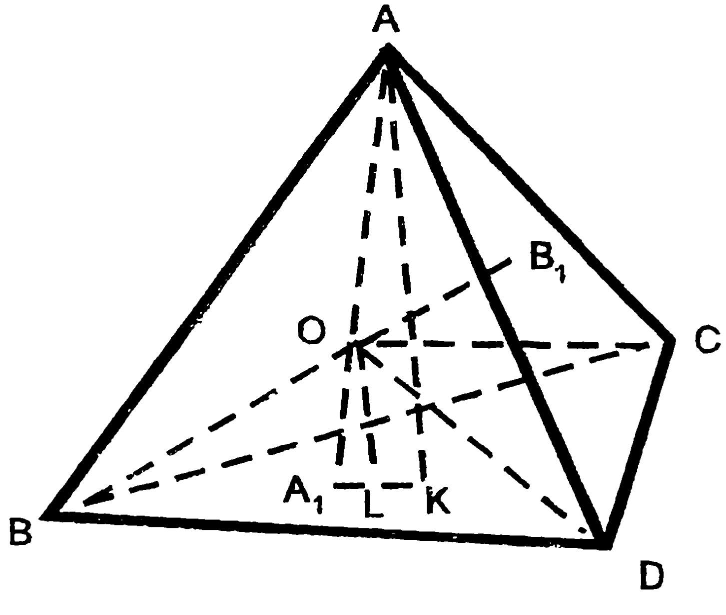


Рис. 26.27

$$\frac{AO}{OA_1}+\frac{BO}{OB_1}+\frac{CO}{OC_1}+\frac{DC}{OD_1}\geqslant 12.$$

Доказательство.

Соединив точку O с вершинами тетраэдра $ABCD$, получим четыре тетраэдра $OBCD$, $OACD$, $OABD$, $OABC$, объемы которых V_1, V_2, V_3 и V_4 в сумме составляют V данного тетраэдра. Пусть AK и OL — высоты тетраэдров $ABCD$ и $OBCD$. Тогда

$$\frac{V}{V_1} = \frac{AK}{OL} \text{ (рис. 26.27)}$$

и из подобия треугольников AA_1K и OA_1L, следует, что

$$\frac{OA}{OA_1} = \frac{AK - OL}{OL} = \frac{V}{V_1} - 1 = \frac{V_2 + V_3 + V_4}{V_1}.$$

Аналогично находятся остальные слагаемые из левой части доказываемого неравенства:

$$\frac{BO}{OB_1} = \frac{V_1 + V_3 + V_4}{V_2}; \quad \frac{CO}{OC_1} = \frac{V_1 + V_2 + V_4}{V_3};$$

$$\frac{DO}{OD_1} = \frac{V_1 + V_2 + V_3}{V_4}.$$

Теперь имеем

$$\frac{AO}{OA_1} + \frac{BO}{OB_1} + \frac{CO}{OC_1} + \frac{DC}{OD_1} =$$

$$= \left(\frac{V_2}{V_1} + \frac{V_3}{V_1} + \frac{V_4}{V_1}\right) + \left(\frac{V_1}{V_2} + \frac{V_3}{V_2} + \frac{V_4}{V_2}\right) +$$

$$+ \left(\frac{V_1}{V_3} + \frac{V_2}{V_3} + \frac{V_4}{V_3}\right) + \left(\frac{V_1}{V_4} + \frac{V_2}{V_4} + \frac{V_3}{V_4}\right) =$$

$$= \left(\frac{V_1}{V_2} + \frac{V_2}{V_1}\right) + \left(\frac{V_1}{V_3} + \frac{V_3}{V_1}\right) + \left(\frac{V_1}{V_4} + \frac{V_4}{V_1}\right) +$$

$$+ \left(\frac{V_2}{V_3} + \frac{V_3}{V_2}\right) + \left(\frac{V_2}{V_4} + \frac{V_4}{V_2}\right) + \left(\frac{V_3}{V_4} + \frac{V_4}{V_3}\right) \geqslant 12,$$

что и требовалось доказать.

Задача 31.

Зная площади оснований усеченной треугольной пирамиды, найти площадь треугольника с вершинами в точках пересечения диагоналей боковых граней этой пирамиды.

Решение.

Пусть $A_2B_2C_2$ — сечение усеченной треугольной пирамиды $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через точки пересечения диагоналей ее боковых граней (рис. 26.28).

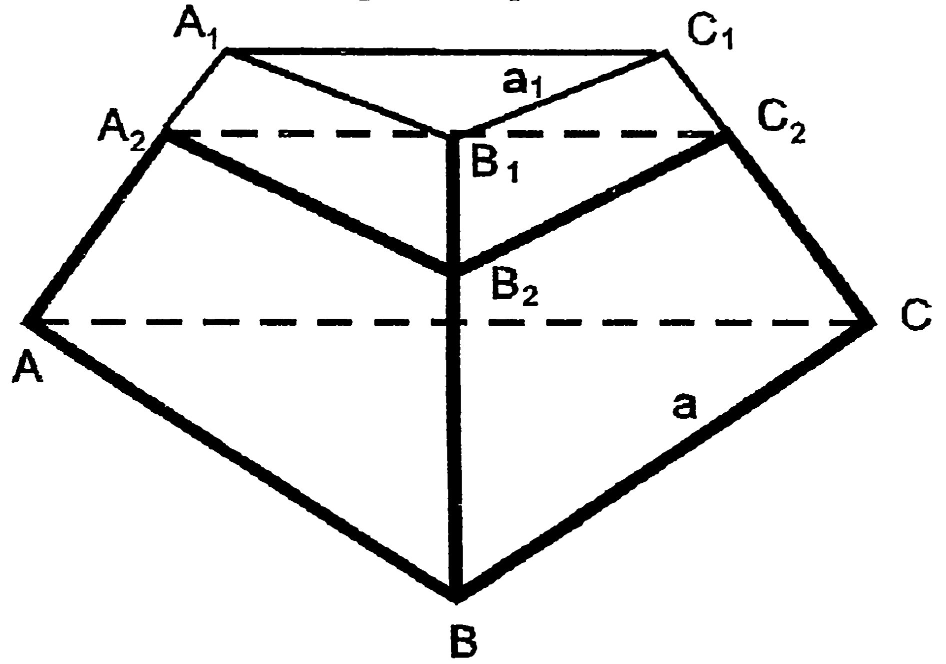


Рис. 26.28

Пусть S и S_1 — соответственно площади треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, S_2 — площадь сечения $A_2B_2C_2$, $C_1B_1 = a_1$, $CB = a$. Известно, что $C_2B_2 = \dfrac{2aa_1}{a + a_1}$. Треугольники $A_1B_1C_1$, ABC, $A_2B_2C_2$ подобны, поэтому

$$\frac{a_1}{a} = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}, \quad \frac{a_1}{C_2B_2} = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}},$$

$$\sqrt{S_2} = \frac{\sqrt{S_1} \cdot C_2B_2}{a_1} = \frac{\sqrt{S_1} \cdot 2aa_1}{a_1(a + a_1)} = \frac{2a\sqrt{S_1}}{a + a_1} =$$

$$= \frac{2\sqrt{S_1}}{\dfrac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} + 1} = \frac{2\sqrt{SS_1}}{\sqrt{S} + \sqrt{S_1}}.$$

Итак,

$$S_2 = \frac{4SS_1}{(\sqrt{S} + \sqrt{S_1})^2}.$$

Если σ — площадь треугольника с вершинами в точках пересечения диагоналей боковых граней данной усеченной пирамиды, то $S_2 = 4\sigma$ и $\sigma = \dfrac{SS_1}{(\sqrt{S} + \sqrt{S_1})^2}$.

Задача 32.

На поверхности шара дана дуга произвольного радиуса r, являющаяся частью параллели. Найти полюс, из которого эта дуга проведена.

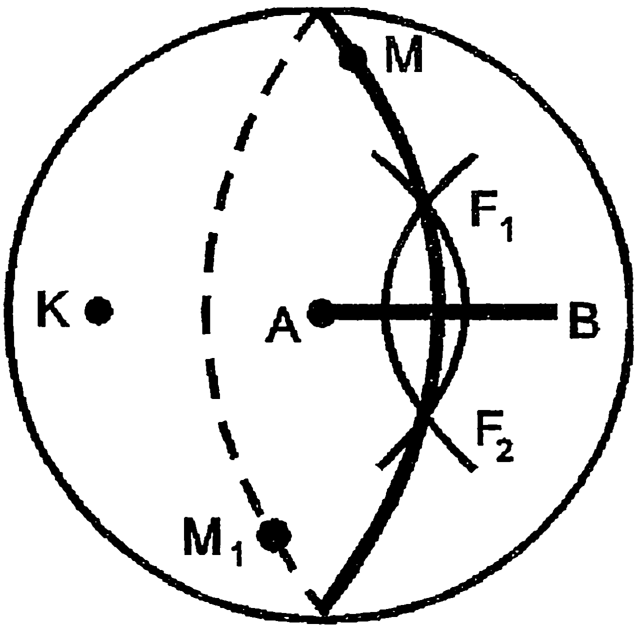


Рис. 26.29

Решение.

1) Из точек A и B произвольным радиусом проводим дуги, которые пересекаются в точках F_1 и F_2 (рис. 26.29).

2) Находим сторону квадрата, вписанного в окружность большого круга. Радиусом, равным этой стороне, проводим дуги из точек F_1 и F_2, их пересечение даст точку K.

3) Тем же радиусом из точки K проводим дугу большого круга F_1F_2, которая в точке C разделит дугу AB пополам.

4) Таким же способом, как в пп. 1-3, проводим дугу большого круга через середину дуги AC. Пересечение двух дуг (пп. 3 и 4) даст полюс M. Возможны и другие построения.

Задача 33.

Около конуса, радиус основания которого равен R, а угол между образующей и основанием равен α, расположены n равных шаров, каждый из которых касается двух соседних боковой поверхности конуса извне и плоскости его основания. Найти радиус шара.

Решение.

Пусть ΔABS представляет сечение конуса плоскостью, проходящей через его вершину S, высоту OS и центр O_1 одного из указанных n шаров, — H_1 — проекция центра O_1 на плоскость основания конуса, x — искомый радиус (рис. 26.30).

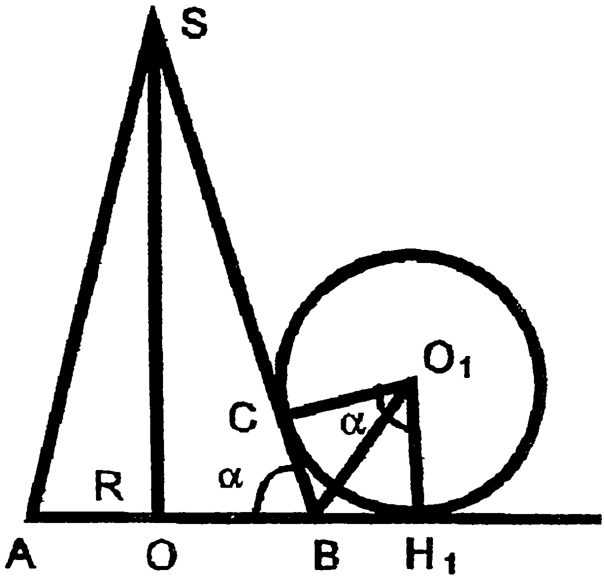


Рис. 26.30

Имеем: $BH_1 = x\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

Если O_2 — центр соседнего шара и H_2 — его проекция на плоскость основания конуса, то

$$H_1H_2 = 2x, \quad \angle H_1OH_2 = \frac{360^\circ}{n}, \quad OH_1 = OH_2 = R + x\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2};$$

медиана $SH_1OH_2 : OM = OH_1 \sin\dfrac{180^\circ}{n}$.

Следовательно, после простых вычислений

$$x = \frac{R}{\cos\dfrac{180^\circ}{n} - \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}.$$

Задача 34.

В сферу радиуса R_1 вписан правильный тетраэдр $ABCD$. Сфера радиуса R_2 касается плоскостей его граней OAB, OBC, OCA и первой сферы. Найти отношение $R_1 : R_2$.

Решение.

Рассмотрим прежде случай, когда вторая сфера лежит внутри первой. При этом условии сферы касаются внутренним образом и $\dfrac{R_2}{2R_1 - R_2} = \sin\varphi$, где φ — угол между высотой OO_0 тетраэдра и высотой OC_0 грани OAB. Но

$$\sin\varphi = O_0C_0 : C_0D = 1:3, \text{ поэтому}$$

$$R_2 : (2R_1 - R_2) = 1 : 3, \text{ или } R_1 : R_2 = 1.$$

Если вторая сфера касается первой внешним образом, то

$$R_2 : (2R_1 + R_2) = 1 : 3 \text{ или } R_1 : R_2 = 1.$$

Задача 35.

Три шара радиуса R касаются одной и той же плоскости и каждый из них касается двух других. Найти радиус шара, касающегося плоскости и трех данных шаров.

Решение.

Пусть точки O_1, O_2, O_3 — центры данных шаров, O_1', O_2', O_3' — точки соприкосновения этих шаров с плоскостью, точки O и O' — центр и точка соприкосновения плоскости с шаром, x — радиус этого шара. Имеем:

$$\Delta O_1O_2O_3 = \Delta O_1'O_2'O_3';$$

стороны этих треугольников равны $2R$. O находится в точке пересечения высот $\Delta O_1'O_2'O_3'$. Поэтому

$$\left(\frac{2R\sqrt{3}}{3}\right) = (x+R)^2 - (R-x)^2, \quad x = \frac{1}{3}R.$$

Задача 36.

В правильный тетраэдр вписаны четыре равных шара, каждый из которых касается трех других шаров и трех граней тетраэдра. Вычислите объем тетраэдра, если радиус каждого из указанных шаров равен R.

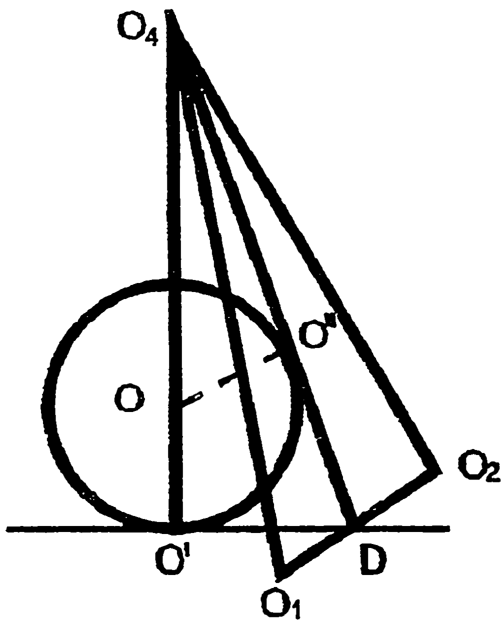


Рис. 26.31

Решение.

Данный тетраэдр будет гомотетичен тетраэдру с вершинами в центрах вписанных шаров с центром гомотетии в центре шара, вписанного во внутренний тетраэдр. Значит, для нахождения объема данного тетраэдра достаточно найти объем внутреннего тетраэдра и умножить его на куб коэффициента гомотетии. Часть внутреннего тетраэдра с вершинами в центрах вписанных шаров изображена на рисунке (рис. 26.31). Ребро этого тетраэдра равно $a = 2R$, высота боковой грани $h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$. Радиус вписанного в него шара обозначим r: $r = OO' = OO''$.

$$\frac{OO''}{O'D} = \frac{O_4O''}{O'O_4}, \quad \frac{r}{\frac{1}{3}h} = \frac{\frac{2}{3}h}{H}.$$

В треугольнике $O'O_4D$ $H = \frac{2}{3}R\sqrt{6}$, тогда $r = \frac{R}{\sqrt{6}}$.

Объем внутреннего тетраэдра равен

$$V_1 = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{4R^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2R\sqrt{6}}{3} = \frac{2R^3\sqrt{2}}{3}.$$

Коэффициент гомотетии $R = \frac{d}{r}$, где d — расстояние от O до грани данного тетраэдра:

$$d = R + OO' = R + r = R + \frac{R}{\sqrt{6}} = \frac{R(1+\sqrt{6})}{\sqrt{6}},$$

$$R = \frac{R(1+\sqrt{6})\sqrt{6}}{\sqrt{6}R} = 1 + \sqrt{6}.$$

Значит, $V = V_1$, $R^3 = \frac{2R^3\sqrt{2}}{3}(1+\sqrt{6})^3 =$

$$= \frac{2R^3\sqrt{2}}{3}(19 + 9\sqrt{6}) = \frac{2R^3}{3}(19\sqrt{2} + 18\sqrt{3}).$$

Задача 37.

Два соосных конуса имеют общее основание и расположены один вне другого. Образующая одного конуса равна l, а угол осевого сечения при вершине равен 2α. Угол в осевом сечении при вершине другого конуса равен 2β. Найти объем полученного тела.

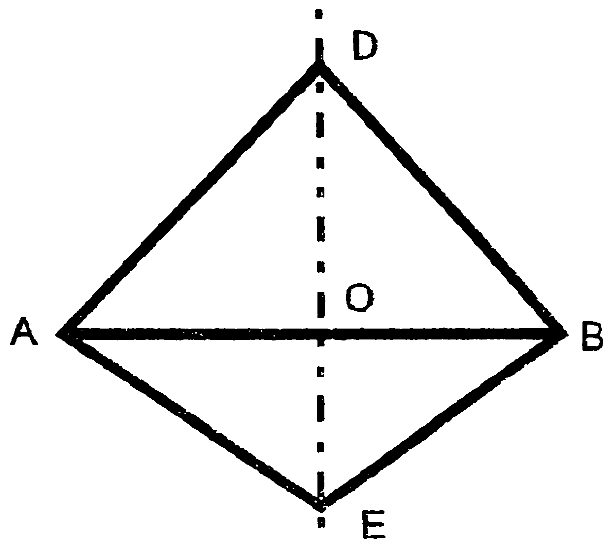


Рис. 26.32

Решение.

Осевое сечение образованного тела показано на рисунке. (рис. 26.32).

$$V = V_{кон.DAB} + V_{кон.EAB} = \frac{1}{3}\pi R^2 (DO + OE) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi R^2 (l\cos\alpha + l\sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot l \cdot \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta} = \frac{1}{3}\pi l^3 \frac{\sin^2\alpha \sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}.$$

Задача 38.

В конус вписаны две касающиеся между собой сферы α и β (каждая сфера касается поверхности конуса по окружности). Существует n равных сфер, касающихся α и β поверхности конуса и таких, что каждая из них касается еще двух из этих n сфер. Какие значения может принимать число n?

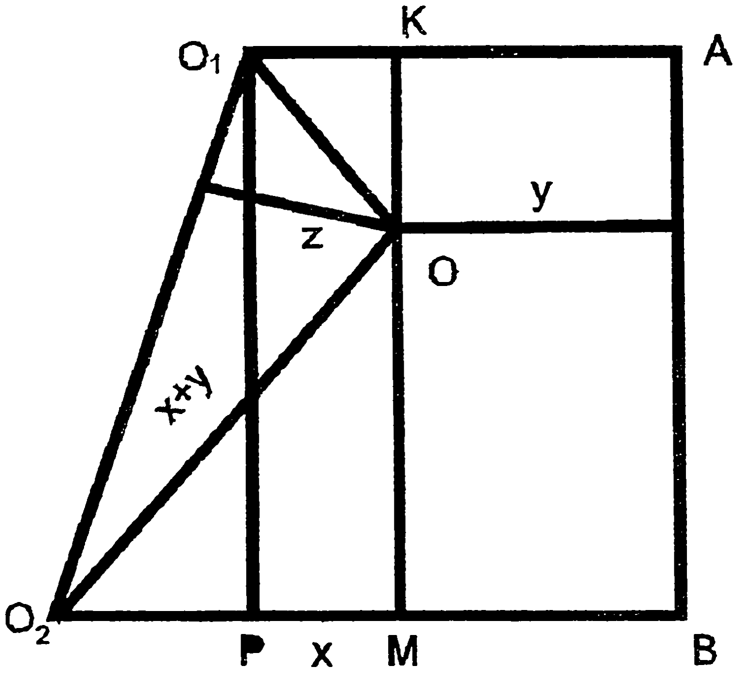


Рис. 26.33

Решение.

Пусть O_1, O_2 и O — центры сфер α и β и одной из n равных сфер, AB — отрезок образующей конуса, которой касаются эти три сферы (рис. 26.33, A и B — точки касания сфер α и β). Пусть радиус сферы α равен 1, радиус сферы β равен x, а радиус каждой из n равных сфер равен y, расстояние от O до оси конуса O_1O_2 равно z. Выразим сначала y через x. Для этого проведем через O_1 и O прямые, параллельные AB, обозначим получившиеся точки пересечения через K, M, и P. Нетрудно найти:

$$O_1P = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2P^2} = \sqrt{(1+x)^2 - (x-1)^2} = 2\sqrt{x},$$

$$OK = 2\sqrt{y}, \quad OM = 2\sqrt{xy}.$$

Из уравнения

$$O_1P = OK + OM \text{ или } \sqrt{x} = \sqrt{y} + \sqrt{xy}$$

найдем $\sqrt{y} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$.

Для определения n выразим площадь треугольника двумя способами (один раз по формуле Герона):

$$\frac{1}{2}(1+x)\,z = \sqrt{(x+y+1)\,xy}, \quad z = \frac{2\sqrt{(x+y+1)\,xy}}{1+x}.$$

Таким образом, с учетом найденного значения z будем иметь

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{y}{z} = \frac{\sqrt{y}\,(1+x)}{2\sqrt{(x+y+1)\,x}} = \frac{1+x}{2\,(x+\sqrt{x}+1)} =$$

$$= \frac{1}{2\left(1+\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}\right)}.$$

Так как при $x > 1$ $\;0 < \dfrac{\sqrt{x}}{1+x} < \dfrac{1}{2}$, то $\dfrac{1}{3} < \dfrac{y}{z} < \dfrac{1}{2}$.

Поскольку

$$\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} < \frac{1}{3}, \quad \sin\frac{\pi}{9} > \frac{\pi}{9} - \frac{1}{6}\cdot\frac{\pi^3}{729} > \frac{1}{3},$$

то n может принимать значения 7, 8, 9.

Задача 39.

Шар радиуса R пересекает каждое ребро правильного тетраэдра. Найти объем их общей части.

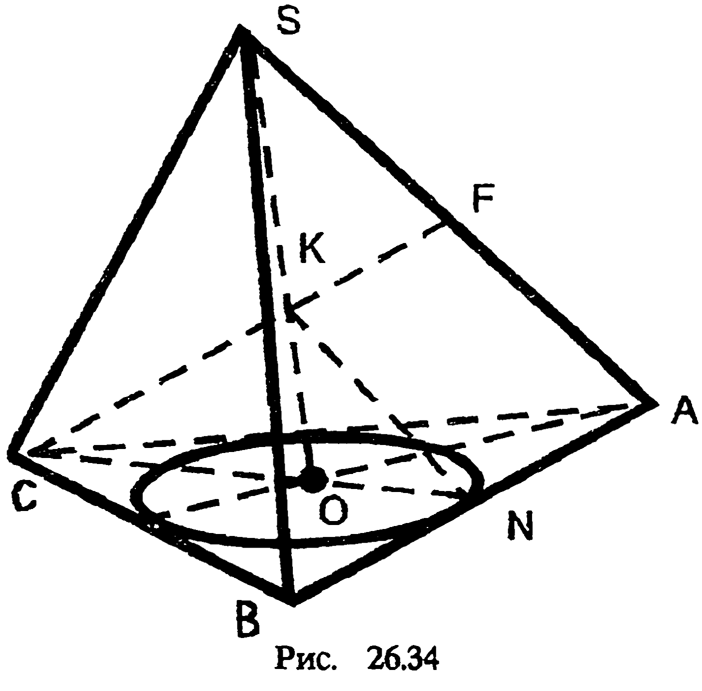


Рис. 26.34

Решение.

Искомый объем V равен разности объемов шара и четырех шаровых сегментов, отсекаемых гранями тетраэдра. Основанием этих сегментов служат круги, вписанные в грани тетраэдра, а высоты равны $h = R - OK$, где R — радиус, а OK — расстояние от центра K шара до грани тетраэдра (K — центр тетраэдра). Итак, $V = V_{шар} - 4\,V_1$, где V_1 — объем шарового сегмента (рис. 26.34).

Пусть x — ребро тетраэдра. Тогда

$$SF = \frac{x}{2};\quad OA = \frac{x}{\sqrt{3}};\quad ON = \frac{x}{2\sqrt{3}};\quad SO = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{3}};$$

$$\Delta SKF \backsim \Delta SOA;\quad \frac{SK}{SF} = \frac{SA}{SO},\ \text{тогда}$$

$$SK = \frac{x\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},\quad OK = SO - SK = \frac{x}{2\sqrt{6}}.$$

Из ΔOKN $KN^2 = OK^2 + ON^2$ или

$$R^2 = \left(\frac{x}{2\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)^2,\ \text{откуда}\ x = 2\sqrt{2}\,R.$$

Высота сегмента $h = R - OK = \dfrac{R(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}}$.

Тогда

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 - 4\pi\frac{R^2(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}}\left(R - \frac{R(\sqrt{2}-1)}{3\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \frac{4}{27}\pi R^3(3\sqrt{3}-9).$$

Ответ: $\dfrac{4}{27}\pi R^3(3\sqrt{3}-9)$.

Задача 40.

Шар касается всех ребер правильной четырехугольной пирамиды. Определить радиус шара, если двугранный угол при основании пирамиды равен $\dfrac{\pi}{3}$, а длина стороны основания равна a.

Решение.

Пусть $\angle SMO = \frac{\pi}{3}$, точка K — центр шара, KN — радиус шара (легко доказать, что центр этого шара лежит внутри пирамиды на высоте SO). Тогда $SC \perp KN$ (рис. 26.35),

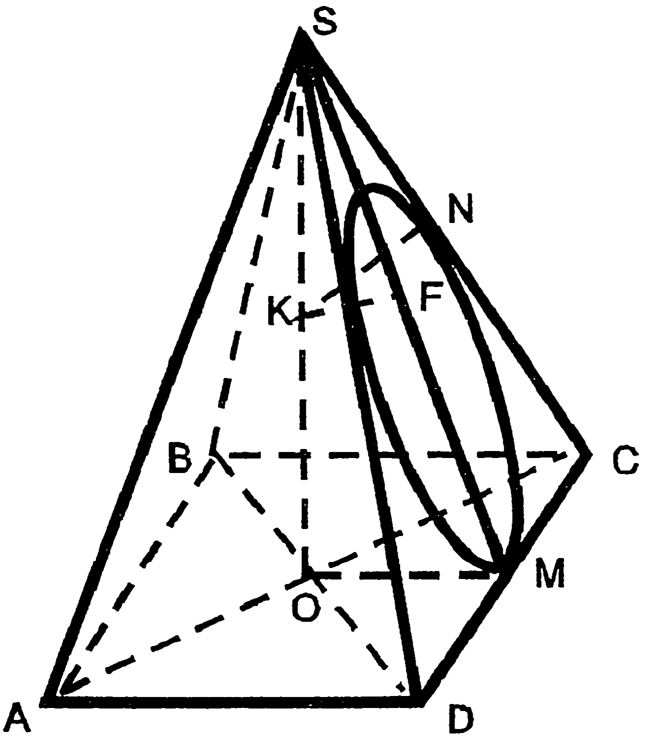


Рис. 26.35

$$\Delta SKN \backsim \Delta SOC \Rightarrow$$

$$KN : SN = OC : SO; \quad (1)$$

$$OC = \frac{a\sqrt{2}}{2};$$

$$SO = OM \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{a}{2}\sqrt{3};$$

$$NC = CM = \frac{a}{2}; \quad SM = \frac{a}{2\cos\frac{\pi}{3}} = a;$$

$$SC = \sqrt{SM^2 + MC^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Тогда $SN = SC - NC = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$. Из равенства (1) найдем KN:

$$KN = \frac{SN \cdot OC}{SO} = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{6}}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{6}}a$.

Задача 41.

В правильной n-угольной пирамиде двугранные углы при ребре основания и боковом ребре имеют величины α и β соответственно. Найти наибольшее значение выражения

$$y = \cos\alpha + \cos\frac{\beta}{2}.$$

Решение.

Пусть S — вершина правильной n-угольной пирамиды, O — центр основания, SK — апофема, $AM \perp SB$, $CM \perp SB$& Тогда $\angle SKO = \alpha$, $\angle AMC = \beta$,

$$\angle AOK = \angle KOB = $$

$$= \angle BAC = \frac{180^\circ}{n},$$

$$\angle MAK = \angle KSB$$

(рис. 26.36).

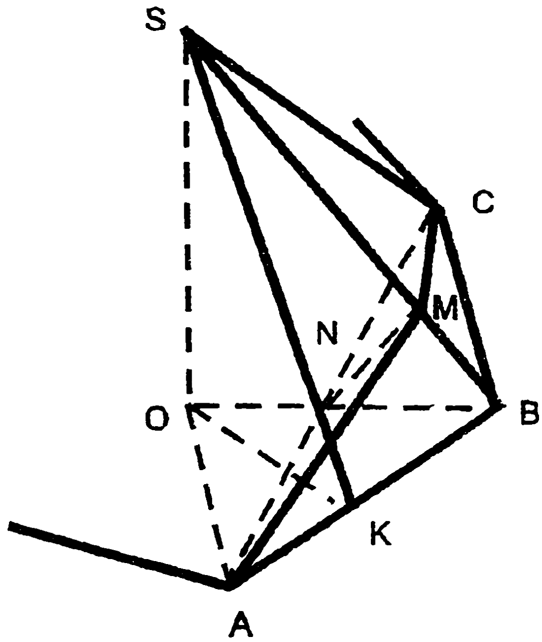


Рис. 26.36

Таким образом:

$$\cos\frac{\beta}{2} = \frac{MN}{AM} =$$

$$= \frac{NB\sin\angle SBO}{AB\cos\angle BAM} =$$

$$= \frac{AB\sin\frac{180^\circ}{n}\cdot\frac{SO}{SB}}{AB\cos\angle KSB} = \frac{\sin\frac{180^\circ}{n}\cdot\frac{SO}{SB}}{\frac{SK}{SB}} =$$

$$= \sin\frac{180^\circ}{n}\cdot\frac{SO}{SK}.$$

Следовательно,

$$\cos\frac{\beta}{2} = \sin\frac{180^\circ}{n}\sin\alpha \text{ и } y = \cos\alpha + \sin\frac{180^\circ}{n}\sin\alpha.$$

По неравенству Коши-Буняковского

$$y \leqslant \sqrt{1+\sin^2\frac{180^\circ}{n}} \text{ и } y_{\max} = \sqrt{1+\sin^2\frac{180^\circ}{n}}.$$

Максимум достигается при

$$\operatorname{tg}\alpha = \sin\frac{180^\circ}{n}.$$

Глава VI. ГЕОМЕТРИЯ ДЛЯ СТАРШЕКЛАССНИКОВ

27. ФОРМУЛЫ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Для удобства введем обозначения: a, b, c — стороны треугольника ABC, A, B, C — углы BAC, ABC, CAB треугольника ABC, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, S — площадь треугольника ABC, R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Задача 1.

В остроугольном треугольнике ABC точка H — точка пересечения высот. Доказать, что

1) $AH^2 = 4R^2 - a^2$,

2) $AH = 2R\cos A$.

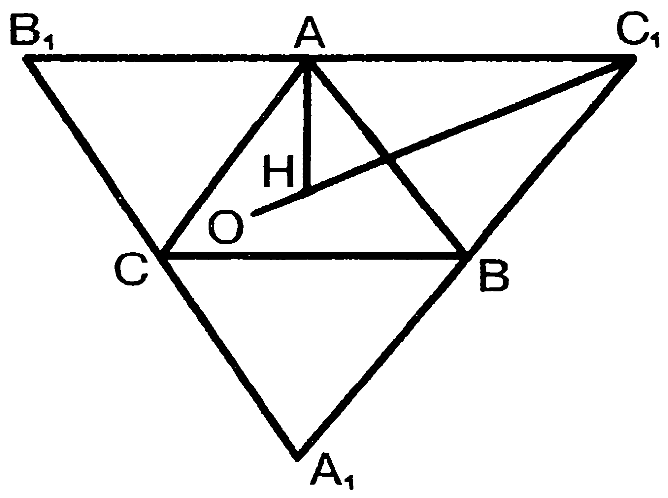


Рис. 27.1

Доказательство.

Через вершины A, B и C проведем прямые, параллельные сторонам треугольника ABC (рис. 27.1). Получим треугольник $A_1B_1C_1$, гомотетичный треугольнику ABC с центром гомотетии точки M пересечения медиан треугольника ABC и коэффициентом $k = -2$ (докажите!).

Точка H будет центром окружности, описанной около треугольника ABC и $HC_1 = 2R$.

1) Из треугольника AHC_1 по теореме Пифагора

$$AH^2 = HC_1^2 - AC_1^2, \text{ или } AH^2 = 4R^2 - a^2.$$

2) Поскольку $a = 2R\sin A$, то

$$AH^2 = 4R^2 - 4R^2\sin^2 A =$$

$$= 4R^2(1 - \sin^2 A) = 4R^2\cos^2 A,$$

значит, $AH = 2R\cos A$ ($\angle A < 90°$).

Задача 2.

В треугольнике ABC точка M_1 — середины стороны BC. Доказать, что

$$OM_1 = \frac{1}{2}AH.$$

Доказательство.

Поскольку точка M — середина стороны BC, а точка A — середины отрезка B_1C_1, то отрезки OM_1 и HA гомотетичны с коэффициентом гомотетии $k = -2$. Значит, утверждение задачи доказано.

Задача 3.

Доказать, что в треугольнике ABC

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8}.$$

Доказательство.

По теореме косинусов

$$a^2 = (b-c)^2 + 2bc\,(1-\cos A), \text{ или}$$

$$a^2 = (b-c)^2 + 4bc\sin^2\frac{A}{2},$$

откуда $\sin\frac{A}{2} \leqslant \frac{a}{2\sqrt{bc}}$. Аналогично

$$\sin\frac{B}{2} \leqslant \frac{b}{2\sqrt{bc}},\ \sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{c}{2\sqrt{ab}}.$$

Итак,

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{abc}{8abc} = \frac{1}{8}.$$

Задача 4.

Доказать, что в треугольнике ABC

$$\cos A\cos B\cos C \leqslant \frac{1}{8}.$$

Доказательство.

Если A, B, C — углы треугольника, то углы

$$A_1 = \pi - 2A,\ B_1 = \pi - 2B,\ C_1 = \pi - 2C \text{ —}$$

также углы треугольника, так как

$$A_1 + B_1 + C_1 = 3\pi - 2(A + B + C) = \pi.$$

Значит, учитывая предыдущую задачу, имеем

$$\sin\frac{A_1}{2}\sin\frac{B_1}{2}\sin\frac{C_1}{2} \leqslant \frac{1}{8}.$$

Но $\frac{A_1}{2} = \frac{\pi}{2} - A$, $\frac{B_1}{2} = \frac{\pi}{2} - B$, $\frac{C_1}{2} = \frac{\pi}{2} - C$, итак,

$$\sin\frac{A_1}{2}\sin\frac{B_1}{2}\sin\frac{C_1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) \times$$

$$\times \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - C\right) =$$

$$= \cos A \cos B \cos C \leqslant \frac{1}{8}.$$

Задача 5.

Доказать, что в треугольнике ABC

$$\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}.$$

Доказательство.

Имеем

$$\cos A + \cos B + \cos C =$$

$$= 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqslant$$

$$\leqslant 1 + 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}.$$

Задача 6.

Доказать, что в треугольнике ABC

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \leqslant \frac{3}{8}\sqrt{3}.$$

Доказательство.

Имеем

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} =$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)}{3}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{1}{8}\left(\frac{3+\cos A+\cos B+\cos C}{3}\right)^3} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{27}\left(3+\frac{3}{2}\right)^3} = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Задача 7.

Доказать, что в треугольнике ABC

$$\sin A + \sin B + \sin C \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

Доказательство.

Имеем

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \leqslant$$

$$\leqslant 4\cdot\frac{3}{8}\cdot\sqrt{3} = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

Задача 8.

Доказать неравенство

$$\sin x\sin y\sin z + \cos x\cos y\cos z \leqslant 1.$$

Доказательство.

Рассмотрим векторы

$$\bar{a} = (\sin x\sin y,\ \cos x\cos y),\quad \bar{b} = (\sin z,\ \cos z).$$

Тогда

$$|\bar{b}| = 1, \quad |\bar{a}| = \sqrt{\sin^2 x \sin^2 y + \cos^2 x \cos^2 y} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = 1 \text{ и } |\bar{a} \cdot \bar{b}| \leqslant |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \leqslant 1.$$

Таким образом,

$$\sin x \sin y \sin z + \cos x \cos y \cos z \leqslant 1.$$

Задача 9.

Доказать, что в треугольнике ABC

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geqslant -\frac{3}{2}.$$

Доказательство.

Если O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, то вектор

$$\bar{S} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$$

является нулевым только для равностороннего треугольника. Получим $(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})^2 \geqslant 0$. Поскольку

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = R^2 \cos 2C,$$

$$\overline{OA} \cdot \overline{OC} = R^2 \cos 2B,$$

$$\overline{OB} \cdot \overline{OC} = R^2 \cos 2A,$$

то после возведения в квадрат получим

$$3R^2 + 2R^2 (\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C) \geqslant 0, \text{ или}$$

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geqslant -\frac{3}{2}.$$

Задача 10.

Доказать, что в остроугольном треугольнике

$$\operatorname{tg}^n A + \operatorname{tg}^n B + \operatorname{tg}^n C \geqslant 3\sqrt{3^n}, \quad n \in N.$$

Доказательство.

В остроугольном треугольнике ABC

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C.$$

Используя неравенство Коши ($n = 3$)

$$\left(\frac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz},\quad x,\ y,\ z \geqslant 0\right),$$

имеем

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C \geqslant \sqrt[3]{\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C}.$$

Итак, $\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C \geqslant \sqrt[3]{\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C}$,

$$\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C \geqslant \sqrt[3]{3^3}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg}^n A + \operatorname{tg}^n B + \operatorname{tg}^n C \geqslant \sqrt[3]{\operatorname{tg} A^n \cdot \operatorname{tg} B^n \cdot \operatorname{tg} C^n} \geqslant$$

$$\geqslant 3 \cdot \sqrt[3]{(\sqrt{3^3}\,)^n} = 3\sqrt{3^n}.$$

Задача 11.
Доказать, что в треугольнике ABC

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2} \geqslant \sqrt{3}.$$

Доказательство.

Имеем

$$\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^2 = \operatorname{tg}^2\frac{A}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{C}{2} +$$

$$+ 2\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right).$$

Используем неравенство трех квадратов:

$$\operatorname{tg}^2\frac{A}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{C}{2} \geqslant$$

$$\geqslant \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Но в треугольнике ABC

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 1$$

(докажите самостоятельно!).

Итак, $\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^2 \geqslant$

$$\geqslant 3\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right) = 3,$$

то есть

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2} \geqslant \sqrt{3}.$$

Задача 12.

Докажите, что в треугольнике ABC

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C \geqslant \sqrt{3}.$$

Доказательство.

Углы $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}$, $\alpha_3 = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$ — углы треугольника, поэтому

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha_3}{2} = \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C \geqslant \sqrt{3}$$

(см. предыдущую задачу).

Задача 13.

Доказать, что в непрямоугольном треугольнике ABC

$$\operatorname{tg}^2 A + \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^2 C \geqslant 9.$$

Доказательство.

Имеем

$$\operatorname{tg}^2 A + \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^2 C \geqslant \operatorname{tg} B \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} C \operatorname{tg} A =$$

$$= \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C \left(\frac{1}{\operatorname{tg} A} + \frac{1}{\operatorname{tg} B} + \frac{1}{\operatorname{tg} C}\right) =$$

$$= (\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)\left(\frac{1}{\operatorname{tg} A} + \frac{1}{\operatorname{tg} B} + \frac{1}{\operatorname{tg} C}\right) \geqslant 9.$$

Мы использовали соотношение

$$(a_1 + a_2 + a_3)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right) \geqslant 9$$

для чисел $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$.

Задача 14.

Докажите, что в треугольнике ABC

$$\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2} \geqslant \frac{1}{3}.$$

Доказательство.

Докажем, что если $a + b + c = 1$, то $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \frac{1}{3}$. Действительно,

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \geqslant 2(ab + ac + bc).$$

Но $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = 1$ (по условию). Тогда

$$2(ab + bc + ac) = 1 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Итак, $2(a^2 + b^2 + c^2) \geqslant 1 - (a^2 + b^2 + c^2)$, откуда

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \frac{1}{3}.$$

Поскольку

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 1,$$

то заданное неравенство доказано.

Задача 15.

Доказать, что в нетупоугольном треугольнике ABC

$$\sin A + \sin B + \sin C > \cos A + \cos B + \cos C.$$

Доказательство.

Сначала докажем, что для

$$\angle A \leqslant 90^\circ,\ \angle B \leqslant 90^\circ,\ \angle A \leqslant 90^\circ$$

$$\cos\frac{A-B}{2} < 2\cos\frac{C}{2}.$$

Действительно, $\frac{C}{2} < 60^\circ$, откуда

$$\cos\frac{A-B}{2} < 1 = 2\cos 60^\circ < 2\cos\frac{C}{2}.$$

Аналогично докажем, что

$$\cos\frac{A-C}{2} < 2\cos\frac{B}{2};$$

$$\cos\frac{B-C}{2} < 2\cos\frac{A}{2}.$$

Итак,

$$\cos A + \cos B + \cos C = \cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} +$$

$$+\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2} + \cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} <$$

$$< 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} + 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2} +$$

$$+ 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = \sin C + \sin B + \sin A.$$

Задача 16.

В треугольнике ABC один угол тупой. Доказать, что

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C > 1.$$

Доказательство.

Пусть $C > 90^\circ$. Тогда

$$B < 90^\circ - A \text{ и } \cos B > \cos(90^\circ - A) = \sin A > 0.$$

Отсюда $\cos^2 B > \sin^2 A$ и

$$\cos^2 B + \cos^2 A > \sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

Задача 17.

Доказать, что в треугольнике ABC

$$(\sin A + \sin B + \sin C)^2 > 2\pi \sin A \sin B \sin C.$$

Доказательство.

Заданное неравенство перепишем так:

$$\left(\frac{a+b+c}{2R}\right)^2 > 2\pi \frac{abc}{8}, \text{ или}$$

$$\frac{p^2}{R^2} > \pi \frac{abc}{4R^3}, \text{ или } p^2 > \pi \frac{abc}{4R}.$$

Учитывая, что $R = \dfrac{abc}{4S}$, $r = \dfrac{S}{p}$, последнее неравенство эквивалентно неравенству

$$p^2 > \pi 2p, \quad p > \pi r, \text{ или } 2p > 2\pi p.$$

Это неравенство справедливо, ибо в левой части — периметр треугольника, а в правой — длина вписанной в этот треугольник окружности.

Задача 18.

В треугольнике ABC O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот (ортоцентр). Доказать, что

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

(a, b, c — стороны BC, AC, AB — треугольника, R — радиус описанной около треугольника ABC окружности).

Доказательство.

Из треугольника OAH по теореме косинусов:

$$OH^2 = OA^2 + AH^2 - 2\,OA \cdot AH \cos \angle OAH.$$

Решим задачу вначале для случая, когда $A < 90°$. Учитывая то, что

$$\angle OAH = \angle CAH - \angle CAO = 90^\circ - C - (90^\circ - B) = B - C,$$

имеем:

$$OH^2 = R^2 + 4R^2 - a^2 - 2R \cdot 2R \cos A \cos (B - C) =$$

$$= 5R^2 - a^2 - 2R^2 (\cos (A + B - C) + \cos (A - B + C)) =$$

$$= 5R^2 - a^2 - 2R^2 (-\cos 2C - \cos 2B) =$$

$$= 5R^2 - a^2 - 2R^2 (2 \sin^2 C - 1 + 2 \sin^2 B - 1) =$$

$$= 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Если $A > 90^\circ$, то $\cos A < 0$, $AH = -2R \cos A$ и

$$\cos \angle OAH = \cos (180^\circ - (B - C)) = -\cos (B - C).$$

Итак, формула снова имеет место.

Задача 19.

Доказать, что в остроугольном треугольнике

$$a \cdot AH + b \cdot BH + c \cdot CH = 4S$$

(H — ортоцентр треугольника ABC).

Доказательство.

Рассмотрим треугольник B_1HC_1 (рис. 27.1). Его площадь равна $a \cdot AH$. Площади треугольников A_1HC_1 и B_1HA_1 равны соответственно $b \cdot BH$ и $c \cdot CH$. Учитывая, что площадь треугольника $A_1B_1C_1$ равна $4S$, имеем:

$$a \cdot AH + b \cdot BH + c \cdot CH = 4S.$$

Задача 20.

Пусть M_1 — середина стороны BC,

$\varphi_1 = \angle OAM_1$, $\varphi_2 = \angle AM_1O$. Доказать, что

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \cos A.$$

Доказательство.

Поскольку $OM_1 \parallel AH_1$, то из треугольника OM_1A следует:

$$\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} = \frac{OM_1}{OA} = \frac{R\cos A}{R} = \cos A.$$

Задача 21.

Доказать, что в остроугольном треугольнике ABC

$$AH + BH + CH \leqslant 3R.$$

Доказательство.

Имеем:

$$AH + BH + CH = 2R\,(\cos A + \cos B + \cos C) \text{ (задача 1).}$$

Но $\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}$, следовательно,

$$AH + BH + CH \leqslant 2R \cdot \frac{3}{2} = 3R.$$

Задача 22.

Доказать, что радиус r окружности, вписанной в треугольник ABC, вычисляется по формуле

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Доказательство.

Имеем: $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{\frac{1}{2}ab\sin C}{\frac{1}{2}(a+b+c)} =$

$$= \frac{2R^2\sin A\sin B\sin C}{R\,(\sin A + \sin B + \sin C)} = \frac{2R^2\sin A\sin B\sin C}{4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} =$$

$$= 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Задача 23.

Доказать формулу Карно: в остроугольном треугольнике ABC

$$OM_1 + OM_2 + OM_3 = R + r$$

(M_1, M_2, M_3 — середины сторон BC, AC, AB).

Доказательство.

$$OM_1 + OM_2 + OM_3 = \frac{1}{2}(AH + BH + CH) =$$

$$= R\cos A + R\cos B + R\cos C =$$

$$= R(\cos A + \cos B + \cos C) =$$

$$= R\left(1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) =$$

$$= R + 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = R + r.$$

Задача 24.

В треугольнике ABC r — радиус вписанной окружности, Доказать, что $r = (p - a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}$.

Доказательство.

Пусть K_1, K_2, K_3 — точки касания этой окружности со сторонами BC, AC, AB. Нетрудно доказать, что отрезки AK_2, BK_3, CK_1 равны соответственно $p - a$, $p - b$, $p - c$. Тогда из треугольника AIK_2 (I — центр вписанной окружности) следует, что

$$r = (p - a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

Задача 25.

В прямоугольном треугольнике ABC угол $BAC = 90°$. Доказать, что $r = p - a$.

Доказательство.

$r = (p - a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}$. Но $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, значит, $r = p - a$.

Задача 26.

Доказать, что в треугольнике ABC

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (формула Герона).}$$

Доказательство.

Предлагается доказать самостоятельно, что

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{C}{2} = \operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$$

(A, B, C — углы треугольника ABC).

К этому соотношению применим формулу

$$r = (p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}. \text{ Имеем:}$$

$$\frac{p-a+p-b+p-c}{r} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{r^3}, \text{ или}$$

$$(3p-2p)\,r^2 = (p-a)(p-b)(p-c).$$

Умножив обе части равенства на p, получим

$$p^2r^2 = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Учитывая, что $S = 2p$, имеем:

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c), \text{ или}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Задача 27.

Доказать, что в треугольнике ABC имеет место соотношение

$$\frac{abc}{p} = \frac{mnl}{r},$$

где m, n, l — соответственно отрезки AI, BI, CI (I — инцентр, центр вписанной окружности).

Доказательство.

С одной стороны,

$$AI = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}, \quad BI = \frac{r}{\sin\frac{B}{2}}, \quad CI = \frac{r}{\sin\frac{C}{2}}.$$

$$AI \cdot BI \cdot CI = \frac{r^3 \cdot 4R}{4R \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}} =$$

$$= \frac{4Rr^3}{r} = 4Rr^2.$$

С другой стороны,

$$\frac{abc}{p} = \frac{4R \cdot S \cdot r}{S} = 4Rr.$$

Задача 28.

В треугольнике ABC биссектриса l_a угла BAC вычисляется по формуле

$$l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos\frac{A}{2}.$$

Доказать это.

Доказательство.

Пусть биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке L_1 (рис. 27.2). Обозначим S_1 и S_2 площади треугольников ABL_1 и ACL_1. Тогда

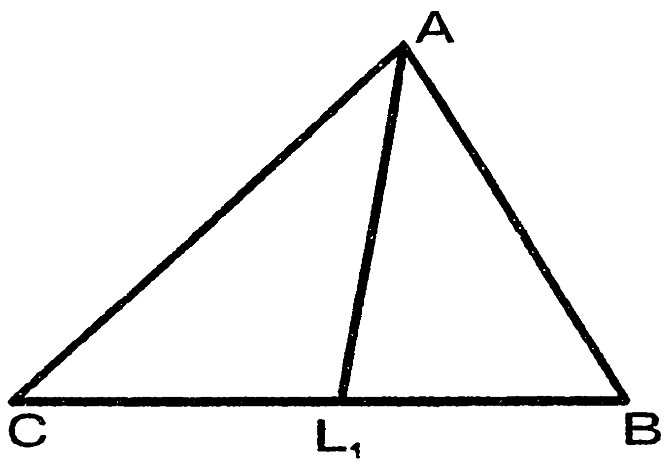


Рис. 27.2

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A, \quad S_1 = \frac{1}{2} c \cdot l_a \sin\frac{A}{2}, \quad S_2 = \frac{1}{2} b \cdot l_a \sin\frac{A}{2}.$$

Но $S = S_1 + S_2$, отсюда

$$\frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} c\, l_a \sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2} b\, l_a \sin\frac{A}{2},$$

$$bc \sin A = l_a \sin\frac{A}{2} (b + c).$$

Отсюда $l_a = \dfrac{2bc}{b+c} \cos\dfrac{A}{2}$.

Задача 29.

Доказать формулу

$$l_a^2 = bc - b_1c_1,$$

где $b_1 = CL_1$, $c_1 = BL_1$, L_1 — точка пересечения биссектрисы угла BAC со стороной BC.

Доказательство.

По теореме косинусов

$$b_1^2 = b^2 + l_a^2 - 2b\,l_a\cos\frac{A}{2},$$

$$c_1^2 = c^2 + l_a^2 - 2c\cdot l_a\cdot\cos\frac{A}{2}, \text{ откуда}$$

$$\frac{b^2 + l_a^2 - b_1^2}{2b} = \frac{c^2 + l_a^2 - c_1^2}{2c}, \text{ или}$$

$$l_a^2(b-c) = bc(b-c) - (cb_1^2 - c_1^2 b).$$

Учитывая свойство биссектрисы внутреннего угла треугольника, имеем:

$$\frac{b}{c} = \frac{b_1}{c_1}, \text{ или } bc_1 = b_1c, \text{ откуда}$$

$$cb_1^2 - c_1^2b = c_1b_1b - c_1b_1c = c_1b_1(b-c).$$

Итак, $l_a^2(b-c) = bc(b-c) - c_1b_1(b-c)$.

Пусть $b \neq c$, тогда $l_a^2 = bc - b_1c_1$.

При $b = c$ формула очевидна.

Задача 30.

Доказать, что

$$l_a = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}.$$

Доказательство.

Учитывая, что $BL_1 = \dfrac{ac}{b+c}$, $CL_1 = \dfrac{ab}{b+c}$, и применяя формулу предыдущей задачи, имеем:

$$l_a^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = \frac{bc}{(b+c)^2}((b+c)^2 - a^2).$$

Отсюда $l_a^2 = \dfrac{bc\,(a+b+c)\,(2p-2a)}{(b+c)^2}$,

$$l_a = \frac{2\sqrt{bcp\,(p-a)}}{b+c}.$$

Задача 31.

Доказать, что если в треугольнике ABC $l_a = l_b$, то $a = b$.

Доказательство.

Применим формулу $l_a = \dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2}$. Имеем:

$$\frac{2\cos\frac{A}{2}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \frac{2\cos\frac{B}{2}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}.$$

Допустим, что $a > b$, или $A > B$. Тогда

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b} \text{ и } \frac{1}{b}+\frac{1}{c} > \frac{1}{a}+\frac{1}{c}.$$

Значит, $\cos\dfrac{A}{2} > \cos\dfrac{B}{2}$, или $A < B$, что противоречит допущению.

Аналогично доказывается, что a не может быть меньшим, чем b. Остается единственное, что $a = b$.

Задача 32.

Площадь треугольника ABC равна S, площадь треугольника HBC (H — ортоцентр) равна S_1. На прямой AH взяли такую точку K, что треугольник BKC — прямоугольный. Доказать, что

$$S_x = \sqrt{S \cdot S_1},$$

где S_x — площадь треугольника BKC.

Доказательство.

Вокруг треугольника ABC опишем окружность и продлим высоту AH_1 до пересечения с окружностью в точке N_1.

По теореме о произведении отрезков хорд имеем:

$$AH_1 \cdot H_1N_1 = BH_1 \cdot CH_1. \qquad (1)$$

Значит, $S_x = \frac{1}{2}KH_1 \cdot BC$.

Поскольку $\angle CKB = 90°$, то

$$KH_1^2 = BH_1 \cdot CH_1. \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2) и учитывая известное равенство $HH_1 = H_1N_1$, получаем

$$KH_1^2 = AH_1 \cdot HH_1.$$

Умножив обе части равенства на $\frac{1}{4}BC^2$, получим

$$\frac{1}{2}AH_1 \cdot BC \cdot \frac{1}{2}HH_1 \cdot BC =$$

$$= \frac{1}{4}KH_1^2 \cdot BC^2, \text{ или}$$

$$S \cdot S_1 = S_x^2; \quad S_x = \sqrt{S \cdot S_1}.$$

Задача 33.

Доказать, что если h_a, h_b, h_c — высоты треугольника ABC, то

$$\frac{1}{h_a} + h_b + h_c \geqslant 9r.$$

Доказательство.

Докажем вначале, что

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

Действительно,

$$h_a = \frac{2S}{a}, \text{ значит, } \frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S}.$$

Аналогично, $\frac{1}{h_b} = \frac{b}{2S}$, $\frac{1}{h_c} = \frac{c}{2S}$. Имеем

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a+b+c}{2S} = \frac{2p}{2S} = \frac{1}{r}.$$

Имеет место неравенство:

$$(a_1 + a_2 + a_3)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right) \geqslant 9$$

(оно доказывается с помощью неравенства Коши для трех положительных чисел).

В нашем случае

$$(h_a + h_b + h_c)\underbrace{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)}_{\frac{1}{r}} \geqslant 9,$$

значит, $h_a + h_b + h_c \geqslant 9r$.

Задача 34.

Дано: h_a, h_b, h_c. Найти S.

Решение.

Имеем: $a = \frac{2S}{h_a}$, $b = \frac{2S}{h_b}$, $c = \frac{2S}{h_c}$,

$$p = \frac{a+b+c}{2} = S\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right),$$

$$p - a = S\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right);$$

$$p - b = S\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b}\right);$$

$$p - c = S\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right).$$

По формуле Герона

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c), \text{ или}$$

$$S^2 = S^4 \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right) \times$$
$$\times \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right).$$

Итак,

$$S = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right)}} \times$$
$$\times \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}} \cdot \sqrt{\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}}}.$$

Задача 35.

Доказать, что в треугольнике ABC

$$S = \frac{1}{2}\sqrt[3]{abc\, h_a h_b h_c}$$

(h_a, h_b, h_c — высоты треугольника ABC).

Доказательство.

Имеем:

$$S = \frac{1}{2}ah_a, \quad S = \frac{1}{2}bh_b, \quad S = \frac{1}{2}ch_c.$$

Значит,

$$S^3 = \frac{1}{8}abc\, h_a h_b h_c, \text{ или } S = \frac{1}{2}\sqrt[3]{abc\, h_a h_b h_c}.$$

Задача 36.

Доказать, что в треугольнике ABC:

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) =$$
$$= (h_a + h_b + h_c)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right).$$

Доказательство.

$$a+b+c=\frac{2S}{h_a}+\frac{2S}{h_b}+\frac{2S}{h_c}=2S\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right);$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{h_a+h_b+h_c}{2S},$$

значит,

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=$$

$$=2S\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\times\frac{1}{2S}(h_a+h_b+h_c),\text{ или}$$

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=$$

$$=(h_a+h_b+h_c)\cdot\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right).$$

Задача 37.

На продолжении сторон BA, CB и AC треугольника ABC построены отрезки AA_1, BB_1, CC_1 так, что

$$AA_1=n\,AB,\quad BB_1=n\,CB,\quad CC_1=n\,AC.$$

Доказать, что

$$S=\frac{S_1}{3n(n+1)+1},$$

где S_1 — площадь треугольника $A_1B_1C_1$.

Доказательство.

Имеем:

$$BB_1=na,\quad AA_1=nc,\quad CC_1=nb.$$

Поскольку площади треугольников C_1B_1B и C_1BC пропорциональны длинам BB_1 и BC, то

$$S_{C_1B_1B}:S_{C_1BC}=na:a=n. \tag{1}$$

Аналогично рассмотрим треугольники C_1BC и ABC. Получим

$$S_{C_1BC} : S_{ABC} = nb : b = n. \qquad (2)$$

Из равенства (2) следует, что $S_{C_1BC} = nS$, а из равенства (1) следует, что

$$S_{C_1B_1B} = n\,(nS) = n^2S.$$

Аналогично получим

$$S_{B_1BA_1} = S_{A_1BC_1} = n\,(n+1)\,S.$$

Таким образом,

$$S_{A_1B_1C_1} = S_1 = S + S_{C_1B_1C} + S_{B_1BA_1} + S_{A_1AC_1} =$$

$$= S + 3\,(n+1)\,n\,S;$$

$$S_1 : S = 3n\,(n+1) + 1.$$

Задача 38.

В треугольнике ABC, площадь которого равна S, проведена биссектриса CE и медиана BD, которые пересекаются в точке F. Найти площадь четырехугольника $ADFE$, если $BC = a$, $AC = b$.

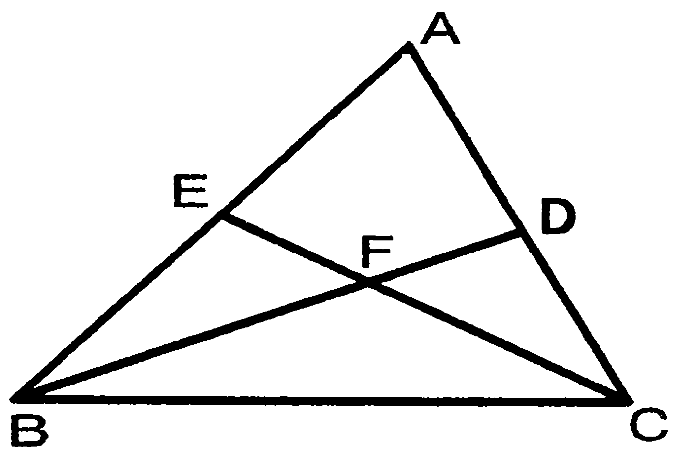


Рис. 27.3

Решение.

Обозначим S_x — площадь искомого четырехугольника $ADEF$; S_1 и S_2 — площади треугольников ACE и DCF. Тогда (рис. 27.3) $S_x = S_1 - S_2$.

Найдем S_1.

$$\frac{S_1}{S_3} = \frac{AE}{BE},$$

где S_3 — площадь треугольника BEC.

Поскольку CE — биссектриса, то $\dfrac{AE}{BE} = \dfrac{b}{a}$. Но

$$S_3 = S - S_1, \text{ поэтому } \frac{S_1}{S - S_1} = \frac{b}{a}, \text{ откуда}$$

$$S_1 = \frac{b}{a+b} S.$$

Для нахождения S_2 рассмотрим треугольник CDB:

$$S_{CDB} = \frac{1}{2} S.$$

Учитывая соотношение $DF : FB$, имеем:

$$S_2 = \frac{b}{b+2a} \cdot \frac{S}{2}.$$

Таким образом,

$$S_x = \frac{b}{a+b} S - \frac{b}{b+2a} \cdot \frac{S}{2} = \frac{(3a+b)\,b}{2\,(a+b)\,(2a+b)} \cdot S.$$

Задача 39.

Найти площадь параллелограмма, зная, что диагонали равны d_1 и d_2, и острый угол между сторонами равен α.

Решение.

В параллелограмме $ABCD$ (рис. 27.4) обозначим

$AC = d_1$, $BD = d_2$,

$\angle ABD = \alpha$, $AB = x$,

$AD = y$. Тогда

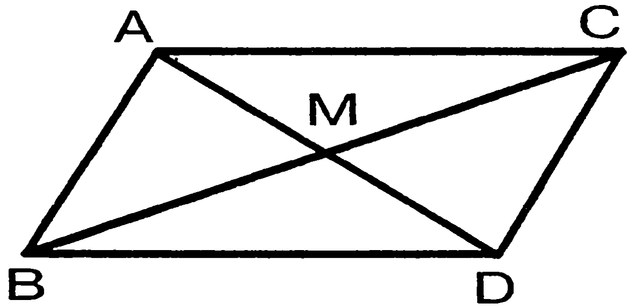


Рис. 27.4

$$d_1^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos\alpha,$$

$$d_2^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha,$$

$$d_1^2 - d_2^2 = 4xy\cos\alpha, \text{ откуда}$$

$$xy = \frac{d_1^2 - d_2^2}{4\cos\alpha}.$$

Площадь параллелограмма S_x:

$$S_x = xy\sin\alpha = \frac{d_1^2 - d_2^2}{4\cos\alpha}\sin\alpha = \frac{d_1^2 - d_2^2}{4}\operatorname{tg}\alpha.$$

Задача 40.

В треугольнике ABC длина медианы m_a вычисляется по формуле

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}.$$

Доказательство. Первый способ.

В треугольнике ABC (рис. 27.4) продлим медиану AM_1 и отложим на ней отрезок $M_1D = AM_1$. Тогда четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, значит,

$$2(AB^2 + AC^2) = AD^2 + BC^2, \text{ или}$$

$$4m_a^2 + a^2 = 2(b^2 + c^2), \text{ отсюда}$$

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}.$$

Второй способ.

Пусть $\overline{BC} = \overline{a}$, $\overline{AC} = \overline{b}$, $\overline{AB} = \overline{c}$, $\overline{AM_1} = \overline{m}_1$. Тогда

$$\overline{m}_1 = \frac{1}{2}(\overline{b} + \overline{c}), \text{ или}$$

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(b^2 + c^2 + 2\,\overline{b}\,\overline{c}).$$

Но $\overline{b} \cdot \overline{c} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$ (докажите!). Значит,

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}.$$

Задача 41 *(теорема Лейбница).*

Доказать, что алгебраическая сумма квадратов расстояний произвольной точки X плоскости до вершин треугольника ABC и его центроида M (центроид — точка пересечения медиан) связаны соотношением

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 = AM^2 + BM^2 + CM^2 + 3\,XM^2.$$

Доказательство.

Из треугольников XAM и XMM_1

$$XA^2 = XM^2 + AM^2 - 2AM \cdot MY$$

(Y — проекция точки X на медиану).

$$XM_1^2 = XM^2 + MM_1^2 + 2MM_1 \cdot MY.$$

Умножим второе равенство на 2 и сложим с первым, учитывая, что $2MM_1 = AM$. Получим

$$XA^2 + 2XM_1^2 = 3 \cdot XM^2 + AM^2 + 2MM_1^2.$$

Но XM_1 — медиана треугольника BXC, а MM_1 — медиана треугольника BMC. По формуле медианы (см. предыдущую задачу) имеем:

$$XM_1 = \frac{2\,(XB^2 + XC^2) - BC^2}{4},$$

$$MM_1^2 = \frac{2\,(MB^2 + MC^2) - BC^2}{4}.$$

Итак,

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 - \frac{1}{2}BC^2 =$$

$$= 3XM^2 + MA^2 + MB^2 + MC^2 - \frac{1}{2}BC^2, \text{ или}$$

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 = 3XM^2 + MA^2 + MB^2 + MC^2.$$

Задача 42.

Найти углы треугольника ABC, если

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3R^2.$$

Решение.

Пусть точка X (см. предыдущую задачу) совпадает с точкой O — центром описанной около треугольника ABC окружности. Тогда

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3OM^2,$$

или, учитывая условие, получим $OM = 0$. А это возможно тогда и только тогда, когда треугольник ABC — равносторонний, то есть $A = B = C = 60°$.

Задача 43.

Доказать, что в треугольнике ABC

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Доказательство.

По формуле медианы имеем

$$m_a^2 + m_b^2 + m_a^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} + \frac{a^2}{2} -$$

$$-\frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{4} = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Задача 44.

Доказать, что в треугольнике ABC

$$R = \frac{ab + bc + ac}{6(l + m + n)},$$

где l, m, n — расстояния от точки пересечения медиан (центроида) соответственно до сторон треугольника BC, AC, AB.

Доказательство.

Поскольку треугольники ABM, BMC, AMC — равновелики, то

$$\frac{al}{2} = \frac{bm}{2} = \frac{cn}{2} = \frac{S}{3}.$$

Разделим эти равенства на $\frac{1}{2}abc$. Имеем:

$$\frac{l}{bc} = \frac{m}{ac} = \frac{n}{ab} = \frac{2S}{3abc}, \text{ или}$$

$$\frac{l + m + n}{ab + ac + bc} = \frac{2S}{3abc}.$$

Но $R = \dfrac{abc}{4S}$, или

$$R = \frac{ab + bc + ac}{6\,(l + m + n)}.$$

Задача 45.

Если в треугольнике ABC квадраты сторон образуют арифметическую прогрессию, то квадраты медиан также образуют арифметическую прогрессию. Доказать.

Доказательство.

Пусть в треугольнике ABC AC — средняя по величине сторона. Тогда по условию задачи $2b^2 = a^2 + c^2$. Имеем:

$$m_a^2 = \frac{2\,(b^2 + c^2) - a^2}{4} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} = \frac{3c^2}{4}.$$

Аналогично $m_b^2 = \dfrac{3}{4}\,b^2$, $m_c^2 = \dfrac{3}{4}\,a^2$. Тогда

$$2m_b^2 = \frac{3}{4} \cdot 2b^2 = \frac{3}{4}\,(c^2 + a^2) = m_a^2 + m_c^2.$$

Задача 46.

Найти зависимость между сторонами треугольника, если две его медианы взаимно перпендикулярны.

Решение.

Пусть медиана BM_2 перпендикулярна медиане CM_3. Тогда

$$\frac{4}{9}\,(m_a^2 + m_b^2) = a^2, \text{ или}$$

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{2\,(a^2 + c^2) - b^2 + 2\,(a^2 + b^2) - c^2}{4} = a^2, \text{ или}$$

$$b^2 + c^2 = 5a^2.$$

Задача 47.

В окружность вписан треугольник ABC. Медиана CM_3 пересекает окружность вторично в точке D. Доказать, что

$AC^2 + BC^2 = 2CM_3 \cdot CD.$

Доказательство.

Поскольку $CD = CM_3 + M_3D$ (рис. 27.5), то

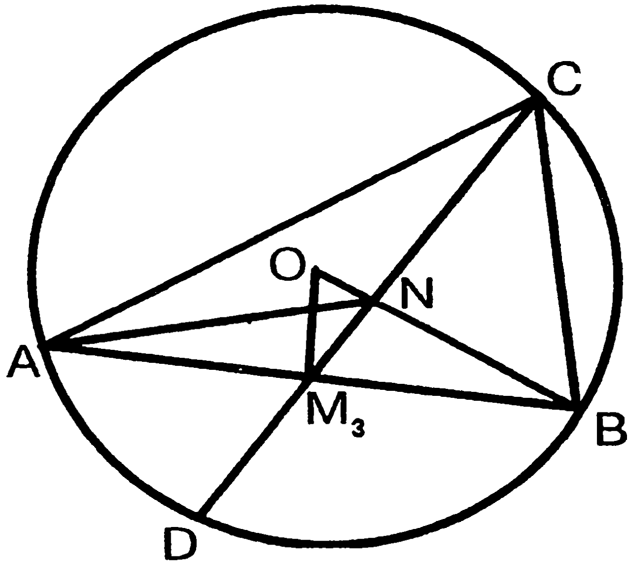


Рис. 27.5

$$2CM_3 \cdot CD =$$

$$= 2m_c\,(m_c + M_3D) = 2m_c^2 + 2m_c \cdot M_3D.$$

Но $2M_3D \cdot m_c = 2AM_3 \cdot M_3B = \frac{1}{2}c^2$. Итак,

$$2CM_3 \cdot CD = 2m_c^2 + \frac{1}{2}c^2 =$$

$$= b^2 + a^2 - \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}c^2 = b^2 + a^2.$$

Задача 48.

Если на медиане CM_3 существует такая точка N, что

$$NA^2 + NB^2 = 2NC^2,$$

то отрезок ON перпендикулярен отрезку CM_3. Доказать.

Доказательство.

Из треугольника ANB получим

$$NM_3^2 = \frac{2\,(AN^2 + NB^2) - AB^2}{4}.$$

Учитывая условие, имеем

$$NM_3^2 = NC^2 - \frac{AB^2}{4}.$$

Из прямоугольного треугольника OM_3B:

$$\frac{AB^2}{4} = M_3B^2 = R^2 - OM_3^2$$

(R — радиус описанной около ABC окружности).

Итак, $NM_3^2 = NC^2 + OM_3^2 - R^2$. Обозначим $\angle ONM_3 = \varphi$. Тогда

$$R^2 = CN^2 + NO^2 + 2CN \cdot NO \cos\varphi, \qquad (1)$$

$$OM_3 = NO^2 + NM_3^2 - 2NO \cdot NM_3 \cos\varphi =$$

$$= NO^2 + NC^2 + OM_3^2 - R^2 - 2NO \cdot NM_3 \cos\varphi,$$

откуда

$$R^2 = NO^2 + NC^2 - 2NO \cdot NM_3 \cos\varphi. \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), получим

$$NO\,(CN + NM_3)\cos\varphi = 0,$$

значит, $\varphi = 90°$.

Задача 49.

Обозначим точки пересечения медиан с описанной около треугольника ABC окружностью через D_1, D_2, D_3. Доказать, что

$$\frac{AM}{MD_1} + \frac{BM}{MD_2} + \frac{CM}{MD_3} = 3$$

(M — центроид треугольника ABC).

Доказательство.

Выразим отношение $\dfrac{AM}{MD}$ через стороны треугольника ABC. Имеем

$$AM = \frac{2}{3}m_a; \quad MD = \frac{1}{3}m_a + M_1D_1$$

(M_1 — середина стороны BC).

Учитывая, что $M_1D_1 \cdot AM_1 = CM_1 \cdot M_1B$, имеем:

$$M_1D_1 = \frac{a^2}{4m_a}.$$

Итак, $MD_1 = \frac{1}{3}m_a + \frac{a^2}{4m_a}$ и

$$\frac{AM}{MD_1} = \frac{2m_a}{3\left(\frac{1}{3}m_a + \frac{a^2}{4m_a}\right)} =$$

$$= \frac{8m_a^2}{4m_a^2 + 3a^2} = \frac{-a^2 + 2b^2 + 2c^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Аналогично,

$$\frac{BM}{MD_2} = \frac{-b^2 + 2a^2 + 2c^2}{a^2 + b^2 + c^2},$$

$$\frac{CM}{MD_3} = \frac{-c^2 + 2a^2 + 2b^2}{a^2 + b^2 + c^2},$$

значит, $\frac{AM}{MD_1} + \frac{BM}{MD_2} + \frac{CM}{MD_3} = 3.$

Задача 50.

Вычислить углы треугольника ABC, если треугольник AMM_2 — равносторонний (M_2 — точка пересечения медианы m_b со стороной BC).

Решение.

Поскольку $AM_2 = M_2M = \frac{1}{2}b$, то

$$BM_2 = \frac{3}{2}b, \quad AM_1 = \frac{3}{4}b.$$

Поэтому $9b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2$, $9b^2 = 8b^2 + 8c^2 - 4a^2$, или

$$5b^2 = a^2 + c^2, \quad b^2 = 8c^2 - 4a^2.$$

Отсюда $7a^2 = 13c^2$, $7b^2 = 4c^2$, $4a^2 = 13b^2$. Тогда

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2abc} =$$

$$= \frac{\frac{4}{7}c^2 + c^2 - \frac{13}{7}c^2}{2 \cdot \frac{2c}{\sqrt{7}} \cdot c} = -\frac{1}{2\sqrt{7}}.$$

Аналогично

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{8}{\sqrt{91}};$$

$$\cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab} = \frac{5}{2\sqrt{13}}.$$

Задача 51.

Доказать, что в треугольнике ABC

$$\operatorname{ctg} \angle CM_3B = \frac{1}{2}(\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B)$$

(M_3 — точка пересечения медианы m_c со стороной AB).

Доказательство.

Обозначим $\angle CM_3B = \varphi$. Пусть $B > A$. Тогда

$M_3H_3 = CH_3 \operatorname{ctg} \varphi$ (H_3 — основание высоты h_c).

$$AH_3 = CH_3 \operatorname{ctg} A, \quad BH_3 = CH_3 \operatorname{ctg} B.$$

Поскольку $AM_3 = M_3B$, то

$$AH_3 - BH_3 = (AM_3 + M_3H_3) -$$

$$- (M_3B - M_3H_3) = 2\, M_3H_3.$$

Значит, $CH_3 \operatorname{ctg} A - CH_3 \operatorname{ctg} B = 2CH_3 \operatorname{ctg} \varphi$, или

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{1}{2}(\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B), \text{ или}$$

$$\operatorname{ctg} \angle CM_3B = \frac{1}{2}(\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B).$$

Задача 52.

Доказать, что в треугольнике ABC

$$\operatorname{ctg} \angle BAM_1 + \operatorname{ctg} \angle CBM_2 + \operatorname{ctg} \angle ACM_3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{S}.$$

Доказательство.

Можно показать (с помощью теоремы косинусов), что

$$a^2 = b^2 + c^2 - 4S \operatorname{ctg} \angle BAC.$$

Тогда

$$BM^2 = c^2 + AM^2 - 4S_1 \operatorname{ctg} \angle BAM_1$$

(S_1 — площадь треугольника AMB).

$$CM^2 = a^2 + BM^2 - 4S_2 \operatorname{ctg} \angle CBM_2,$$

$$AM^2 = b^2 + CM^2 - 4S_3 \operatorname{ctg} \angle ACM_3$$

(S_2 — площадь треугольника BMC, S_3 — площадь треугольника AMC).

Складывая эти равенства и учитывая, что площадь каждого треугольника равна $\frac{1}{3}S$, имеем:

$$4 \cdot \frac{1}{3}(\operatorname{ctg} \angle BAM_1 + \operatorname{ctg} \angle CBM_2 + \operatorname{ctg} \angle ACM_3) = a^2 + b^2 + c^2, \text{ или}$$

$$\operatorname{ctg} \angle BAM_1 + \operatorname{ctg} \angle CBM_2 + \operatorname{ctg} \angle ACM_3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{S}.$$

Задача 53.

В треугольнике ABC

$$3 \operatorname{tg} A + \operatorname{ctg} B = 0.$$

Доказать, что $m_c = R$.

Доказательство.

Преобразуем равенство, заданное в условии так:

$$\frac{3\sin A}{\cos A} + \frac{\cos B}{\sin B} = 0, \text{ или}$$

$$3\sin A \sin B + \cos C \cos A = 0;$$

$$2\sin A \sin B + \cos (A - B) = 0;$$

$$\cos (A - B) - \cos (A + B) + \cos (A - B) = 0.$$

Итак, $2\cos (A - B) - \cos (A + B) = 0$.

Далее имеем:

$$CM_3^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{4} = \frac{R^2}{2}(4\sin^2 A + 4\sin^2 B - 2\sin^2 C) =$$

$$= \frac{R^2}{2}(2 - 2\cos 2A + \cos 2B) + 2\cos^2 (A + B) =$$

$$= \frac{R^2}{2}(2 - 2\cos (A + B)(2\cos (A - B) - \cos (A + B))).$$

Задача 54.

Внутри треугольника ABC найти точку, сумма квадратов расстояний которой до вершин треугольника имеет наименьшее значение.

Решение.

Докажем, что искомая точка — центроид M треугольника ABC. Согласно теореме Лейбница

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 = AM^2 + BM^2 + CM^2 + 3XM^2 =$$

$$= \frac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) + 3\,XM^2 =$$

$$= \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + 3\,XM^2.$$

Выражение $XA^2 + XB^2 + XC^2$ будет наименьшим, если $XM^2 = 0$, то есть если точки X и M совпадают. Это наименьшее значение равно $\frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$.

Задача 55.

Доказать, что в треугольнике ABC

$$\frac{1}{\sqrt{p-a}}+\frac{1}{\sqrt{p-b}}+\frac{1}{\sqrt{p-c}} \leqslant \frac{\sqrt{p}}{r}.$$

Доказательство.

Преобразуем левую часть неравенства:

$$\frac{1}{\sqrt{p-a}}+\frac{1}{\sqrt{p-b}}+\frac{1}{\sqrt{p-c}} =$$

$$=\frac{\sqrt{(p-b)(p-c)}+\sqrt{(p-a)(p-c)}+\sqrt{(p-a)(p-b)}}{\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

Учитывая, что $\sqrt{a_1a_2} \leqslant \frac{a_1+a_2}{2}$ (a_1, a_2 — положительные числа), имеем:

$$\sqrt{(p-b)(p-c)} \leqslant \frac{p-b+p-c}{2};$$

$$\sqrt{(p-a)(p-c)} \leqslant \frac{p-a+p-c}{2};$$

$$\sqrt{(p-a)(p-b)} \leqslant \frac{p-a+p-b}{2}.$$

Сложив три последних неравенства, получим

$$\sqrt{(p-b)(p-c)}+\sqrt{(p-a)(p-c)}+\sqrt{(p-a)(p-b)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2p-b-c+2p-a-c+2p-a-b}{2} =$$

$$= \frac{6p-2(a+b+c)}{2} = \frac{6p-4p}{2} = p.$$

Учитывая, что S — площадь треугольника ABC, имеем

$$\frac{1}{\sqrt{p-a}}+\frac{1}{\sqrt{p-b}}+\frac{1}{\sqrt{p-c}} \leqslant \frac{p}{\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}} =$$

$$= \frac{p\sqrt{p}}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} = \frac{p\sqrt{p}}{S} = \frac{p\sqrt{p}}{p\cdot r} = \frac{\sqrt{p}}{r}.$$

Задача 56.

Доказать, что $S \geqslant l_c^2 \operatorname{tg}\dfrac{C}{2}$

(l_c — биссектриса угла ACB).

Доказательство.

Имеем $l_c = \dfrac{2ab}{a+b}\cdot\cos\dfrac{C}{2}$. Тогда

$$l_c^2\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2}\cos^2\frac{C}{2}\cdot\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}} =$$

$$= \frac{4ab}{a^2+b^2+2ab}\cdot\frac{1}{2}ab\cdot 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4ab}{2ab+2ab}\cdot\frac{1}{2}ab\sin C = S.$$

Задача 57.

В треугольнике ABC h_a, h_b, h_c — высоты, d_1, d_2, d_3 — расстояния от оснований L_1, L_2, L_3 биссектрис углов треугольника до его стороны. Доказать, что

$$\frac{d_1}{h_a}+\frac{d_2}{h_b}+\frac{d_3}{h_c} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Доказательство.

Обозначим S, S_1, S_2 — площади треугольников ABC, AL_1B, AL_1C соответственно. Тогда

$$S = S_1 + S_2, \text{ или}$$

$$\frac{c\cdot d_1}{2}+\frac{b\cdot d_1}{2} = \frac{a\cdot h_a}{2}.$$

Итак, $\dfrac{d_1}{h_a} = \dfrac{a}{b+c}$.

Аналогично, $\dfrac{d_2}{h_b} = \dfrac{b}{a+c}$, $\dfrac{d_3}{h_c} = \dfrac{c}{a+b}$ и

$$\frac{d_1}{h_a}+\frac{d_2}{h_b}+\frac{d_3}{h_c}=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}.$$

Докажем далее, что для положительных чисел a, b, c имеет место неравенство

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}. \qquad (1)$$

Действительно,

$$\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{a+c}+1+\frac{c}{a+b}+1\geqslant\frac{3}{2}+3, \text{ или}$$

$$\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{b+a+c}{a+c}+\frac{c+a+b}{a+b}=$$

$$=(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)\geqslant\frac{9}{2}.$$

Значит,

$$2(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)\geqslant 9, \text{ или}$$

$$((a+b)+(b+c)+(a+c))\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\right)\geqslant 9,$$

что очевидно, если применить неравенство Коши ($n=3$). Применяя неравенство (1) к условию задачи, имеем

$$\frac{d_1}{h_a}+\frac{d_2}{h_b}+\frac{d_3}{h_c}\geqslant\frac{3}{2}.$$

Задача 58.

Доказать, что $a^2=(b-c)^2+4S\operatorname{tg}\frac{A}{2}$.

Доказательство.

По теореме косинусов

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A;$$

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A;$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{\sin A}.$$

Имеем:

$$a^2 = (b-c)^2 + 2bc\,(1-\cos A) =$$

$$= (b-c) + 4S\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

Задача 59.

Доказать, что $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4S\sqrt{3}$.

Доказательство.

По формуле Герона и неравенству Коши ($n = 3$), имеем:

$$4S = \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{(a+b+c)\frac{(a+b+c)^3}{27}} = \frac{(a+b+c)^2}{3\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{3(a^2+b^2+c^2) - ((a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2)}{3\sqrt{3}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{3}}, \text{ откуда}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4S\sqrt{3}.$$

Задача 60.

Определить площадь треугольника, если даны стороны a и b и биссектриса l угла между ними.

Решение.

Пусть $\angle ACB = 2\alpha$. Воспользуемся формулой биссектрисы $l_c = \dfrac{2ab\cdot\cos\alpha}{a+b}$.

Таким образом, $\cos\alpha = \dfrac{l\,(a+b)}{2ab}$,

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{l^2\,(a+b)^2}{4a^2b^2}}\ .$$

$$S = \frac{1}{2}ab\sin 2\alpha = ab\sin\alpha\cos\alpha =$$

$$= \frac{l(a+b)}{4ab}\sqrt{4a^2b^2 - l^2(a+b)^2}.$$

Задача 61.

Доказать, что в произвольном треугольнике

$$\sqrt{a\sin A} + \sqrt{b\sin B} + \sqrt{c\sin C} =$$

$$= \sqrt{2p(\sin A + \sin B + \sin C)}.$$

Доказательство.

По теореме синусов

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \text{ или}$$

$$\frac{a\sin A}{\sin^2 A} = \frac{b\sin B}{\sin^2 B} = \frac{c\sin C}{\sin^2 C}, \quad \text{или}$$

$$\frac{\sqrt{a\sin A}}{\sin A} = \frac{\sqrt{b\sin B}}{\sin B} = \frac{\sqrt{c\sin C}}{\sin C}.$$

Поскольку в ряде равных отношений сумма всех предыдущих членов относится к сумме всех последующих как произвольный из предыдущих к своему последующему, то

$$\frac{\sqrt{a\sin A} + \sqrt{b\sin B} + \sqrt{c\sin C}}{\sin A + \sin B + \sin C} =$$

$$= \sqrt{\frac{a}{\sin A}} = \sqrt{\frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2p}{\sin A + \sin B + \sin C}}.$$

Задача 62.

Доказать, что в непрямоугольном треугольнике

$$\frac{\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} A} = \frac{a^2}{b^2}.$$

Доказательство.

$$\frac{\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} A} = \frac{\operatorname{tg} A (\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)}{\operatorname{tg} B (\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C)} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg} A \sin (B + C) \cos A \cos C}{\operatorname{tg} B \sin (A + C) \cos B \cos C} = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 B} = \frac{a^2}{b^2}.$$

Задача 63.

Доказать, что в треугольнике ABC

$$\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \cos A + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) \cos B +$$

$$+ \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \cos C = 3.$$

Доказательство.

По теореме синусов:

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}, \quad \frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A}, \quad \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}.$$

Итак, левую часть равенства перепишем следующим образом:

$$\left(\frac{\sin B}{\sin C} + \frac{\sin C}{\sin B}\right) \cos A + \left(\frac{\sin C}{\sin A} + \frac{\sin A}{\sin C}\right) \cos B +$$

$$+ \left(\frac{\sin A}{\sin B} + \frac{\sin B}{\sin A}\right) \cos C =$$

$$= \frac{1}{\sin A} (\sin B \cos C + \sin C \cos B) + \frac{1}{\sin B} (\sin C \cos A +$$

$$+ \sin A \cos C) + \frac{1}{\sin C} (\sin A \cos B + \sin B \cos A) =$$

$$= \frac{\sin(B+C)}{\sin A} + \frac{\sin(C+A)}{\sin B} + \frac{\sin(A+B)}{\sin C} =$$

$$= \frac{\sin A}{\sin A} + \frac{\sin B}{\sin B} + \frac{\sin C}{\sin C} = 3.$$

Задача 64.

Доказать, что для всякого треугольника ABC имеет место соотношение

$$2S = IA^2 \sin A + IB^2 \sin B + IC^2 \sin C,$$

где I — центр вписанной в треугольник ABC окружности, S — площадь треугольника.

Доказательство.

Пусть окружность касается сторон AC, AB, BC треугольника ABC соответственно в точках D, E, F. Из треугольника AID имеем:

$$AD = IA \cos\frac{A}{2}, \quad ID = IA \sin\frac{A}{2},$$

$$2\,S_{AID} = ID \cdot AD = IA^2 \cdot \sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} IA^2 \sin A.$$

Аналогично, $2S_{CID} = \frac{1}{2} IC^2 \sin C,$

$$2S_{BIF} = \frac{1}{2} IB^2 \sin B.$$

Таким образом,

$$S_{ABC} = 2S_{AID} + 2S_{CID} + 2S_{BIF} =$$

$$= \frac{1}{2}(IA^2 \sin A + IB^2 \sin B + IC^2 \sin C).$$

Задача 65.

Доказать, что в треугольнике ABC

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ac).$$

Доказательство.

Используя неравенство треугольника, имеем

$$a^2 > (b - c)^2 = b^2 - 2bc + c^2;$$

$$b^2 > a^2 - 2ac + c^2;$$

$$c^2 > a^2 - 2ab + b^2.$$

Сложив эти неравенства, получим заданное.

Задача 66.

Доказать, что в треугольнике ABC

$$a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 9R^2.$$

Доказательство.

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2 (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) =$$

$$= 4R^2 (2 + 2 \cos A \cos B \cos C) \leqslant 4R^2 \left(2 + 2 \cdot \frac{1}{8}\right) = 9R^2.$$

Задача 67.

Точка X принадлежит треугольнику ABC. Доказать, что

$$AX + BX + CX < 2p < 2 (AX + BX + CX).$$

Доказательство.

1) $AX + XB > AB;$
$AX + CX > AC;$
$BX + CX > BC.$

Сложив три неравенства одного смысла, получим правую часть заданного неравенства.

2) Имеем

$$AB + BC > AX + CX;$$

$$BC + AC > BX + AX;$$

$$AB + AC > BX + CX,$$

откуда $4p > 2 (AX + BX + CX)$.

Получили левую часть доказываемого неравенства.

Задача 68.

Доказать, что из всех четырехугольников с одними и теми же сторонами четырехугольник, около которого можно описать окружность, имеет наибольшую площадь.

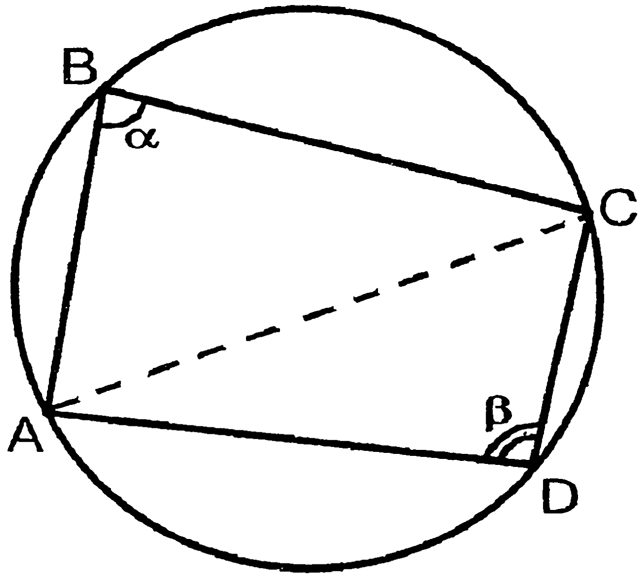


Рис. 27.6

Доказательство.

Обозначим $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $\angle ABC = \alpha$, $\angle CDA = \beta$.

Имеем:

$$2S = ab\sin\alpha + dc\sin\beta. \tag{1}$$

Возведя равенство (1) в квадрат, получим

$$4S^2 = a^2b^2\sin^2\alpha + 2a\cdot bcd\sin\alpha\sin\beta +$$

$$+ c^2d^2\sin^2\beta, \text{ или}$$

$$4S^2 = a^2b^2 + c^2d^2 + 2abcd\sin\alpha\sin\beta -$$

$$- (a^2b^2\cos^2\alpha + c^2d^2\cos^2\beta). \tag{2}$$

По теореме косинусов имеем:

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2 + d^2 - 2cd\cos\beta, \text{ отсюда}$$

$$ab\cos\alpha - cd\cos\beta = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2}. \tag{3}$$

Возведя равенство (3) в квадрат, получим:

$$a^2b^2\cos^2\alpha - 2abcd\cos\alpha\cos\beta + c^2d^2\cos^2\beta =$$

$$= \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2}\right)^2 + 2abcd\cos\alpha\cos\beta. \tag{4}$$

Подставив последнее выражение в равенство (2), получим

$$4S^2 = a^2b^2 + c^2d^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2}\right)^2 - \\ - 2abcd\cos(\alpha + \beta). \qquad (5)$$

Максимум $4S^2$ совпадает с максимумом S, но выражение (5) имеет максимум при $\cos(\alpha + \beta) = -1$, $\alpha + \beta = 180°$.

Задача 69.

В остроугольном треугольнике

$$a^2 \operatorname{ctg} A + b^2 \operatorname{ctg} B + c^2 \operatorname{ctg} C = 4S.$$

Доказательство.

Мы доказали, что

$$a \cdot AH + b \cdot BH + c \cdot CH = 4S.$$

Учитывая, что $a = 2R\sin A$, $AH = 2R\cos A$, имеем

$$a \cdot 2R\cos A + b \cdot 2R\cos B + c \cdot 2R\cos C = 4S, \text{ или}$$

$$\frac{a^2 \cdot 2R\cos A}{2R\sin A} + \frac{b^2 \cdot 2R\cos B}{2R\sin B} + \frac{c^2 \cdot 2R\cos C}{2R\sin C} = 4S,$$

а значит, предложенная формула доказана.

Задача 70.

Даны n точек $A_1, A_2, \dots, A_n$. Доказать, что существует единственная точка X, что

$$\overline{XA_1} + \overline{XA_2} + \dots + \overline{XA_n} = \bar{0}.$$

Доказательство. Единственность.

Допустим, что для двух точек X_1 и X_2 выполняются равенства:

$$\overline{X_1A_1} + \overline{X_1A_2} + \dots + \overline{X_1A_n} = 0 \text{ и}$$

$$\overline{X_2A_1} + \overline{X_2A_2} + \dots + \overline{X_2A_n} = 0.$$

Почленно вычитая, получим

$$\overline{X_1A_1} - \overline{X_2A_1} = \overline{X_1X_2},$$

$$\overline{X_1A_2} - \overline{X_2A_2} = \overline{X_1X_2},$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\overline{X_1A_n} - \overline{X_2A_n} = \overline{X_1X_2},$$

следовательно, $n\,\overline{X_1X_2} = \overline{0}$ и $\overline{X}_1 \equiv \overline{X}_2$.

Существование.

Выберем произвольную точку O и положим

$$\overline{OX} = \frac{1}{n}(\overline{OA_1} + \ldots + \overline{OA_n}).\ \text{Имеем:}$$

$$\overline{XA_1} = \overline{XO} + \overline{OA_1},$$
$$\overline{XA_2} = \overline{XO} + \overline{OA_2},$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\overline{XA_n} = \overline{XO} + \overline{OA_n}.$$

Получим

$$\overline{XA_1} + \overline{XA_2} + \ldots + \overline{XA_n} = \overline{0}.$$

Задача 71.

Даны три компланарных единичных вектора $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ такие, что

$$\overline{e}_1\,\overline{e}_2 + \overline{e}_2\,\overline{e}_3 + \overline{e}_1\,\overline{e}_2 = -1.$$

Доказать, что два из них противоположны.

Доказательство.

Так как $\overline{e}_1^{\,2} = 1$, имеем

$$e_1^2 + \overline{e}_2 \cdot \overline{e}_2 + \overline{e}_2 \cdot \overline{e}_3 + \overline{e}_1 \cdot \overline{e}_3 = 0,$$

то есть $(\overline{e}_1 + \overline{e}_3)(\overline{e}_1 + \overline{e}_2) = 0$.

Аналогично,

$$(\overline{e}_1 + \overline{e}_2)(\overline{e}_2 + \overline{e}_3) = 0;$$

$$(\overline{e}_1 + \overline{e}_3)(\overline{e}_2 + \overline{e}_3) = 0.$$

Но на плоскости не существует трех ненулевых векторов таких, что все их попарно скалярные произведения нулевые. Следовательно, один из векторов

$$(\bar{e}_1 + \bar{e}_2),\ (\bar{e}_1 + \bar{e}_3),\ (\bar{e}_2 + \bar{e}_3)$$

равен нулю.

Задача 72.

Доказать, что в прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сумма квадратов расстояний любой точки пространства до вершин A_1, B_1, C_1 и D равна сумме квадратов ее расстояний до вершин A, B, C и D_1.

Доказательство.

Докажем, что $XA_1^2 + XC^2 = XB_1^2 + XD^2$ (X — произвольная точка).

Имеем:

$$\overline{XA}_1^{\,2} + \overline{XC}^{\,2} - \overline{XB}_1^{\,2} - \overline{XD}^{\,2} =$$

$$= (\overline{XA}_1^{\,2} - \overline{XB}_1^{\,2}) - (\overline{XD}^{\,2} - \overline{XC}^{\,2}) =$$

$$= (\overline{XA}_1 + \overline{XB}_1)\,\overline{B_1A_1} - (\overline{XD} + \overline{XC}).$$

Поскольку $\overline{CD} = \overline{B_1A_1}$, то

$$(\overline{XA_1} + \overline{XB_1})\,\overline{CD} - (\overline{XD} + \overline{XC})\,\overline{CD} =$$

$$= \overline{CD}\,((\overline{XA_1} - \overline{XD}) + (\overline{XB_1} - \overline{XC})) =$$

$$= \overline{CD}\,(\overline{DA_1} + \overline{CB_1}) = 2\,\overline{CD}\cdot\overline{CB_1}.$$

Поскольку $CD \perp CB_1$, то $\overline{CD}\cdot\overline{CB_1} = 0$.

Отсюда

$$\overline{XA}_1^{\,2} + \overline{XC}^{\,2} - \overline{XB}_1^{\,2} - \overline{XD}^{\,2} = 0,$$

поэтому $XA_1^2 + XC^2 = XB_1^2 + XD^2$.

Аналогично доказывается равенство для другой пары вершин.

Задача 73.

Доказать формулу Гамильтона:

$$\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC},$$

где O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, H — ортоцентр.

Доказательство.

$$\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{AH}.$$

Поскольку $\overline{AH} = 2\,\overline{OM_1}$, а $2\,\overline{OM_1} = \overline{OB} + \overline{OC}$ (M_1 — середина стороны BC), то

$$\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}.$$

Задача 74.

В треугольнике ABC I — центр вписанной окружности, W_1, W_2, W_3 — точки пересечения биссектрис его внутренних углов с описанной окружностью, центр которой — точка O. Доказать, что

$$\overline{OI} = \overline{OW_1} + \overline{OW_2} + \overline{OW_3}.$$

Доказательство.

Докажите самостоятельно, что точка I — ортоцентр треугольника $W_1W_2W_3$. Значит, по формуле Гамильтона для треугольника $W_1W_2W_3$ имеем

$$\overline{OI} = \overline{OW_1} + \overline{OW_2} + \overline{OW_3}.$$

Задача 75.

Доказать с помощью векторов, что в треугольнике ABC центроид M, ортоцентр H, центр описанной окружности — точка O — принадлежат одной прямой (прямая Эйлера), причем

$$OM : MH = 1 : 2.$$

Доказательство.

Известно, что если X — произвольная точка, то

$$3\,\overline{XM} = \overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC}.$$

Если точка X совпадает с точкой O, то

$$3\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}.$$

Учитывая формулу Гамильтона, имеем

$$3\overline{OM} = \overline{OH},$$

а это доказывает утверждение задачи.

Задача 76.

Точки O и I — центры описанной около треугольника ABC и вписанной в него окружностей, R и r — их радиусы. Доказать с помощью векторов, что

$$OI^2 = R^2 - 2Rr \text{ (формула Эйлера)}.$$

Доказательство.

Мы доказали, что $\overline{OI} = \overline{OW_1} + \overline{OW_2} + \overline{OW_3}$. Возведем обе части равенства в скалярный квадрат, учитывая, что

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}. \text{ Получим}$$

$$OI^2 = (\overline{OW_1} + \overline{OW_2} + \overline{OW_3})^2 =$$

$$= 3R^2 - 2R^2(\cos A + \cos B + \cos C) =$$

$$= 3R^2 - 2R\left(1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) =$$

$$= 3R^2 - 2R(r + R) = R^2 - 2Rr.$$

Задача 77.

Найти зависимость между двугранными углами правильной треугольной пирамиды.

Решение.

Обозначим площадь основания пирамиды $DABC$ (рис. 27.7) через S, площадь боковой грани — через S_1, линейные углы двугранных углов $\angle BEC = \gamma$ и $\angle DA_1A = \beta$.

Спроектируем боковые грани на основание пирамиды. Тогда

$$S = 3S_1 \cdot \cos\beta.$$

Спроектируем теперь грани на одну из боковых граней. Тогда

$$S_1 \cong 2S_1 \cos\gamma + S\cos\beta.$$

Из этих равенств имеем:

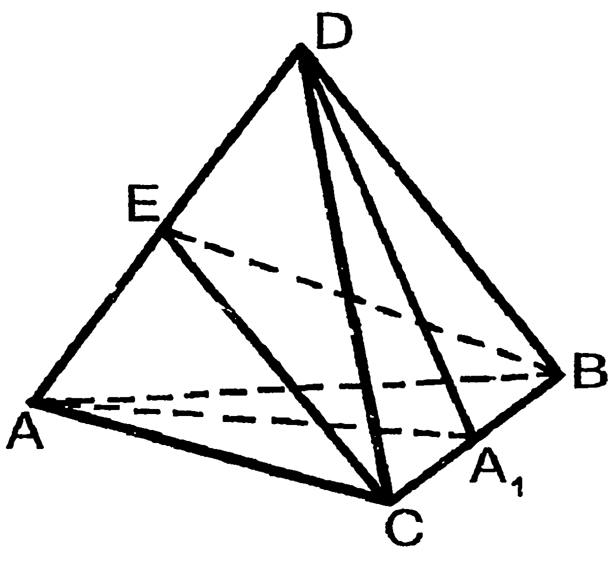


Рис. 27.7

$$\frac{S}{S_1} = 3\cos\beta,$$

$$1 = 2\cos\gamma + \frac{S}{S_1}\cos\beta,$$

откуда $2\cos\gamma + 3\cos^2\beta = 1$.

Задача 78.

Доказать, что

$$N_1N_2^2 = \frac{1}{4}(b^2 + b_1^2 + c^2 + c_1^2 - a^2 - a_1^2),$$

где N_1 и N_2 — середины ребер BC и AD.

Доказательство.

Рассмотрим в тетраэдре $DABC$ медианы треугольников DBC, ABC, AN_1D.

Тогда по формуле медианы имеем:

$$DN_1^2 = \frac{2(b_1^2 + c_1^2) - a^2}{4};$$

$$AN_1^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4};$$

$$N_1N_2^2 = \frac{2(AN_1^2 + DN_1^2) - a_1^2}{4} = \frac{b^2 + b_1^2 + c^2 + c_1^2 - a^2 - a_1^2}{4}.$$

Задача 79.

Даны три различные точки A, B и C. Найти множество таких точек M, что

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = Q, \text{ где } Q > 0.$$

Решение.

Возьмем точки M и M_1, отличные от A, B и C. G — центроид треугольника ABC. Тогда

$$\overline{MC} = \overline{MG} + \overline{GC};$$

$$\overline{MA} = \overline{MG} + \overline{GA};$$

$$\overline{MB} = \overline{MG} + \overline{GB}.$$

Учитывая, что $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = 0$, имеем

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GC^2 + GA^2 + GB^2.$$

Аналогично,

$$M_1A^2 + M_1B^2 + M_1C^2 = 3M_1G^2 + GC^2 + GA^2 + GB^2.$$

Поскольку по условию

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = M_1A^2 + M_1B^2 + M_1C^2, \text{ то}$$

$$MG = M_1G,$$

и искомым множеством является окружность с центром в точке G, радиус которой

$$MG = \sqrt{\frac{S - (GA^2 + GB^2 + GC^2)}{3}}.$$

Задача 80.

Вектор $\overline{OA}$ составляет с осями O_x, O_y и O_z — углы, соответственно равные $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{\pi}{4}$, точка B имеет координаты $(-2;\ -2;\ -2\sqrt{2})$.

Найти угол между векторами $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$.

Решение.

Обозначим координаты вектора $\overline{OA}\,(x,\ y,\ z)$. Пусть $\overline{OX}$, $\overline{OY}$, $\overline{OZ}$ — единичные векторы, направленные вдоль соответствующих осей. Тогда

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OA}\cdot\overline{OX}}{\overline{OA}\cdot\overline{OX}} = \frac{1}{2},$$

$$\cos\beta = \frac{\overline{OA}\cdot\overline{OY}}{OA\cdot OX} = \frac{1}{2},$$

$$\cos\gamma = \frac{\overline{OA}\cdot\overline{OZ}}{OA\cdot OZ} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Имеем систему

$$\begin{cases} 2x = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ 2y = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ 2z = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \end{cases}$$

откуда $x = y = 2t,\ z = 2\sqrt{2}.$

Итак, $\overline{OA} = (2;\ 2;\ 2\sqrt{2})$, $\overline{OB} = (-2;\ -2;\ -2\sqrt{2})$.

Очевидно, что векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ противоположно направлены, значит, $\angle BOA = \pi$.

Задача 81.

Доказать, что при любом выборе точки X равенство

$$\overline{XC} = k\,\overline{XA} + (1-k)\,\overline{XB} \qquad (1)$$

для некоторого числа k является необходимым и достаточным условием принадлежности точек A, B и C ($A \neq B$) одной прямой.

Доказательство. Достаточность.

Пусть выполняется равенство (1). Тогда

$$\overline{XC} - \overline{XB} = k\,(\overline{XA} - \overline{XB}).$$

Отсюда $\overline{BC} = k\,\overline{BA}$, значит, векторы $\overline{BC}$ и $\overline{BA}$ коллинеарны, а точки A, B, C принадлежат одной прямой.

Необходимость.

Поскольку точки A, B, C принадлежат одной прямой, то векторы $\overline{BC}$ и $\overline{BA}$ коллинеарны, или

$$\overline{BC} = k\,\overline{BA}.\text{ Отсюда}$$

$$\overline{XC} - \overline{XB} = k\,(\overline{XA} - \overline{XB}),\text{ или}$$

$$\overline{XC} = k\,\overline{XA} + (1 + k)\,\overline{XB}.$$

Задача 82.

Точки A_1, B_1, C_1 принадлежат соответственно сторонам BC, AC, AB треугольника ABC. Прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке X. Доказать, что

$$\frac{A_1X}{XA} + \frac{B_1X}{XB} + \frac{C_1X}{XC} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Доказательство.

Введем обозначения: $S_1 = S_{BXC}$, $S_2 = S_{AXB}$, $S_3 = S_{AXC}$.

Точки D и H_1 — проекции точек X и A на сторону BC. Обозначим далее $AX = x_1$, $XA_1 = x_2$. Тогда

$$\frac{AA_1}{XA_1} = \frac{AH_1}{XD},\text{ или } \frac{x_1 + x_2}{x_2} = \frac{S}{S_1},$$

где S — площадь треугольника ABC, или

$$\frac{x_1}{x_2} + 1 = \frac{S}{S_1} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_1} =$$

$$= 1 + \frac{S_2 + S_3}{S_1},\text{ следовательно,}$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{S_1}{S_2 + S_3},\text{ значит, } \frac{A_1X}{XA} = \frac{S_1}{S_2 + S_3}.$$

Аналогично,

$$\frac{B_1X}{XB} = \frac{S_2}{S_1 + S_3},\ \frac{C_1X}{XC} = \frac{S_3}{S_1 + S_2}.$$

Воспользуемся неравенством

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Имеем

$$\frac{A_1X}{XA} + \frac{B_1X}{XB} + \frac{C_1X}{XC} =$$

$$= \frac{S_1}{S_2+S_3} + \frac{S_2}{S_1+S_3} + \frac{S_3}{S_1+S_2} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Задача 83.

В треугольнике ABC прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Точки F_1, F_2, F_3 — середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 соответственно. Доказать, что прямые M_1F_1, M_2F_2, M_3F_3 также пересекаются в одной точке.

Доказательство.

Имеет место теорема Чевы: для того, чтобы прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекались в одной точке или были между собой попарно параллельны, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

(доказать самостоятельно).

Вернемся к задаче. Имеем

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1.$$

Умножим числитель и знаменатель каждой дроби на $\frac{1}{2}$. Имеем

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot BA_1 \cdot \frac{1}{2}CB_1 \cdot \frac{1}{2}AC_1}{\frac{1}{2}AC_1 \cdot \frac{1}{2}B_1A \cdot \frac{1}{2}C_1B} = 1, \text{ или}$$

$$\frac{M_3F_1}{F_1M_2}\cdot\frac{M_1F_2}{F_2M_3}\cdot\frac{M_2F_3}{F_3M_1} = 1,$$

что и доказывает утверждение задачи.

Задача 84.

Найти зависимость между сторонами a, b, c треугольника ABC, если медиана AM_1, высота BH_2 и биссектриса CL_3 пересекаются в одной точке.

Решение.

Очевидно, что

$$AL_3 : L_3B = \frac{b}{a},\ M_1B = M_1C,$$

$$CH_2 : H_2A = \operatorname{ctg}\angle ACB : \operatorname{ctg}\angle CAB =$$

$$= \frac{a^2+b^2-c^2}{b^2+c^2-a^2}.$$

Подставляя полученные формулы в условие теоремы Чевы, имеем

$$\frac{b\,(a^2+b^2-c^2)}{a\,(b^2+c^2-a^2)} = 1, \text{ или}$$

$$a^3+b^3 = a\,(b^2+c^2) - b\,(a^2-c^2).$$

Задача 85.

Для того, чтобы две прямые, проведенные через вершины A и D тетраэдра, пересекались, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{S_{AD_1C}}{S_{AD_1B}} = \frac{S_{DA_1C}}{S_{DA_1B}}, \qquad (*)$$

где A_1 и D_1 — точки пересечения этих прямых с соответственными гранями.

Доказательство. Необходимость.

Пусть прямые AA_1 и DD_1 пересекаются в точке O. Через эти прямые проведем плоскость ADF (рис. 27.8). Ясно, что

$$\frac{S_{FD_1C}}{S_{FD_1B}} = \frac{CF}{BF} \text{ и}$$

$$\frac{S_{CAF}}{S_{BAF}} = \frac{CF}{BF}.$$

Итак,

$$\frac{S_{CAF} - S_{FD_1C}}{S_{BAF} - S_{FD_1B}} =$$

$$= \frac{S_{AD_1C}}{S_{AD_1B}} = \frac{CF}{BF}.$$

Аналогично доказывается, что

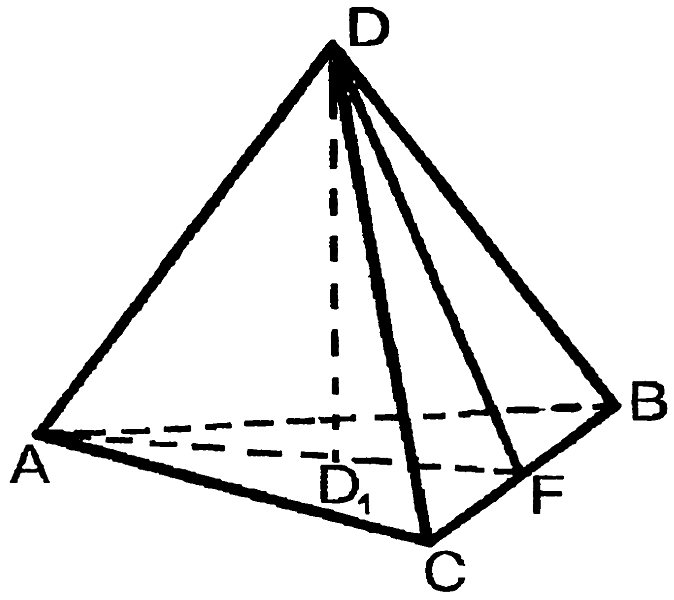


Рис. 27.8

$$\frac{S_{DA_1C}}{S_{DA_1B}} = \frac{CF}{BF},$$

значит, равенство (*) выполняется.

Достаточность.

Допустим, что прямые AA_1 и DD_1 не имеют общей точки. Пусть, например, DA_1 пересекает сторону BC в точке F_2, а AD_1 — в точке F_1. Ясно, что

$$\frac{S_{AD_1C}}{S_{AD_1B}} = \frac{CF_1}{BF_1} \text{ и } \frac{S_{DA_1C}}{S_{DA_1B}} = \frac{CF_2}{BF_2}.$$

Итак,

$$\frac{CF_1}{BF_1} = \frac{CF_2}{BF_2}, \text{ или } \frac{CF_1}{BF_1} + 1 = \frac{CF_2}{BF_2} + 1,$$

значит, $\frac{BC}{BF_1} = \frac{BC}{BF_2}$, следовательно,

$$BF_1 = BF_2,$$

точки F_1 и F_2 совпадают. Итак, прямые AA_1 и DD_1 пересекаются.

Задача 86.

Доказать, что медианы тетраэдра пересекаются в одной точке.

Доказательство.

Медиана тетраэдра — это отрезок, который соединяет вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противоположной грани (центроид). Поскольку D_1 и A_1 — центроиды граней ABC и DBC и площади треугольников AD_1C, AD_1B и DA_1C, DA_1B равны, то с помощью формулы (*) утверждение задачи доказано.

Задача 87.

В гранях тетраэдра $DABC$ заданы точки D_1, A_1, B_1, C_1, соединенные со всеми вершинами граней, которым принадлежат. Отношение площадей каждого из образованных треугольников к площади грани, которая имеет общую сторону с треугольником, равны. Доказать, что прямые DD_1, AA_1, BB_1, CC_1 имеют общую точку.

Доказательство.

Обозначим S_1 и S_2 — площади граней соответственно ADC и ADB. Имеем:

$$\frac{S_{AD_1C}}{S_1} = \frac{S_{AD_1B}}{S_2} \quad \text{и} \quad \frac{S_{A_1DB}}{S_2} = \frac{S_{A_1DC}}{S_1}.$$

Ясно, что выполняется условие (*), что доказывает утверждение задачи.

Задача 88.

Доказать, что в тетраэдре $DABC$ прямые DI, AI_1, BI_2, CI_3, где I, I_2, I_2, I_3 — инцентры (центры вписанных в грани окружностей) соответственных граней пересекаются в одной точке, если произведения длин противоположных ребер равны между собой.

Доказательство.

Докажем, что прямые DI и AI_1 пересекаются. Пусть r и r_1 — радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC и DBC. Имеем:

$$2S_{AIC} = r \cdot b; \;\; 2S_{AIB} = r \cdot c;$$

$$2S_{DIC_1} = r_1 \cdot b_1; \;\; 2S_{DI_1B} = r_1 \cdot c_1$$

(b и b_1, c и c_1 — длины ребер соответственно AC и CD, AB и BD) Подставляя эти выражения в формулу (*) и учитывая условие $bc_1 = b_1c$, получаем доказываемое утверждение.

Задача 89.

Если в тетраэдре суммы квадратов длин противоположных ребер равны, то эти ребра взаимно перпендикулярны. Доказать.

Доказательство.

Для четырех произвольных точек A, B, C, D имеет место векторное равенство:

$$|\overline{AB}|^2 + |\overline{CD}|^2 - |\overline{AD}|^2 - |\overline{BC}|^2 = 2\,\overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

(докажите!).

По условию $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$, а значит,

$$\overline{AC} \cdot \overline{DB} = 0,$$

то есть отрезки AC и DB перпендикулярны.

Задача 90.

Доказать, что радиус сферы, вписанной в тетраэдр, вычисляется по формуле

$$r = \frac{3V}{S_n},$$

где V — объем тетраэдра, S_n — полная поверхность тетраэдра.

Доказательство.

Считаем центр сферы, вписанной в тетраэдр, вершиной четырех пирамид, у которых высоты — радиусы этой сферы, а плоскости, на которые эти высоты опущены, — грани тетраэдра. Обозначим площади граней через S_1, S_2, S_3, S_4, а объемы соответственных пирамид — через V_1, V_2, V_3, V_4.

Тогда

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 =$$

$$= \frac{1}{3} r (S_1 + S_2 + S_3 + S_4) = \frac{1}{3} r \cdot S_n, \text{ откуда}$$

$$r = \frac{3V}{S_n}.$$

Задача 91.

Пусть V_1 и V_2, S_1 и S_2 — соответственно объемы и поверхности тетраэдра и вписанной в него сферы. Доказать, что $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{S_1}{S_2}$.

Доказательство.

Пусть r — радиус сферы, вписанной в тетраэдр. Поскольку

$$V_1 = \frac{1}{3} r \cdot S_1, \text{ а } V_2 = \frac{1}{3} r \cdot S_2, \text{ то}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3} r \cdot S_1}{\frac{1}{3} r \cdot S_2} = \frac{S_1}{S_2}.$$

Утверждение задачи доказано.

Задача 92.

В тетраэдре $DABC$ h_1, h_2, h_3, h_4 — высоты тетраэдра. Доказать, что

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4},$$

где r — радиус вписанной сферы.

Доказательство.

Пусть V — объем тетраэдра, S_1, S_2, S_3, S_4 — площади граней, к которым соответственно проведены высоты h_1, h_2, h_3, h_4. Тогда

$$\frac{1}{h_1} = \frac{S_1}{3V}; \quad \frac{1}{h_2} = \frac{S_2}{3V};$$

$$\frac{1}{h_3} = \frac{S_3}{3V}; \quad \frac{1}{h_4} = \frac{S_4}{3V}.$$

Итак,

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4} = \frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{3V} =$$

$$= \frac{S_n}{3V} = \frac{1}{r}.$$

Задача 93.

В тетраэдре $DABC$ h_1, h_2, h_3, h_4 — высоты тетраэдра. Доказать, что

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 \geqslant 16r,$$

где r — радиус вписанной сферы.

Доказательство.

С помощью неравенства Коши для четырех положительных чисел доказывается неравенство:

$$(h_1 + h_2 + h_3 + h_4)\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}\right) \geqslant 16.$$

Но

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4} = \frac{1}{r}, \text{ значит,}$$

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 \geqslant 16r.$$

Задача 94.

Доказать, что если из точки X, взятой внутри тетраэдра $DABC$, опустить перпендикуляры d_1, d_2, d_3, d_4 на грани, площади которых соответственно S_1, S_2, S_3, S_4, то

1) $S_1 \cdot d_1 + S_2 \cdot d_2 + S_3 \cdot d_3 + S_4 \cdot d_4 = 3V$, где V — объем тетраэдра $DABC$;

2) $\frac{d_1}{h_1}+\frac{d_2}{h_2}+\frac{d_3}{h_3}+\frac{d_4}{h_4} = 1$, где h_1, h_2, h_3, h_4 — соответственные перпендикулярам d_1, d_2, d_3, d_4 высоты.

Доказательство.

1) Первое равенство очевидно, если принять точку X за вершину четырех тетраэдров с основаниями S_1, S_2, S_3, S_4 и высотами d_1, d_2, d_3, d_4.

2) Обозначим объемы тетраэдров $DABC$, $XABC$, $XDBC$, $XADC$, $XADB$ соответственно V, V_1, V_2, V_3, V_4. Имеем

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot d_4}{\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot h_4} = \frac{d_4}{h_4}.$$

Аналогично $\frac{V_2}{V} = \frac{\frac{1}{3}S_{DBC}\cdot d_1}{\frac{1}{3}S_{DBCV}\cdot h_1} = \frac{d_1}{h_1}$,

$$\frac{V_3}{V} = \frac{d_2}{h_2},\quad \frac{V_4}{V} = \frac{d_3}{h_3},\text{ откуда}$$

$$\frac{V_1+V_2+V_3+V_4}{V} = \frac{d_1}{h_1}+\frac{d_2}{h_2}+\frac{d_3}{h_3}+\frac{d_4}{h_4} = 1.$$

Задача 95.

Доказать, что сумма квадратов расстояний от любой точки окружности до вершин вписанного в нее правильного треугольника есть величина постоянная, не зависящая от положения точки окружности.

Доказательство.

Пусть X — произвольная точка окружности, в которую вписан равносторонний треугольник ABC.

Обозначим $AX = r_1$, $BX = r_2$, $CX = r_3$. Но $r_1 = r_2 + r_3$ (докажите!).

Обозначим через a сторону равностороннего треугольника ABC. Из треугольника XBC имеем:

$$a^2 = r_2^2 + r_3^2 - 2\, r_2 r_3 \cos 120°, \text{ или}$$

$$r_2^2 + r_3^2 + r_2 \cdot r_3 = a^2.$$

Далее

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = (r_2 + r_3)^2 + r_2^2 + r_3^2 =$$

$$= 2\,(r_2^2 + r_3^2 + r_2 \cdot r_3) = 2a^2.$$

Утверждение задачи доказано.

Задача 96.

В сферу вписан правильный тетраэдр $DABC$. Доказать, что для каждой точки M сферы

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 8R^2,$$

где R — радиус сферы.

Доказательство.

Обозначим через O центр сферы. Тогда

$$\overline{MA} = \overline{OA} - \overline{OM};\quad \overline{MB} = \overline{OB} - \overline{OM};$$

$$\overline{MC} = \overline{OC} - \overline{OM};\quad \overline{MD} = \overline{OD} - \overline{OM}.$$

Поскольку $|\overline{OM}| = |\overline{OA}| = R$, то

$$|\overline{MA}|^2 + |\overline{MB}|^2 + |\overline{MC}|^2 + |\overline{MD}|^2 =$$

$$= 4\,|\overline{OA}|^2 + 4\,|\overline{OM}|^2 - 2\,\overline{OM}\,(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}) =$$

$$= 8R^2, \text{ или}$$

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 8R^2, \text{ поскольку}$$

$$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = \overline{0} \text{ (докажите!)}.$$

Итак, заданное равенство доказано.

28. ЗАДАЧИ С ДЕВЯТЬЮ ТОЧКАМИ БЕЗ ОКРУЖНОСТИ ЭЙЛЕРА

Рассмотрим остроугольный треугольник ABC. Известно, что точки H_1, H_2, H_2 (основания высот), M_1, M_2, M_3 (середины сторон BC, AC, AB), E_1, E_2, E_3 (середины отрезков AH, BH, CH), где H — ортоцентр, принадлежат одной окружности, которую называют окружностью девяти точек, или окружностью Эйлера. Мы рассмотрим задачи, в условиях которых будут точки, взятые именно среди этих девяти точек, но с дополнительным условием для всех задач: нельзя пользоваться окружностью Эйлера!

При решении таких задач предлагаем пользоваться вспомогательными задачами-теоремами.

Задача-теорема 1.

В треугольнике ABC

$$\angle H_2H_1C = A, \quad \angle H_3H_2A = B, \quad \angle H_2H_3A = C$$

(предлагаем доказать самостоятельно).

Задача-теорема 2.

Имеет место формула

$$OM_1 = \frac{1}{2}AH.$$

Задача-теорема 3.

Если $\angle C = 90°$, то $m_c = \dfrac{1}{2}c$.

Отрезки и углы

Задача 1.

Доказать, что $M_1M_2 = H_1M_3$.

Доказательство.

Рассмотрим треугольник AH_1B (рис. 28.1). По задаче-теоре-

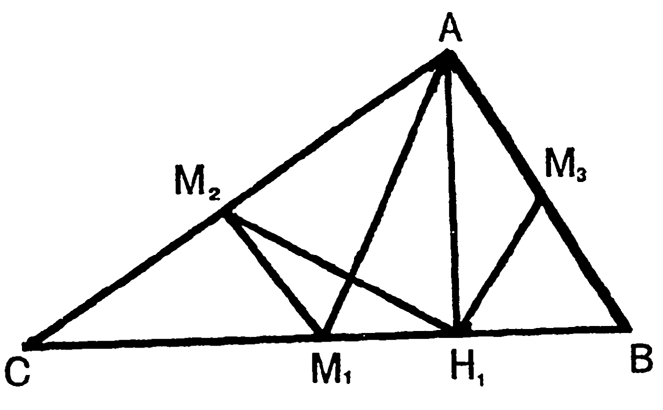


Рис. 28.1

ме 3 имеем: $H_1M_3 = \frac{1}{2}AB$. Поскольку M_1M_2 — средняя линия треугольника ABC, то $M_1M_2 = \frac{1}{2}AB$. Итак, $M_1M_2 = H_1M_3$.

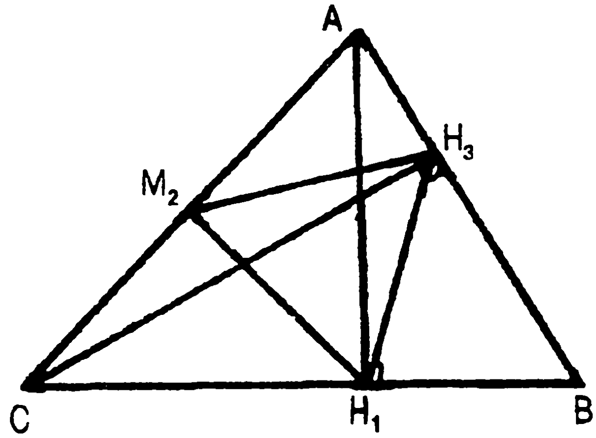


Рис. 28.2

Задача 2.

Доказать, что

$$H_1M_2 = H_3M_2.$$

Доказательство.

Отрезки H_1M_2 и H_3M_2 (рис. 28.2) являются медианами прямоугольных треугольников H_1AC и H_3AC, поэтому

$$H_1M_2 = \frac{1}{2}AC \text{ и } H_3M_2 = \frac{1}{2}AC,$$

таким образом, $H_1M_2 = H_3M_2$.

Задача 3.

Доказать, что $M_1H_2 + M_1H_3 = BC$.

Доказательство.

Рассмотрим прямоугольные треугольники BH_2C и CH_3B (рис. 28.3). В них отрезки M_1H_2 и M_1H_3 являются медианами, так как $M_1B = M_1C$. Итак, $M_1H_2 = \frac{1}{2}a$ и $M_1H_3 = \frac{1}{2}a$.

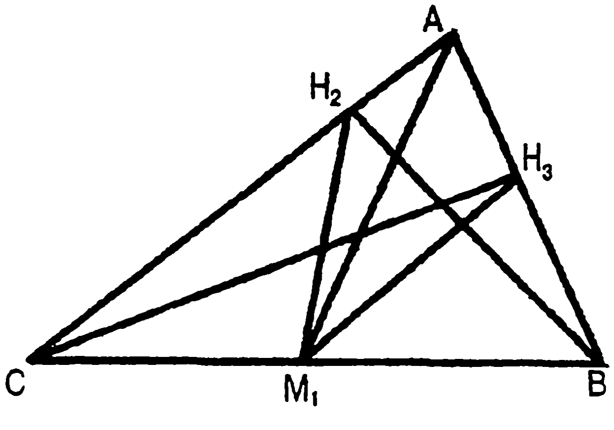


Рис. 28.3

Таким образом, $M_1H_2 + M_1H_3 = BC$.

Задача 4.

Доказать, что серединный перпендикуляр к отрезку, концы которого совпадают с основаниями высот треугольника, делит противоположную сторону пополам.

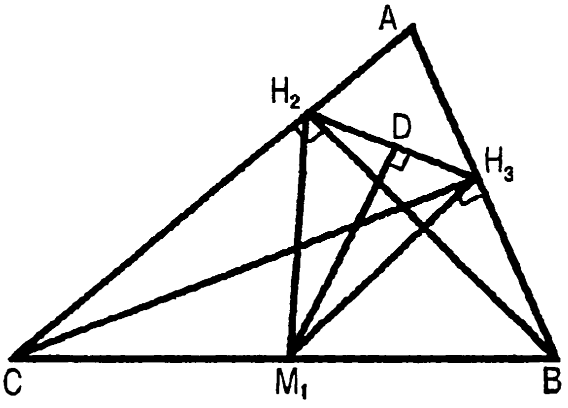


Рис. 28.4

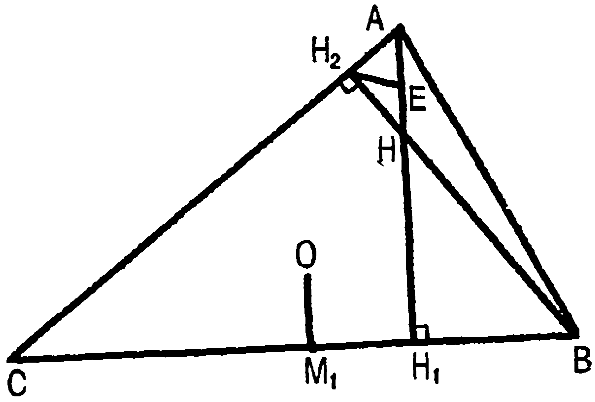


Рис. 28.5

Доказательство.

В треугольнике ABC (рис. 28.4) проведем высоты BH_2 и CH_3. Рассмотрим треугольник $M_1H_2H_3$. Поскольку

$$M_1H_2 = M_1H_3 \text{ (см. задачу 3)},$$

то его высота M_1D является медианой и $H_2D = DH_3$.

Поскольку из точки M_1 на отрезок H_2H_3 можно опустить один перпендикуляр, и он делит этот отрезок пополам, то утверждение задачи доказано.

Задача 5.

Доказать, что $E_1H_2 = OM_1$ (E_1 — середина отрезка AH, O — центр описанной окружности).

Доказательство.

В прямоугольном треугольнике HAH_2 (рис. 28.5) отрезок E_1H_2 — медиана, так как $AE_1 = E_1H$. Поскольку

$$E_1H_2 = \frac{1}{2}AH \text{ и } OM_1 = \frac{1}{2}AH, \text{ то } E_1H_2 = OM_1.$$

Задача 6.

Доказать, что:

1) $M_1E_2 = M_2E_1 = OM_3$; 2) $M_1E_2 \parallel M_2E_1$;

3) $M_1E_2 \perp AB$.

Доказательство.

Отрезки M_1E_2 и M_2E_1 — средние линии треугольников BHC и AHC (рис. 28.6). Каждый из них равен $\frac{1}{2}CH$, то есть

$M_1E_2 = M_2E_1 = \frac{1}{2}CH$. Но $\frac{1}{2}CH = OM_3$. Итак, доказаны условия задач 1) и 2).

Как средние линии треугольников AHC и BHC, отрезки M_2E_1 и M_1E_2 параллельны отрезку CH, то есть они принадлежат прямым, которые перпендикулярны прямой AB. Таким образом, доказано условие 3).

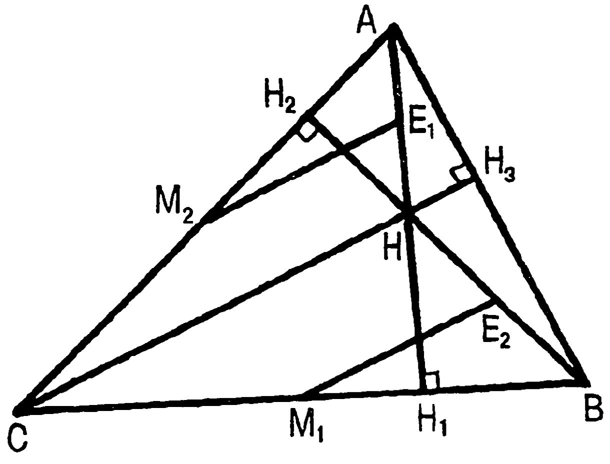


Рис. 28.6

Задача 7.

Доказать, что

$$M_2E_1 \perp E_1E_2.$$

Доказательство.

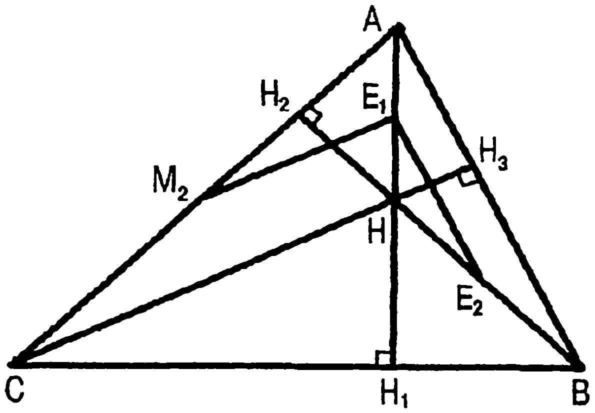


Рис. 28.7

Отрезок M_2E_1 — средняя линия треугольника AHC, то есть $M_2E_1 \parallel CH$ (рис. 28.7). Отрезок E_1E_2 — средняя линия треугольника AHB: $E_1E_2 \parallel AB$. Стороны угла $M_2E_1E_2$ параллельны сторонам угла CH_3B, итак,

$$\angle M_2E_1E_2 = 90°.$$

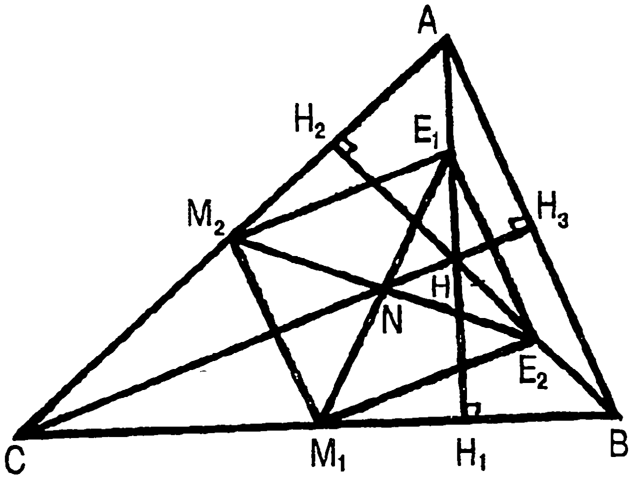


Рис. 28.8

Задача 8.

Доказать, что если отрезки M_1E_1 и M_2E_2 пересекаются на высоте CH_3, то треугольник ABC — равнобедренный ($CA = CB$).

Доказательство.

Поскольку $M_1E_2 \parallel CH_3$ и $M_2E_1 \parallel CH_3$, кроме того,

$$M_1E_2 = M_2E_1 = \frac{1}{2}CH,$$

то $E_1E_2M_1M_2$ — параллелограмм (рис. 28.8). Поскольку $\angle M_2E_1E_2=90^\circ$ (см. задачу 7), то четырехугольник $E_1E_2M_1M_2$ — прямоугольник, а N — точка пересечения диагоналей является центром симметрии прямоугольника. Значит, прямая CH_3, которой по условию принадлежит точка N и которая перпендикулярна отрезкам M_1M_2 и E_1E_2, делит их пополам. Значит, и отрезок AB делится прямой CH_3 пополам. Таким образом,

$$AH_3 = BH_3 \text{ и } CA = CB.$$

Задача 9.

Доказать, что если высота CH_3 делит отрезок M_1E_1 пополам, то она делит и отрезок M_2E_2 пополам.

Доказательство следует из предыдущей задачи.

Задача 10.

Отрезки H_2H_3 и M_2M_3 параллельны. Доказать, что треугольник ABC равнобедренный.

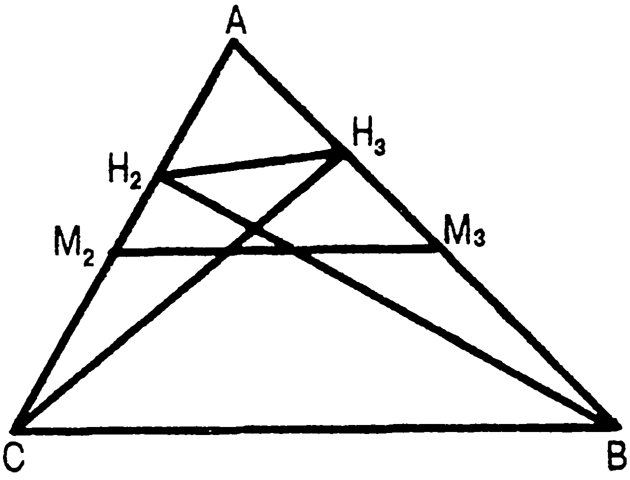


Рис. 28.9

Доказательство.

По задаче-теореме 1 имеем, что $\angle AH_2H_3 = \angle B$. Поскольку $H_2H_3 \parallel M_2M_3$ (рис. 28.9), то $\angle AH_2H_3 = \angle C$ и $\angle B = \angle C$, что доказывает утверждение задачи.

Задача 11.

Доказать, что отрезок M_1M_2 принадлежит биссектрисе угла CM_1H_3.

Доказательство. Первый способ.

Поскольку $M_1M_2 \parallel AB$ (рис. 28.10), то $\angle M_2M_1C = \angle B$. Поскольку $H_3M_1 = M_1B$, то $\angle M_1H_3B = \angle B$. Но

$$\angle M_2M_1H_3 = \angle M_1H_3B = \angle B,\text{ значит,}$$

$$\angle M_2M_1C = \angle M_2M_1H_3.$$

Второй способ.

Поскольку $M_1C = M_1H_3$, то треугольник CM_1H_3 — равнобедренный и отрезок M_1M_2 перпендикулярный отрезку CH_3.

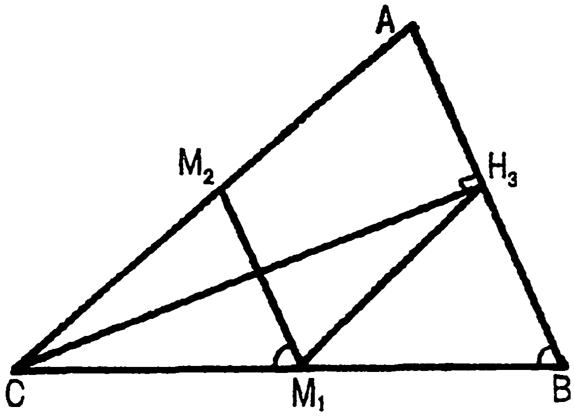


Рис. 28.10

Задача 12.

Доказать, что

$$\angle M_2M_1H_3 = \angle M_2H_1H_3.$$

Доказательство.

Поскольку $\angle M_2M_1H_3 = 180° - (\angle M_2M_1C + \angle H_3M_1B)$ и $\angle M_2M_1C = \angle B$ (рис. 28.11), а $H_3M_1B = 180° - 2B$, имеем

$$\angle M_2M_1H_3 = 180° - (B + 180° - 2B) = \angle B.$$

Но $\angle M_2H_1H_3 = 180° - (\angle BH_1H_3 + \angle M_2H_1C) =$

$$= 180° - (A + C) = B.\text{ Значит,}$$

$$\angle M_2M_1H_3 = \angle M_2H_1H_3 = \angle B.$$

Задача 13.

Доказать, что отрезок M_1E_2 принадлежит биссектрисе угла BM_1H_3.

Доказательство.

Пусть прямая M_1E_2 пересекает сторону AB в точке X (рис. 28.12). Поскольку

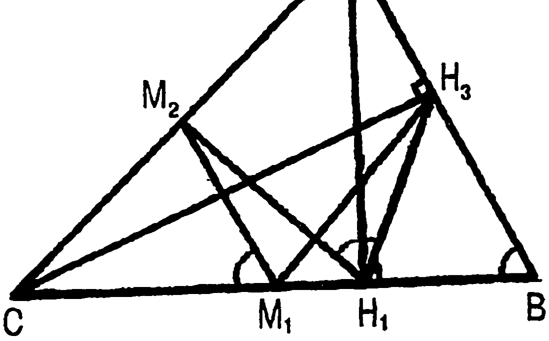


Рис. 28.11

$CM_1 = M_1B$ и $HE_2 = E_2B$, то $M_1E_2 \parallel CH_3$ и точка X делит отрезок H_3B пополам. Кроме того,

$$M_1X \parallel CH_3, \text{ а } M_1H_3 = M_1B,$$

значит, M_1X — высота равнобедренного треугольника H_3M_1B и $\angle H_3M_1X = \angle XM_1B$.

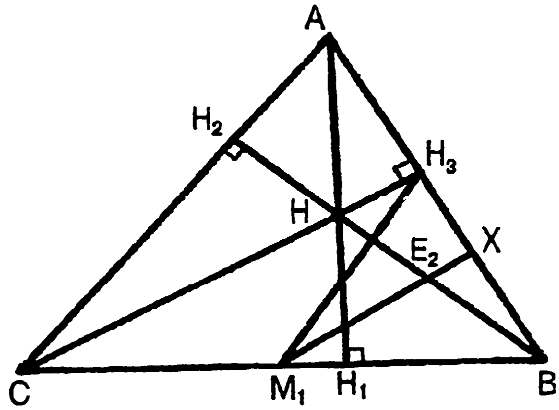


Рис. 28.12

Задача 14.

Доказать, что

$$\angle M_2H_3H_1 = \angle M_2M_1H_3.$$

Доказательство.

Поскольку

$$M_2H_1 = M_2H_3 \text{ (рис. 28.13)},$$

то $\angle M_2H_1H_3 = \angle M_2H_3H_1$, а по задаче 12

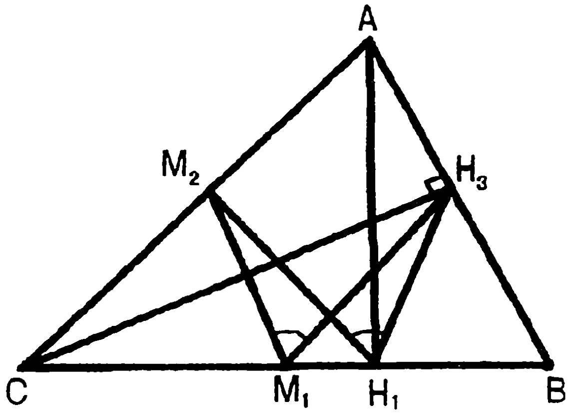


Рис. 28.13

$$\angle M_2H_1H_3 = \angle M_2M_1H_3.$$

Значит,

$$\angle M_2H_3H_1 = \angle M_2M_1H_3.$$

Задача 15.

Доказать, что

$$\angle M_1M_3H_1 = \angle H_1M_2M_1.$$

Доказательство.

Поскольку

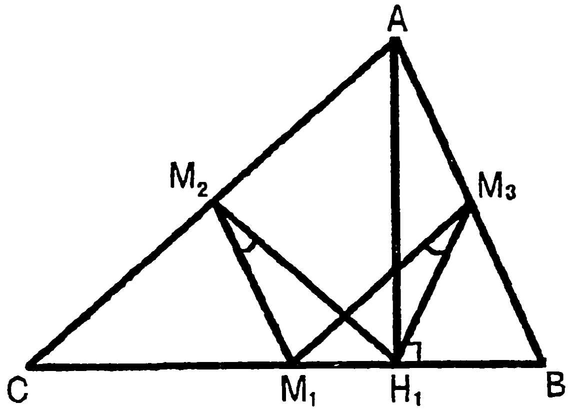


Рис. 28.14

$$M_2M_3 \parallel BC \text{ (рис. 28.14) и } H_1M_3 = M_1M_2 = \frac{1}{2}AB,$$

то четырехугольник $M_1M_2M_3H_1$ — равнобедренная трапеция и $\angle M_1M_2H_1 = \angle H_1M_3M_1$.

Задача 16.

Доказать, что $\angle M_2M_1M_3 = \angle M_2H_1M_3$

Доказательство этой задачи аналогично доказательству предыдущей задачи.

Задача 17.

Доказать, что

1) $\angle E_1M_3M_1 = 90°$; 2) $\angle E_1H_2M_1 = 90°$;

3) $\angle E_1E_2M_1 = 90°$.

Доказательство.

1). *Первый способ.* Имеем

$\angle E_1M_3M_1 = 180° -$

$- (\angle M_1M_3B + \angle E_1M_3A) =$

$= B + 90° - B = 90°$

(рис. 28.15).

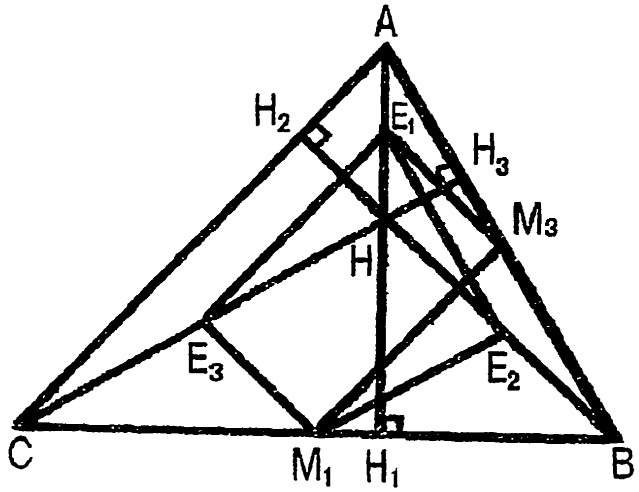


Рис. 28.15

Второй способ.

Имеем $E_1M_3 \parallel BH_2$ и $M_1M_3 \parallel CA$, значит,

$$\angle E_1M_3M_1 = \angle BH_2C = 90°.$$

2. Из треугольника CH_2B (рис. 28.15) имеем

$$\angle CH_2M_1 = C.$$

Из треугольника HH_2A следует $\angle E_1H_2A = 90° - C$. Значит,

$$\angle E_1H_2M_1 = 180° - (\angle CH_2M_1 + \angle E_1H_2A) =$$

$$= 180° - (C + 90° - C) = 90°.$$

3. $\angle E_1E_2M_1 = \angle HE_2E_1 + \angle HE_2M_1 = (90° - A) + A = 90°$.

Задача 18.

Доказать, что $\angle H_2M_1E_1 = \angle H_2H_1E_1$.

Доказательство.

По предыдущей задаче ($\angle E_1H_2M_1 = 90°$) вокруг четырехугольника $E_1H_2M_1H_1$ можно описать окружность, следовательно, $\angle H_2M_1E_1 = \angle H_2H_1E_1$.

Задача 19.

Доказать, что $\angle M_1E_1H_1 = \angle M_1H_2H_1 = B - C$.

Доказательство.

Равенство углов $M_1E_1H_1$ и $M_1H_2H_1$ следует из задачи 18. Далее имеем (рис. 28.16):

$$\angle M_1H_2H_1 = \angle CH_2H_1 - \\ - \angle CH_2M_1 = B - C.$$

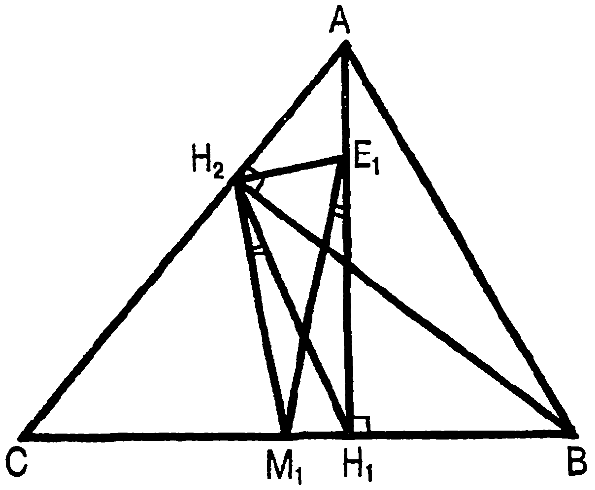


Рис. 28.16

Задача 20.

Доказать, что

$$\angle M_1M_2H_1 = \angle M_1H_2H_1.$$

Доказательство.

Известно, что

$$\angle H_1M_2C = 180° - 2C,$$

$$\angle M_1M_2H_1 = \\ = 180° - 2C - A = B - C$$

(рис. 28. 17).

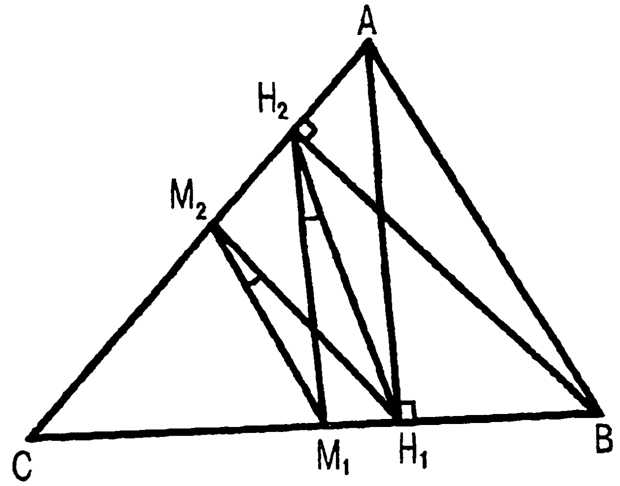


Рис. 28.17

Но $\angle H_1H_2M_1 = B - C$ (по задаче 19), следовательно, утверждение задачи доказано.

Задача 21.

Если $H_1M_1 = H_2M_2$, то

1) $CA = CB$ или 2) $C = 60°$.

Доказательство.

1). Пусть точки H_1, M_1, H_2, H_2 расположены так, как показано на рис. 28.18. Тогда

$$\angle M_2H_2H_1 + \angle M_2M_1H_1 =$$

$$= 180^\circ - B + B = 180^\circ,$$

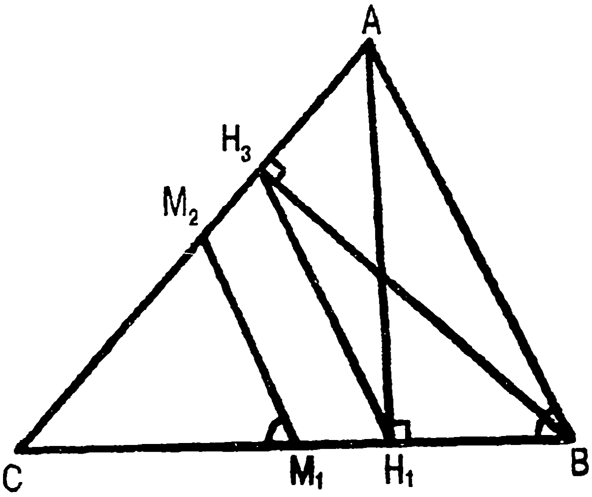


Рис. 28.18

и вокруг четырехугольника $M_2H_2H_1M_1$ можно описать окружность. Поскольку по условию $M_1H_1 = M_2H_2$, то $\angle M_2H_2H_1 = \angle H_2H_1M_1$ и $H_2C = H_1C$, значит, $BC = AC$.

2). Пусть точки H_1, M_1, H_2, H_2 расположены так, как показано на рис. 28.19.

Тогда

$$\angle H_2H_1M_1 = 180^\circ - A \text{ и}$$

$$\angle H_2M_2M_1 = 180^\circ - A.$$

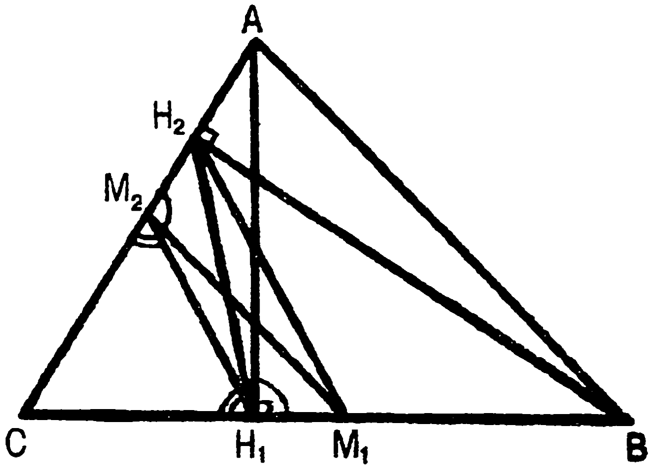


Рис. 28.19

Значит, вокруг четырехугольника $H_2M_1H_1M_2$ можно описать окружность. Поскольку

$$H_2M_1 = H_1M_1, \text{ то } \angle M_2H_1M_1 = \angle H_1M_2H_2.$$

Следовательно, $\angle CM_2H_1 = \angle CH_1M_2$, $CH_1 = CM_2$ и из прямоугольного треугольника AH_1C следует, что поскольку

$$CH_1 = \frac{1}{2}AC, \text{ то } C = 60^\circ.$$

Задача 22.

Доказать, что высоты остроугольного треугольника ABC принадлежат биссектрисам ортоцентрического треугольника $H_1H_2H_3$.

Доказательство.

Докажем, что вокруг четырехугольника $E_1H_3H_1H_2$ можно описать окружность (рис. 28.20). Действительно,

$$\angle H_2H_1H_3 + \angle H_2E_1H_3 =$$
$$= (180° - 2A) +$$
$$+2(\angle H_2AE_1 + \angle H_3AE_1) =$$
$$= 180° - 2A + 2A = 180°.$$

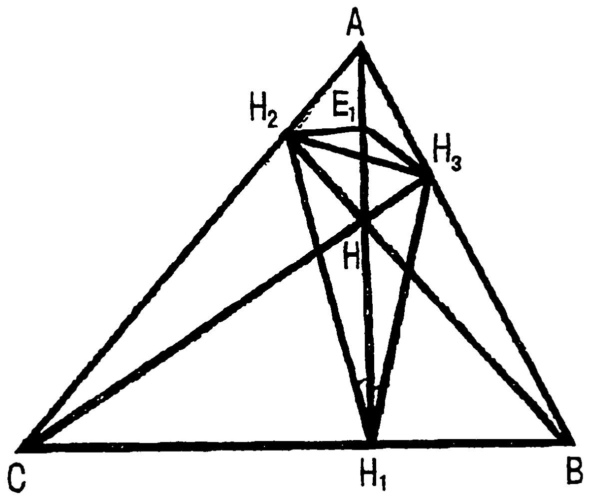


Рис. 28.20

Но $H_2E_1 = H_3E_1$, следовательно, $\angle H_2H_1E_1 = \angle H_3H_1E_1$, что доказывает утверждение задачи.

Задача 23.

Отрезок M_1E_1 пересекает биссектрису угла BAC в точке P. Доказать, что $PE_1 = AE_1$.

Доказательство.

Известно, что $\angle M_1E_1H_1 = B - C$ (по задаче 19). Но

$$\angle L_1AH_1 = \frac{B - C}{2}$$

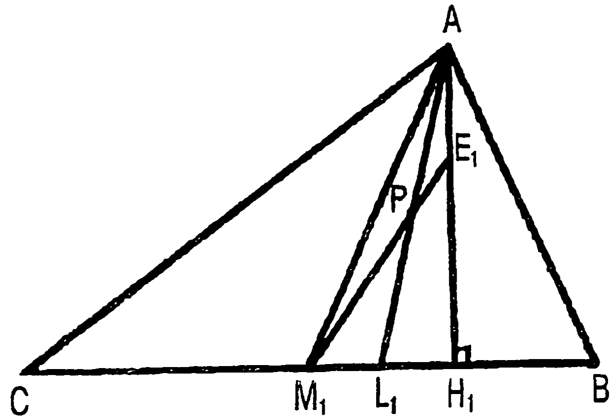


Рис. 28.21

(предлагаем доказать самостоятельно). Следовательно, (рис. 28.21) $\angle APE_1 = \dfrac{B - C}{2}$ и $PE_1 = AE_1$.

Четыре точки на окружности

Рассмотрим задачи, в которых необходимо доказать, что четыре из девяти точек H_1, H_2, H_3, M_1, M_2, M_3, E_1, E_2, E_3 принадлежат одной окружности. Напоминаем, что в условие задачи входит требование: запрещено использовать окружность девяти точек.

Задача 24.

Доказать, что точки M_1, M_2, M_3, H_1 принадлежат одной окружности.

Доказательство.

Действительно, поскольку $M_1M_2 \parallel AB$ и $M_2M_3 \parallel BC$ (рис. 28.22), то

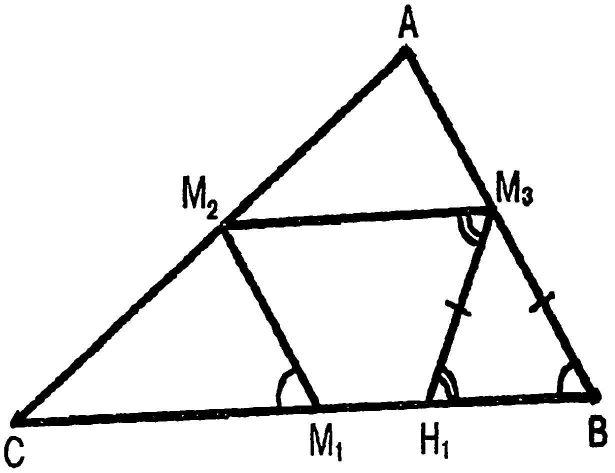


Рис. 28.22

$$\angle M_2M_1H_1 + \angle M_2M_3H_1 = 180^\circ - B + B = 180^\circ.$$

Задача 25.

Доказать, что точки M_1, M_2, M_3, E_1 принадлежат окружности.

Доказательство.

Первый способ.

$\angle E_1M_2M_1 = \angle E_1M_3M_1 =$ $= 90^\circ$ (см. задачу 17).

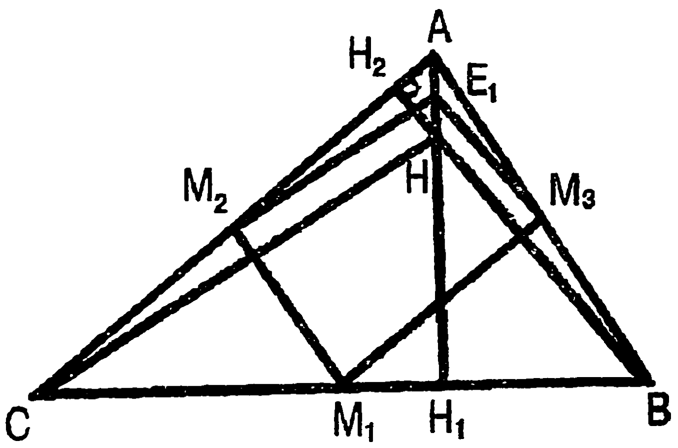


Рис. 28.23

Второй способ.

Рассмотрим угол $M_2M_1M_3$ (рис. 28.23). Имеем:

$$\angle M_2M_1M_3 = 180^\circ - (B + C) = A.$$

Докажем, что $\angle M_2E_1M_3 = 180^\circ - A$. Действительно,

$$\angle M_2E_1M_3 = \angle M_2E_1H_1 + \angle M_3E_1H_1.$$

В треугольниках ACH и ABH отрезки M_2E_1 и M_3E_1 являются средними линиями, поэтому

$$\angle M_3E_1H_1 = B,\ \angle M_3E_1H_1 = C. \text{ Итак,}$$

$$\angle M_2E_1M_3 = 180^\circ - (B + C) = 180^\circ - A.$$

Так как $\angle M_2M_1M_3 = A$, то

$$\angle M_2E_1M_3 + \angle M_2M_1M_3 = 180° - A + A = 180°.$$

Итак, вокруг четырехугольника $E_1M_3M_1M_2$ можно описать окружность.

Задача 26.

Доказать, что точки H_1, H_2, H_3, M_1 принадлежат одной окружности.

Доказательство.

Рассмотрим сумму углов $H_2H_3H_1$ и $H_2M_1H_1$ (рис. 28.24). Имеем:

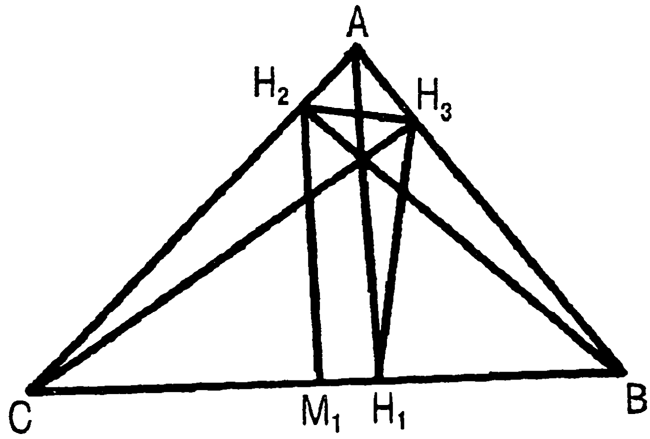


Рис. 28.24

$$\angle H_2H_3H_1 + \angle H_2M_1H_1 = 180° - 2C + 2C = 180°.$$

Итак, вокруг четырехугольника $H_2H_3H_1M_1$ можно описать окружность.

Задача 27.

Доказать, что точки H_1, H_2, H_3, E_1 принадлежат одной окружности.

Доказательство.

Рассмотрим сумму углов $H_2H_1H_3$ и $H_2E_1H_3$ (рис. 28.25). Имеем:

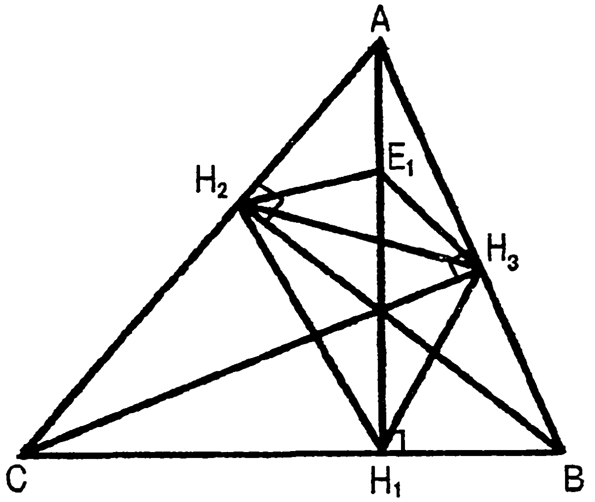


Рис. 28.25

$$\angle H_2H_1H_2 + \angle H_2E_1H_3 =$$

$$= (180° - 2A) + (180° - 2B) + (180° - 2C) = 180°.$$

Итак, вокруг четырехугольника $E_1H_3H_1H_2$ можно описать окружность.

Задача 28.

Доказать, что точки E_1, E_2, E_3, H_1 лежат на одной окружности.

Доказательство.

Найдем сумму углов $E_3E_1E_2$ и $E_3H_1E_2$ (рис. 28.26). Имеем

$$\angle E_3E_1E_2 = \angle CAH_1 + \angle BAH_1 = A,$$

$$\angle E_3H_1E_2 = \angle CHH_1 + \angle H_1HE_2 = B + C.$$

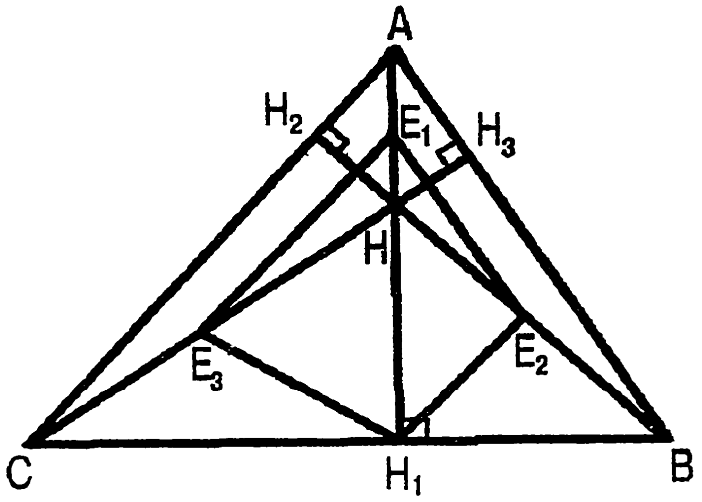


Рис. 28.26

Таким образом,

$$\angle E_3E_1E_2 + \angle E_3H_1E_2 = A + B + C = 180°.$$

Значит, вокруг четырехугольника $E_1E_2H_1E_3$ можно описать окружность.

Задача 29.

Доказать, что точки E_1, E_2, E_3, M_1 принадлежат одной окружности.

Доказательство этой задачи следует из доказательство задачи 17.

Задача 30.

Доказать, что точки M_1, M_2, H_1, H_2 принадлежат одной окружности в двух случаях:

1) точки M_1, M_2 находятся в одной полуплоскости с отрезком H_1H_2;

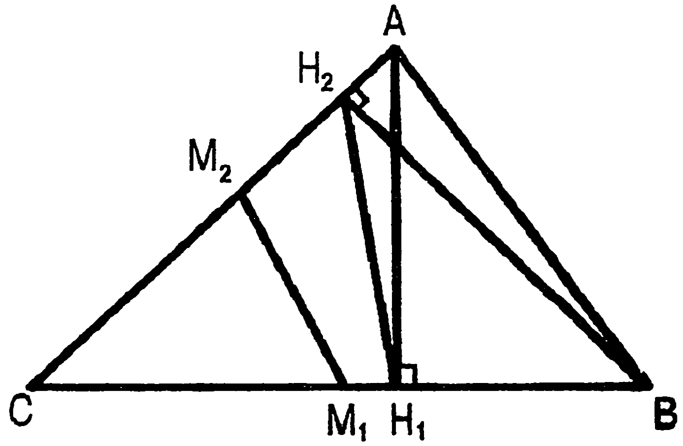


Рис. 28.27

2) точки M_1, M_2 находятся с отрезком H_1H_2 в разных полуплоскостях.

Доказательство.

1) Имеем $\angle H_2H_1M_1 + \angle M_1M_2H_2 = A + 180° - A = 180°$ (рис. 28.27).

2) Имеем $\angle H_1M_2H_2 = 180° - (\angle AM_2H_2 + \angle CH_1M_2) =$

$$= 180° - 2C \text{ (рис. 28.28). Итак,}$$

$$\angle H_1M_2H_2 + \angle H_2M_1H_1 = 180°.$$

Задача 31.

Доказать, что точки M_1, M_2, E_1, E_2 принадлежат одной окружности (рис. 28.29).

Доказательство этой задачи следует из доказательство задачи 17.

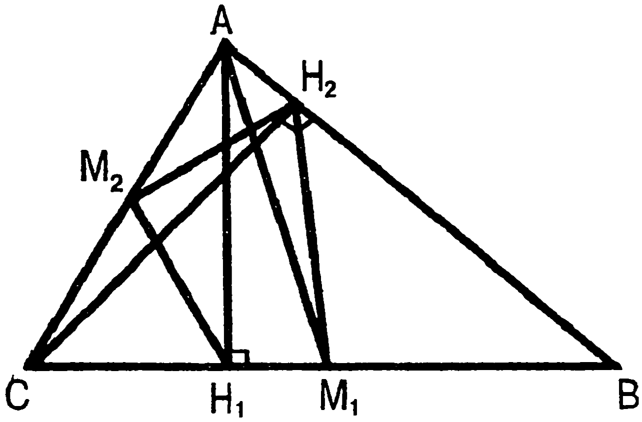


Рис. 28.28

Задача 32.

Доказать, что точки M_1, M_2, E_1, H_1 принадлежат одной окружности.

Доказательство этой задачи следует из доказательство задачи 17.

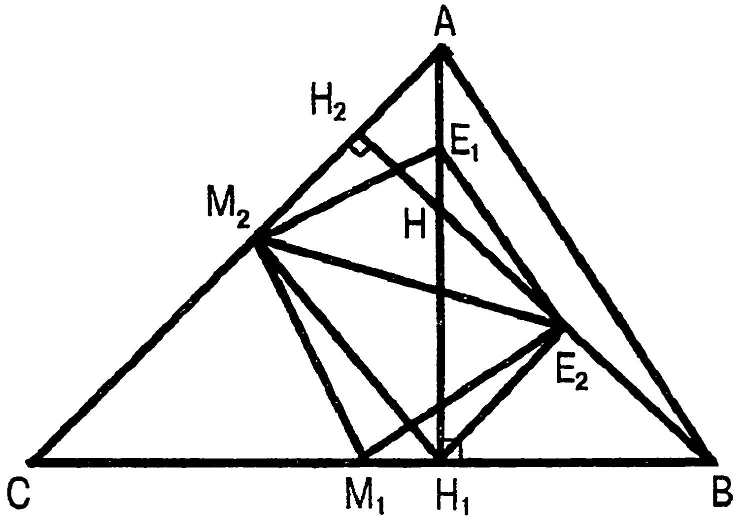


Рис. 28.29

Задача 33.

Доказать, что точки M_1, M_2, E_2, H_1 принадлежат одной окружности.

Доказательство.

Проведем в четырехугольнике $M_1M_2E_2H_1$ (рис. 28.30) диагонали M_2H_1 и M_1E_1. Так как

$$\angle M_2M_1E_2 = \angle M_2H_1E_2 = 90°,$$

то утверждение задачи доказано (см. задачу 17).

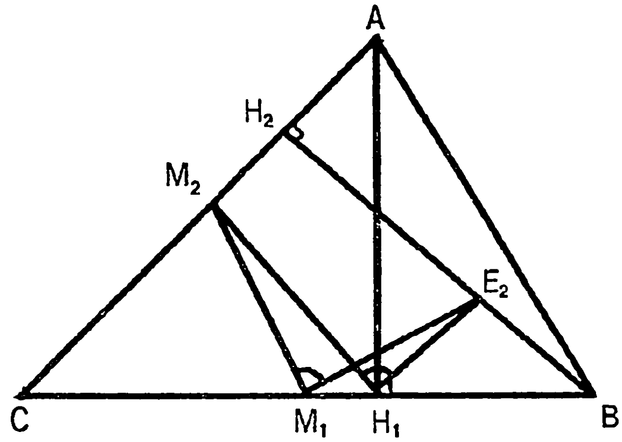


Рис. 28.30

Задача 34.

Доказать, что точки E_1, E_2, M_1, H_1 принадлежат одной окружности.

Доказательство.

Проведем отрезок M_1E_2 (рис. 28.31). Тогда

$$\angle H_1E_1E_2 = \angle E_2M_1H_1 = 90^\circ - B = \angle BAH_1.$$

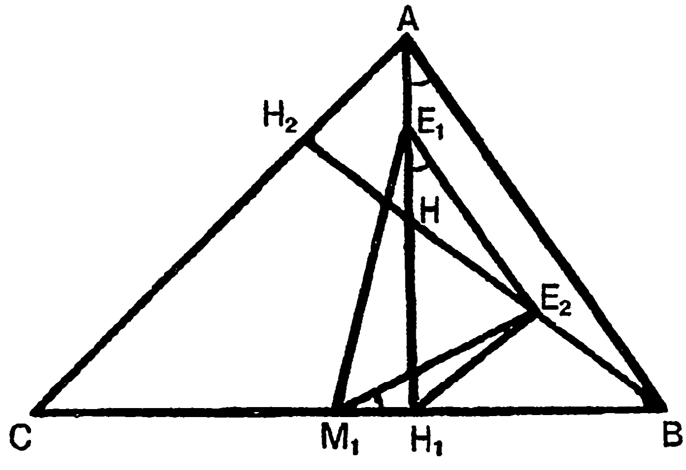


Рис. 28.31

Задача 35.

Доказать, что точки E_1, E_2, M_1, H_2 принадлежат одной окружности.

Доказательство.

Найдем сумму углов $H_2E_1E_2$ и $H_2M_1E_2$ (рис. 28.32). Имеем:

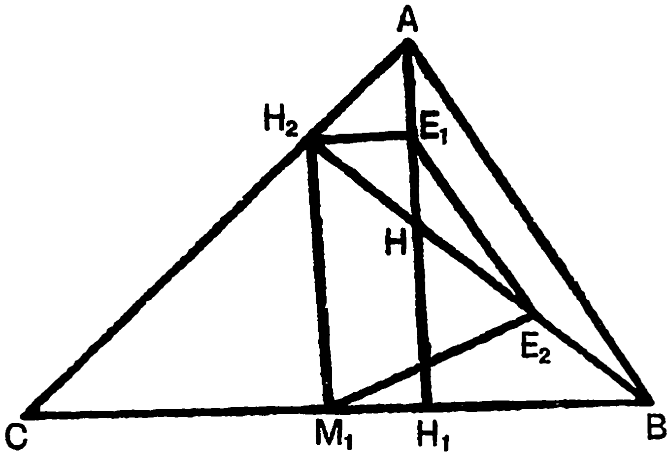


Рис. 28.32

$$\angle H_2E_1E_2 = 90^\circ - B + 180^\circ = 2C - 270^\circ - (B + 2C);$$

$$\angle H_2M_1E_2 = 180^\circ - (180^\circ - 2C + 90^\circ - B) = 2C - (90^\circ - B).$$

Итак,

$$\angle H_2E_1E_2 + \angle H_2M_1E_2 = 270^\circ - (B + 2C) + 2C - (90^\circ - B) = 180^\circ.$$

Задача 36.

Доказать, что точки H_1, H_2, M_1, E_1 принадлежат одной окружности.

Доказательство.

Из прямоугольного треугольника HH_2A (рис. 28.33) следует

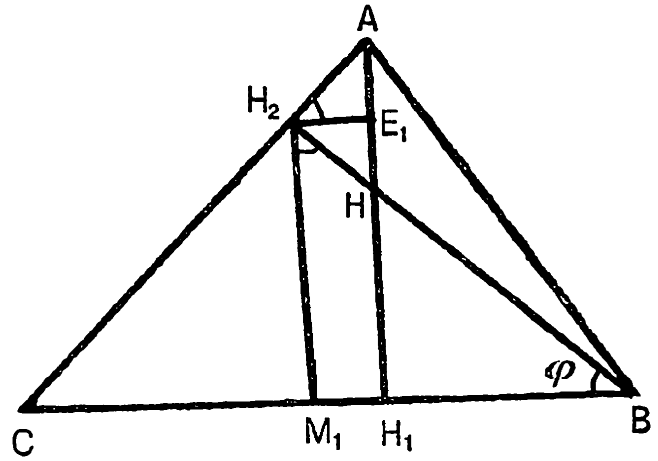


Рис. 28.33

$$\angle E_1H_2A = \angle E_1AH_2 = 90^\circ - C = \varphi.$$

Из треугольника CH_2B имеем

$$\angle BH_2M_1 = \angle H_2BC = 90^\circ - C = \varphi.$$

Поскольку $BH_2 \perp AC$, то $\angle HH_2E_1 + \varphi = 90^\circ = \angle M_1H_1E_1$. Получим $\angle M_1H_1E_1 + \angle M_1H_2E_1 = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

Задача 37.

Доказать, что точки H_1, H_2, M_1, E_2 принадлежат одной окружности.

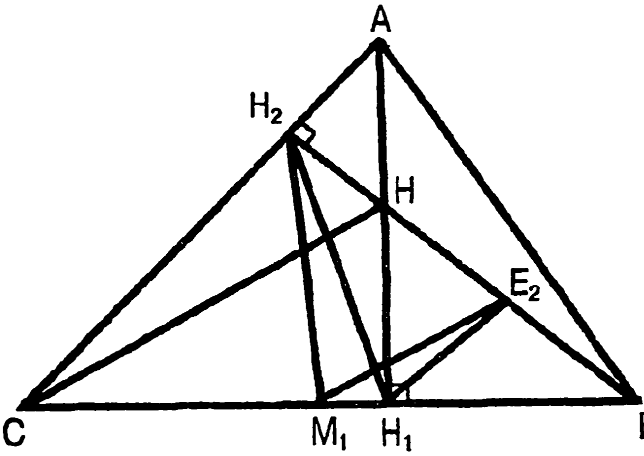


Рис. 28.34

Доказательство.

Так как в треугольнике CHB отрезок M_1E_1 является средней линией (рис. 28.34), то

$\angle HE_2M_1 = 180^\circ -$

$- (180^\circ - A) = A.$

Но $\angle H_2H_1M_1 = A$. Таким образом, $\angle H_2E_2M_1 = \angle H_2H_1M_1$.

Задача 38.

Доказать, что точки H_1, H_2, M_1, E_3 принадлежат одной окружности.

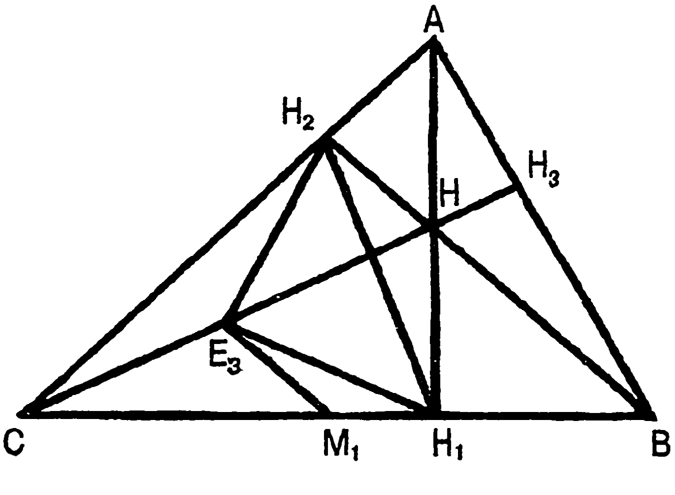


Рис. 28.35

Доказательство.

Опустим высоту BH_2 (рис. 28.35). Имеем

$\angle HE_3M_1 = 180^\circ -$

$- (180^\circ - A) = A.$

Из треугольника HH_2C найдем $\angle H_2E_3H_1 = 180^\circ - 2A$. Тогда

$$\angle H_2E_3M_1 = 180^\circ - 2A + A = 180^\circ - A.$$

Так как $\angle H_2H_1C = A$, то утверждение задачи доказано.

Задача 39.

Доказать, что точки H_1, H_2, M_3, E_1 принадлежат одной окружности.

Доказательство.

Докажем, что

$\angle H_2E_1M_3 + \angle H_2H_1M_3 = 180°$

(рис. 27.36). Имеем

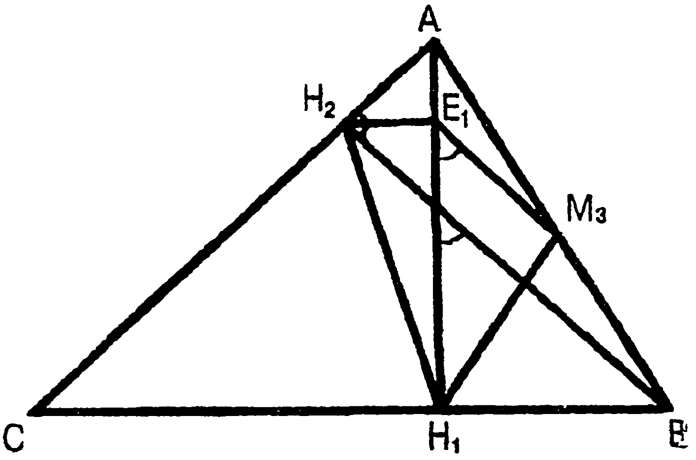


Рис. 28.36

$$\angle H_2H_1M_3 = \angle H_2H_1B -$$

$$- \angle M_3H_1B = 180° - A - B = C,$$

$$\angle H_2E_1M_3 = \angle H_2E_1H_1 + \angle H_1E_1M_3 = 180° - 2C + C = 180° - C,$$

то есть $\angle H_2E_1M_3 + \angle H_2H_1M_3 = 180°$.

Задача 40.

Доказать, что точки H_1, H_2, M_3, E_3 принадлежат одной окружности.

Доказательство.

Имеем

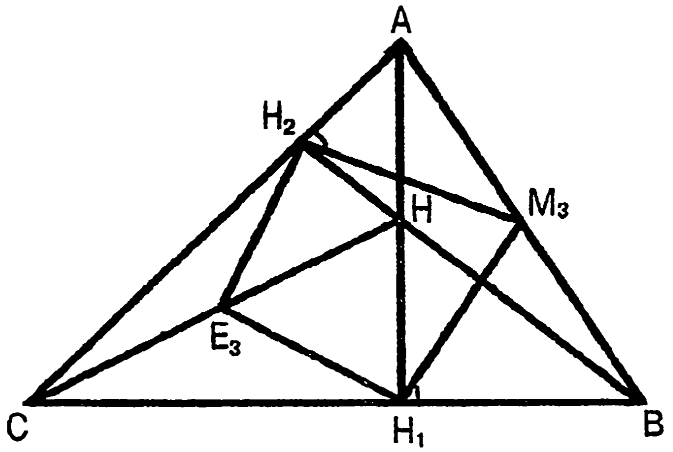


Рис. 28.37

$$\angle H_2E_3H_1 = \angle H_2E_3H +$$

$$+ \angle H_1E_3H =$$

$$= 2(\angle E_3CH_2 + \angle E_3CH_1) = 2C$$ (рис. 28.37).

Из треугольников ABH_2 и ABH_1 следует

$$\angle H_2M_3H_1 = 180° - \angle H_2M_3A - \angle H_1M_3B =$$

$$= 180° - (180° - 2A) - (180° - 2B) = 2A + 2B - 180°.$$

Итак, получим $\angle H_2E_3H_1 + \angle H_2M_3H_1 =$

$$= 2C + 2A + 2B - 180° = 360° - 180° = 180°.$$

Задача 41.

Доказать, что точки H_1, H_2, E_1, E_2 принадлежат одной окружности.

Доказательство.

В треугольнике HAB отрезок E_1E_2 является средней линией (рис. 28.38), поэтому $E_1E_2 \parallel AB$ и

$$\angle H_1E_1E_2 = \angle H_1AB = 90° - B.$$

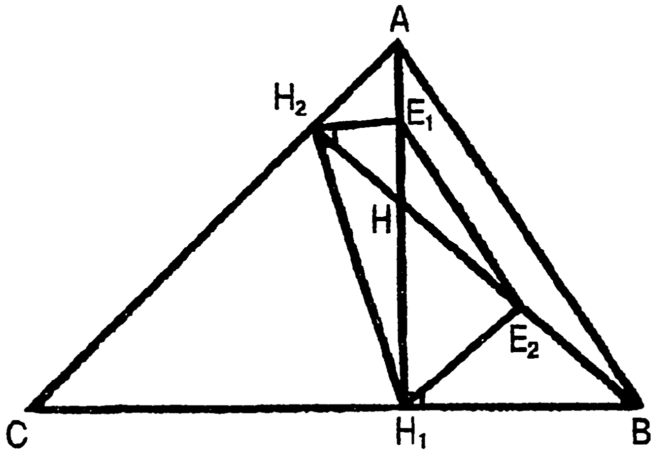


Рис. 28.38

Итак, $\angle H_1H_2E_2 = \angle H_1E_1E_2$, откуда следует, что точки H_1, H_2, E_1, E_2 принадлежат одной окружности.

Задача 42.

Доказать, что точки H_1, H_2, E_1, E_2 принадлежат одной окружности.

Доказательство.

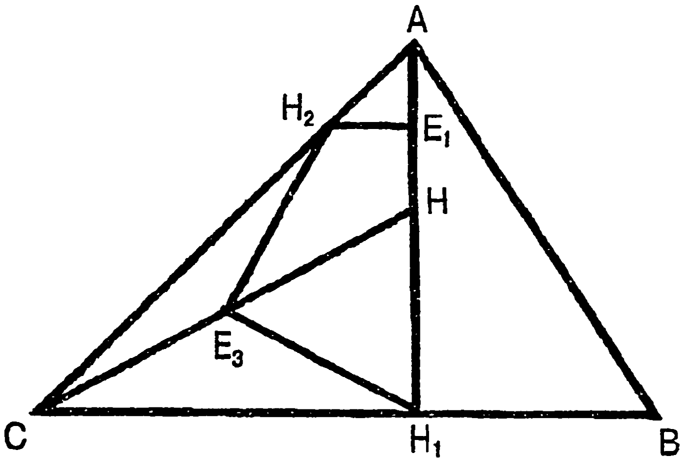


Рис. 28.39

Ранее мы доказали, что

$$\angle H_2E_3H_1 = \angle H_2E_1H_1 = 180° - 2C \text{ (рис. 28.39)},$$

$\angle H_2AE_1 = 90° - C$. Итак,

$$\angle H_2E_3H_1 + \angle H_2E_1H_1 = 180°.$$

Задача 43.

Доказать, что точки H_1, M_1, H_2, E_3 принадлежат одной окружности.

Доказательство.

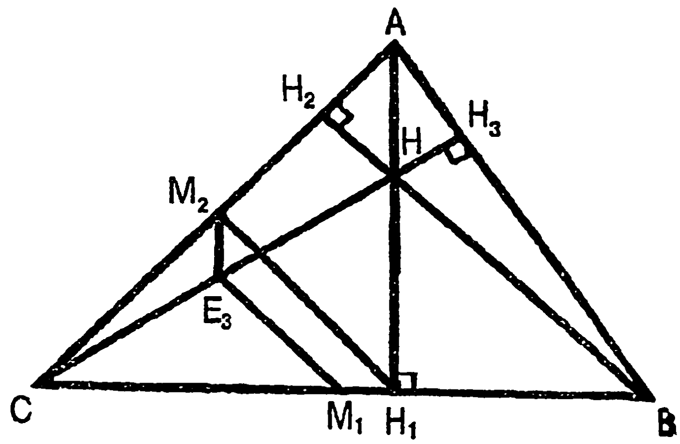


Рис. 28.40

Поскольку $M_2E_3 \parallel AH$ и $M_1E_3 \parallel BH$ (рис. 28.40), то $\angle M_2E_3M_1 = \angle AHB = 180° - C$, $\angle M_2H_1M_1 = C$. Следовательно,

$\angle M_2H_1M_1 + \angle M_2E_3M_1 = 180°$.

Задача 44.

Доказать, что точки H_1, M_2, M_3, E_1 принадлежат одной окружности.

Доказательство.

Проведем отрезки AH, BH и CH (рис. 28.41). В треугольниках CAH и BAH отрезки M_2E_1 и M_3E_1 параллельны соответственно отрезкам CH и BH, то есть

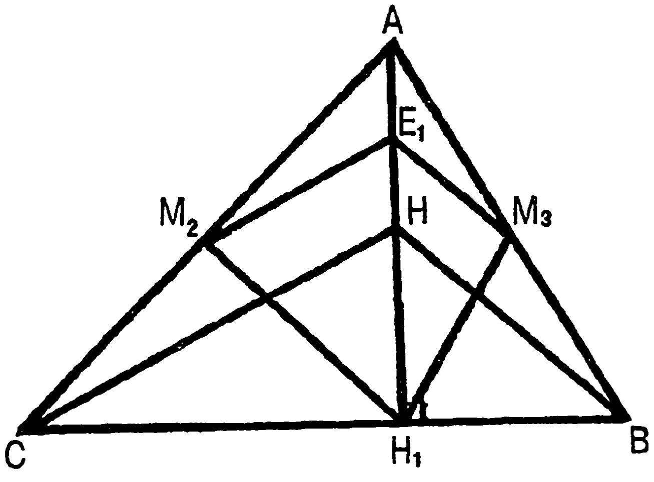


Рис. 28.41

$$\angle M_2E_1M_3 = \angle CHB = 180° - A.$$

Имеем $\angle M_2H_1C = C$, $\angle M_3H_1B = B$. Тогда

$$\angle M_2H_1M_3 = 180° - B - C = A. \text{ Следовательно,}$$

$$\angle M_2H_1M_3 + \angle M_2E_1M_3 = 180°.$$

Задача 45.

Доказать, что точки H_1, M_2, M_3, E_3 принадлежат одной окружности (рис. 28.42).

Доказательство.

Поскольку $M_2E_3 \parallel AH$, $M_2M_3 \parallel CB$, то

$$\angle E_3M_2M_3 = \angle AH_1B = 90°.$$

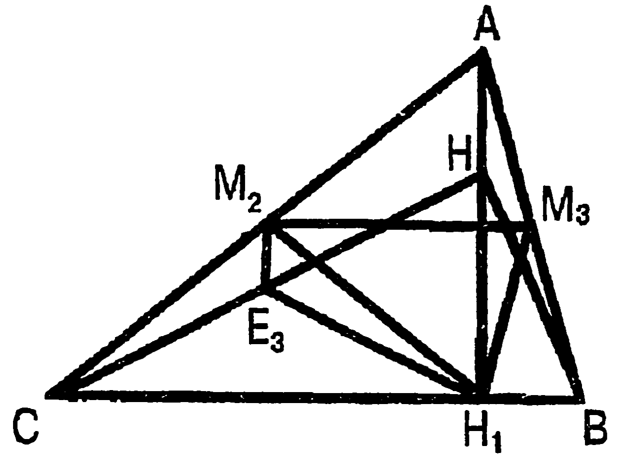


Рис. 28.42

Докажем, что

$$\angle M_3H_1E_3 = 90°. \text{ Действительно,}$$

$$\angle M_3H_1B = B, \quad \angle E_3H_1C = 90° - B, \text{ а}$$

$$\angle E_3H_1M_3 = 180° - B - (90° - B) = 90°.$$

Задача 46.

Доказать, что точки H_1, M_1, E_2, E_3 принадлежат одной окружности.

Доказательство.

В треугольнике CHB (рис. 28.43) $E_3M_1 = \frac{1}{2}HB$, в треугольнике HH_1B имеем $H_1E_2 = \frac{1}{2}HB$, то есть

$$E_3M_1 = H_1E_2 \text{ и}$$

$$E_3E_2 \parallel M_1H_1.$$

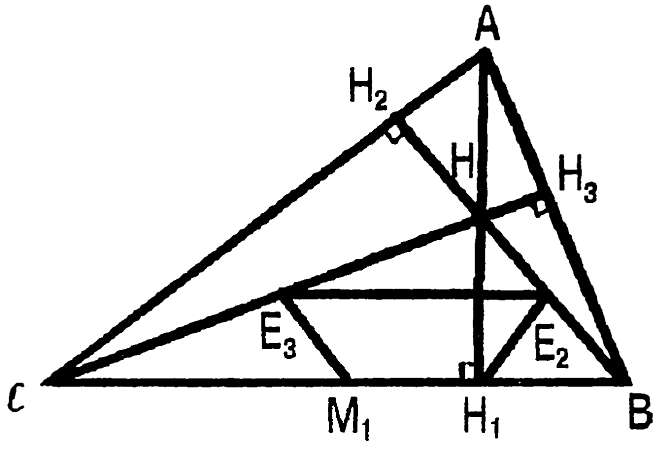


Рис. 28.43

Таким образом, четырехугольник $M_1H_1E_2E_3$ — равнобедренная трапеция, вокруг которой можно описать окружность.

Задача 47.

Доказать, что точки H_1, M_2, E_1, E_3 принадлежат одной окружности.

Доказательство.

В треугольнике CAH (рис. 28.44) $M_2E_1 = \frac{1}{2}CH$, а в треугольнике CHH_1 отрезок $H_1E_3 = \frac{1}{2}CH$, значит, $M_2E_1 = H_1E_3$. Поскольку $M_2E_3 \parallel E_1H_1$, то вокруг равнобедренной трапеции $M_2E_1H_1E_3$ можно описать окружность.

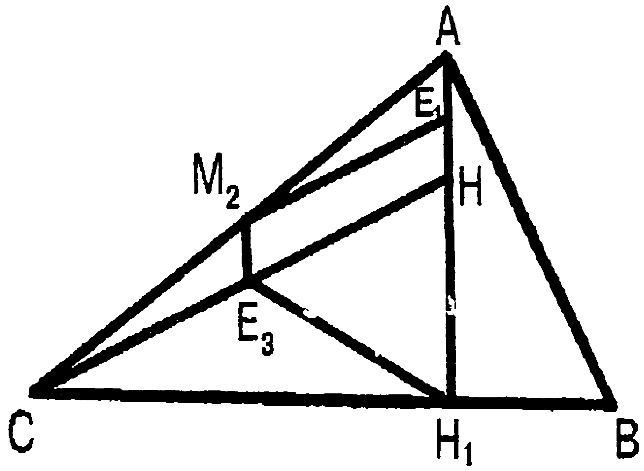


Рис. 28.44

Задача 48.

Доказать, что точки H_1, M_2, E_2, E_3 принадлежат одной окружности.

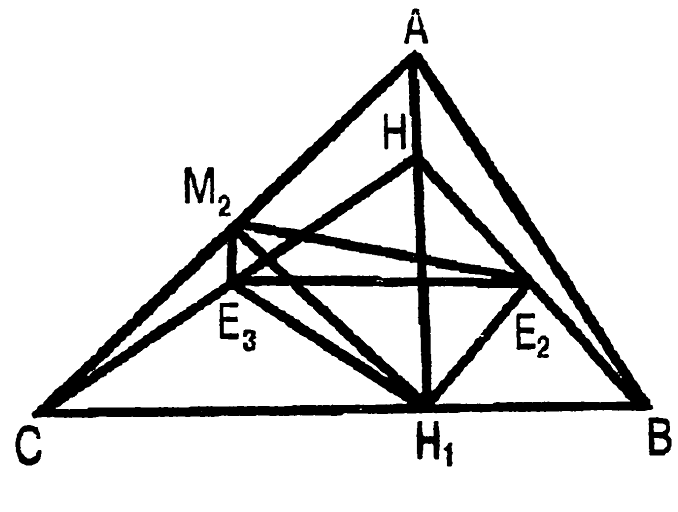


Рис. 28.45

Доказательство.

Докажем, что $\angle E_3M_2H_1 = \angle E_3E_2H_1$ (рис. 28.45). Поскольку $E_3E_2 \parallel BC$, то $\angle E_3E_2H_1 = \angle E_2BH_1 = 90° - C$, имеем

$$\angle E_3M_2H_1 = \angle M_2H_1A, \quad \angle M_2H_1A = \angle CAH_1 = 90° - C,$$

что доказывает утверждение задачи.

Задача 49.

Доказать, что точки M_1, M_2, E_1, E_3 принадлежат одной окружности.

Доказательство.

Докажем, что

$$\angle M_2E_1E_3 = \angle M_2M_1E_3$$

(рис. 28.46). Действительно, $M_2E_1 \parallel CH$, $E_3M_1 \parallel BH$, $M_1M_2 \parallel AB$. Следовательно,

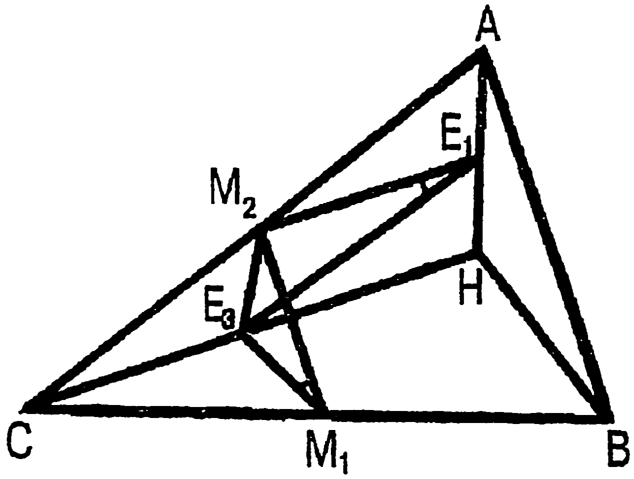


Рис. 28.46

$$\angle M_2M_1E_3 = \angle HBA = 90° - A.$$

Таким образом, $\angle M_2E_1E_3 = \angle M_2M_1E_3$.

Построение треугольников

Задача 50.

Построить треугольник ABC по точкам M_1, M_2, M_3.

Решение.

Строим треугольник $M_1M_2M_3$ (рис. 28.47). Через его вершины проводим прямые, параллельные соответствующим сторонам, получаем треугольник ABC.

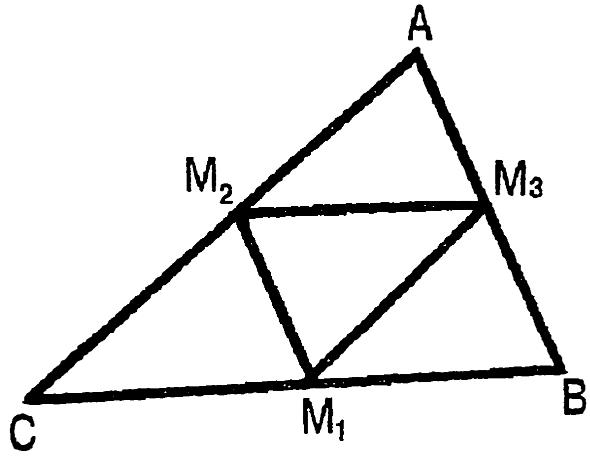


Рис. 28.47

Задача 51.

Построить треугольник по точкам E_1, E_2, E_3.

Решение.

Поскольку стороны треугольника $E_1E_2E_3$ вдвое меньше сторон треугольника ABC (рис. 28.48), то строим треугольник $E_1E_2E_3$, а потом треугольник ABC.

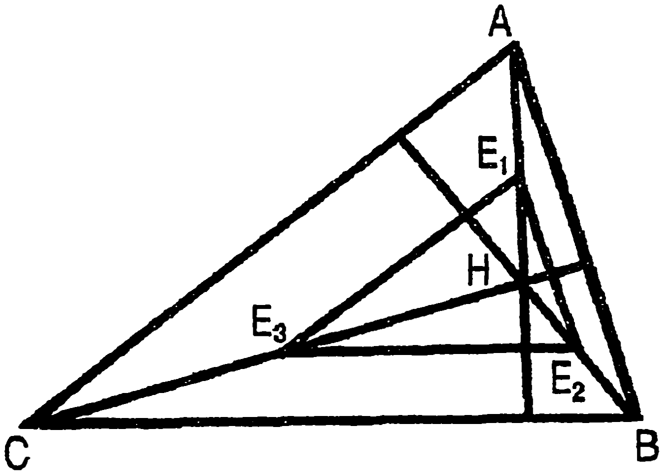


Рис. 28.48

Задача 52.

Построить треугольник ABC по точкам H_1, H_2, H_3.

Решение.

Вокруг треугольника $H_1H_2H_3$ опишем окружность (рис. 28.49). Следовательно, строим треугольник $H_1H_2H_3$, потом треугольники $E_1E_2E_3$ и ABC.

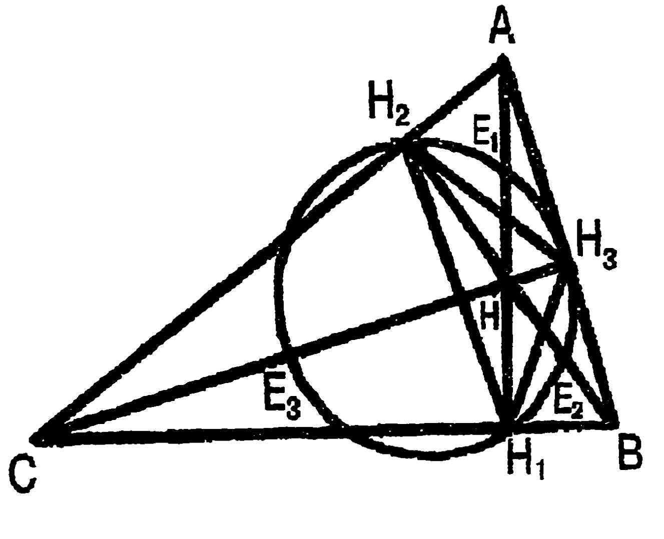


Рис. 28.49

Задача 53.

Построить треугольник по точкам M_1, M_2, H_3.

Решение.

Из треугольника BH_3C (рис. 28.50) имеем $M_1H_3 = \frac{1}{2}BC$, откуда находим a. Из треугольника AH_3C следует

$$H_3M_2 = \frac{1}{2}AC,$$

откуда находим b. По условию $M_1M_2 = \frac{1}{2}AB$ находим c. По сторонам a, b, c строим треугольник ABC.

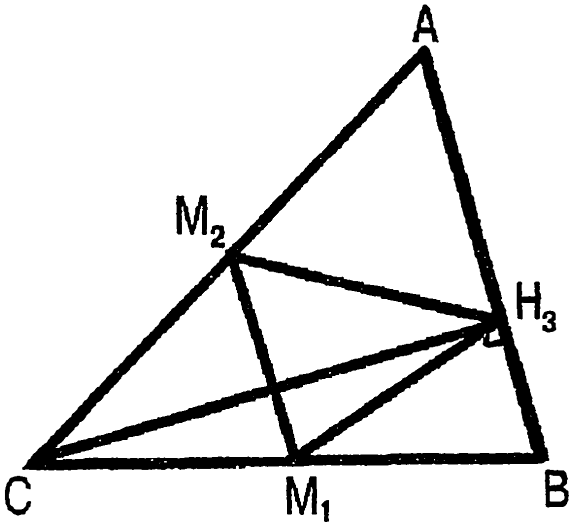


Рис. 28.50

Задача 54.

Построить треугольник ABC по точкам M_1, M_2, H_1.

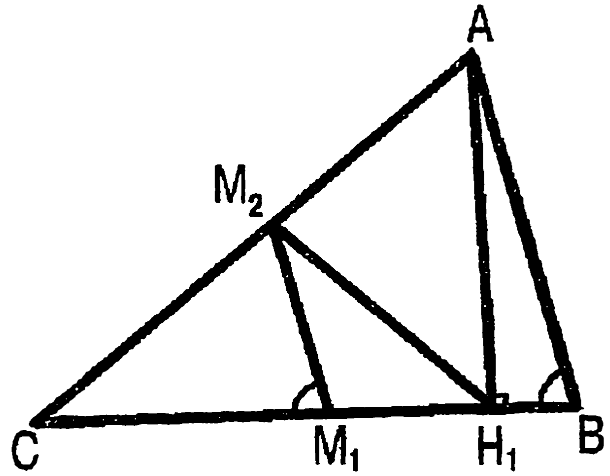


Рис. 28.51

Решение.

Поскольку заданы отрезки M_1M_2 и H_1M_2 (рис. 28.51), то мы получаем стороны c и b треугольника ABC. Строим треугольник $M_1M_2H_1$, получаем угол M_2M_1C, который равен углу B. По двум сторонам и углу против одной из этих сторон можно строить треугольник ABC.

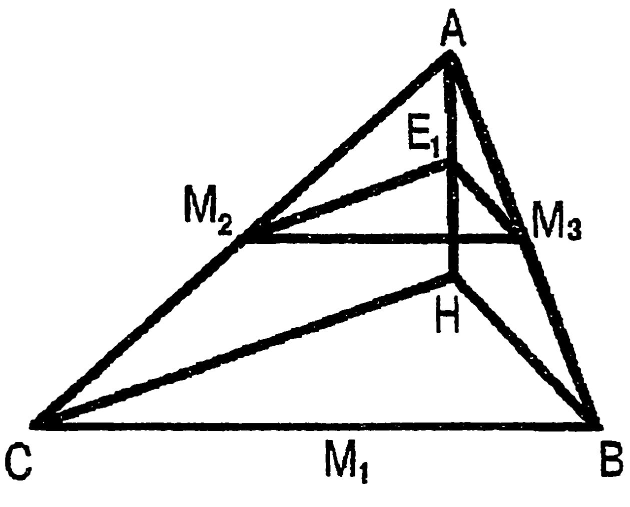


Рис. 28.52

Задача 55.

Построить треугольник ABC по точкам M_1, M_2, E_1.

Решение.

Анализ показывает, что треугольник $E_1M_2M_3$ (рис. 28.52) гомотетичен треугольнику HBC.

Задача 56.

Построить треугольник по точкам H_1, H_2, M_1.

Решение.

Из треугольника $M_1H_1H_2$ (рис. 28.53) найдем угол $H_2H_1M_1$, равный углу A. Из треугольника BH_2C, имея угол $H_1M_1H_2$, найдем угол C, сторону $BC = a$. По стороне BC и углам B, C построим треугольник ABC.

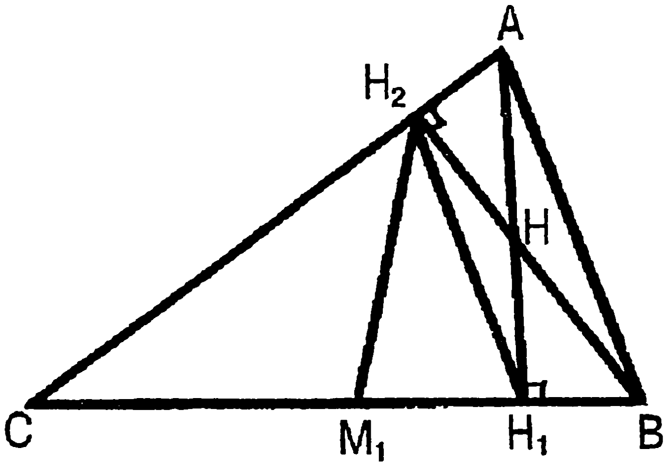


Рис. 28.53

29. БИССЕКТРАЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Пусть L_1, L_2, L_3 — основания биссектрис углов треугольника ABC.

Треугольник $L_1L_2L_3$ называется биссектральным (рис. 29.1).

Задача 1.

В треугольнике ABC

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2(\sin A + \sin B)}{1 + 2\cos C}, \tag{1}$$

где $\varphi = \angle L_1L_2L_3$.

Доказать.

Доказательство.

Обозначим

$\angle L_1L_2L_3 = \alpha$,

$\angle BL_3L_1 = \beta$.

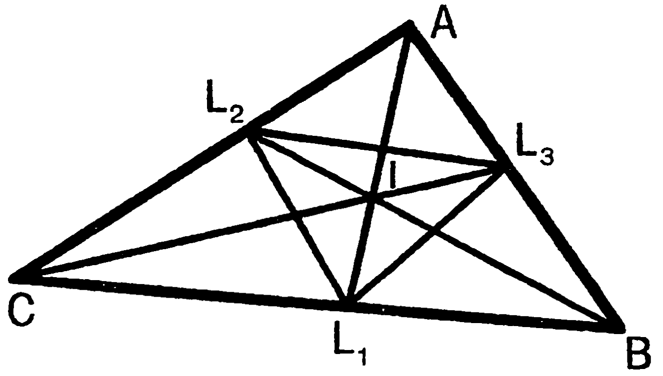


Рис. 29.1

Тогда $\varphi = 180° - (\alpha + \beta)$, $\operatorname{tg}\varphi = -\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$.

Из треугольника AL_2L_3 (рис. 29.1) по теореме синусов имеем:

$$\frac{AL_2}{AL_3} = \frac{\sin\alpha}{\sin(A+\alpha)}.$$

Но

$$AL_2 = \frac{bc}{a+c}, \quad AL_3 = \frac{bc}{a+b}.$$

Таким образом,

$$\frac{a+b}{a+c} = \frac{\sin\alpha}{\sin(A+\alpha)}.$$

Аналогично из треугольника L_1BL_3

$$\frac{a+b}{b+c} = \frac{\sin\beta}{\sin(B+\beta)}.$$

Так как

$$\frac{a+c}{a+b} = \frac{2R(\sin A + \sin C)}{2R(\sin A + \sin B)} \text{ и } \frac{a+c}{a+b} = \frac{\sin(A+\alpha)}{\sin\alpha},$$

то

$$\frac{\sin A + \sin C}{\sin A + \sin B} = \frac{\sin(A+\alpha)}{\sin\alpha}.$$

Найдем из этого соотношения $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin A(\sin A + \sin B)}{\sin A + \sin C - \cos A \sin A - \cos A \sin B}.$$

Учитывая, что $\sin C = \sin(A+B)$, имеем:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin A(\sin A + \sin B)}{\sin A(1 - \cos A) + \sin A \cos B + \cos A \sin B - \cos A \sin B},$$

откуда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin A + \sin B}{1 + \cos B - \cos A}.$$

Аналогично

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin A + \sin B}{1 + \cos A - \cos B};$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta - 1};$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta =$$

$$= \frac{2(\sin A + \sin B)}{(1 + \cos B - \cos A)(1 + \cos A - \cos B)};$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta - 1 =$$

$$= \frac{\sin^2 A + 2\sin A \sin B + \sin^2 B - 1 + \cos^2 A - \cos A \cos B - \cos A \cos B + \cos^2 B}{(1 + \cos B - \cos A)(1 + \cos A - \cos B)} =$$

$$= \frac{1 - 2\cos(A+B)}{(1 + \cos B - \cos A)(1 + \cos A - \cos B)}.$$

Так как $\cos(A + B) = -\cos C$, то

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2(\sin A + \sin B)}{1 + 2\cos C}.$$

Задача 2.

Найти площадь биссектрального треугольника, если известны стороны a, b, c треугольника ABC.

Решение.

Пусть S_1, S_2, S_3 — площади треугольников CL_1L_2, AL_2L_3, BL_3L_1, S — площадь треугольника ABC, S_L — площадь $\Delta L_1L_2L_3$.

$$S_1 = \frac{CL_1 \cdot CL_2 \cdot \sin C}{2}, \quad CL_1 = \frac{ab}{b + c}, \quad CL_2 = \frac{ab}{a + c};$$

$$S_2 = \frac{AL_2 \cdot AL_3 \cdot \sin A}{2}, \quad AL_2 = \frac{bc}{a + c}, \quad AL_3 = \frac{bc}{a + b};$$

$$S_3 = \frac{BL_3 \cdot BL_1 \cdot \sin B}{2}, \quad BL_3 = \frac{ac}{a + b}, \quad BL_1 = \frac{ac}{b + c}.$$

$$S_1 + S_2 + S_3 = \frac{a^2 b^2 \sin C}{2(b + c)(a + c)} +$$

$$+ \frac{b^2 c^2 \sin A}{2(a + c)(a + b)} + \frac{a^2 c^2 \sin B}{2(a + b)(b + c)} =$$

$$= S\left(\frac{ab(a + b) + bc(b + c) + ac(a + c)}{(a + b)(b + c)(a + c)}\right).$$

Отсюда имеем:

$$S_L = S - (S_1 + S_2 + S_3) =$$

$$= S\left(\frac{(a + b)(b + c)(a + c) - ab(a + b) - bc(b + c) - ac(a + c)}{(a + b)(b + c)(a + c)}\right).$$

Итак,

$$S_L = \frac{2S\, a \cdot b \cdot c}{(a+b)(b+c)(a+c)}. \qquad (2)$$

Задача 3.

Для произвольной точки, принадлежащей стороне биссектрального треугольника, сумма (или модуль разности) расстояний до соответствующих сторон равна расстоянию до третьей стороны. Доказать.

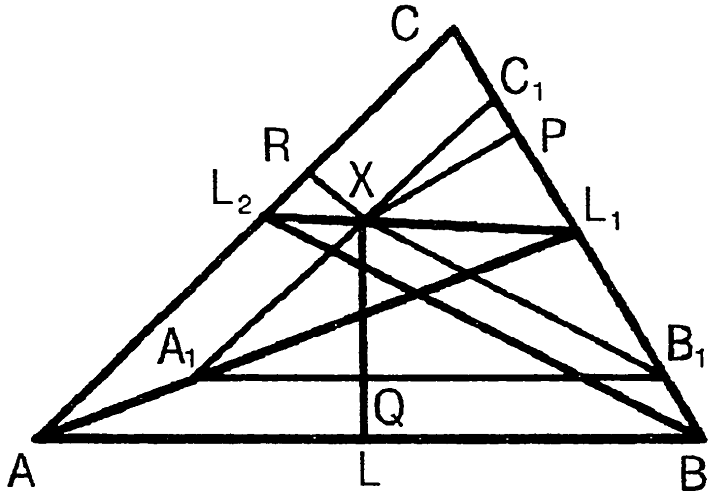


Рис. 29.2

Доказательство.

Пусть точка X принадлежит отрезку L_1L_2 (рис. 29.2). Пусть P, R, L — проекции этой точки на стороны треугольника. Рассмотрим гомотетию с центром L_1 и коэффициентом $k = L_1X : L_1L_2$.

Тогда треугольник $A_1B_1C_2$ будет гомотетичен треугольнику ABC, а образом биссектрисы BL_2 является биссектриса B_1X треугольника $A_1B_1C_1$.

Таким образом, расстояния от точки X до сторон A_1B_1 и B_1C_1 равны между собой, то есть $XQ = XP$. Поскольку точка A_1 принадлежит биссектрисе AL_1, то прямые A_1B_1 и B_1C_1 равноудалены соответственно от прямых AB и AC. Поэтому $QL = XR$, а тогда

$$XQ + LQ = XP + XR, \text{ или } XL = XP + XR.$$

Если точка X принадлежит продолжению отрезка L_1L_2, то решение аналогично, но вместо суммы расстояний придется рассмотреть модуль разности соответствующих расстояний.

Задача 4.

Доказать, что существование уравнения

$$\sin(A - B) - \sin(A - C) = \sin 2C - \sin 2B$$

для углов треугольника ABC является необходимым и достаточным условием того, чтобы биссектральный треугольник был равнобедренным $(L_1L_3 = L_1L_2)$.

Доказательство. Необходимость.

Итак, дано, что $\operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}\varphi_2$, где

$$\varphi_1 = \angle L_1L_3L_2, \quad \varphi_2 = \angle L_1L_2L_3.$$

По формуле (1) имеем:

$$\frac{2(\sin A + \sin B)}{1 + 2\cos C} = \frac{2(\sin A + \sin C)}{1 + 2\cos B},$$

$$\frac{\sin A + \sin B}{1 + 2\cos C} = \frac{\sin A + \sin C}{1 + 2\cos B}.$$

Отсюда

$$2\cos B\sin A + \sin B + \sin 2B + \sin A =$$
$$= \sin A + 2\sin A\cos C + \sin C + \sin 2C,$$

или

$$\sin(A - B) + \sin 2B = \sin(A - C) + \sin 2C;$$

то есть

$$\sin(A - B) - \sin(A - C) = \sin 2C - \sin 2B.$$

Достаточность доказывается аналогично.

Задача 5.

Доказать, что площадь биссектрального треугольника S_L вычисляется по формуле

$$S_L = \frac{l_a \cdot l_b \cdot l_c}{4p}$$

(она называется формулой Чезаро).

Доказательство.

Известно, что

$$l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp\,(p-a)}.$$

Аналогично,

$$l_b = \frac{2}{a+c}\sqrt{acp\,(p-b)};$$

$$l_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{apb\,(p-c)}.$$

Перемножим эти уравнения и применим формулу (2). Получим доказываемую формулу.

Задача 6.

Доказать, что площадь биссектрального треугольника не может быть более четверти площади треугольника ABC.

Доказательство.

Для положительных чисел a, b, c имеет место соотношение

$$(a+b)(a+c)(b+c) \geqslant 8abc.$$

Учитывая формулу (2), имеем $S_L \leqslant \frac{S}{4}$.

Задача 7.

Среди прямоугольных треугольников найти такой, который имеет биссектральный треугольник с наибольшим углом, противоположным прямому.

Решение.

Покажем, что такое свойство имеет угол биссектрального треугольника в равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC ($C = 90°$). По формуле (1) имеем:

$$\operatorname{tg}\varphi = 2\,(\sin A + \sin B) = 4\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}.$$

Так как $\operatorname{tg}\varphi = 4\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{A-B}{2}$, но $\cos\frac{A-B}{2} \leqslant 1$, то

$$\operatorname{tg}\varphi \leqslant 2\sqrt{2}, \text{ причем } \operatorname{tg}\varphi = 2\sqrt{2} \text{ при}$$

$$\cos\frac{A-B}{2} = 1, \text{ то есть } A = B = 45°.$$

Задача 8.

Доказать, что биссектральный треугольник будет прямоугольным тогда и только тогда, когда один из углов треугольника ABC будет равен 120°.

Доказательство.

Действительно, это следует непосредственно из формулы (1).

Задача 9.

В равнобедренном треугольнике $BC = AC$. Найти точку на стороне L_1L_2 биссектрального треугольника, произведение расстояний от которой до равных сторон треугольника наибольшее.

Решение.

Пусть X — произвольная точка, принадлежащая отрезку L_1L_2; XM_1, XN_1, XK_1 — расстояния от этой точки до сторон треугольника (рис. 29.3). Тогда

$$XM_1 + XN_1 = XK_1$$

(задача 3).

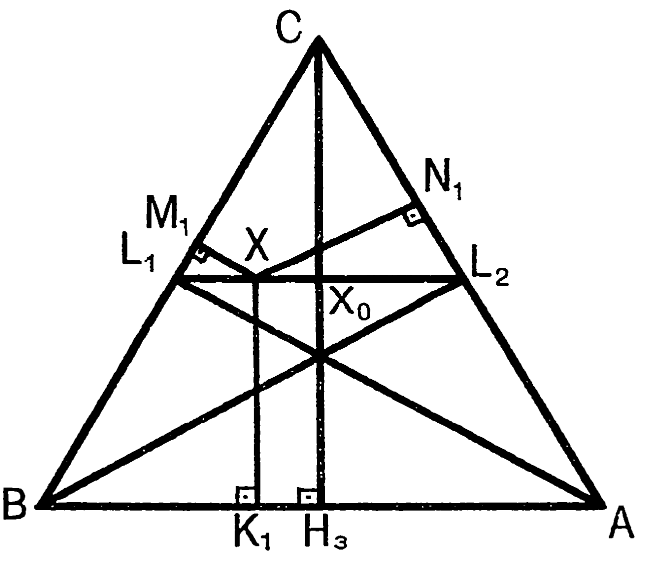


Рис. 29.3

Так как отрезок L_1L_2 параллелен стороне AB, то для переменных слагаемых XM_1 и XN_1 отрезок XK_1 — постоянен. Поэтому произведение расстояний от точки X до сторон BC и AC будет наибольшим, когда

$$XM_1 = XN_1 = \frac{XK_1}{2}.$$

Итак, такое свойство имеет точка пересечения X_0 высоты CH_3 с отрезком L_1L_2.

Задача 10.

Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает сторону L_2L_3 биссектрального треугольника $L_1L_2L_3$ в точке M (центроиде треугольника ABC). Найти углы треугольника ABC.

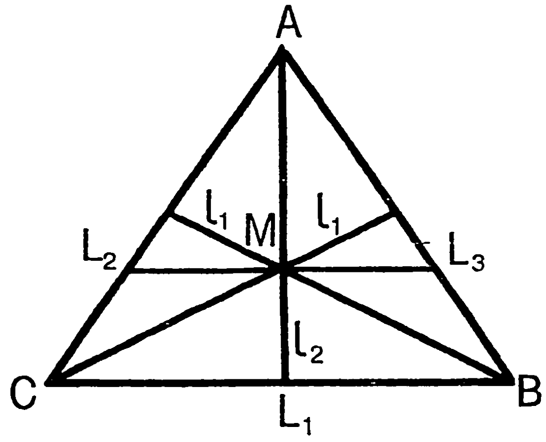


Рис. 29.4

Решение.

Обозначим расстояние от точки M (рис. 29.4) до сторон AB и AC через l_1, а расстояние до стороны BC — через l_2.

Таким образом, $l_1 \cdot b = l_1 \cdot c$, или $b = c$, то есть треугольник ABC — равнобедренный. Учитывая задачу 3, имеем:

$$2l_1 = l_2.$$

Отсюда $b = 2a$ (так как $l_1 \cdot b = l_2 \cdot a$).

Итак,

$$\cos C = \frac{1}{4}, \quad B = C = \arccos\frac{1}{4}, \quad A = \pi - 2\arccos\frac{1}{4}.$$

30. ОБ ОДНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОБЛЕМЕ

Треугольник $H_1H_2H_3$, вершинами которого являются основания высот данного треугольника ABC, называется ортоцентрическим.

Доказать, что изо всех треугольников, вписанных в данный остроугольный треугольник, ортоцентрический имеет наименьший периметр.

Прежде, чем решить поставленную задачу, рассмотрим задачи 1-3.

Задача 1.

Доказать, что полупериметр $p_к$ ортоцентрического треугольника равен $\frac{S}{R}$.

Доказательство.

$$p_к = \frac{1}{2} R (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) =$$

$$= \frac{1}{2} R (2 \sin (A + B) \cos (A - B) + \sin (2 (\pi - (A + B)))) =$$

$$= \frac{1}{2} R (2 \sin (A + B) \cos (A - B) - 2 \sin (A + B) \cos (A + B)) =$$

$$= \frac{1}{2} R (2 \sin (A + B) \cdot (\cos (A - B) - \cos (A + B))) =$$

$$= \frac{1}{2} R (2 \sin (\pi - C) \cdot (- 2 \sin A \cdot \sin (- B)) =$$

$$= \frac{1}{2} R \cdot 4 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = 2R \sin A \sin B \sin C.$$

Так как $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$, то

$$p_к = \frac{S}{R}.$$

Задача 2.

Если из вершины ортоцентрического треугольника провести перпендикуляры к сторонам треугольника ABC, то отрезок, соединяющий основания перпендикуляров, равен полупериметру $p_н$ ортоцентрического треугольника. Доказать.

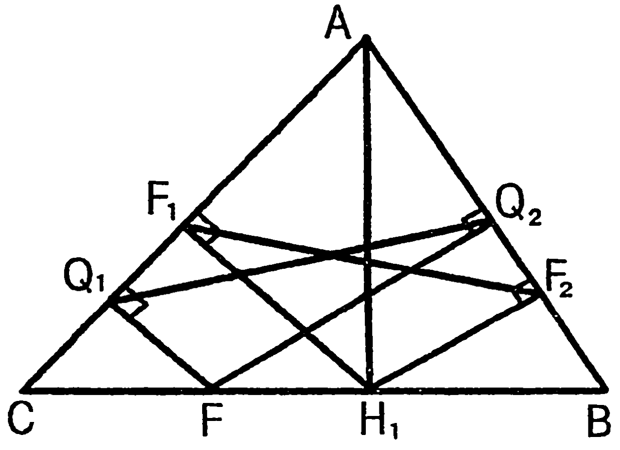


Рис. 30.1

Доказательство.

Пусть отрезок H_1F_1 перпендикулярен отрезку AC, отрезок H_1F_2 перпендикулярен отрезку AB (рис. 30.1). Около четырехугольника $H_1F_1AF_2$ можно описать окружность, диаметр которой равен отрезку AH_1. Тогда

$$F_1F_2 = AH_1 \sin A = \frac{S}{R}. \qquad (2)$$

Сравнивая отрезки (1) и (2), видим, что $F_1F_2 = p_н$.

Задача 3.

Если через произвольную точку стороны треугольника ABC провести перпендикуляры к двум другим сторонам, то длина отрезка, соединяющего основания перпендикуляров, будет не меньше полупериметра $p_н$ ортоцентрического треугольника. Доказать.

Доказательство.

Возьмем, например, на стороне BC точку F (рис. 30.1) и проведем перпендикуляры FQ_1 и FQ_2 к сторонам AC и AB. Тогда $Q_1Q_2 = AF \cdot \sin A$, $\sin A$ — постоянная величина, а длина отрезка AF будет наименьшей, если отрезок AF перпендикулярен отрезку BC. Таким образом,

$$Q_1Q_2 \geqslant F_1F_2, \text{ или}$$

$$Q_1Q_2 \geqslant p_н. \qquad (3)$$

А теперь решим поставленную задачу о наименьшем периметре.

Доказательство.

Пусть произвольный треугольник MFN вписан в остроугольный треугольник ABC (рис. 30.2). Построим точки, симметричные точке F относительно AC и AB. Будем иметь соответственно точки L и E. Длина ломаной $LMNE$ равна периметру $2p$ треугольника MFN.

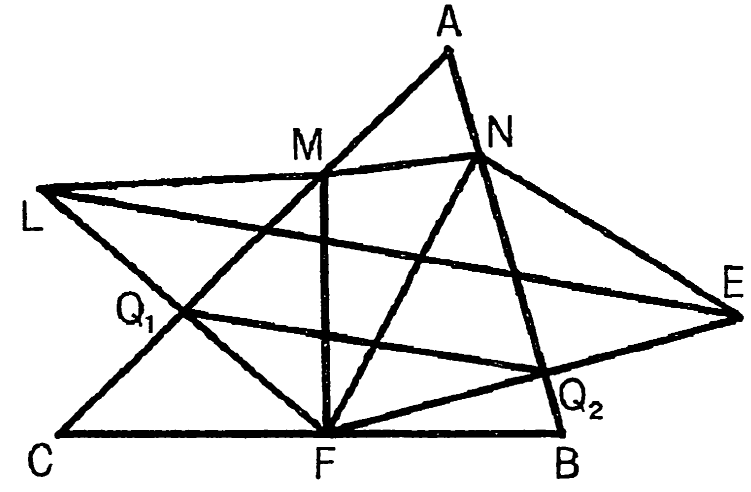


Рис. 30.2

Q_1Q_2 — средняя линия треугольника LFE, поэтому $Q_1Q_2 = \frac{1}{2}LE$. Но длина LE не больше длины ломаной $LMNE$. Таким образом, длина отрезка Q_1Q_2 не больше полупериметра p треугольника MFN, то есть

$$Q_1Q_2 \leqslant p. \qquad (4)$$

Сравнивая выражения (3) и (4), получим

$$p_н \leqslant Q_1Q_2 \leqslant p, \text{ или } p_н \leqslant p.$$

Знак равенства будет тогда и только тогда, когда треугольник MFN будет ортоцентрическим. Действительно, в этом случае (рис. 30.2) $\angle FNB = C$, $\angle MNF = 180° - 2C$.

Итак, $\angle MNE = 180° - 2C + 2C = 180°$, то есть MNE — прямая линия. Аналогично доказываем, что $\angle LMN = 180°$, а это значит, что ломаная $LMNE$ совпадает с отрезком LE.

Список использованной и рекомендуемой литературы

1. А.И. Азаров, О.М. Гладун, В.С. Федосенко, «Тригонометрические уравнения», Минск, Тривиум, 1994.

2. Я.Й. Айзенштат, Б.Г. Білоцерківська, «Розв'язування задач з математики в середній школі», Радянська школа, 1957.

3. Б.И. Александров, В.М. Максимов, М.В. Лурье, А.В. Колесниченко, «Пособие по математике для поступающих в вузы», Издательство МГУ, 1972.

4. Г.П. Бевз, «Геометрія тетраедрів». — К., Рад. школа. 1974.

5. Е.Б. Ваховский, А.А. Рывкин, «Задачи по элемертарной математике», Москва, Наука, 1971.

6. О.Г. Гайштут, Г.М. Литвиненко, «Розв'язування алгебраічних задач», Київ, Радянська школа, 1991.

7. П.И. Горнштейн, В.Б. Полонский, М.С. Якир, «Задачи с параметрами. Издание второе, дополненное и переработанное», Киев, Евроиндекс, 1995.

8. Я.Л. Каплан, «Рівняння», Радянська школа, 1968.

9. І.А. Кушнір, «Методи розв'язання задач з геометрії», Київ, Абрис, 1994.

10. І.А. Кушнір, «Трикутник і тетраедр у задачах», Київ, Радянська школа, 1991.

11. И.А. Кушнир, «Векторные методы решения задач», Київ, Оберіг, 1995.

12. І.А. Кушнір, «Побудова трикутника», Київ, Либідь, 1994.

13. Л.В. Лобанова, Л.П. Фінкельштейн, «Вибрані задачі елементарної математики», Київ, Вища школа, 1989.

14. А.М. Назаренко, Л.Д. Назаренко, «Тысяча и один пример», Сумы, изд. «Слобожанщина», 1994.

15. В.Н. Петечук, «Алгебра для 8 класу з поглибленим вивченням математики», Ужгород, Карпати, 1992.

16. В.Н. Петечук, «Геометрія для 8 класу», Ужгород, Карпати, 1992.

17. С.Р. Сефибеков, «Внеклассная работа по математике», М., Просвещение, 1988.

18. И.Х. Сивашинский, «Задачник по элементарной математике», Москва, Наука, 1966.

19. Л.П. Финкельштейн, «Домашний репетитор. Избранные главы конкурсной математики в методах и задачах», книги 1-4, Евроиндекс, Киев, 1995.

20. И.Ф. Шарыгин, «Задачи по геометрии (планиметрия)», М., Наука, 1986.

21. И.Ф. Шарыгин, «Задачи по геометрии (стереометрия)», М., Наука, 1984.

22. Э.З. Шувалова, Б.Г. Агафонов, Г.И. Богатырев, «Повторим математику», Москва, Высшая школа, 1974.

ОГЛАВЛЕНИЕ

И. Кушнир

ШЕДЕВРЫ ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ В ДВУХ КНИГАХ.

Книга II

Художник Гутман М.Б.
Редактов Божко С.М.
Технический редактор Вербовиков А.М.
Корректор Обуховский Л.Я.

Сдано на производство 7.08.95 г. Формат 84×108 1/32. Бумага типографская №2. Гарнитура «Таймс». Усл. печ. листов 26,88. Уч.-изд. листов 45,5. Заказ № 5-1073.

ООО «Астарта». 252133, г. Киев, бульвар Л.Украинки, 20/22.
Головное предприятие РПО «Полиграфкнига».
252057, г. Киев, ул. Довженко, 3.

И. Кушнир

Шедевры школьной МАТЕМАТИКИ

Автор книги —
Заслуженный
учитель Украины,
доцент Киевского
межрегионального
института
усовершенствования
квалификации учителей
им. Б Гринченко,
лауреат конкурса
"Соросовский учитель",
учитель-методист гимназии
педагогического
университета
им. М. Драгоманова.
Автор более пятидесяти
научно-методических
статей.
Его книги: "Трикутник і
тетраедр у задачах";
"Побудова трикутника",
"Методи розв'язання
задач з геометрії",
"Векторные методы
решения задач"
пользуются заслуженным
успехом у учащихся
и учителей.

Двухтомником "Шедевры
школьной математики"
издательство "АСТАРТА"
открывает серию
учебной
и научно-популярной
литературы.