И. И. ЗУБАРЕВА, А. Г. МОРДКОВИЧ

МАТЕМАТИКА

5-6 классы

Методическое пособие для учителя

Издательство Мнемозина

И. И. ЗУБАРЕВА, А. Г. МОРДКОВИЧ

МАТЕМАТИКА

5-6

классы

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
для учителя

3-е издание, исправленное

ИЗДАТЕЛЬСТВО МНЕМОЗИНА

Москва 2008

УДК 372.851
ББК 74.262.21
З-91

Зубарева И. И.

З-91 Математика. 5—6 классы : методическое пособие для учителя / И. И. Зубарева, А. Г. Мордкович. — 3-е изд., испр. — М. : Мнемозина, 2008. — 104 с. : ил.

ISBN 978-5-346-00893-4

Цель пособия — оказание методической помощи учителям, работающим по учебникам «Математика» для 5-го и 6-го классов авторов И. И. Зубаревой и А. Г. Мордковича. В пособии представлены концепция построения курса и особенности методического аппарата учебников, тематическое планирование и контрольные работы. Разобраны решения задач повышенной трудности и даны рекомендации по организации работы с ними. Специальное внимание уделено стохастической линии: приведены решения всех задач соответствующих параграфов, в отдельных случаях — с методическими указаниями.

УДК 372.851
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-346-00893-4

Особенности методического аппарата учебников «Математика» для 5 и 6 классов

Это пособие предназначено тем учителям математики, которые используют в своей работе следующие учебники:

И. И. Зубарева, А. Г. Мордкович. Математика–5. Мнемозина (издания, начиная с 2002 г.);

И. И. Зубарева, А. Г. Мордкович. Математика–6. Мнемозина (издания, начиная с 2002 г.).

Указанные учебники полностью отвечают требованиям стандарта математического образования и опираются на тот минимум содержания, который предлагают учебники для начальной школы. Это дает возможность использовать их в качестве продолжения любого курса начальной школы — как традиционного, так и развивающего направлений. Что касается последнего, то наши учебники более ориентированы на систему развивающего обучения Л. В. Занкова. Так, суть основного принципа развивающего обучения, сформулированного Л. В. Занковым, — принципа ***ведущей роли теоретических знаний,*** — состоит в *осознанном* усвоении теоретических знаний учащимися, а потому его реализация заключается прежде всего в том, что ученик, выполняя упражнения в определенной последовательности, получает возможность самостоятельно сформулировать правило (например, алгоритмы действий с десятичными дробями в 5-м классе и с обыкновенными дробями и отрицательными числами в 6-м классе), дать определение нового или уже знакомого понятия (например, определение угла) или даже ввести новый термин (например, названия новых столбцов в таблице разрядов — разряд десятых, сотых и т. д.).

Остановимся на особенностях построения основной структурной единицы учебника — параграфа.

В учебнике для 5-го класса объем объяснительного текста невелик по сравнению с другими учебниками для этой возрастной группы учащихся. Дело в том, что в учебниках для начальной школы объяснительный текст, как правило, отсутствует и ожидать от не имеющих соответствующего опыта учеников 5-го класса умения читать обширные объяснительные тексты учебника математики, на наш взгляд, излишне оптимистично. Вместе с тем совершенно очевидно, что учащихся необходимо приучать к самостоятельной работе с учебной книгой. Однако делать это надо постепенно. В учебнике для 5-го класса авторский объяснительный текст дается небольшими порциями. В учебнике для 6-го класса объем объяснительного текста увеличивается. А в 7-м классе, когда ученик получит две учебные книги по алгебре — А. Г. Мордкович. Алгебра–7. Часть 1. Учебник; А. Г. Мордкович, Л. А. Александрова, Т. Н. Мишустина, Е. Е. Тульчинская. Алгебра–7. Часть 2. Задачник («Мнемозина»), — самостоятельная работа с подробно написанным учебным текстом должна стать нормой.

Как было сказано выше, знакомство с новым материалом в учебнике осуществляется в большинстве случаев через систему заданий. В процессе их выполнения ученики получают возможность *самостоятельно* или с минимальной помощью учителя познакомиться с новым свойством, сформулировать правило или ввести новый термин. Такие задания отмечены символом **У**. Изучение нового материала начинается с создания проблемной ситуации. При этом новая задача дается в сочетании с такой, способ решения которой известен учащимся. Тем из них, кто испытывает затруднения, учебник предлагает систему наводящих вопросов и указаний. И только после этого следует объяснительный текст, который начинается словами: «Проверьте свои рассуждения, вывод и т. п.», а завершается формулировкой правила, свойства или определения. Заметим, что объяснительный текст, который дается в начале параграфа, никак не отмечен, а тот, который помещен после упражнений, выделен слева вертикальными линиями.

Мы отнюдь не считаем, что в создании проблемной ситуации или в использовании наводящих вопросов есть что-либо принципиально новое. Учителя применяют эти приемы и при работе с другими учебниками. Однако опыт многолетней работы в педвузе одного из авторов и в институте повышения квалификации работников образования другого показывает, что и по сей день большинство учителей испытывают серьезные затруднения при организации поисково-эвристической деятельности учащихся. Это можно наблюдать при посещении уроков (изложение нового материала в большинстве случаев сводится к пересказу учителем текста учебника), при изучении курсовых работ и рефератов слушателей курсов повышения квалификации, статей, отчетов или других документов, представляемых учителями в процессе аттестации. Крайне редко здесь можно найти материалы с описанием опыта организации поисково-эвристической деятельности учащихся. В основном это разработки дидактических игр, уроков обобщающего повторения, уроки-зачеты и другие формы, главная цель которых — формирование и отработка навыков и умений или контроль за их овладением. То же самое можно сказать и о большинстве материалов, разработанных на электронных носителях, — в основном это тесты или чисто информационные материалы, и очень редко можно увидеть то, что служит развитию мышления: задания, где учащимся предлагается проанализировать, сопоставить полученные результаты, высказать гипотезу или сделать вывод. В этом смысле наши учебники могут существенно облегчить подготовку учителя к уроку, при этом ни в коей мере не сковывая его творческой инициативы.

Очевидно, что момент, когда учащиеся будут готовы к тому, чтобы обосновать вывод (сформулировать правило, сделать обобщение и т. д.), зависит от состава класса. Задача учителя — правильно уловить этот момент. Поэтому формулировка вывода в тексте параграфа там, где это возможно, дается не сразу вслед за упражнениями, подводящими к этому выводу, а позже — после ряда тренировочных упражнений. Это делается с целью снижения вероятности того, что учащиеся в процессе выполнения упражнений смогут найти формулировку в тексте прежде, чем учитель предложит им сформулировать вывод самостоятельно.

Тренировочные упражнения скомпонованы таким образом, чтобы облегчить учителю отбор материала для классной и домашней работы: либо 4 упражнения под одним номером (2 в классе, 2 дома), либо по два номера, идущих друг за другом, по 4 задания в каждом, первый — для классной, а второй — для домашней работы.

В конце каждого параграфа даются задания на повторение ранее пройденного материала и **контрольные вопросы и задания**, которые позволяют проверить усвоение учащимися обязательного минимума содержания по данной теме. К группам параграфов в конце учебника предлагаются **домашние контрольные работы**. Уровень их трудности несколько выше, чем классных, и они не содержат заданий, проверяющих т о л ь к о достижение учащимися уровня, обусловленного стандартом математического образования.

В системе упражнений учебника имеются задания, отмеченные символом * (звездочка). Это — задания повышенной трудности. Однако, по замыслу авторов, они не предназначены для работы лишь с сильными учениками. Опыт показывает, что при правильной организации учебного процесса к выполнению таких заданий можно привлечь почти всех учащихся класса.

Как уже было сказано выше, предлагаемый учебник практически не меняет перечень вопросов, традиционно изучаемых в 5—6-м классах. Главное отличие состоит во временно́м сдвиге начала изучения обыкновенных дробей и включении некоторых тем, традиционно изучавшихся в 6-м классе, в курс 5-го класса: основное свойство дроби; п р о с т е й ш и е случаи сложения и вычитания дробей с разными знаменателями, не требующие применения знаний, приобретаемых в процессе изучения темы «Делимость натуральных чисел»; умножение и деление обыкновенной дроби на натуральное число. Здесь при изложении материала большое внимание уделено наглядности: многие свойства и действия с обыкновенными дробями иллюстрируются красочными рисунками. Но значительная часть материала на этом этапе усваивается учащимися только на уровне представлений, а затем в процессе повторения доводится до уровня знаний и умений. Так, окончательное формирование умений выполнения действий с обыкновенными дробями происходит при изучении темы «Делимость. Делители и кратные» в 6-м классе, где новый материал сразу находит свое применение в этой теме.

Что касается геометрического материала, то здесь отличия от традиционных учебников более существенные. Так, в начале курса 5-го класса вводится понятие расстояния, которое затем используется при изучении таких понятий, как «серединный перпендикуляр», «окружность» и «биссектриса». Значительно увеличен по сравнению с традиционным курсом объем материала, посвященный пространственным фигурам. В 5—6-м классах начинается целенаправленная работа по подготовке учащихся к изучению систематического курса геометрии. Ознакомление с геометрическим материалом в течение этого периода носит в основном практический характер: школьники проводят линии, разрезают, измеряют. Но отдельным геометрическим фактам даются логические обоснования. Это, например, свойства углов треугольника, точек серединного перпендикуляра к отрезку, биссектрисы угла (конечно, речь не идет о «строгих» доказательствах). Используя некоторые приемы, учащиеся убеждаются в необходимости таких обоснований, и, что, на наш взгляд, важнее всего, с помощью специально разработанной системы вопросов они обучаются анализировать ситуацию и находить пути этих обоснований. В дальнейшем, при изучении систематического курса геометрии, накопленные на данном этапе эмпирические представления получат свое обобщение и развитие.

Учитывая возрастание роли статистических и вероятностных подходов к решению широкого круга проблем на современном этапе развития общества и неизбежное включение в программу общеобразовательной школы новой содержательно-методической линии «Анализ данных», в курсе математики 5—6-го классов начинают формироваться некоторые представления комбинаторики, теории вероятностей и статистики.

И наконец, в соответствии с требованиями времени уже в курсе математики 5-го класса используются такие термины, как «математический язык», «математическая модель», которые находят свое развитие в 6-м классе, где появляются термины «графическая модель», «геометрическая модель», «аналитическая модель». Эти понятия позволяют начать формирование того идейного стержня, благодаря которому математика предстает перед учащимися не как набор разрозненных фактов, которые учитель излагает только потому, что они есть в программе, а как цельная развивающаяся и в то же время развивающая дисциплина общекультурного характера. На этом идейном стержне построены курсы «Алгебра, 7—9» и «Алгебра и начала анализа, 10—11», реализованные в учебниках А. Г. Мордковича.

О контрольных работах

Тематические контрольные работы, имеющиеся в данном пособии, содержат несколько заданий. Первые два или три задания каждой контрольной работы — это задания обязательного уровня. Они никак не отмечены. Если эти задания выполнены верно, работа учащегося оценивается не ниже «3».

Если в дополнение к заданиям обязательного уровня выполнены задания, отмеченные знаком •, то работа может быть оценена, соответственно, «4» или «5». Сложность таких заданий примерно одинакова и существенно более высока, чем заданий обязательного уровня. Это объясняется тем, что по исторически сложившейся традиции оценка «3» означает овладение материалом на минимально необходимом уровне, а оценка «4» предполагает существенно более высокий уровень, близкий к уровню оценки «5» и отличающийся от нее лишь наличием одного-двух недочетов.

Содержание работ является примерным, и учитель может менять его по своему усмотрению. Однако структуру работ менять не рекомендуется: в них должны быть задания обязательного уровня, обеспечивающие текущий тематический контроль, и задания более высокого уровня, выполнение которых дает возможность сильным учащимся проявить себя.

Продолжительность выполнения учениками контрольной работы около 30—35 минут. Перед ее началом учитель читает все задания и, если необходимо, дает пояснения. Контрольная работа выполняется в специальной тетради для контрольных работ в двух экземплярах (под копирку). После выполнения работы тетради сдаются, а вторые экземпляры остаются у школьников. После проверки контрольных работ учитель демонстрирует правильные решения. Это делается для того, чтобы учащиеся смогли проверить себя и выявить ошибки. Главное на данном этапе — создать ситуацию, когда ученики самостоятельно смогут выявить причины возникновения ошибок и понять, как надо поступать, чтобы избежать их в дальнейшем. Задания, выполненные с ошибками, предлагаются на дом еще раз. При такой организации работа над ошибками не отделена от выполнения контрольной работы большим промежутком времени.

Заметим, однако, что выявлены случаи, когда у отдельных школьников на выполнение заданий обязательного уровня уходит весь урок и не остается времени на проверку. Совершенно очевидно, что такие учащиеся требуют индивидуального подхода. Как правило, медленный темп выполнения заданий обусловлен низкой скоростью вычислительной работы. Чтобы облегчить ее, числа в заданиях для слабых учеников следует давать с небольшим количеством разрядов. Если мы хотим проверить, например, усвоение алгоритма вычитания десятичных дробей, то достаточно дать задание на вычисление значения выражения $1{,}2 - 0{,}83$. Это задание позволяет проверить наличие сформированности всех необходимых умений по теме: выполнение вычитания по разрядам, возможность приписывания нулей справа, переход через разряд. А наличие всего трех разрядов в записи числа сокращает время на вычислительную работу.

Это же можно сказать и о содержании текстовых задач. Для самых слабых учащихся числовые данные должны быть такими, чтобы вычисления могли быть выполнены достаточно быстро. При этом надо проинформировать учащихся, что за выполнение работы такого уровня они не могут претендовать на оценку выше «3».

По каждой теме предлагается четыре варианта контрольной работы. В первом и втором вариантах задания *обязательного уровня* предназначены для школьников с недостаточной математической подготовкой, т. е. для учеников, о которых говорилось выше. Третий и четвертый варианты рассчитаны на всех остальных учащихся. Уровень сложности *дополнительных* заданий первого и второго вариантов такой же, как в третьем и четвертом вариантах.

Цель проведения итоговой контрольной работы (в отличие от тематических контрольных работ) — осуществление контроля над усвоением знаний по всем основным темам курса, изучавшимся в течение года. Исходя из этого сложность большинства заданий итоговой контрольной работы должна быть близка к обязательному уровню и может варьироваться в зависимости от состава класса. В пособии предлагается четыре варианта итоговой работы одинакового уровня сложности. Время ее выполнения — 60 мин.

5 класс

Тематическое планирование

(5 часов в неделю)

№ урока	Тема	Число уроков
I четверть		
Глава I. Натуральные числа		
1—3	§ 1. Десятичная система счисления	3
4—6	§ 2. Числовые и буквенные выражения	3
7—9	§ 3. Язык геометрических рисунков	3
10, 11	§ 4. Прямая. Отрезок. Луч	2
12, 13	§ 5. Сравнение отрезков. Длина отрезка	2
14, 15	§ 6. Ломаная	2
16, 17	§ 7. Координатный луч	2
18	***Контрольная работа № 1***	1
19, 20	§ 8. Округление натуральных чисел	2
21—23	§ 9. Прикидка результата действия	3
24—27	§ 10. Вычисления с многозначными числами	4
28	***Контрольная работа № 2***	1
29, 30	§ 11. Прямоугольник	2
31, 32	§ 12. Формулы	2
33, 34	§ 13. Законы арифметических действий	2

№ урока	Тема	Число уроков
35, 36	**§ 14. Уравнения**	**2**
37—40	**§ 15. Упрощение выражений**	**4**
41, 42	**§ 16. Математический язык**	**2**
43	**§ 17. Математическая модель**	**1**
44	***Контрольная работа № 3***	**1**
45, 46	**Резерв**	**2**
	Итого:	**46**
	II четверть	
	Глава II. Обыкновенные дроби	
47—49	§ 18. Деление с остатком	3
50, 51	§ 19. Обыкновенные дроби	2
52—54	§ 20. Отыскание части от целого и целого по его части	3
55—58	§ 21. Основное свойство дроби	4
59—61	§ 22. Правильные и неправильные дроби. Смешанные числа	3
62—64	§ 23. Окружность и круг	3
65	***Контрольная работа № 4***	1
66—70	§ 24. Сложение и вычитание обыкновенных дробей	5
71—75	§ 25. Сложение и вычитание смешанных чисел	5

№ урока	Тема	Число уроков
76—78	§ 26. Умножение и деление обыкновенной дроби на натуральное число	3
79	***Контрольная работа № 5***	1
80, 81	Резерв	2
	Итого:	**35**
	III четверть	
	Глава III. Геометрические фигуры	
82, 83	§ 27. Определение угла. Развернутый угол	2
84	§ 28. Сравнение углов наложением	1
85, 86	§ 29. Измерение углов	2
87	§ 30. Биссектриса угла	1
88—90	§ 31. Треугольник	3
91, 92	§ 32. Площадь треугольника	2
93, 94	§ 33. Свойство углов треугольника	2
95, 96	§ 34. Расстояние между двумя точками. Масштаб	2
97—99	§ 35. Расстояние от точки до прямой. Перпендикулярные прямые	3
100, 101	§ 36. Серединный перпендикуляр	2
102, 103	§ 37. Свойство биссектрисы угла	2
104	***Контрольная работа № 6***	1

№ урока	Тема	Число уроков
Глава IV. Десятичные дроби		
105	§ 38. Понятие десятичной дроби. Чтение и запись десятичных дробей	1
106, 107	§ 39. Умножение и деление десятичной дроби на 10, 100, 1000 и т. д.	2
108, 109	§ 40. Перевод величин из одних единиц измерения в другие	2
110—112	§ 41. Сравнение десятичных дробей	3
113—116	§ 42. Сложение и вычитание десятичных дробей	4
117	***Контрольная работа № 7***	1
118—121	§ 43. Умножение десятичных дробей	4
122, 123	§ 44. Степень числа	2
124—126	§ 45. Среднее арифметическое. Деление десятичной дроби на натуральное число	3
127—130	§ 46. Деление десятичной дроби на десятичную дробь	4
131	***Контрольная работа № 8***	1
132	Резерв	1
	Итого:	**51**
IV четверть		
133—135	§ 47. Понятие процента	3

№ урока	Тема	Число уроков
136—139	§ 48. Задачи на проценты	4
140—142	§ 49. Микрокалькулятор	3
	Глава V. Геометрические тела	
143	§ 50. Прямоугольный параллелепипед	1
144—147	§ 51. Развертка прямоугольного параллелепипеда	4
148—151	§ 52. Объем прямоугольного параллелепипеда	4
152	***Контрольная работа № 9***	1
	Глава VI. Введение в вероятность	
153, 154	§ 53. Достоверные, невозможные и случайные события	2
155, 156	§ 54. Комбинаторные задачи	2
157—167	Повторение	11
168	***Итоговая контрольная работа***	1
169, 170	Резерв	2
	Итого:	38

Тематические контрольные работы

Контрольная работа № 1

Вариант 1

1. Для числа 12 738 026 запишите:
   а) старший разряд;
   б) какая цифра стоит в разряде десятков тысяч;
   в) в каком разряде стоит цифра 2.

2. Запишите решение задачи в виде числового выражения и найдите его значение.
Данила купил 29 гвоздик, а Маша — на 8 меньше. Сколько всего гвоздик они купили?
3. Выполните рисунок по описанию: луч MN пересекает прямую AB в точке K.
•4. 1 кг яблок стоит a р., а 1 кг груш — b р. Запишите в виде выражения стоимость двух килограммов яблок и четырех килограммов груш.
•5. Скорость всадника — x км/ч, а поезда — y км/ч. Запишите в виде выражения:
а) скорость сближения всадника и поезда при движении навстречу;
б) скорость удаления при движении в противоположные стороны;
в) скорость сближения при условии, что поезд догоняет всадника;
г) скорость удаления при условии, что поезд обогнал всадника.

Вариант 2

1. Для числа 203 574 320 запишите:
а) старший разряд;
б) какая цифра стоит в разряде тысяч;
в) в каком разряде стоит цифра 5.
2. Запишите решение задачи в виде числового выражения и найдите его значение.
В первой коробке было 12 кг конфет, во второй — в 3 раза меньше. Сколько конфет было в двух коробках?
3. Выполните рисунок по описанию: лучи MN и CD пересекаются в точке K.
•4. 1 кг картофеля стоит x р., а 1 кг моркови — y р. Запишите в виде выражения, на сколько 2 кг картофеля дешевле, чем 5 кг моркови.
•5. Скорость движения мотоцикла — a км/ч, а велосипеда — b км/ч. Запишите:
а) скорость сближения мотоциклиста и велосипедиста при движении навстречу;
б) скорость удаления при движении в противоположные стороны;
в) скорость сближения при условии, что мотоциклист догоняет велосипедиста;
г) скорость удаления при условии, что мотоциклист обогнал велосипедиста.

Вариант 3

1. Для числа 75 489 956 008 121 запишите:
   а) старший разряд;
   б) какая цифра стоит в разряде десятков тысяч;
   в) в каких разрядах стоит цифра 5.

2. Запишите решение задачи в виде числового выражения и найдите его значение.
   У Коли было 5 орехов, у Миши — на 3 больше, а у Саши — в 2 раза меньше, чем у Миши. Сколько всего орехов было у ребят?

3. Выполните рисунок по описанию: прямые AB и CD пересекаются в точке O, луч MN пересекает прямые AB и CD в точках K и L.

•4. 1 литр молока стоит a р., а 1 литр сока — b р. Запишите в виде выражения стоимость трех литров молока и двух литров сока.

•5. Скорость пешехода — x км/ч, а велосипедиста — y км/ч. Запишите в виде выражения:
   а) скорость сближения пешехода и велосипедиста при движении навстречу;
   б) скорость удаления при движении в противоположные стороны;
   в) скорость сближения при условии, что велосипедист догоняет пешехода;
   г) скорость удаления при условии, что велосипедист обогнал пешехода.

Вариант 4

1. Для числа 6 355 670 881 320 запишите:
   а) старший разряд;
   б) какая цифра стоит в разряде сотен тысяч;
   в) в каких разрядах стоит цифра 5.

2. Запишите решение задачи в виде числового выражения и найдите его значение.
   В одной коробке было 10 кг конфет, во второй — в 2 раза меньше, а в третьей — на 3 кг меньше, чем во второй. Сколько конфет было в трех коробках?

3. Выполните рисунок по описанию: лучи MN и CD пересекаются в точке K, прямая AB пересекает лучи MN и CD в точках A и B.

•4. 1 кг творога стоит x р., а 1 кг масла — y р. Запишите в виде выражения, на сколько 3 кг масла дороже, чем 2 кг творога.

•5. Скорость движения автомобиля — a км/ч, а велосипеда — b км/ч.

Запишите:

а) скорость сближения автомобиля и велосипедиста при движении навстречу;

б) скорость удаления при движении в противоположные стороны;

в) скорость сближения при условии, что автомобиль догоняет велосипедиста;

г) скорость удаления при условии, что автомобиль обогнал велосипедиста.

Контрольная работа № 2

Вариант 1

1. Округлите до тысяч:
   а) 75 860; б) 124 320.
2. Не выполняя вычислений, определите старший разряд суммы, разности, произведения и частного чисел 644 и 28.
3. Вычислите: $(12\,148 + 305 \cdot 12) : 52$.

•4. За какое время при движении против течения реки теплоход пройдет 180 км, если его собственная скорость — 16 км/ч, а скорость течения — 1 км/ч?

•5. Один маляр за 6 ч может побелить потолки общей площадью 72 м^2, а второму для этого требуется на 2 ч больше. Какую площадь потолков они смогут побелить за 5 ч совместной работы?

Вариант 2

1. Округлите до сотен тысяч:
   а) 1 599 300; б) 853 000.
2. Не выполняя вычислений, определите старший разряд суммы, разности, произведения и частного чисел 182 и 26.
3. Вычислите: $(1860 - 1010 : 5) \cdot 12$.

•4. Двигаясь по течению реки, за 4 ч самоходная баржа прошла 48 км. Определите собственную скорость баржи, если скорость течения — 2 км/ч.

•5. За 8 ч токарь может выточить 24 детали, а его ученик — в три раза меньше. Какое количество деталей они могут выточить за 5 ч, работая одновременно?

Вариант 3

1. Округлите до сотен:
   а) 94 520; б) 1790.

2. Не выполняя вычислений, определите старший разряд суммы, разности, произведения и частного чисел: 110 552 и 2126.

3. Вычислите: $(5981 - 270\,108 : 54) \cdot 14$.

•4. За какое время при движении по течению реки лодка пройдет 28 км, если ее собственная скорость — 6 км/ч, а скорость течения — 1 км/ч?

•5. Одна бригада за 5 дней убирает урожай с 60 га посевных площадей, а второй для этого требуется на один день больше. С какой площади смогут убрать урожай эти бригады за 4 дня совместной работы?

Вариант 4

1. Округлите до десятков тысяч:
а) 155 780; б) 230 490.

2. Не выполняя вычислений, определите старший разряд суммы, разности, произведения и частного чисел 28 640 и 5728.

3. Вычислите: $(89\,142 + 507 \cdot 14) : 48$.

•4. Двигаясь против течения реки, за 3 ч катер прошел 60 км. Определите собственную скорость катера, если скорость течения — 2 км/ч.

•5. За 4 ч мастер может выложить плиткой стену площадью 16 $м^2$, а его ученик — в два раза меньше. Какую площадь они могут выложить плиткой за 7 ч, работая одновременно?

Контрольная работа № 3

Вариант 1

1. Упростите выражение и найдите его значение при $x = 2$:
$$3x + 15x - 8.$$

2. Решите уравнение $7y - 2y = 35$.

3. Площадь прямоугольника — 72 $см^2$, а одна из его сторон равна 9 см. Найдите вторую сторону и периметр прямоугольника.

•4. Для приготовления смеси взяли чай двух сортов: 3 кг чая первого сорта по 220 р. за 1 кг и 7 кг чая второго сорта. Найдите цену чая второго сорта, если цена получившейся смеси — 171 р. за 1 кг.

•5. По течению катер двигается со скоростью y км/ч, а против течения — на 2 км/ч медленнее. Запишите на математическом языке:
а) скорость катера при движении против течения;
б) расстояние, пройденное катером за 6 ч движения по тече-

нию, больше расстояния, пройденного им за 3 ч против течения, на 78 км.

Вариант 2

1. Упростите выражение и найдите его значение при $y = 5$:
$$25y + 2y - 7.$$
2. Решите уравнение $8x + 4x = 24$.
3. Площадь прямоугольника — 48 см^2, а одна из его сторон равна 6 см. Найдите вторую сторону и периметр прямоугольника.

•4. Для составления смеси взяли 6 кг карамели по 70 р. за 1 кг и 4 кг шоколадных конфет. Найдите цену шоколадных конфет, если цена получившейся смеси — 78 р. за 1 кг.

•5. По проселочной дороге велосипедист едет со скоростью x км/ч, а по шоссе — в 3 раза быстрее. Запишите на математическом языке:
   а) скорость велосипедиста при движении по шоссе;
   б) за 3 ч езды по шоссе велосипедист проехал на 35 км больше, чем за 2 ч по проселочной дороге.

Вариант 3

1. Упростите выражение и найдите его значение при $y = 5$:
$$32x + 2x - 7x - 7.$$
2. Решите уравнение $18y - 5y + 2y = 45$.
3. Периметр прямоугольника — 56 см, а одна из его сторон равна 7 см. Найдите площадь прямоугольника.

•4. Для приготовления напитка смешали персиковый сок с яблочным соком: 5 л персикового сока по 17 р. за 1 л и 3 л яблочного сока. Найдите цену яблочного сока, если цена получившегося напитка — 15 р. 50 к. за 1 л.

•5. Против течения теплоход двигается со скоростью v км/ч, а по течению — на 4 км/ч быстрее. Запишите на математическом языке:
   а) скорость теплохода при движении по течению;
   б) расстояние, пройденное теплоходом за 5 ч движения по течению, больше расстояния, пройденного им за 2 ч против течения, на 83 км.

Вариант 4

1. Упростите выражение и найдите его значение при $y = 7$:
$$13y + 9y - 7y - 5.$$
2. Решите уравнение $17x - 12x + 6x = 55$.
3. Периметр прямоугольника — 72 см, а одна из его сторон равна 9 см. Найдите площадь прямоугольника.

•4. Для приготовления кофейного напитка смешали кофе двух сортов: 2 кг кофе «арабика» по 65 р. за 1 кг и 6 кг кофе «мокко». Найдите цену кофе «мокко», если цена получившейся смеси — 55 р. 25 к. за 1 кг.

•5. По грунтовой дороге автомобиль едет со скоростью y км/ч, а по шоссе — в 5 раз быстрее. Запишите на математическом языке:
а) скорость автомобиля при движении по шоссе;
б) за 4 ч езды по шоссе автомобиль проехал на 270 км больше, чем за 2 ч по грунтовой дороге.

Контрольная работа № 4

Вариант 1

1. Представьте данную дробь в виде дроби со знаменателем 6:
а) $\frac{8}{12}$; б) $\frac{2}{3}$.
2. Девочка прочитала 25 страниц, что составило $\frac{1}{5}$ книги. Сколько страниц в книге?
3. Площадь тепличного хозяйства, $\frac{1}{7}$ которой занята под огурцы, составляет 140 а. Найдите площадь, занятую огурцами.

•4. Сколько километров пройдет катер за 5 ч, двигаясь по течению реки, если известно, что скорость течения реки — 1200 м/ч и эта величина составляет $\frac{3}{40}$ собственной скорости катера?

•5. Две окружности имеют общий центр. Радиус одной окружности — 4 см, а радиус второй окружности составляет $\frac{3}{8}$ диаметра первой. Начертите эти окружности.

Вариант 2

1. Представьте данную дробь в виде дроби со знаменателем 8:
а) $\frac{10}{16}$; б) $\frac{1}{2}$.
2. В книге 352 страницы. Мальчик прочитал $\frac{1}{16}$ книги. Сколько страниц прочитал мальчик?
3. Капустой занято 30 м^2, что составляет $\frac{1}{5}$ площади всего огорода. Найдите площадь огорода.

•4. Сколько километров пройдет моторная лодка за 4 ч, двигаясь против течения реки, если ее собственная скорость — 22 км/ч, а скорость течения составляет $\frac{5}{44}$ собственной скорости катера?

•5. Две окружности имеют общий центр. Радиус одной окружности — 4 см, и его длина составляет $\frac{2}{5}$ диаметра второй окружности. Начертите эти окружности.

Вариант 3

1. Представьте данную дробь в виде дроби со знаменателем 15:

 а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{8}{60}$.

2. Площадь тепличного хозяйства, $\frac{4}{7}$ которой занято под помидоры, составляет 140 а. Найдите площадь, занятую помидорами.

3. Девочка прочитала 105 страниц, что составило $\frac{7}{15}$ книги. Сколько страниц в книге?

•4. Сколько километров пройдет теплоход за 5 ч, двигаясь по течению реки, если известно, что скорость течения реки — 1500 м/ч и эта величина составляет $\frac{3}{44}$ собственной скорости теплохода?

•5. Две окружности имеют общий центр. Радиус одной окружности — 6 см, а радиус второй окружности составляет $\frac{7}{24}$ диаметра первой. Начертите эти окружности.

Вариант 4

1. Представьте данную дробь в виде дроби со знаменателем 12:

 а) $\frac{15}{36}$; б) $\frac{3}{4}$.

2. Картофелем занято 360 $м^2$, что составляет $\frac{5}{12}$ всей площади огорода. Найдите площадь огорода.

3. В книге 352 страницы. Мальчик прочитал $\frac{11}{16}$ книги. Сколько страниц прочитал мальчик?

•4. Сколько километров пройдет теплоход за 6 ч, двигаясь против течения реки, если его собственная скорость — 21 км/ч, а скорость течения составляет $\frac{2}{35}$ собственной скорости катера?

•5. Две окружности имеют общий центр. Радиус одной окружности — 5 см, и его длина составляет $\frac{25}{38}$ диаметра второй окружности. Начертите эти окружности.

Контрольная работа № 5

Вариант 1

1. Вычислите:

а) $\frac{7}{15} + \frac{4}{15} - \frac{8}{15}$; б) $2\frac{3}{16} + 7\frac{11}{16} - 8\frac{5}{16}$.

2. Выполните действия:

а) $\frac{2}{19} \cdot 5$; б) $\frac{8}{9} : 3$.

•3. Партия обуви, приобретенная предпринимателем, была продана за 3 дня. В первый день было продано $\frac{2}{9}$, а во второй — $\frac{11}{18}$ числа всех пар обуви. Какая часть обуви была продана в третий день?

•4. За 3 ч из бассейна через одну трубу выливается $\frac{2}{5}$, а через другую — $\frac{1}{2}$ всей воды, находящейся в бассейне. Какая часть воды выльется из бассейна за 1 час, если открыть обе трубы одновременно?

Вариант 2

1. Вычислите:

а) $\frac{17}{18} - \frac{7}{18} + \frac{5}{18}$; б) $3\frac{4}{19} - 1\frac{2}{19} + 5\frac{10}{19}$.

2. Выполните действия:

а) $\frac{4}{5} : 7$; б) $\frac{13}{51} \cdot 3$.

•3. За первую неделю бригада выполнила $\frac{1}{5}$, а за вторую — $\frac{11}{20}$ всей работы по строительству дома. Какую часть работы осталось выполнить бригаде?

•4. Один экскаватор за день работы выкапывает $\frac{1}{20}$, а второй — $\frac{1}{25}$ часть котлована. Какую часть котлована выкопают экскаваторы за 4 дня, работая одновременно?

Вариант 3

1. Вычислите:

а) $\frac{8}{17}+\frac{4}{17}-\frac{9}{17}$; б) $4\frac{7}{23}-2\frac{5}{23}+7\frac{15}{23}$.

2. Выполните действия:

а) $\frac{5}{21}\cdot 4$; б) $\frac{3}{20}:5$.

•3. На садовом участке были выращены огурцы, кабачки и тыквы. Масса огурцов составила $\frac{4}{15}$, а масса кабачков — $\frac{13}{30}$ всей массы собранных овощей. Какую часть массы собранных овощей составили тыквы?

•4. Миша за 3 ч может вскопать $\frac{1}{5}$ огорода, а его отец за это же время — $\frac{1}{4}$ огорода. Какую часть огорода могут вскопать Миша с отцом за 1 час одновременной работы?

Вариант 4

1. Вычислите:

а) $\frac{18}{31}+\frac{12}{31}-\frac{14}{31}$; б) $1\frac{8}{27}+5\frac{17}{27}-6\frac{4}{27}$.

2. Выполните действия:

а) $\frac{9}{14}:5$; б) $\frac{3}{28}\cdot 8$.

•3. За первую минуту спортсмен пробежал $\frac{2}{7}$, а за вторую — $\frac{3}{14}$ дистанции. Какую часть дистанции ему осталось пробежать?

•4. Для двух котельных был сделан запас угля. Одна котельная в течение месяца расходует $\frac{1}{9}$, а вторая — $\frac{1}{15}$ запаса угля. Какую часть угля израсходуют обе котельные за 4 месяца?

Контрольная работа № 6

Вариант 1

1. Начертите угол ABC, равный 160°. Проведите биссектрису этого угла, отметьте на ней точку O и проведите через нее прямую, перпендикулярную стороне BC.

2. В треугольнике ABC $\angle A$ составляет 54°, а $\angle C$ на 15° меньше. Найдите $\angle B$ треугольника ABC.

●3. Вычислите: $201 \cdot 15 - 7042 : 14$.

●4. В двух мешках было 75 кг крупы. После того как из первого мешка продали 12 кг, а из второго — 18 кг, в первом мешке крупы оказалось в 2 раза больше, чем во втором. Сколько килограммов крупы было в каждом мешке первоначально?

Вариант 2

1. Начертите угол MNK, равный 150°. Проведите биссектрису этого угла, отметьте на ней точку O и проведите через нее прямую, перпендикулярную стороне NM.

2. В треугольнике ABC $\angle A$ составляет 35°, а $\angle B$ на 17° больше. Найдите $\angle C$ треугольника ABC.

●3. Вычислите: $24\,032 : 8 + 108 \cdot 23$.

●4. В двух цистернах было 30 т бензина. После того как из каждой цистерны продали по 6 т, в первой цистерне оказалось в 2 раза больше бензина, чем во второй. Сколько тонн бензина было в каждой цистерне первоначально?

Вариант 3

1. Начертите угол MNK, равный 152°. Проведите биссектрису этого угла, отметьте на ней точку O и проведите через нее прямые, перпендикулярные сторонам угла MNK.

2. В треугольнике ABC $\angle B$ составляет 14°, а $\angle C$ в 3 раза больше. Найдите $\angle A$ треугольника ABC.

●3. Вычислите: $637\,637 : 91 - 207 \cdot 12$.

●4. В трех бидонах 80 л молока. После того как из одного бидона отлили 8 л, а из другого — 12 л, в каждом из них оказалось молока в 2 раза меньше, чем в третьем бидоне. Сколько литров молока было в каждом бидоне первоначально?

Вариант 4

1. Начертите угол ABC, равный 146°. Проведите биссектрису этого угла, отметьте на ней точку O и проведите через нее прямые, перпендикулярные сторонам угла ABC.

2. В треугольнике ABC $\angle A$ составляет 78°, а $\angle B$ в 3 раза меньше. Найдите $\angle C$ треугольника ABC.

●3. Вычислите: $145\,261 : 29 - 103 \cdot 47$.

•4. В три овощных магазина завезли 1600 кг картофеля. После того как в первом магазине продали 200 кг, а во втором и третьем — по 100 кг картофеля, в третьем магазине его осталось в 2 раза больше, чем в каждом из первых двух. Сколько килограммов картофеля было в каждом магазине первоначально?

Контрольная работа № 7

Вариант 1

1. Вычислите: а) 5,7 + 2,34; б) 1,2 – 0,83.
2. а) Выразите в метрах: 15 дм; 3,4 см; 7 мм.
   б) Выразите в килограммах: 940 г; 7,2 т.
3. Длины сторон прямоугольника — 1,2 дм и 25 см. Выразите их в метрах и найдите периметр прямоугольника.

•4. Мальчик поймал трех рыб. Масса первой рыбы — 0,375 кг, масса второй — на 20 г меньше, а масса третьей — на 0,11 кг больше массы первой рыбы. Найдите массу трех рыб.

•5. Составьте выражение для длины незамкнутой ломаной *ABCD*, если *AB* = *a* см, *BC* на 8,45 см меньше *AB*, а *CD* на 1,27 дм больше *AB*, и упростите его.

Вариант 2

1. Вычислите: а) 6,83 + 15,3; б) 8,9 – 5,42.
2. а) Выразите в метрах: 3,2 дм; 543 см; 5 мм.
   б) Выразите в килограммах: 56 г; 2,7 т.
3. Длины сторон прямоугольника — 3,8 дм и 54 см. Выразите их в метрах и найдите периметр прямоугольника.

•4. Яблоко, груша и апельсин вместе имеют массу 0,85 кг. Масса апельсина — 360 г, а груша на 0,158 кг легче. Найдите массу яблока.

•5. Составьте выражение для длины незамкнутой ломаной *ABCD*, если *AB* = *x* дм, *BC* на 12,71 см меньше *AB*, а *CD* на 2,85 дм больше *AB*, и упростите его.

Вариант 3

1. Вычислите: а) 15,7 + 2,341; б) 17,3 – 8,562.
2. а) Выразите в метрах: 5 дм; 2,54 см; 0,57 мм.
   б) Выразите в килограммах: 0,32 г; 6,4 т.
3. Длины сторон треугольника — 2,5 дм, 30 см, 120 мм. Выразите их в метрах и найдите периметр треугольника.

•4. Масса трех искусственных спутников — 1,751 т. Масса первого спутника — 6,6 ц, масса второго — на 73 кг больше. Найдите массу третьего спутника.

•5. Составьте выражение для длины незамкнутой ломаной $ABCD$, если $AB = y$ м, BC на 7,35 см меньше AB, а CD на 5,12 дм больше AB, и упростите его.

Вариант 4

1. Вычислите: а) 1,683 + 12,9; б) 15,2 − 6,587.
2. а) Выразите в метрах: 3,2 дм; 36,8 см; 0,08 мм.
   б) Выразите в килограммах: 0,32 г; 6,4 т.
3. Длины сторон треугольника — 5,1 дм, 29 см, 340 мм. Выразите их в метрах и найдите периметр треугольника.

•4. Слон, тигр и зубр вместе имеют массу 6,98 т. Масса слона — 5,9 т, а тигр на 55,2 ц легче. Определите массу зубра (в килограммах).

•5. Составьте выражение для длины незамкнутой ломаной $ABCD$, если $AB = x$ м, BC на 2,93 см меньше AB, а CD на 4,31 дм больше AB, и упростите его.

Контрольная работа № 8

Вариант 1

1. Вычислите: а) 8,3 · 6; б) 2,06 · 1,5; в) 9,76 : 3,2.
2. Найдите среднее арифметическое чисел 4,2; 4,1; 4,1; 4,3; 3,9.

•3. За 400 г сыра и 1,2 кг колбасы заплатили 126 р. 80 к. Какова цена 1 кг колбасы, если 1 кг сыра стоит 95 р.?

•4. На двух складах было 210,2 т картофеля. После того как с первого склада было продано 24,5 т, а со второго — 10,8 т, на первом складе картофеля оказалось в 2 раза больше, чем на втором. Сколько тонн картофеля было на каждом складе первоначально?

Вариант 2

1. Вычислите: а) 3,4 · 5; б) 3,08 · 6,7; в) 7,8 : 1,2.
2. Найдите среднее арифметическое чисел 3,2; 4,5; 2,9; 3,1; 4,2.

•3. За 80 см шелка и 2,5 м шерсти заплатили 336 р. 40 к. Какова цена 1 м шерсти, если 1 м шелка стоит 58 р.?

•4. В двух бидонах было 51 л молока. После того как из первого бидона отлили 16,2 л, а из второго — 7,2 л, во втором бидоне молока оказалось в 4 раза больше, чем в первом. Сколько литров молока было в каждом бидоне первоначально?

Вариант 3

1. Вычислите: а) 78,56 · 1,05; б) 46,508 : 1,51; в) 0,000135 : 2,7.
2. На соревнованиях по гимнастике двое судей оценили выступление спортсмена в 9,4 балла, трое — в 9,5 балла и еще трое — в 9,6 балла. Найдите средний балл спортсмена.

•3. За 600 г масла и 1,4 кг творога заплатили 103 р. 80 к. Какова цена 1 кг творога, если 1 кг масла стоит 75 р.?

•4. В два магазина завезли 5,28 ц рисовой крупы. После того как в первом магазине продали 1,3 ц, а во втором — 2,54 ц крупы, в первом магазине крупы осталось в 2 раза больше, чем во втором. Сколько центнеров крупы завезли в каждый магазин первоначально?

Вариант 4

1. Вычислите: а) 2,06 · 29,35; б) 51,456 : 1,28; в) 0,00245 : 3,5.
2. На соревнованиях по фигурному катанию трое судей выставили спортсмену оценку 5,4 балла, двое — по 5,3 балла, еще двое — по 5,5 балла и один — 5,6 балла. Найдите средний балл спортсмена.

•3. За 90 см ситца и 3,4 м полотна заплатили 148 р. 10 к. Какова цена 1 м полотна, если 1 м ситца стоит 21 р.?

•4. В двух коробках 1,77 кг конфет. После того как из первой коробки съели 0,56 кг, а из второй — 0,91 кг конфет, во второй коробке конфет осталось в 3 раза меньше, чем в первой. Сколько килограммов конфет было в каждой коробке первоначально?

Контрольная работа № 9

Вариант 1

1. Сметана содержит 20% жира. Сколько жира в 500 г сметаны?
2. В лесопарке посажено 15 кленов, что составляет 1% всех деревьев. Сколько деревьев в лесопарке?
3. Объем комнаты — 45,36 м^3, а площадь — 16,8 м^2. Найдите высоту потолка комнаты.

•4. С поля, засаженного капустой, в первый день было вывезено 58% урожая, а во второй — остальные 33,6 тонны. Сколько тонн капусты было вывезено с поля?

•5. Найдите массу 1 м^3 сплава, если слиток этого сплава, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда с измерениями 2,9 дм, 15 см и 0,8 м, имеет массу 281,88 кг.

Вариант 2

1. Сыр содержит 35% жира. Сколько жира в 400 г сыра?
2. Петрушкой засеяно 3 м^2, что составляет 1% площади огорода. Найдите площадь огорода.
3. Найдите высоту потолка спортивного зала, если его объем равен 5465,6 м^3, а площадь пола — 854 м^2.

•4. За первую неделю тротуарной плиткой было выложено 47% площади тротуара, а за вторую — остальные 561,8 м^2. Какова площадь тротуара?

•5. Найдите массу 1 м^3 кирпича, если один кирпич с измерениями 2 дм, 15 см и 0,1 м имеет массу 2,7 кг.

Вариант 3

1. В состав нержавеющей стали входит 1,8% хрома. Найдите массу хрома в слитке стали массой 5 кг.
2. Сливки содержат 21,2% жира. Определите массу сливок, если в них содержится 74,2 кг жира.
3. До какого уровня залита вода в бассейн, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда со сторонами 10,5 м и 30 м, если ее объем равен 787,5 м^3?

•4. За первую неделю уборки урожая в саду было собрано 17% яблок, а затем остальные 20,418 т. Сколько тонн яблок было собрано в саду?

•5. Найдите массу 1 м^3 сплава, если слиток этого сплава, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда с измерениями 0,25 м, 8,5 см и 1,2 дм, имеет массу 20,655 кг.

Вариант 4

1. Железная руда содержит 7,8% железа. Найдите массу железа в 3 т руды.
2. Сахарный тростник содержит 9% сахара. Сколько тростника потребуется, чтобы получить 144 кг сахара.
3. Найдите площадь поверхности воды в аквариуме, если 15 л воды заполняют его на 2,5 дм (1 л = 1 дм^3).

•4. За первую неделю было отремонтировано 54% площади дорожного покрытия, а за вторую — остальные 667 м^2. Какова площадь отремонтированного дорожного покрытия?

•5. Найдите массу 1 м^3 бетонного блока для фундамента, если один блок с измерениями 1,5 м, 4 дм и 60 см имеет массу 900 кг.

Итоговая контрольная работа за курс 5-го класса

Вариант 1

1. Вычислите: $(8{,}3 + 4{,}72) \cdot (5{,}5 - 3{,}45)$.
2. Решите уравнение $3{,}5x = 7{,}21$.
3. В первом овощехранилище на 5,6 т картофеля больше, чем во втором, а в двух овощехранилищах вместе — 80 т картофеля. Сколько тонн картофеля во втором овощехранилище?
4. Постройте с помощью транспортира угол BAC, равный 35°, и отложите на луче AB отрезок AM длиной 6 см. Используя угольник, проведите через точку M прямую, перпендикулярную AC и пересекающую луч AB. Найдите площадь образовавшегося треугольника (в см^2).
5. После того как была продана четверть конфет, масса ящика с конфетами уменьшилась на 24%. Определите массу пустого ящика, если ящик с конфетами имеет массу 60 кг.

Вариант 2

1. Вычислите: $(7{,}6 + 5{,}85) \cdot (10{,}9 - 4{,}86)$.
2. Решите уравнение $6{,}5x = 26{,}52$.
3. На первом складе на 7,6 т угля меньше, чем на втором, а на двух складах вместе — 100 т угля. Сколько тонн угля на втором складе?
4. Постройте прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 5$ см, $AD = 8$ см. Проведите луч AM, пересекающий BC в точке M, так, чтобы угол BAM оказался равным 40°. Выполните необходимые измерения и найдите площадь образовавшегося треугольника BAM (в см^2).
5. После того как была продана половина конфет, масса ящика с конфетами уменьшилась на 45%. Определите массу пустого ящика, если ящик с конфетами имеет массу 50 кг.

Вариант 3

1. Вычислите: $(6{,}4 + 7{,}72) \cdot (13{,}8 - 5{,}75)$.
2. Решите уравнение $2{,}5y = 12{,}65$.
3. В первой канистре на 4,8 л бензина больше, чем во второй, а в двух канистрах вместе — 60 л бензина. Сколько литров бензина в первой канистре?
4. Постройте с помощью транспортира угол BAC, равный 55°, и отложите на луче AC отрезок AM длиной 6 см. Используя угольник, проведите через точку M прямую, перпендикулярную

AC и пересекающую луч AB. Найдите площадь образовавшегося треугольника (в $см^2$).

5. После того как была продана треть конфет, масса ящика с конфетами уменьшилась на 32%. Зная, что полный ящик с конфетами имеет массу 45 кг, определите массу пустого ящика.

Вариант 4

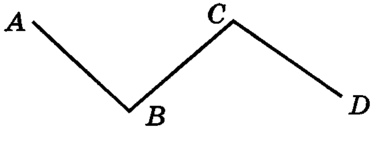
1. Вычислите: $(4{,}1 + 7{,}95) \cdot (7{,}4 - 5{,}32)$.
2. Решите уравнение $5{,}5m = 38{,}72$.
3. На первом складе на 9,8 т угля меньше, чем на втором, а на двух складах вместе — 100 т угля. Сколько тонн угля на первом складе?
4. Постройте прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ см, $AD = 6$ см. Проведите луч AM, пересекающий CD в точке M, так, чтобы угол DAM оказался равным 25°. Выполните необходимые измерения и найдите площадь треугольника MAD (в $см^2$).
5. После того как одна пятая часть конфет была съедена, масса коробки с конфетами уменьшилась на 15%. Зная, что полная коробка имеет массу 0,4 кг, определите массу пустой коробки.

Задачи повышенной трудности

(решения, указания, методические советы)

Задачи повышенной трудности отмечены в учебнике значком ● или ✱. Рассмотрим некоторые из них. Прежде чем разбирать задачу повышенной трудности в классе, надо дать ее на дом, чтобы учащиеся смогли подумать над ней, не ограничивая себя временем. Затем в классе рассмотреть решения, которые они предложат. Если никто не справился или справились 1—3 человека, решение не разбирается, а только дается подсказка, которая позволит остальным нащупать пути решения. Подсказку лучше давать примерно в такой форме: «Подумайте над...»

104 (116)*. Сколько всего различных незамкнутых ломаных можно построить с вершинами в точках A, B, C, D?



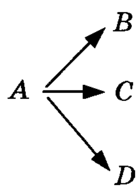
* В скобках здесь и далее даны номера соответствующих заданий в первом издании учебника «Математика–5».

Задача № 104 (116) — это фактически задача на перебор вариантов. Ее цель в данном параграфе состоит в том, чтобы дать учащимся возможность начать приобретать некоторый опыт по подсчету числа вариантов и по построению дерева вариантов прежде, чем будут введены соответствующие термины и сформулировано правило произведения.

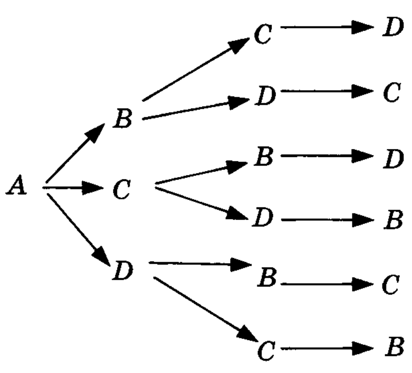
После обсуждения ответов и решений учащихся учитель может сказать примерно следующее:

«Вы получили разные ответы, но никто не смог доказать, что он перебрал **все** возможные случаи. Давайте попробуем разработать такой способ подсчета, при котором можно быть уверенным в том, что мы перебрали все возможные варианты». Тогда словосочетание «перебор... вариантов» появляется в таком контексте, что смысл его объяснять не надо, тем более что используемые слова учащимся к этому моменту уже знакомы из других жизненных ситуаций.

Далее учащимся предлагается сначала посчитать, сколько можно построить ломаных с началом в точке A. Рассуждаем так: из точки A можно пойти в точку B, или в точку C, или в точку D. Чтобы ничего не пропустить, сделаем рисунок:



Теперь подумаем, куда мы можем пойти из точки B, из точки C, из точки D и т. д. В результате рассуждений получаем такой рисунок:



«Итак, мы видим, что можно построить 6 ломаных с началом в точке A. Запишем их названия: $ABCD$, $ABDC$, $ACBD$, $ACDB$, $ADBC$, $ADCB$. Как вы думаете, сколько всего ломаных мы получим, если проделаем такую же работу с остальными точками? Проверьте свое предположение дома».

Здесь работа над задачей в классе прекращается, и учащимся предлагается закончить ее дома: изобразить все ломаные с началом в точке A и, рассуждая аналогично (сделав такой же рисунок), выписать и изобразить все ломаные с началом в точках B, C и D. В процессе выполнения этой работы учащиеся заметят, что каждая ломаная повторяется дважды, поскольку, например, $ABCD$ и $DCBA$ — это одна и та же ломаная. Поэтому всего различных названий ломаных получится $6 \cdot 4 = 24$, а самих ломаных вдвое меньше — 12.

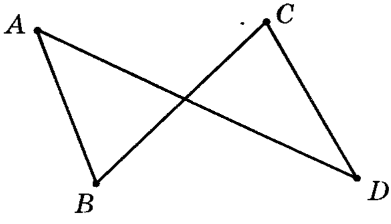
Время на работу с задачей в классе можно сократить, если заранее заготовить слайд с «деревьями», построенными из точек B, C и D.

Далее учащимся предлагается дома на альбомном листе изобразить все 12 ломаных и подумать над задачей № 105 (117).

105 (117). Сколько всего различных замкнутых ломаных можно построить с вершинами в точках A, B, C, D?

Р е ш е н и е. Рассуждения здесь могут быть такими: «Перебирая возможные варианты для незамкнутых ломаных, мы первоначально получили 24 варианта. Затем выяснили, что мы получили 24 варианта н а з в а н и й ломаных и в этих названиях каждая ломаная повторяется дважды, поэтому всего ломаных 12.

Превратим незамкнутые ломаные в замкнутые: добавим необходимое звено. Видим, например, что замкнутые ломаные $ABCD$, $BCDA$, $CDAB$ и $DABC$ — это одна и та же ломаная:



Значит, число различных замкнутых ломаных в 4 раза меньше числа незамкнутых: $12 : 4 = 3$».

Можно рассуждать по-другому. «Рассмотрим замкнутую ломаную $ABCD$, изображенную на рисунке. Ее название можно записать, используя 8 способов: $ABCD$, $ADCB$, $BADC$, $BCDA$, $CBAD$, $CDAB$, $DABC$, $DCBA$. Это значит, что число замкнутых ломаных в 8 раз меньше числа всех возможных вариантов записи названий ломаных с вершинами в точках A, B, C и D: $24 : 8 = 3$».

И наконец, тот же результат можно получить, попытавшись изобразить различные замкнутые ломаные с вершинами в этих точках. Больше трех вариантов найти не удается.

143 (161). Однажды на досуге Иа-Иа и Пятачок решили попробовать зашифровать цифры буквами. Иа-Иа удалось записать некоторое трехзначное число, затем сумму его цифр, а затем сумму цифр этой суммы. Вот что у него получилось:

А Пятачок проделал то же самое с другим трехзначным числом. У него получилось так:

Постарайтесь разгадать, какое число записал Иа-Иа, а какое — Пятачок.

Как правило, находятся учащиеся, которые справляются с этой задачей дома без чьей-либо помощи. Если их немного, не стоит торопиться с тем, чтобы они рассказали свое решение всем. Достаточно ответа на вопрос: «С чего ты начал?»

Если же таких учащихся не нашлось, дается подсказка: «Подумайте, какой может быть сумма цифр трехзначного числа, может ли она начинаться с цифры 3, с цифры 4 и т. д. Если нет, то почему?» После этого задача опять задается на дом.

Р е ш е н и е (один из способов рассуждений).

1) И + О = И, значит, О = 0. Сумма цифр трехзначного числа не может быть больше 27 (9 + 9 + 9 = 27). Поскольку О = 0, а И может быть равно только 2 или 1, сумма цифр задуманного числа равна либо 20, либо 10. Проверим оба варианта.

Если И = 2, то ИО = 20, т. е. И + А + И = 20; тогда А должно быть равно 16. Но цифры 16 не существует.

Если И = 1, то ИО = 10, т. е. И + А + И = 10, тогда А = 8. Итак, И = 1, А = 8.

Значит, Иа-Иа задумал число 181.

2) Аналогично у Пятачка: число ЧО может быть равно 20 или 10, т. е. Ч может быть равно 2 или 1.

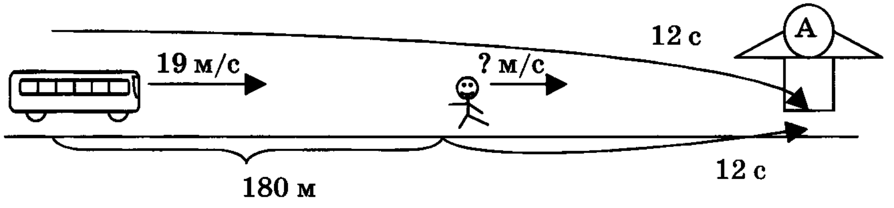
Если Ч = 2, то П = 9.

Если Ч = 1, то П определить невозможно, так как П + П = 9, а 9 не делится на 2. Итак, П = 9, Ч = 2.

Значит, Пятачок задумал число 929.

148 (166). Прохожий заметил идущий на остановку автобус в 180 метрах позади себя. Чтобы не опоздать, он побежал и через 12 секунд прибежал на остановку одновременно с автобусом. С какой скоростью пришлось бежать прохожему, если известно, что автобус движется со скоростью 19 м/сек?

Прежде чем давать эту задачу на дом, целесообразно прочитать ее в классе и сделать к ней рисунок, т. е. составить графическую модель ситуации, описанной в задаче:



I с п о с о б.

1) $19 \cdot 12 = 228$ (м) — расстояние, которое проехал автобус;

2) $228 - 180 = 48$ (м) — расстояние, которое пробежал прохожий;

3) $48 : 12 = 4$ (м/с) — скорость прохожего.

О т в е т: 4 м/с.

II с п о с о б.

1) $180 : 12 = 15$ (м/с) — скорость, с которой автобус догоняет прохожего;

2) $19 - 15 = 4$ (м/с) — скорость прохожего.

О т в е т: 4 м/с.

Наводящие вопросы, которые могут быть заданы классу:

На какую из ранее решенных задач похожа эта задача? (Задача № 132(117) про шляпу, которую ветер сорвал со старухи Шапокляк.)

К I способу.

1) Какую величину требуется найти в задаче? (Скорость.)

2) Какие величины надо знать, чтобы определить скорость движения? (Путь и время.)

3) Какие из них нам известны? (Время.)

4) Подумайте, как определить путь.

Ко II способу.

1) О каком движении идет речь в задаче: навстречу, вдогонку, объекты сближаются или удаляются? Как бы вы охарактеризовали скорость, с которой меняется взаимное расположение объектов? (Движение вдогонку, автобус догоняет пешехода, скорость сближения.)

2) В этой задаче двигаются автобус и прохожий, причем автобус догоняет прохожего. Какие скорости и расстояния рассматриваются, когда речь идет о движении вдогонку? (Скорости движущихся объектов, скорость сближения или удаления, расстояние между объектами, время, которое требуется, чтобы одному из них догнать другого.)

3) Какие из этих величин известны, какие — нет? Какая из них искомая? (Известно время, которое потребовалось автобусу, чтобы догнать прохожего, скорость автобуса; неизвестна скорость сближения; искомая величина — скорость прохожего.)

4) Как определить неизвестные величины?

Здесь, так же как в случае с задачей о шляпе, второе решение короче, но додуматься до него труднее. Поэтому не следует торопиться с тем, чтобы дать детям готовое решение, эффект будет минимальный. Лучше к этой задаче возвращаться в течение нескольких уроков, давая детям возможность все глубже осознавать описанную в ней ситуацию.

204 (225). а) 1000 л бензина стоят 8500 рублей. Определите стоимость 210 л бензина. Постарайтесь решить эту задачу, не переводя рубли в копейки.

б) Рабочий изготовил 10 деталей на своем станке за 52 часа 30 минут; станок-автомат изготовил 25 таких же деталей за 43 часа 45 минут. Во сколько раз автомат работал быстрее рабочего?

а) Подсказка. Определите стоимость 10 л бензина.

б) Подсказка. Определите время, которое потратят рабочий и станок-автомат на изготовление 5 деталей.

Решение. На изготовление 5 деталей рабочий потратит времени вдвое меньше, чем 52 ч 30 мин, т. е. 26 ч 15 мин.

Станок-автомат тратит на изготовление 25 деталей 43 ч 45 мин, а на 5 деталей — в 5 раз меньше.

43 ч 45 мин = 40 ч + 3 ч 45 мин = 40 ч + 225 мин. Если эту сумму разделить на 5, получим 8 ч 45 мин.

Осталось сравнить две величины: 26 ч 15 мин и 8 ч 45 мин. Первая — в три раза больше.

319 (349). Аэроплан совершал перелет из одного пункта в другой со средней скоростью 180 *км/ч*. Если бы его скорость была 200 *км/ч*, то на тот же путь он затратил бы на 30 минут меньше. Определите расстояние между пунктами.

В учебнике есть задачи-ступеньки, ведущие к задаче № 349. Это задачи № 327—329. Решение этих задач приводит к необходимости выполнить деление с остатком, определить, какую часть составляет этот остаток от величины, принятой за целое, — расстояния, которое преодолевается за единицу времени, или стоимости единицы массы.

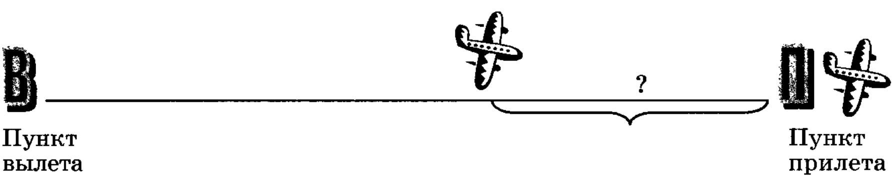
Практика показывает, что, для того чтобы задачу № 349 тем или иным способом решили практически все учащиеся, требуется несколько уроков. Как правило, на первый урок, после того как было получено задание, с решением приходят 1—2 ученика, причем довольно часто задача бывает решена методом подбора. Отвергать его не следует. Однако надо предложить учащимся постараться решить задачу более традиционным методом.

Попытка решить задачу с помощью уравнения, как правило, приводит к выражениям, которые учащиеся на этом этапе преобразовывать еще не умеют. Поэтому возникает необходимость решить эту задачу арифметическим методом.

П е р в а я п о д с к а з к а. Какие величины надо знать, чтобы определить расстояние? Какие из них известны? Представьте, что вылетели одновременно два аэроплана: первый — со скоростью 180 км/ч, а второй — со скоростью 200 км/ч.

После этой подсказки еще несколько учащихся находят решение задачи.

В т о р а я п о д с к а з к а. На каком расстоянии от пункта прибытия был первый аэроплан в тот момент, когда второй туда прилетел? Как бы вы охарактеризовали это расстояние? Целесообразно вместе с учащимися построить графическую модель ситуации:



Третья подсказка. Скорость известна. Что нужно знать, чтобы определить время в пути, зная, на какое расстояние за это время второй аэроплан обогнал первый?

Решение (заметим, что мы приводим только один из возможных способов, практика же показывает, что при такой организации работы над задачей учащиеся приносят до пяти различных способов решений).

1) Представим, что вылетели одновременно два аэроплана, первый со скоростью 180 км/ч, а второй — со скоростью 200 км/ч. Тогда, в тот момент, когда второй совершил посадку, первый был от пункта назначения в 30 мин полета. Поскольку его скорость — 180 км/ч, ему осталось лететь

$$180 : 2 = 90 \text{ (км)}.$$

2) Чтобы найти расстояние между городами, надо знать время полета. Это то самое время, за которое второй аэроплан обогнал первый на 90 км. Его можно найти, если определить скорость удаления:

$$200 - 180 = 20 \text{ (км/ч)}.$$

3) $90 : 20 = 4$ ч (10 км ост.).

Если за 1 час расстояние между самолетами увеличивается на 20 км, то на 80 км оно увеличится за 4 часа и еще на 10 км оно увеличится за полчаса. Значит, второй аэроплан был в полете 4 ч 30 мин.

4) $200 \cdot 4 = 800$ (км) — расстояние, которое пролетел второй аэроплан за 4 часа.

И еще за полчаса он пролетел 100 км.

5) Значит, расстояние между городами: $800 + 100 = 900$ (км).

Ответ: 900 км.

463 (493). Изобразите отрезок MN. Отметьте на нем точки K и L так, чтобы отрезок KN составлял $\frac{2}{3}$, а отрезок ML — $\frac{3}{4}$ отрезка MN. Какую часть отрезков MN, NK, ML, MK и NL составляет отрезок KL? Прежде чем решать задачу, подумайте, какой длины удобно взять отрезок MN.

Подсказка содержится в тексте задачи. Учащимся предлагается в классе прочитать первые два предложения и подумать над подсказкой. После этого задача дается на дом.

Можно даже выполнить первую половину задания в классе: изобразить отрезок и отметить на нем точки. Завершить выполнение задания учащимся предлагается дома.

О т в е т: отрезок KL составляет $\frac{5}{12}$ длины отрезка MN, $\frac{5}{8}$ длины отрезка NK, $\frac{5}{9}$ длины отрезка ML, $1\frac{1}{4}$ длины отрезка MK, $1\frac{2}{3}$ длины отрезка NL.

544 (581). **Библиотеке надо переплести 960 книг. Одна переплетная мастерская может выполнить эту работу за 16, другая — за 24 и третья — за 48 дней. В какой срок могут выполнить эту работу три мастерские, работая одновременно, и сколько книг успеет переплести каждая мастерская? Можно ли распределить книги между мастерскими так, чтобы эта работа была выполнена за более короткий срок?**

Учащиеся уже решали задачи на совместную работу, но до сих пор работающих было двое или решение было связано с обыкновенными дробями. Поэтому на уроке, когда эта задача дается на дом, следует предоставить учащимся возможность прочитать условие и подумать над вопросом: что надо знать, чтобы определить, за какой срок смогут выполнить работу три мастерские, работая одновременно? Возможны два варианта ответа: 1) сколько книг могут переплести три мастерские за один день, работая одновременно; 2) какую часть работы могут выполнить за один день три мастерские, работая одновременно $\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} = \frac{1}{8}\right)$. Однако в 5-м классе второй вариант маловероятен. Такой способ решения можно рассмотреть в 6-м классе, вернувшись к этой задаче во втором полугодии, когда учащимся будут знакомы все действия с обыкновенными дробями.

Р е ш е н и е (5 класс).

1) Сколько книг может переплести за один день первая мастерская?

$960 : 16 = 60$ (книг).

2) Сколько книг может переплести за один день вторая мастерская?

$960 : 24 = 40$ (книг).

3) Сколько книг может переплести за один день третья мастерская?

$960 : 48 = 20$ (книг).

4) Сколько книг могут переплести за один день три мастерские, работая одновременно?

$60 + 40 + 20 = 120$ (книг).

5) За какой срок выполнят работу три мастерские, работая одновременно?

$960 : 120 = 8$ (дней).

6) Сколько книг успеет переплести первая мастерская за 8 дней?

$60 \cdot 8 = 480$ (книг).

7) Сколько книг успеет переплести вторая мастерская за 8 дней?

$40 \cdot 8 = 320$ (книг).

6) Сколько книг успеет переплести третья мастерская за 8 дней?

$20 \cdot 8 = 160$ (книг).

Ответ: 8 дней, 1-я мастерская успеет переплести 480 книг, 2-я мастерская — 320 книг, 3-я мастерская — 160 книг.

Заметим, что первые 5 действий можно записать одним выражением: $960 : ((960 : 16) + (960 : 24) + (960 : 48))$.

Второй вопрос задачи можно переформулировать следующим образом: будет ли работа выполнена за более короткий срок, если отдать больше книг в ту мастерскую, которая работает быстрее всех? (Поскольку очевидно, что, если книги отдать в мастерскую, которая работает медленнее, работа будет выполняться дольше.)

В ответе на первый вопрос задачи было получено:

а) работа будет выполнена за 8 дней;

б) за 8 дней:

1-я мастерская успеет переплести 480 книг;

2-я мастерская успеет переплести 320 книг;

3-я мастерская успеет переплести 160 книг.

Если перераспределить книги, увеличив их число в 1-й мастерской, то на работу потребуется более 8 дней. Значит, оптимальным является только найденный вариант распределения.

На самом деле тот факт, что увеличение числа книг в первой мастерской ведет к увеличению срока выполнения работы, достаточно очевиден, но у некоторых учащихся остаются сомнения, если им наглядно не представлены результаты, найденные при ответе на первый вопрос.

Решение (6 класс).

Примем объем всей работы за единицу — 1. Тогда за один день

1-я мастерская сможет выполнить $\frac{1}{16}$ часть всей работы,

2-я мастерская сможет выполнить $\frac{1}{24}$ часть всей работы,

3-я мастерская сможет выполнить $\frac{1}{48}$ часть всей работы.

1) Какую часть работы могут выполнить за один день три мастерские, работая одновременно?

$\frac{1}{16} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} = \frac{1}{8}$ (часть работы).

2) За один день выполняется $\frac{1}{8}$ часть работы, значит, вся работа будет выполнена за 8 дней.

3) Какую часть книг успеет переплести каждая мастерская за 8 дней?

1-я мастерская: $\frac{1}{16} \cdot 8 = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$ (часть);

2-я мастерская: $\frac{1}{24} \cdot 8 = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$ (часть);

3-я мастерская: $\frac{1}{48} \cdot 8 = \frac{8}{48} = \frac{1}{6}$ (часть).

4) Сколько книг успеет переплести каждая мастерская за 8 дней?

1-я мастерская: $960 \cdot \frac{1}{2} = 480$ (книг);

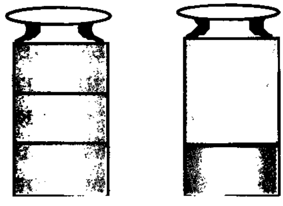
2-я мастерская: $960 \cdot \frac{1}{3} = 320$ (книг);

3-я мастерская: $960 \cdot \frac{1}{6} = 160$ (книг).

Ответ: 8 дней, 1-я мастерская успеет переплести 480 книг, 2-я мастерская — 320 книг, 3-я мастерская — 160 книг.

630 (677). В первой фляге молока в 3 раза больше, чем во второй. Когда из первой фляги перелили во вторую 15 л, молока в обеих флягах стало поровну. Сколько литров молока было в каждой фляге первоначально?

Попытка решить задачу алгебраическим методом приводит к уравнению, которое пятиклассникам решить довольно затруднительно. Поэтому здесь целесообразно предложить учащимся составить графическую модель ситуации (рисунок), описанной в задаче, и подумать над этой моделью.



Наводящий вопрос: покажите то количество молока, которое надо перелить из первого бидона во второй, чтобы уравнять количество молока в обоих бидонах.

Как только учащиеся поймут, что 15 л — это треть молока, содержащегося в первом бидоне, задача будет решена.

631 (678). 1) Решите задачу подбором. Из 29 коробок часть содержит по 14 кг конфет, а часть — по 15 кг. Сколько тех и других коробок, если общая масса конфет в коробках обоих типов одинаковая?

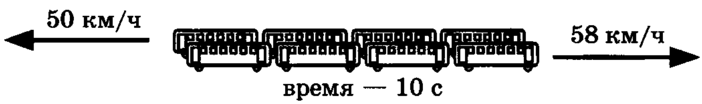
2) Придумайте сами аналогичную задачу.

Подсказка: внимательно изучите данные.

Внимательно изучив данные, видим, что $14 + 15 = 29$. Значит, коробок, в которых по 14 кг, должно быть 15, а тех, в которых по 15 кг, — 14.

641 (689). Пассажир поезда, идущего со скоростью 50 км/ч, заметил, что встречный поезд шел мимо него в течение 10 секунд. Определите длину встречного поезда, если его скорость — 58 км/ч.

Какие величины в задаче известны? Сделаем рисунок:



Длина поезда — это расстояние от начала головного вагона до конца хвостового вагона. Какие величины мы обычно используем, чтобы найти расстояние?

Как бы вы решали задачу, если бы поезд, в котором сидел пассажир, стоял на месте?

Решение.

1) $50 + 58 = 108$ км/ч — скорость, с которой встречный поезд проехал мимо пассажира.

2) 108 (км/ч) $= (108 \cdot 1000) : 3600$ (м/с) $= 30$ (м/с).

3) $30 \cdot 10 = 300$ (м) — длина поезда.

Ответ: 300 м.

642 (690). а). От пристани A вниз по течению реки отправился катер. В это же время от пристани B навстречу ему вышел второй катер с такой же собственной скоростью. Первый катер достиг пристани B через 4 ч. На каком расстоянии от пристани A был в это время второй, если скорость течения — 2 км/ч?

б) В случае затруднений постарайтесь определить, на сколько первый катер проходит больше километров за 1 час, чем второй.

в) Если вы так и не смогли решить задачу, постарайтесь разобраться в том, как это можно сделать, из следующего текста.

Первый катер при движении по течению за 4 ч выиграл 8 км ($4 \cdot 2$) по сравнению с тем расстоянием, которое он прошел бы за это время, двигаясь в стоячей воде, а второй катер столько же километров проиграл, так как двигался против течения. Всего же второй катер за 4 ч проиграл первому 16 км. Значит, на таком расстоянии он был от A тогда, когда первый прибыл в B.

Подсказки и решение этой задачи следуют сразу после условия под буквами б) и в).

745 (798). Начертите с помощью циркуля окружность и проведите диаметр. Обозначьте его AB. На окружности отметьте две любые точки C и D. Соедините их с точками A и B. Какими (острыми, прямыми или тупыми) получились углы ACB и ADB? Сделайте вывод.

746 (799). Начертите окружность и проведите отрезок AB с концами на этой окружности. Отметьте на окружности точки C, D и E так, чтобы угол ABC был острым, угол ABD — прямым, а угол ABE — тупым.

Задачи № 745 (798) и 746 (799) — это задачи-ступеньки к задаче № 747 (800). Выполняя задание № 745 (798), учащиеся видят, что все углы, вершины которых принадлежат окружности, а стороны проходят через концы диаметра, — прямые.

После выполнения задания № 746 (799) целесообразно предложить учащимся вопрос: «Есть ли среди отрезков AC, AD и AE диаметр данной окружности?»

747 (800). На отдельном листе бумаги, используя чашку вместо циркуля, проведите карандашом окружность. Вырежьте получившийся круг и подумайте, как при помощи перегибания найти его центр. Подумайте, как найти центр круга в случае, если круг перегнуть нельзя.

Выполнение первого задания — найти центр вырезанного круга перегибанием, как правило, затруднений не вызывает.

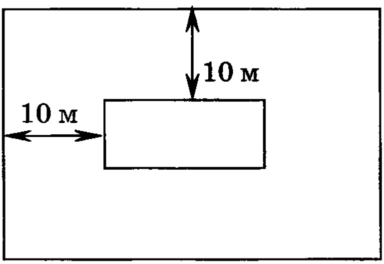
Если же круг перегнуть нельзя, то центр найти сложнее. Здесь учащимся следует предложить подумать, какие из свойств углов и окружностей, с которыми они познакомились, выполняя предыдущие задания (№ 745 (798), 746 (799)), можно использовать в этой задаче. Оказывается, достаточно построить прямой угол BAC, где точки A, B, C принадлежат окружности, тогда BC — диаметр, а его середина — центр окружности.

Мы рекомендуем учителю обязательно рассмотреть эти задачи с учащимися, так как в 6-м классе им будут предложены задания такого типа: на рисунке изображена окружность, центр которой не отмечен, и требуется определить длину этой окружности, измерив ее диаметр или радиус.

Если учащиеся незнакомы с тем, как определить диаметр или радиус окружности, центр которой неизвестен, выполнить такое задание им будет нелегко.

788 (846). Найдите длину забора, окружающего дом прямоугольной формы длиной 15,5 м и шириной 4,8 м, если забор поставлен на расстоянии 10 м от него.

К этой задаче целесообразно сделать схематический рисунок, иллюстрирующий, что подразумевается под расстоянием от дома до забора:



820 (879). Катер, встретив плот, продолжал движение еще в течение получаса в том же направлении, а затем развернулся и направился обратно. Сколько ему понадобится времени, чтобы догнать плот?

Эта задача вызывает затруднения даже у учащихся старших классов. Но, поскольку они знакомы с преобразованием буквенных выражений, в большинстве случаев им удается получить правильный ответ.

Как правило, пятиклассники либо приносят решение в буквенной форме, которое сделали родители, либо высказывают некоторые предположения, с обоснованием которых у них возникают затруднения, либо задают какие-нибудь значения скоростей катера и течения и решают задачу с числовыми данными.

Последний вариант, на наш взгляд, наиболее приемлем. Следует предложить учащимся задать различные значения для скоростей катера и течения и решить задачу с этими данными. Во всех случаях получается один и тот же результат. После этого учащиеся высказывают предположение, что результат не зависит от числовых данных. Учитель предлагает подумать почему.

Обоснования могут быть различными по форме. Приведем одно их них.

Скорость удаления катера от плота (движение против течения):

$$(v_{\text{собст. катера}} - v_{\text{течения}}) + v_{\text{плота (течения)}} = v_{\text{собст. катера}}.$$

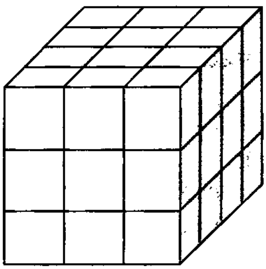
Скорость сближения катера и плота (движение по течению):

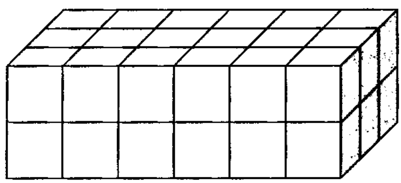
$$(v_{\text{собст. катера}} + v_{\text{течения}}) - v_{\text{плота (течения)}} = v_{\text{собст. катера}}.$$

Значит, и в том и в другом направлении катер будет двигаться одно и то же время, т. е. по полчаса, а всего затратит 1 час.

940 (1008). Приведите контрпример для утверждения: любые два прямоугольных параллелепипеда, имеющие равные объемы, имеют и равные площади поверхности.

П о д с к а з к а: для наглядности можно использовать кубики. Например:





954 (1021). Пассажир поезда, идущего со скоростью 79,2 км/ч, заметил, что встречный поезд шел мимо него в течение 12 с. Определите скорость встречного поезда, если его длина — 480 м.

Эта задача очень похожа на задачу № 641 (689). Только там были даны скорости обоих поездов и надо было найти длину встречного поезда; здесь же длина известна, а найти надо скорость. Поэтому первой подсказкой к этой задаче может быть предложение вспомнить, как решалась задача № 641 (689).

Кроме того, можно предложить учащимся подумать, как бы они решили задачу, если бы поезд, в котором сидел пассажир, стоял на месте; какой компонент и как надо изменить, учитывая, что поезда ехали навстречу друг другу.

Р е ш е н и е.

1) Выразим скорость поезда, в котором ехал пассажир, в метрах в секунду:

$$79{,}2\ (\text{км/ч}) = (79{,}2 \cdot 1000) : 3600\ (\text{м/с}) = 22\ (\text{м/с}).$$

2) $480 : 12 = 40$ (м/с) — скорость, с которой встречный поезд проехал мимо пассажира.

3) $40 - 22 = 18$ (м/с) — скорость встречного поезда.

4) Выразим скорость встречного поезда в км/ч:

$(18 \cdot 3600) : 1000 = 64{,}8$ (км/ч).

Ответ: 64,8 км/ч.

После того как задача решена, можно предложить учащимся придумать задачу на такую ситуацию: пассажир сидит в поезде, а по параллельному пути его обгоняет другой поезд.

Задачи стохастической линии

(ответы, указания, решения)

§ 53. Достоверные, невозможные и случайные события

Охарактеризуйте события, о которых идет речь в приведенных ниже заданиях, как достоверные, невозможные или случайные (ответы даны в скобках).

959 (1026). Петя задумал натуральное число. Событие состоит в следующем:

а) задумано четное число (случайное);

б) задумано нечетное число (случайное);

в) задумано число, не являющееся ни четным, ни нечетным (невозможное — любое натуральное число является либо четным, либо нечетным);

г) задумано число, являющееся четным или нечетным (достоверное).

960 (1027). Вы открыли этот учебник на любой странице и выбрали первое попавшееся существительное. Событие состоит в следующем:

а) в написании выбранного слова есть гласная буква (достоверное — в записи любого существительного есть хотя бы одна гласная буква);

б) в написании выбранного слова есть буква «о» (случайное — есть существительные, в записи которых используется буква «о», а есть существительные, в записи которых нет этой буквы);

в) в написании выбранного слова нет гласных букв (невозможное — нет существительных, состоящих только из согласных букв);

г) в написании выбранного слова есть мягкий знак (случайное).

961 (1028). Петя и Толя сравнивают свои дни рождения. Событие состоит в следующем:

а) их дни рождения не совпадают (случайное);

б) их дни рождения совпадают (случайное);

в) Петя родился 29 февраля, а Толя — 30 февраля (невозможное);

г) дни рождения обоих приходятся на праздники — Новый год (1 января) и День независимости России (12 июня) (случайное).

962 (1029). При игре в нарды используют два игральных кубика. Число ходов, которые делает участник игры, определяется сложением цифр на двух выпавших гранях кубика, а если выпадет «дубль» ($1 + 1$, $2 + 2$, $3 + 3$, $4 + 4$, $5 + 5$, $6 + 6$), то число ходов удваивается. Вы бросаете кубики и вычисляете, сколько ходов вам предстоит сделать. Событие состоит в следующем:

а) вы должны сделать 1 ход (невозможное — 1 ход можно сделать, если выпадет комбинация $1 + 0$, но числа 0 на кубиках нет);

б) вы должны сделать 7 ходов (случайное — например, если выпадет $1 + 6$ или $2 + 5$);

в) вы должны сделать 24 хода (случайное — если выпадет комбинация $6 + 6$);

г) вы должны сделать 13 ходов (невозможное — не существует комбинаций чисел от 1 до 6, сумма которых равна 13; это число не может получиться и при выпадении «дубля», так как оно нечетное).

963 (1030). Вы снова играете в нарды (см. предыдущую задачу). Охарактеризуйте следующее событие:

а) игрок должен сделать не более двух ходов (невозможное — при комбинации наименьших чисел $1 + 1$ игрок делает 4 хода; комбинация $1 + 2$ дает 3 хода; все остальные комбинации дают более 3 ходов);

б) игрок должен сделать более двух ходов (достоверное — любая комбинация дает 3 или более ходов);

в) игрок должен сделать не более 24 ходов (достоверное — комбинация наибольших чисел $6 + 6$ дает 24 хода, а все остальные — менее 24 ходов);

г) игрок должен сделать двузначное число ходов (случайное — например, комбинация $2 + 3$ дает однозначное число ходов: 5, а выпадение двух четверок — двузначное число ходов: 16).

964 (1031). В мешке лежат 10 шаров: 3 синих, 3 белых и 4 красных. Охарактеризуйте следующее событие:

а) из мешка вынули 4 шара, и все они синие (невозможное — в мешке только 3 синих шара);

б) из мешка вынули 4 шара, и все они красные (случайное);

в) из мешка вынули 4 шара, и все они оказались разного цвета (невозможное — в мешке шары только трех различных цветов);

г) из мешка вынули 4 шара, и среди них не оказалось шара черного цвета (достоверное — в мешке нет черных шаров).

Контрольные задания

2. Укажите, какое из следующих событий достоверное, какое — невозможное и какое — случайное:

а) летних каникул не будет (невозможное);

б) бутерброд упадет маслом вниз (случайное — иногда бутерброд падает маслом вверх);

в) учебный год когда-нибудь закончится (достоверное).

§ 54. Комбинаторные задачи

1036. Несколько стран решили использовать для своего государственного флага символику в виде трех вертикальных полос одинаковой ширины разных цветов — зеленого, черного, желтого. Сколько стран могут использовать такую символику при условии, что у каждой страны свой флаг?

Для решения строим дерево вариантов.

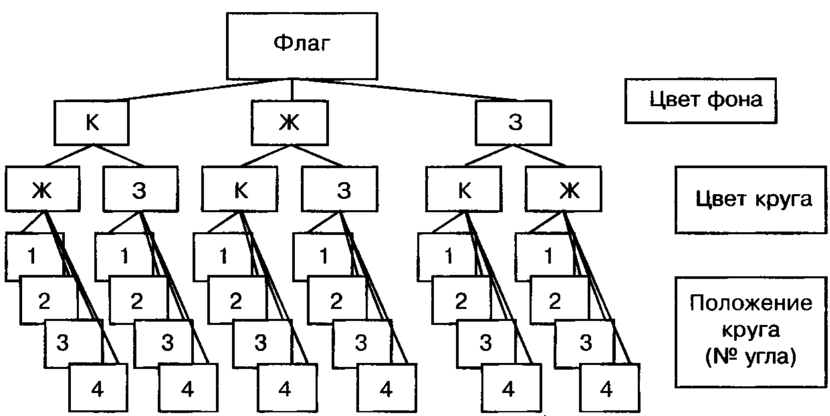
Ответ: 6 стран.

969 (1037). Несколько стран решили использовать для своего государственного флага символику в виде четырех горизонтальных полос одинаковой ширины разных цветов — белого, синего, красного, зеленого. Сколько стран могут использовать такую символику при условии, что у каждой страны свой флаг?

Для решения строим дерево вариантов.

Ответ: 24 страны.

970 (1038). Руководство некоторой страны решило сделать свой государственный флаг таким: на одноцветном прямоугольном фоне в одном из углов помещается круг другого цвета. Цвета решено выбрать из трех возможных: красный, желтый, зеленый. Сколько вариантов такого флага существует?

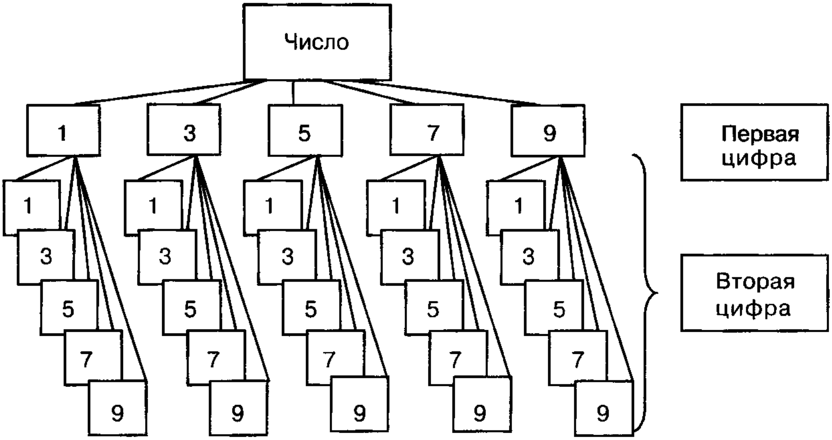


Р е ш е н и е. Чтобы удобно было строить дерево вариантов, обозначим углы прямоугольника цифрами: верхний левый — 1, верхний правый — 2, нижний правый — 3, нижний левый — 4. Строим дерево вариантов (см. выше).

О т в е т: 24 варианта.

972 (1039). а) Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, 9?

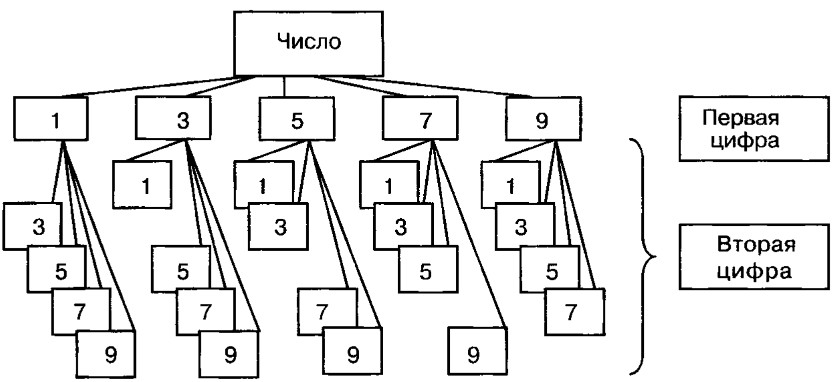
Р е ш е н и е. Строим дерево вариантов:



Варианты чисел: 11, 13, 15, 17, 19, 31, 33, 35 и т. д. Всего 25 чисел.

б) Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, 9 при условии, что цифры не должны повторяться?

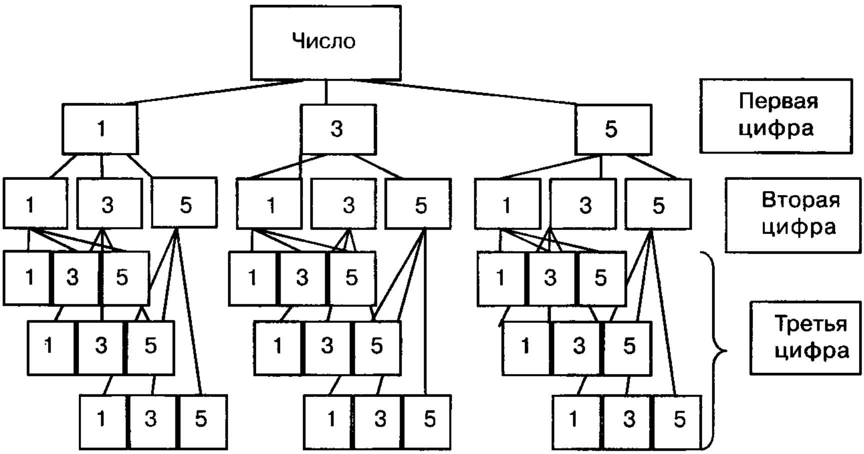
Р е ш е н и е. Строим дерево вариантов:



Итого 20 чисел.

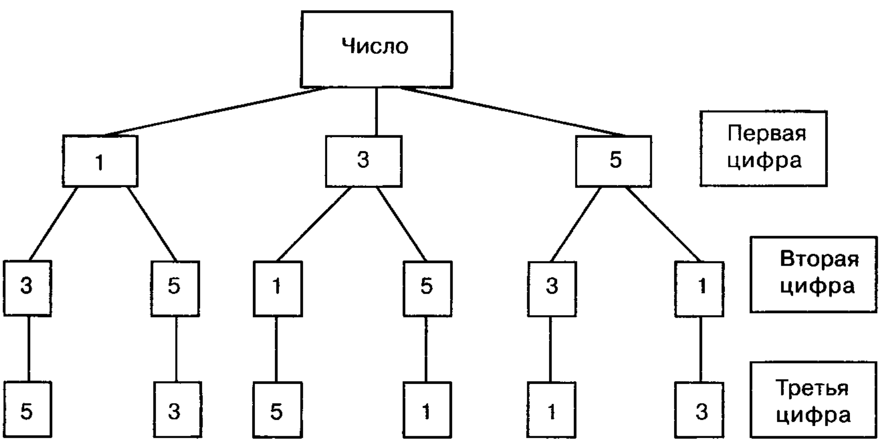
973 (1040). а) Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5?

Р е ш е н и е. Строим дерево вариантов:



Варианты чисел: 111, 113, 115, 131, 133, 135 и т. д. Всего 27 чисел.

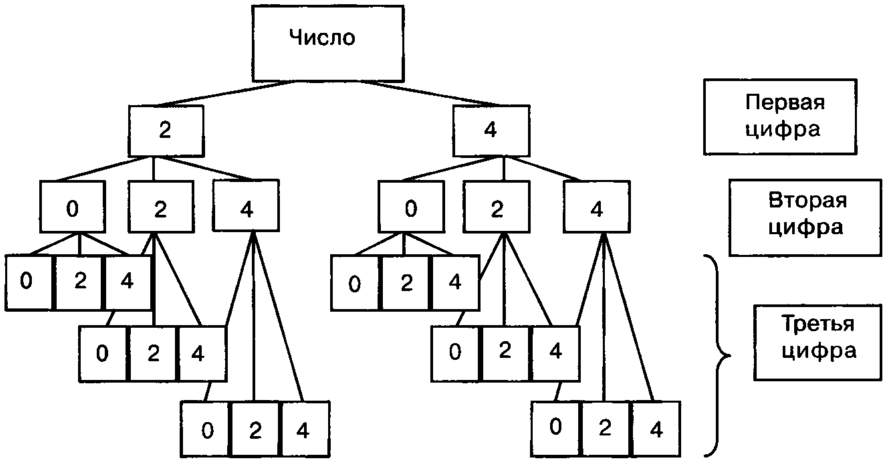
б) Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5 при условии, что цифры не должны повторяться?



О т в е т: 6 чисел.

974 (1041). а) Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 4?

Решение. Строим дерево вариантов:

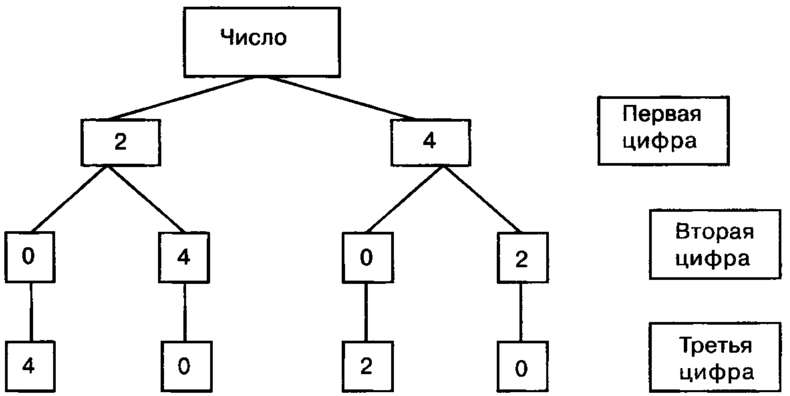


Варианты чисел: 200, 202, 204, 220, 222, 224 и т. д.

Ответ: 18 чисел.

б) Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 4 при условии, что цифры не должны повторяться?

Решение. Строим дерево вариантов:



Варианты чисел: 204, 240, 402, 420.

Ответ: 4 числа.

975 (1042). а) Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7?

Ответ: 64 числа.

б) Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7 при условии, что цифры не должны повторяться?

Ответ: 24 числа.

976 (1043). а) Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 4, 6?

Ответ: 48 чисел.

б) Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 4, 6 при условии, что цифры не должны повторяться?

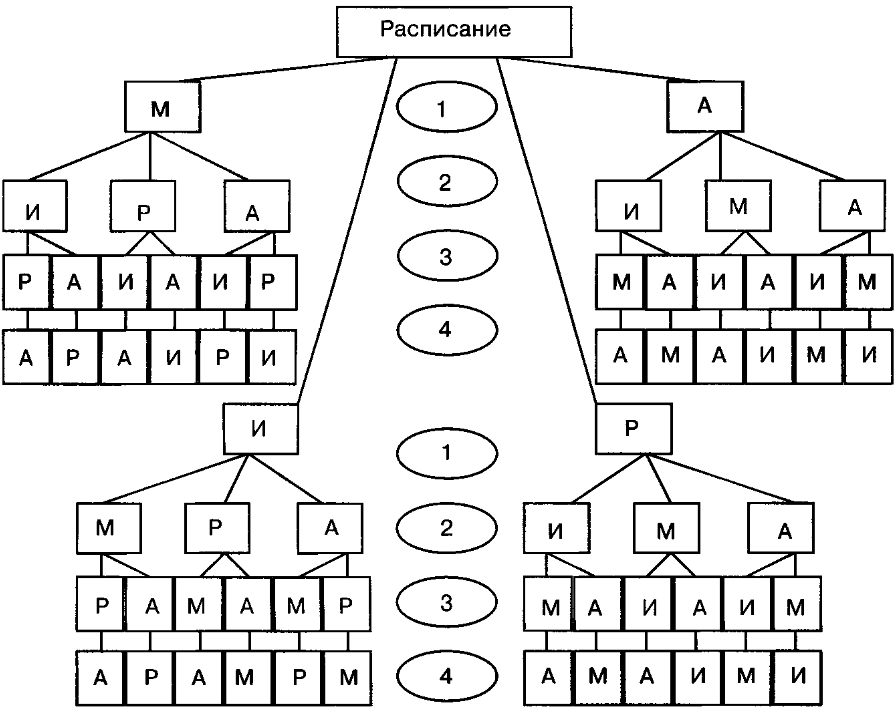
Ответ: 18 чисел.

977 (1044). В 5 «А» классе в среду 4 урока: математика, информатика, русский язык, английский язык. Сколько можно составить вариантов расписания на среду?

Решение. Построим дерево вариантов. Для удобства закодируем названия предметов:

математика — М,
информатика — И,
русский язык — Р,
английский язык — А.

Внутри круга указан номер урока.



Варианты расписания: МИРА, МИАР, МРИА, МРАИ и т. д.

Ответ: 24 варианта.

978 (1045). В футбольном турнире участвуют несколько команд. Оказалось, что все они использовали для трусов и футболок два разных цвета из пяти возможных: белый, красный, синий, зеленый, желтый. Выяснилось, что были использованы все возможные варианты. Сколько команд участвовало в турнире?

Решение.

Можно построить дерево вариантов, а можно получить результат рассуждением, дающим учащимся первое представление о правиле умножения для комбинаторных задач (само правило будет дано в 6-м классе). Приведем это рассуждение.

Для выбора цвета футболки существует 5 возможностей (способов). Тогда для выбора цвета трусов остается только 4 возможности (способа), поскольку трусы и футболки должны быть разных цветов. Итак, на каждый из пяти цветов футболок приходится 4 цвета трусов. Всего 20 (4 · 5) вариантов.

Ответ: 20 команд.

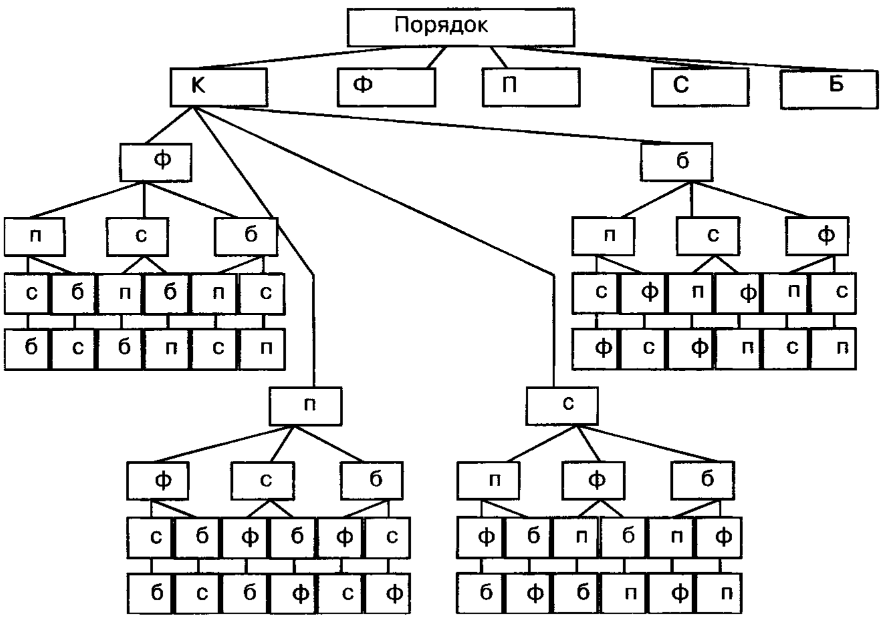
979 (1046). Современные пятиборцы в течение двух дней участвуют в соревновании по пяти видам спорта: конкур (кросс на лошадях), фехтование, плавание, стрельба, бег.

а) Сколько существует вариантов порядка прохождения видов соревнования?

Решение.

Строим дерево вариантов. Для удобства введем обозначения:

конкур — К, стрельба — С,
фехтование — Ф, бег — Б.
плавание — П,

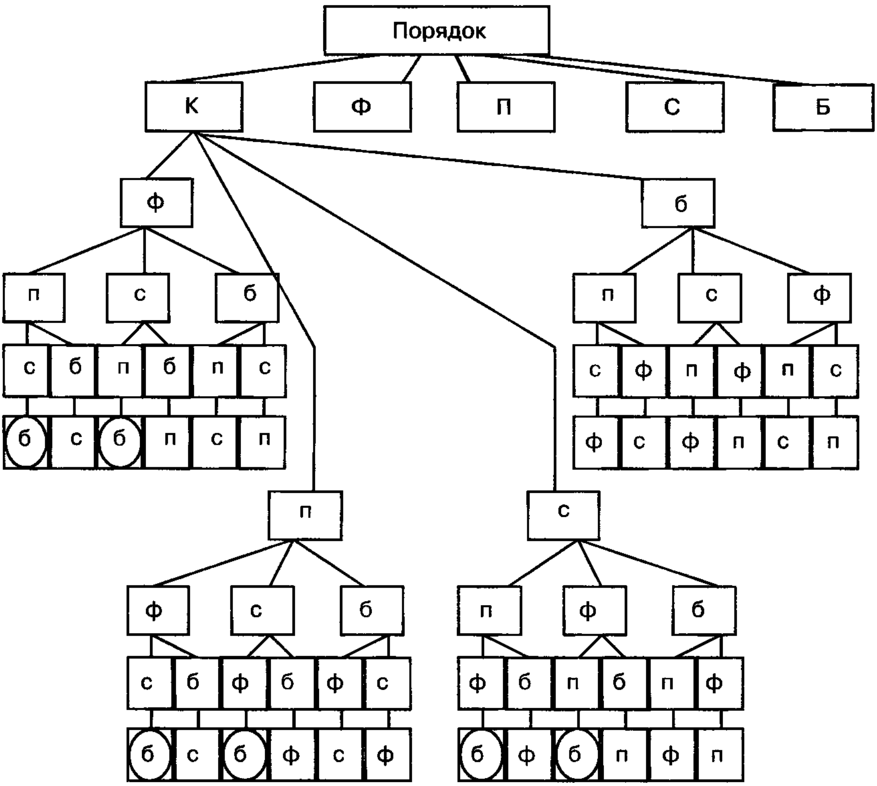


Полностью построить дерево вариантов затруднительно. Но уже из полученного рисунка видно, что каждая начальная ветвь дает 24 варианта. Поскольку таких ветвей 5, то всего существует $5 \cdot 24 = 120$ вариантов порядка прохождения видов соревнований.

Ответ: 120 вариантов.

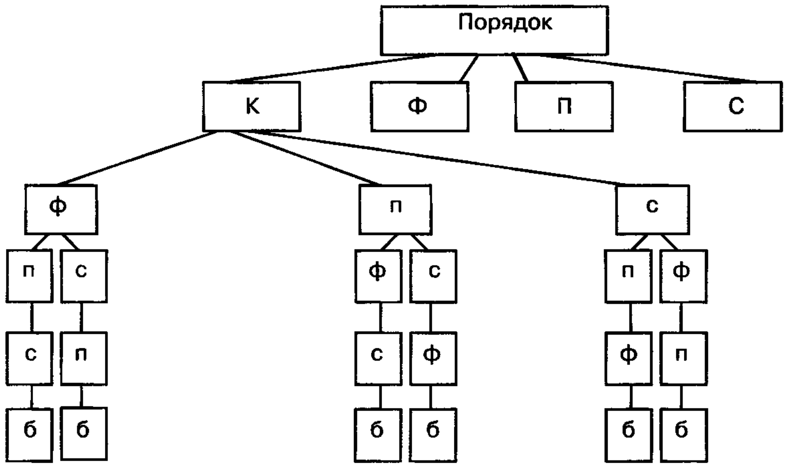
б) Сколько существует вариантов порядка прохождения видов соревнования, если известно, что последним видом должен быть бег?

Решение. Воспользуемся рисунком к предыдущему заданию и выберем только те варианты, где бег стоит на последнем месте:



В каждой из четырех ветвей, идущих от элементов первой строки К, Ф, П, С (элемент Б брать нельзя), элемент Б в последней строке содержится в 6 вариантах. Всего получается 24 варианта.

Можно проверить это, построив новое дерево вариантов, вернее его фрагмент:



О т в е т: 24 варианта.

в) Сколько существует вариантов порядка прохождения видов соревнования, если известно, что последним видом должен быть бег, а первым — конкур?

Р е ш е н и е. Очевидно, что получить ответ можно, используя первую ветвь дерева вариантов, изображенного выше.

О т в е т: 6 вариантов.

З а м е ч а н и е. После того как разобраны все задания из № 979 (1046), целесообразно обратить внимание учащихся на следующее:

в первом случае мы рассматривали всевозможные комбинации из пяти элементов, их получилось 120;

во втором случае фактически рассматривались комбинации из четырех элементов, их получилось 24;

в третьем случае — из трех элементов, их оказалось только 6.

Естественно предположить, что при увеличении количества элементов число комбинаций должно резко увеличиваться. Но уже для пяти элементов построить дерево вариантов непросто, как же быть, если элементов, например, 20?

Вслед за таким вступлением весьма эффектно прозвучит известная история из книги Я. Перельмана «Живая математика» о 20 выпускниках школы, которые до самой старости не смогли перебрать все варианты посадки за круглым столом в ресторане. Возникает проблема, как определить число всех возможных способов посадки, не строя громоздкого дерева вариантов.

После этого учащимся сообщается, что с одним из способов подсчета числа всех возможных вариантов они познакомятся в 6-м классе. Если класс достаточно сильный, целесообразно предложить учащимся подумать над тем, как можно найти число возможных комбинаций, не строя дерева вариантов, уже сейчас (см. второй способ решения задачи № 978 (1045).

980 (1047). В двух урнах имеется по пять шаров, в каждой — пяти различных цветов: белого, синего, красного, желтого, зеленого. Из каждой урны одновременно вынимается по одному шару. Охарактеризуйте указанное ниже событие как достоверное, случайное или невозможное:

а) вынутые шары разного цвета (случайное);

б) вынутые шары одного цвета (случайное);

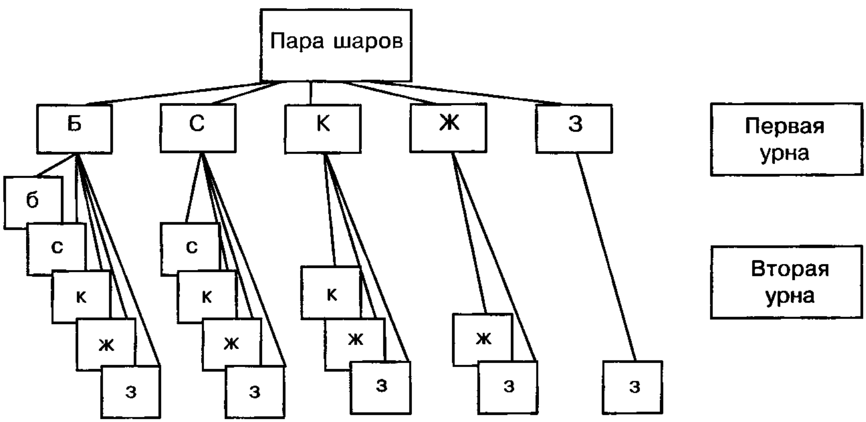
в) вынуты черный и белый шары (невозможное, так как ни в одной из урн нет черного шара);

г) вынуты два шара, причем оба оказались окрашены в один из следующих цветов: белый, синий, красный, желтый, зеленый (достоверное, так как перечислены все возможные варианты).

981 (1048). В двух урнах имеется по пять шаров, в каждой — пяти различных цветов: белого, синего, красного, желтого, зеленого. Из каждой урны одновременно вынимается по одному шару.

а) Сколько всего существует различных комбинаций вынутых шаров (комбинации типа «белый — красный» и «красный — белый» считаются одинаковыми)?

Р е ш е н и е. Построим дерево вариантов.



Здесь во втором уровне число ветвей при движении слева направо уменьшается, поскольку комбинации типа «белый — синий» и «синий — белый» считаются одной и той же комбинацией.

О т в е т: 15 комбинаций.

б) Сколько существует комбинаций, при которых вынутые шары одного цвета?

О т в е т: 5 комбинаций.

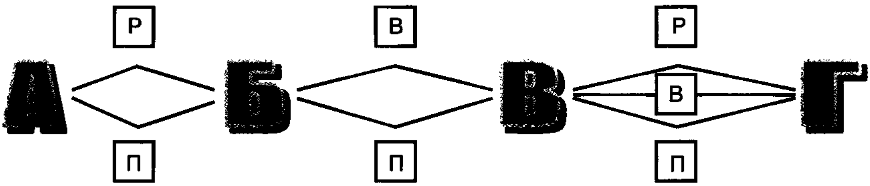
в) Сколько существует комбинаций, при которых вынутые шары разных цветов?

Р е ш е н и е. Воспользуемся результатами последних двух заданий: $15 - 5 = 10$.

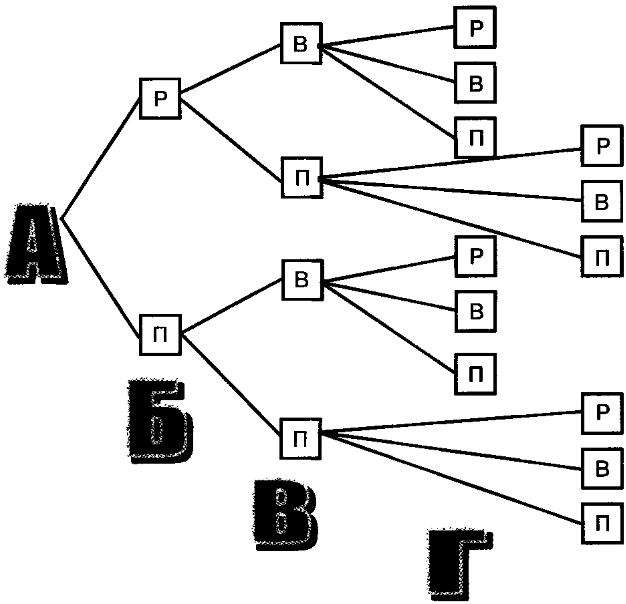
О т в е т: 10 комбинаций.

982 (1049). Группа туристов планирует осуществить поход по маршруту Антоново — Борисово — Власово — Грибово. Из Антоново в Борисово можно сплавиться по реке или дойти пешком. Из Борисово во Власово можно пройти пешком или доехать на велосипедах. Из Власово в Грибово можно доплыть по реке, доехать на велосипедах или пройти пешком. Сколько всего вариантов похода могут выбрать туристы? Сколько вариантов похода могут выбрать туристы при условии, что хотя бы на одном из участков маршрута они должны использовать велосипеды?

Р е ш е н и е. Сделаем рисунок по условию задачи:



Используя полученную картинку, составим дерево вариантов:



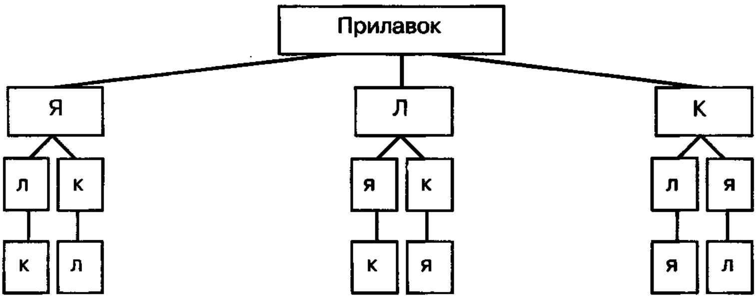
Всего 12 вариантов. Вариантов, где не используются велосипеды, — 4: рлр, рпп, ппр, ппп. Значит, вариантов, где хотя бы на одном участке используются велосипеды $12 - 4 = 8$.

О т в е т: всего 12 вариантов маршрута, из них 8 — с использованием велосипедов.

Контрольные задания

2. Запишите варианты, которыми можно разложить в один ряд на прилавке продукты трех видов: яблоки, лимоны, кукурузу. Изобразите дерево этих вариантов.

Р е ш е н и е. Строим дерево вариантов:



О т в е т: 6 вариантов — ЯЛК, ЯКЛ, ЛЯК, ЛКЯ, КЛЯ, КЯЛ.

6 класс

Тематическое планирование

(5 часов в неделю)

№ урока	Тема	Число уроков
	I четверть	
	Глава I. Положительные и отрицательные числа. Координаты	
1—6	§ 1. Поворот и центральная симметрия	6
7—10	§ 2. Положительные и отрицательные числа. Координатная прямая	4
11—14	§ 3. Противоположные числа. Модуль числа	4
15—18	§ 4. Сравнение чисел	4
19—21	§ 5. Параллельность прямых	3
22	***Контрольная работа № 1***	1
23—26	§ 6. Числовые выражения, содержащие знаки +, −	4
27—30	§ 7. Алгебраическая сумма и ее свойства	4
31—33	§ 8. Правило вычисления значения алгебраической суммы двух чисел	3
34—36	§ 9. Расстояние между точками координатной прямой	3
37—39	§ 10. Осевая симметрия	3
40—42	§ 11. Числовые промежутки	3
43	***Контрольная работа № 2***	1

Продолжение таблицы

№ урока	Тема	Число уроков
44—46	Резерв	2
	Итого:	**46**
	II четверть	
47—49	§ 12. Умножение и деление положительных и отрицательных чисел	3
50	§ 13. Координаты	1
51—55	§ 14. Координатная плоскость	5
56—59	§ 15. Умножение и деление обыкновенных дробей	4
60—62	§ 16. Правило умножения для комбинаторных задач	3
63	***Контрольная работа № 3***	1
	Глава II. Преобразование буквенных выражений	
64—67	§ 17. Раскрытие скобок	4
68—73	§ 18. Упрощение выражений	6
74—77	§ 19. Решение уравнений	4
78,79	§ 20. Решение задач на составление уравнений	2
80,81	Резерв	2
	Итого:	**35**
	III четверть	
82—87	§ 19. Решение уравнений § 20. Решение задач на составление уравнений (продолжение)	7

Продолжение таблицы

№ урока	Тема	Число уроков
88	***Контрольная работа № 4***	1
89—91	§ 21. Нахождение части от целого и целого по его части	3
92—94	§ 22. Окружность. Длина окружности	3
95—97	§ 23. Круг. Площадь круга	3
98, 99	§ 24. Шар. Сфера	2
100	***Контрольная работа № 5***	1
	Глава III. Делимость натуральных чисел	
101—103	§ 25. Делители и кратные	3
104—107	§ 26. Делимость произведения	4
108—111	§ 27. Делимость суммы и разности чисел	4
112—115	§ 28. Признаки делимости на 2, 5, 10, 4 и 25	4
116—119	§ 29. Признаки делимости на 3 и 9	4
120	***Контрольная работа № 6***	1
121—124	§ 30. Простые числа. Разложение числа на простые множители	4
125, 126	§ 31. Наибольший общий делитель	2
127—129	§ 32. Взаимно простые числа. Признак делимости на произведение. Наименьшее общее кратное	3
130	***Контрольная работа № 7***	1
131, 132	Резерв	2

Окончание таблицы

№ урока	Тема	Число уроков
	Итого:	**51**
	IV четверть	
	Глава IV. Математика вокруг нас	
133—136	§ 33. Отношение двух чисел	4
137—140	§ 34. Диаграммы	4
141—144	§ 35. Пропорциональность величин	4
145—149	§ 36. Решение задач с помощью пропорций	5
150	***Контрольная работа № 8***	1
151—157	§ 37. Разные задачи	7
158, 159	§ 38. Первое знакомство с понятием вероятности	2
160, 161	§ 39. Первое знакомство с подсчетом вероятности	2
162—167	Повторение	7
168	***Итоговая контрольная работа***	1
169, 170	Резерв	2
	Итого:	**38**

Тематические контрольные работы

Контрольная работа №1

Вариант 1

1. Отметьте на координатной прямой числа: 2; −3,7; 3,5; −1,5.

Запишите:
а) наибольшее число;
б) наименьшее число;
в) число, имеющее наибольший модуль;
г) число, имеющее наименьший модуль.

2. Запишите число, противоположное данному:
а) 0,5; б) −7; в) 0.

3. Запишите $|x|$, если:

а) $-x = 5$; б) $x = -\frac{3}{7}$; в) $x = 0$.

•4. Сравните числа и их модули:

а) −5,8 и −0,1; б) $-\frac{1}{5}$ и $-\frac{3}{5}$.

•5. Вычислите:

а) $-\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right|$; б) $|-0{,}5| - \left|\frac{2}{5}\right|$.

Вариант 2

1. Отметьте на координатной прямой числа: −2; 2,5; 3; −4.
Запишите:
а) наибольшее число;
б) наименьшее число;
в) число, имеющее наибольший модуль;
г) число, имеющее наименьший модуль.

2. Запишите число, противоположное данному:

а) −10; б) 0; в) $\frac{7}{8}$.

3. Запишите $|x|$, если:

а) $x = \frac{4}{5}$; б) $x = 0$; в) $-x = -5{,}2$.

•4. Сравните числа и их модули:

а) −8,3 и −3,8; б) $-\frac{9}{16}$ и $-\frac{11}{16}$.

•5. Вычислите:

а) $|13{,}71| + |-4{,}05|$; б) $\left|\frac{1}{3}\right| - \left|-\frac{1}{6}\right|$.

Вариант 3

1. Отметьте на координатной прямой числа: $-4{,}5$; $-1{,}8$; $4\frac{1}{2}$; $3{,}2$.
   Запишите:
   а) наибольшее число;
   б) наименьшее число;
   в) число, имеющее наибольший модуль;
   г) число, имеющее наименьший модуль.

2. Запишите число, противоположное данному:

   а) 0; б) $-7{,}2$; в) $\frac{10}{19}$.

3. Запишите $|x|$, если:

   а) $x = 0$; б) $x = -\frac{8}{15}$; в) $-x = 3$.

●4. Сравните числа и их модули:

   а) $-84{,}7$ и $7{,}48$; б) $-\frac{8}{17}$ и $-\frac{15}{17}$.

●5. Вычислите:

   а) $|-0{,}82| - |-0{,}35|$; б) $\left|-\frac{17}{16}\right| - \left|\frac{5}{8}\right|$.

Вариант 4

1. Отметьте на координатной прямой числа: 4; -5; $1\frac{3}{4}$; $-1{,}75$.
   Запишите:
   а) наибольшее число;
   б) наименьшее число;
   в) число, имеющее наибольший модуль;
   г) число, имеющее наименьший модуль.

2. Запишите число, противоположное данному:
   а) -8; б) 0; в) $4{,}6$.

3. Запишите $|x|$, если:

   а) $x = \frac{5}{8}$; б) $-x = -10$; в) $x = 0$.

●4. Сравните числа и их модули:

а) 3,48 и −84,3; б) $-\frac{24}{27}$ и $-\frac{1}{27}$.

●5. Вычислите:

а) $\left|\frac{17}{24}\right| - \left|-\frac{3}{12}\right|$; б) $|-7{,}89| + |3{,}41|$.

Контрольная работа № 2

Вариант 1

1. Найдите значение выражения:

а) −8 + 5; в) −10 − 9;
б) 17 − 25; г) −45 + 60.

2. Вычислите:

а) $\frac{2}{3} + \frac{1}{6}$; б) $-\frac{1}{3} + \frac{2}{5}$; в) $-\frac{7}{9} + \frac{1}{6}$.

3. Найдите значение алгебраической суммы

$$-4{,}1 + (-8{,}3) - (-7{,}3) - (+1{,}9).$$

●4. В магазин завезли 700 кг овощей, которые были проданы за 3 дня. В первый день было продано 40% овощей, во второй — 58% остатка. Определите массу овощей, проданных в третий день.

●5. Предприниматель закупил партию сахара, которая была продана за три дня. В первый день было продано 36 ц, что составило 40% всей партии, во второй день — 35% остатка. Определите массу сахара, проданного в третий день.

Вариант 2

1. Найдите значение выражения:

а) −7 −15; в) −16 + 20;
б) 23 − 40; г) −9 + 3.

2. Вычислите:

а) $\frac{2}{3} - \frac{1}{6}$; б) $-\frac{1}{3} - \frac{2}{5}$; в) $\frac{3}{8} + \frac{1}{2}$.

3. Найдите значение алгебраической суммы

$$-8{,}9 + (+18) - (+1{,}1) - (-12).$$

●4. Туристический теплоход был в пути три дня. В первый день он прошел 210 км, что составило 35% всего пути, а во второй — 40% оставшегося расстояния. Сколько километров прошел теплоход в третий день?

●5. За три дня предприятием по производству пластиковой тары были проданы 5000 бутылок. В первый день продали 30% этого количества, а во второй — 70% остатка. Какое количество бутылок продано в третий день?

Вариант 3

1. Найдите значение выражения:

а) $1{,}8 - 2{,}2$; в) $-2{,}18 - 1{,}54$;
б) $-0{,}14 + 0{,}17$; г) $-7{,}8 + 5{,}6$.

2. Вычислите:

а) $-\frac{2}{3} + \frac{1}{6}$; б) $\frac{7}{9} - \frac{1}{6}$; в) $-\frac{3}{8} - \frac{1}{2}$.

3. Найдите значение алгебраической суммы

$$-(-5{,}4) + (-2{,}8) + 4{,}6 - (+15{,}2).$$

●4. За три часа работы бригада по уборке снега очистила 43 750 $м^2$ дорожного покрытия. За первый час было убрано 32% этой площади, а за второй — 46% оставшейся. Какая площадь была очищена за третий час работы?

●5. Предприниматель закупил ткань трех видов: шелк, шерсть и ситец. За шелк было уплачено 5760 р., что составило 45% общей стоимости товара. Из суммы, уплаченной за ситец и шерсть, 20% составила стоимость ситца. Определите стоимость шерсти.

Вариант 4

1. Найдите значение выражения:

а) $-6{,}4 + 2{,}4$; в) $-7{,}4 + 15{,}7$;
б) $-1{,}32 - 0{,}78$; г) $3{,}25 - 4{,}17$.

2. Вычислите:

а) $-\frac{2}{3} - \frac{1}{6}$; б) $-\frac{3}{8} + \frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{3} - \frac{2}{5}$.

3. Найдите значение алгебраической суммы

$$-9{,}7 - (-15{,}3) + (-0{,}3) + 14{,}7.$$

●4. На приобретение учебников по истории, биологии и географии школа затратила 32 400 р. За учебники по истории заплатили 28% этой суммы, а за учебники по биологии — 40% остатка. Определите стоимость учебников по географии.

•5. Котлован для бассейна был отрыт за три недели. За первую неделю вывезли 448 м^3 грунта, что составило 28% объема котлована. За вторую неделю вывезли 42% остального вынутого грунта. Каков объем грунта, вывезенного за третью неделю?

Контрольная работа № 3

Вариант 1

1. Вычислите:

а) $-0{,}4 \cdot 7{,}1$; б) $-\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)$; в) $\frac{7}{8} : \left(-\frac{5}{6}\right)$

2. Отметьте на координатной плоскости точки $A(-7; -2)$, $B(2; 4)$, $C(1; -5)$, $D(-3; -1)$.
Запишите координаты точки пересечения отрезка AB и прямой CD.

•3. Найдите значение выражения

$$(2{,}4 + 0{,}78) \cdot (-0{,}5) - (8{,}57 - 19{,}826) : 2{,}01.$$

•4. Дана аналитическая модель числового промежутка:

$$-4 < x < 3.$$

Постройте его геометрическую модель и составьте соответствующую символическую запись.

Вариант 2

1. Вычислите:

а) $2{,}4 \cdot (-0{,}8)$; б) $\frac{5}{7} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$; в) $\left(-\frac{4}{5}\right) : \left(-\frac{2}{7}\right)$.

2. Отметьте на координатной плоскости точки

$$A(-5; 1),\ B(5; 5),\ C(-2; 8),\ D(4; -7).$$

Запишите координаты точки пересечения отрезка AB и прямой CD.

•3. Найдите значение выражения

$$(4{,}3 - 6{,}58) \cdot 2{,}5 + (-16{,}8 + 70{,}98) : (-8{,}4).$$

•4. Дана аналитическая модель числового промежутка: $x \geqslant -4$. Постройте его геометрическую модель и составьте соответствующую символическую запись.

Вариант 3

1. Вычислите:

а) $0{,}7 \cdot (-2{,}8)$; б) $-\frac{3}{4} \cdot \frac{16}{21}$; в) $\left(-\frac{7}{9}\right) : \left(-\frac{14}{45}\right)$.

2. Отметьте на координатной плоскости точки $A(0; -10)$, $B(4; -2)$, $C(-7; 6)$, $D(3; 1)$.
Запишите координаты точки пересечения прямой AB и луча CD.

•3. Найдите значение выражения
$$-6{,}4 \cdot 2{,}05 + 0{,}72 \cdot 5{,}5 - 23{,}712 : (17{,}5 - 28{,}9).$$

•4. Дана аналитическая модель числового промежутка:
$$-3 \leqslant x \leqslant 4.$$
Постройте его геометрическую модель и составьте соответствующую символическую запись.

Вариант 4

1. Вычислите:

а) $1{,}2 \cdot (-0{,}75)$; б) $\left(-\frac{12}{19}\right) \cdot \frac{38}{45}$; в) $-\frac{15}{22} : \left(-\frac{5}{11}\right)$.

2. Отметьте на координатной плоскости точки $A(-9; 0)$, $B(5; -6)$, $C(8; 5)$, $D(2; -1)$.
Запишите координаты точки пересечения отрезка AB и луча CD.

•3. Найдите значение выражения
$$8{,}5 \cdot (4{,}1 - 9{,}58) - 7{,}32 : (-2{,}4) + (-4{,}2) : 2{,}8.$$

•4. Дана аналитическая модель числового промежутка:
$$x < 5.$$
Постройте его геометрическую модель и составьте соответствующую символическую запись.

Контрольная работа № 4

Вариант 1

1. Упростите выражение $6(3a - b) - 2(a - 3b)$.
2. Решите уравнение $10 - 2(3x + 5) = 4(x - 2)$.
3. В городе два овощных склада. По ошибке на один из них завезли в 4 раза больше картофеля, чем на другой. Чтобы уравнять количество картофеля на обоих складах, пришлось с первого

склада перевезти на второй 630 т картофеля. Сколько тонн картофеля было завезено на каждый склад первоначально?

•4. Вычислите:

$$\left(2\frac{1}{3} - 3\frac{3}{8}\right) \cdot 4\frac{4}{5} + 2\frac{4}{9}.$$

•5. Цена яблок — 30 р., а цена груш — 40 р. за 1 кг.

а) На сколько процентов груши дороже яблок?
б) На сколько процентов яблоки дешевле груш?

Вариант 2

1. Упростите выражение $5(4x - y) - 3(y + 2x)$.
2. Решите уравнение $7(x - 5) + 1 = 2 - 3(2x - 1)$.
3. В результате ошибки при комплектовании составов пассажирских поездов один состав оказался в полтора раза длиннее другого. Чтобы уравнять число вагонов в обоих поездах, от первого состава отцепили 4 вагона и прицепили их ко второму составу. Сколько вагонов было в каждом составе первоначально?

•4. Вычислите:

$$4\frac{3}{5} : \left(1\frac{2}{3} - 3\frac{1}{5}\right) + 1\frac{3}{8}.$$

•5. Зимние ботинки стоят 2000 р., а осенние — 1500 р.

а) На сколько процентов зимние ботинки дороже осенних?
б) На сколько процентов осенние ботинки дешевле зимних?

Вариант 3

1. Упростите выражение $-2(8a + 7b) + 4(a - 2b)$.
2. Решите уравнение $5(2x - 3) - 2(3 - 2x) = 15 - 6(x + 1)$.
3. Расстояние между двумя городами автомобиль преодолевает за 3 ч. Если бы его скорость была на 15 км/ч больше, то на этот путь ему потребовалось бы 2,4 ч. Определите скорость автомобиля и расстояние между городами.

•4. Вычислите:

$$1\frac{7}{12} + 5\frac{6}{7} : \left(2\frac{2}{5} - 3\frac{4}{7}\right).$$

•5. Цена карамели — 75 р., а цена шоколадных конфет — 225 р. за 1 кг.

а) На сколько процентов шоколадные конфеты дороже карамели?
б) На сколько процентов карамель дешевле шоколадных конфет?

Вариант 4

1. Упростите выражение $9(2x - 3y) - 8(y - x)$.
2. Решите уравнение $7(4 - 3x) - (8{,}5 - x) = 4 - 3(x - 8)$.
3. Расстояние между двумя городами автомобиль преодолевает за 3 ч, а автобус, скорость которого на 18 км/ч меньше — за 3,75 ч. Определите скорость автомобиля и расстояние между городами.

•4. Вычислите: $1\frac{8}{11} + 2\frac{2}{19} \cdot \left(1\frac{4}{5} - 2\frac{3}{4}\right)$.

•5. Стоимость железнодорожного билета — 1800 р., а билета на самолет (по тому же маршруту) — 2700 р.
   а) На сколько процентов билет на самолет дороже железнодорожного билета?
   б) На сколько процентов железнодорожный билет дешевле билета на самолет?

Контрольная работа № 5

Вариант 1

1. Считая, что $\pi = 3{,}14$, определите длину окружности и площадь круга, если радиус $R = 5$ см.
2. Кукурузой занято 84 га, что составляет $\frac{2}{7}$ площади всего поля. Определите площадь поля.
3. Площадь поля — 84 га, из них $\frac{2}{7}$ занято картофелем. Определите площадь, занятую картофелем.

•4. В первый день Маша прочитала 36% книги, а во второй — $\frac{5}{8}$ остатка, после чего ей осталось прочитать 48 страниц. Сколько страниц в книге?

•5. Вычислите: $8\frac{3}{4} \cdot 2\frac{4}{7} - 10\frac{1}{8} \cdot 3\frac{1}{3}$.

Вариант 2

1. Считая, что $\pi = 3{,}14$, определите длину окружности и площадь круга, если радиус $R = 7$ см.
2. Площадь поля — 75 га, из них $\frac{3}{5}$ занято картофелем. Определите площадь, занятую картофелем.

3. Картофелем занято 75 га, что составляет $\frac{3}{5}$ площади всего поля. Определите площадь поля.

●4. За первый месяц со склада было вывезено $\frac{4}{7}$ хранившегося там запаса муки, а за второй — 15% оставшейся муки, после чего на складе осталось 76,5 т муки. Сколько муки было заложено на хранение на склад?

●5. Вычислите: $-10\frac{2}{7} : 1\frac{13}{35} + 3\frac{9}{11} : 1\frac{1}{55}$.

Вариант 3

1. Считая, что $\pi = 3{,}14$, определите длину окружности и площадь круга, если радиус $R = 2{,}5$ см.

2. За день турист прошел 24 км, что составило $\frac{3}{8}$ длины намеченного маршрута. Определите длину маршрута.

3. Бригада получила задание отремонтировать 24 км дорожного покрытия. За неделю было выполнено $\frac{3}{8}$ этой работы. Сколько километров дороги отремонтировала бригада за неделю?

●4. При подготовке к математической олимпиаде Миша решал задачи. В первую неделю он решил 55% всех задач, во вторую — $\frac{5}{9}$ остатка, а в третью — 36 задач. Сколько задач решил Миша при подготовке к олимпиаде?

●5. Вычислите: $2\frac{1}{52} \cdot \frac{26}{49} - 3\frac{3}{7} : 1\frac{5}{11}$.

Вариант 4

1. Считая, что $\pi = 3{,}14$, определите длину окружности и площадь круга, если радиус $R = 4{,}5$ см.

2. Банка, объем которой 630 $см^3$, заполнена водой на $\frac{7}{9}$ своего объема. Найдите объем воды в банке.

3. В банку налито 630 $см^3$ воды, что составляет $\frac{7}{9}$ всего объема банки. Найдите объем банки.

●4. Бригада по озеленению за первую неделю работы посадила 16% саженцев, за вторую — $\frac{3}{5}$ от числа оставшихся саженцев, а за третью — остальные 504 саженца. Сколько саженцев посадила бригада за три недели?

•5. Вычислите: $-3\frac{5}{21} : 1\frac{22}{63} + 1\frac{3}{35} : 1\frac{1}{56}$.

Контрольная работа № 6

Вариант 1

1. Даны числа 1724, 3965, 7200, 1134.

   Выберите те из них, которые делятся:
   а) на 2;
   б) на 3;
   в) на 5.

2. Используя признаки делимости, сократите дробь:

   а) $\frac{324}{438}$; б) $\frac{360}{870}$.

3. Можно ли сделать три одинаковых букета из 42 тюльпанов, 21 нарцисса и 6 веточек мимозы?

•4. Найдите частное: $18\,ab : 6a$.

•5. На двух складах хранилось 450 т овощей. После того как с одного склада перевезли на другой 75 т овощей, на втором складе овощей стало в 2 раза больше, чем на первом. Сколько тонн овощей было на каждом складе первоначально?

Вариант 2

1. Даны числа 8141, 3615, 4833, 3240.

   Выберите те из них, которые делятся:
   а) на 3;
   б) на 5;
   в) на 9.

2. Используя признаки делимости, сократите дробь:

   а) $\frac{222}{258}$; б) $\frac{380}{620}$.

3. Имеется 18 карандашей, 36 ручек и 15 блокнотов. Можно ли из них сделать 9 одинаковых наборов?

•4. Найдите частное: $15xy : 5x$

•5. В двух кабинетах было 68 стульев. После того как из одного кабинета в другой перенесли 9 стульев, в первом кабинете стульев оказалось в 3 раза меньше, чем во втором. Сколько стульев было в каждом кабинете первоначально?

Вариант 3

1. Даны числа 4875, 2520, 1270, 1719.
Выберите те из них, которые делятся:
а) на 5;
б) на 9;
в) на 10.

2. Используя признаки делимости, сократите дробь:
а) $\frac{126}{318}$; б) $\frac{330}{390}$.

3. Купили 25 белых роз, красных — в 3 раза больше, а желтых — на 15 больше, чем белых. Можно ли из этих цветов составить 5 одинаковых букетов?

•4. Найдите частное: $21mn : 7m$

•5. В двух библиотеках имелось 792 книги. После того как из одной библиотеки передали в другую 60 книг, во второй библиотеке книг стало в 2 раза больше, чем в первой. Сколько книг было в каждой библиотеке первоначально?

Вариант 4

1. Даны числа 1710, 1919, 4155, 7428.
Выберите те из них, которые делятся:
а) на 2;
б) на 3;
в) на 10.

2. Используя признаки делимости, сократите дробь:
а) $\frac{174}{342}$; б) $\frac{340}{460}$.

3. Имеется 20 синих карандашей, красных — в 2 раза больше, а простых — на 5 больше, чем синих. Можно ли из них составить 10 одинаковых наборов?

•4. Найдите частное: $20cd : 4d$.

•5. В двух коробках было 80 пар носков. После того как из одной коробки переложили в другую 14 пар носков, оказалось, что в ней количество носков стало в 3 раза меньше, чем во второй. Сколько пар носков было в каждой коробке первоначально?

Контрольная работа № 7

Вариант 1

1. Разложите на простые множители числа: а) 126; б) 84.
2. Найдите: а) НОД(126; 84); б) НОК(126; 84).
3. Сократите дробь $\frac{84}{126}$.
•4. Вычислите: $\frac{17}{126} + \frac{11}{84}$.
•5. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{7}{15} + \frac{3}{10}\right) \cdot 2\frac{14}{23} + 1\frac{6}{57} : \left(\frac{7}{19} - \frac{30}{57}\right).$$

Вариант 2

1. Разложите на простые множители числа: а) 105; б) 924.
2. Найдите: а) НОД(105; 924); б) НОК(105; 924).
3. Сократите дробь $\frac{105}{924}$.
•4. Вычислите: $\frac{2}{105} - \frac{5}{924}$.
•5. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{5}{18} + \frac{7}{12}\right) \cdot 2\frac{10}{31} + 1\frac{13}{51} : \left(\frac{4}{17} - \frac{20}{51}\right).$$

Вариант 3

1. Разложите на простые множители числа: а) 630; б) 252.
2. Найдите: а) НОД(630; 252); б) НОК(630; 252).
3. Сократите дробь $\frac{252}{630}$.
•4. Вычислите: $\frac{19}{252} + \frac{11}{630}$.
•5. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{5}{14} + \frac{10}{21}\right) \cdot 3\frac{3}{5} + 1\frac{1}{6} : \left(\frac{13}{22} - \frac{25}{33}\right).$$

Вариант 4

1. Разложите на простые множители числа: а) 495; б) 825.

2. Найдите: а) НОД(495; 825); б) НОК(495; 825).

3. Сократите дробь $\frac{495}{825}$.

•4. Вычислите: $\frac{2}{495} - \frac{7}{825}$.

•5. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{7}{16} + \frac{5}{12}\right) \cdot 1\frac{7}{41} + 1\frac{1}{39} : \left(\frac{4}{13} - \frac{20}{39}\right).$$

Контрольная работа № 8

Вариант 1

1. Для изготовления сплава взяли золото и серебро в отношении 2 : 3. Определите, сколько килограммов каждого металла в слитке этого сплава массой 7,5 кг.

2. Перед посадкой семена моркови смешивают с песком в отношении 2 : 5. Определите массу семян, если песка потребовалось 200 г.

3. Для изготовления 12 деталей требуется 0,48 кг металла. Сколько деталей можно изготовить из 0,8 кг металла?

•4. Вычислите: $\left(\frac{3}{7} - \frac{16}{21}\right) \cdot 2\frac{1}{7} + \left(\frac{11}{15} + 0{,}3\right) : 12\frac{2}{5}$.

•5. Двигаясь со скоростью 64 км/ч, автобус прибыл в пункт назначения через 3,5 ч. На сколько меньше времени ему потребовалось бы на этот путь, если бы он двигался со скоростью 89,6 км/ч?

Вариант 2

1. Для изготовления 42 кг земляной смеси использовали песок и чернозем в отношении 2 : 5. Определите массу песка и массу чернозема в этой смеси.

2. Для приготовления опары смешали молоко и муку в отношении 3 : 2. Сколько взяли молока (в килограммах), если муки было взято 5 кг?

3. Расход бензина на 760 км составил 49,4 л. Сколько бензина потребуется на 1140 км?

•4. Вычислите: $\left(\frac{3}{8} - \frac{7}{12}\right) \cdot 3{,}6 + \left(\frac{5}{18} + \frac{2}{27}\right) : 1\frac{11}{27}$.

•5. 18 самосвалов одинаковой грузоподъемности могут вывезти грунт за 200 поездок. Сколько самосвалов надо добавить, чтобы сократить число поездок до 150?

Вариант 3

1. Для изготовления смеси взяли чай двух сортов в отношении 3 : 1. Найдите массу чая каждого сорта в 54 кг смеси.

2. Для опрыскивания растений в воде растворяют медный купорос в отношении 1 : 500. Сколько литров воды потребуется, чтобы развести 20 г медного купороса (масса 1 л воды — 1 кг)?

3. Для окрашивания 72 м^2 поверхности требуется 10,8 л краски. Сколько краски потребуется для окрашивания 126 м^2 поверхности?

•4. Вычислите: $\left(\frac{5}{9} - \frac{11}{12}\right) \cdot 3\frac{9}{13} + \left(0{,}3125 + \frac{5}{24}\right) \cdot 4\frac{4}{5}$.

•5. Для расфасовки крупы понадобилось 50 пакетов вместимостью 0,9 кг. На сколько больше пакетов вместимостью 0,5 кг потребуется для расфасовки того же количества муки?

Вариант 4

1. Для изготовления начинки для пирога смешали курагу с черносливом в отношении 4 : 1. Определите массу каждого компонента в 37 кг начинки.

2. Для приготовления молочного коктейля смешивают молоко с мороженым в отношении 5 : 2. Сколько потребуется мороженого на 3 л молока (считаем, что масса 1 л молока — 1 кг)?

3. Для изготовления 15 платьев требуется 48 м ткани. Сколько ткани потребуется на изготовление 22 таких же платьев?

•4. Вычислите: $\left(\frac{3}{4} - \frac{4}{5}\right) \cdot 7{,}8 + \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{7}\right) \cdot \frac{7}{13}$.

•5. Двигаясь со скоростью 75 км/ч, поезд прибыл в пункт назначения через 4,2 ч. На сколько поезд должен увеличить скорость, чтобы сократить время в пути до 3 ч?

Итоговая контрольная работа за курс 6-го класса

Вариант 1

1. Вычислите: $\frac{7}{9}+\frac{5}{6}-2\frac{7}{12}$.
2. Выполните действия: $\frac{28}{33}\cdot\frac{45}{98}:2\frac{3}{11}$.
3. Упростите выражение $5(3+2x)-2(12-8x)$.
4. В одной цистерне в 4 раза меньше нефти, чем во второй. После того как в первую цистерну добавили 20 т нефти, а из второй откачали 19 т, нефти в обеих цистернах стало поровну. Сколько тонн нефти было в каждой цистерне первоначально?
5. Туристы были в пути 3 дня. В первый день они преодолели 36% всего расстояния, во второй — 52% оставшегося, а в третий — 54 км. Найдите длину всего пути.

Вариант 2

1. Вычислите: $-\frac{7}{8}-1\frac{9}{20}+\frac{3}{10}$.
2. Выполните действия: $\frac{4}{51}:1\frac{2}{17}\cdot\frac{57}{64}$.
3. Упростите выражение $-7(6x+3)-5(4-x)$.
4. На одном складе было в 2,5 раза меньше овощей, чем на втором. После того как на первый склад завезли 180 т овощей, а на второй — 60 т, овощей на обоих складах стало поровну. Сколько тонн овощей было на каждом складе первоначально?
5. Поле площадью 18 га вспахали за 3 дня. В первый день вспахали 35% всего поля, а во второй — 40% оставшейся площади. Сколько гектаров вспахали в третий день?

Вариант 3

1. Вычислите: $-2\frac{5}{12}+\frac{11}{18}-\frac{1}{6}$.
2. Выполните действия: $\frac{11}{40}:1\frac{7}{26}\cdot\frac{35}{39}$.
3. Упростите выражение $-3(4-2x)+7(x-2)$.
4. В одном мешке в полтора раза больше муки, чем во втором. После того как из первого мешка достали 35 кг муки, а из второго — 17 кг, муки в обоих мешках стало поровну. Сколько килограммов муки было в каждом мешке первоначально?

5. Картофель, закупленный предпринимателем, был продан в три магазина. В первый магазин было продано 25% всего картофеля, во второй — 60% остатка, а в третий — остальные 1,5 т. Определите массу картофеля, закупленного предпринимателем.

Вариант 4

1. Вычислите: $\frac{3}{14} - 1\frac{8}{21} + \frac{5}{7}$.

2. Выполните действия: $\frac{14}{55} \cdot \frac{33}{50} : 1\frac{24}{25}$.

3. Упростите выражение $4(3x - 1) - 8(2x + 5)$.

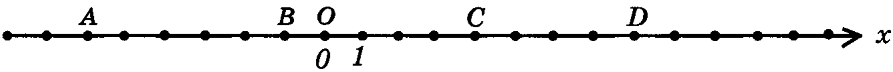
4. На одной стоянке было в 3 раза меньше автомашин, чем на второй. После того как на первую стоянку приехали 18 автомашин, а со второй — уехали 10, автомашин на обеих стоянках стало поровну. Сколько автомашин было на каждой стоянке первоначально?

5. На выполнение домашних заданий по математике, литературе и географии Митя потратил 1 ч 40 мин. На математику у него ушло 40% этого времени, на литературу — 45% остального. Сколько времени Митя выполнял задание по географии?

Задачи повышенной трудности

(решения, указания, методические советы)

156 (163). Начало координат перенесли на 4 единичных отрезка влево.



а) Какими стали координаты точек A, B, C, D, как они изменились?

б) Есть ли на прямой точки, координаты которых уменьшились?

в) Как изменились модули координат точек A, B, C, D?

г) Есть ли на прямой точки, модули координат которых не изменились?

Решение.

а) Координаты отмеченных точек до переноса начала координат:

$$A(-6),\ B(-1),\ C(4),\ D(8).$$

Новые координаты:

$$A(-2),\ B(3),\ C(8),\ D(12).$$

Координаты отмеченных точек увеличились на 4.

б) Сдвиг начала координат на четыре единичных отрезка влево равнозначен увеличению координаты любой точки на 4. Значит, на прямой нет точек, координаты которых уменьшились.

в) Модули координат отмеченных точек до переноса начала координат:

$$A: |-6| = 6,\ B: |-1| = 1,\ C: |4| = 4,\ D: |8| = 8.$$

Модули новых координат:

$$A: |-2| = 2,\ B: |3| = 3,\ C: |8| = 8,\ D: |12| = 12.$$

Модули координат отмеченных точек изменились следующим образом:

A: уменьшился на 4;
B: увеличился на 2;
C: увеличился на 4;
D: увеличился на 4.

г) *Замечание.* Опыт показывает, что некоторые учителя неправильно понимают поставленный вопрос. В тексте спрашивается: «Есть ли на прямой точки...» Почему-то при ответе на этот вопрос рассматриваются только отмеченные точки, и ответ дается отрицательный. Но если бы вопрос касался только отмеченных точек, он был бы сформулирован так: «Есть ли среди отмеченных точек такие, модули координат которых не изменились?» Поэтому, отвечая на поставленный вопрос, следует рассматривать все точки прямой.

Точка, координата которой до переноса была равна −2, после переноса стала иметь координату 2. Это и есть та точка, модуль координаты которой не изменился.

304 (313). Бригада рыбаков получила от двух банков ссуду на приобретение холодильного оборудования в размере 250 000 р.: от одного — под 5%, а от другого — под 7% годовых. Всего за год рыбаки должны уплатить 15 500 р. процентных денег. Сколько денег взято у каждого банка?

Решение.

Приведем арифметический способ решения этой задачи.

1) Сколько денег уплатили бы рыбаки, если бы всю сумму они взяли под 7%?

$$250\,000 : 100 \cdot 7 = 17\,500 \text{ (р.)}.$$

2) На сколько меньше денег уплатили рыбаки?

$$17\,500 - 15\,500 = 2000 \text{ (р.)}$$

Откуда взялся этот перерасход? Дело в том, что первый банк дал ссуду под 5% годовых, а мы считали, что было 7% годовых. На лишние 2% и приходится перерасход в 2000 р. Значит, 2000 р. — это 2% от кредита, предоставленного первым банком.

3) Какую ссуду дал первый банк (под 5% годовых)?

$$2000 : 2 \cdot 100 = 100\,000 \text{ (р.)}$$

4) Какую ссуду дал второй банк?

$$250\,000 - 100\,000 = 150\,000 \text{ (р.)}$$

Ответ: первый банк дал 100 000 р., второй — 150 000 р.

575 (592). На столе лежал расколотый арбуз массой 10 кг, содержащий 99% воды. Через некоторое время часть воды испарилась, и ее процентное содержание в арбузе понизилось до 96%. Найдите новую массу арбуза.

Решение.

1) Найдем массу сухого вещества в арбузе.

$100 - 99 = 1(\%)$ — процентное содержание сухого вещества в свежем арбузе;

$10\,000 : 100 = 100(\text{г})$ — масса сухого вещества.

2) $100 - 96 = 4(\%)$ — процентное содержание сухого вещества в арбузе после испарения части воды;

3) $100 : 4 \cdot 100 = 2500 = 2{,}5$ (кг) — новая масса арбуза.

Ответ: 2,5 кг.

Некоторые учителя допускают ошибки при решении этой задачи. Приведем примеры неправильных решений и прокомментируем их.

I вариант.

«Решение.

$$\begin{array}{l|lcr|l} \downarrow & 10 \text{ кг} & — & 99\% & \downarrow \\ & x \text{ кг} & — & 96\% & \end{array}$$

Пусть x кг — новая масса арбуза. Так как зависимость между величинами прямо пропорциональная, то $\dfrac{10}{x} = \dfrac{99}{96}$,

$$x = \frac{96 \cdot 10}{99}; \quad x \approx 9{,}7.$$

Значит, новая масса $\approx 9{,}7$.

Ответ: 9,7 кг».

Комментарий.

Масса арбуза и процентное содержание воды не являются пропорциональными величинами, поскольку масса сухого вещества при испарении остается неизменной. Чтобы проиллюстрировать это, рассмотрим упрощенный (в вычислительном плане) вариант ситуации, данной в задаче.

Пусть масса арбуза — 10 кг, масса воды в нем — 8 кг (80%), тогда масса сухого вещества соответственно — 2 кг (20%). Если масса арбуза и процентное содержание воды — пропорциональные величины, то при уменьшении массы арбуза в 2 раза (10 кг : 2 = 5 кг) процентное содержание воды должно также уменьшиться в 2 раза (80% : 2 = 40%). Проверим это. Предположим, что после испарения части воды масса арбуза стала равной 5 кг. Определим процентное содержание воды в «высохшем» арбузе. Поскольку сухое вещество не испаряется, его масса по-прежнему равна 2 кг. Значит, масса воды составляет 3 кг, т. е. 60% (а не 40%!) от 5 кг. А это и означает, что масса арбуза и процентное содержание воды не являются пропорциональными величинами.

II вариант.

«Решение (цитируется дословно. — *Авт.*).

1) Чему равна масса содержащейся воды в арбузе?

$$\begin{aligned} 10 \text{ кг} &\text{ —— } 100\% \\ x \text{ кг} &\text{ —— } 99\% \end{aligned}$$

$$x = \frac{10 \cdot 99}{100} = 9{,}9 \text{ (кг)}$$

2) Какой стала масса воды, содержащейся в арбузе, после испарения?

$$\begin{aligned} 9{,}9 \text{ кг} &\text{ —— } 99\% \\ y \text{ кг} &\text{ —— } 96\% \end{aligned}$$

$$y = \frac{9{,}9 \cdot 96}{99} = 9{,}6 \text{ (кг)}$$

3) Сколько воды испарилось?

$$9 - 9{,}6 = 0{,}3 \text{ (кг)}$$

4) Чему равна новая масса арбуза?

$$10 - 0{,}3 = 9{,}7 \text{ (кг)}$$

Ответ: 9,7 кг».

Комментарий.

Причина ошибки в том, что решение задачи не начато с ответов на вопросы: «Какая величина принята за 100%, известна ли эта величина?», «Какая величина принята за 100% в первом случае, какая — во втором?» В данной задаче сначала за 100% принимается масса свежего арбуза, который содержит 99% воды, а затем — масса «высушенного» арбуза, и 96% воды содержится именно в этом, «высушенном» арбузе. Фраза: «...ее процентное содержание в арбузе понизилось до 96%» — означает, что в «высохшем» арбузе масса воды составляет 96%. Поэтому во втором действии (II вариант) находится не то, «какой стала масса воды, содержащейся в арбузе, после испарения», а масса девяноста шести процентов воды в свежем арбузе.

Решая задачи на проценты, в которых речь идет о свежих и сухих фруктах, свежих и сухих грибах и т. п., как правило, следует найти массу сухого вещества, которая остается неизменной. В задачах с другими подобными сюжетами также следует определить, что остается неизменным.

Замечание. Решение задач № 590 (608) и 591 (609), как правило, не вызывает затруднений. Однако при записи ответов часто возникает путаница, поэтому мы полностью приводим решения и ответы.

590 (608). В Москве в 2000 году стоимость проезда на автобусе была 4 р., а в Подольске — 3 р. На сколько процентов в 2000 году проезд на автобусе в Москве был дороже, чем в Подольске? На сколько процентов в 2000 году проезд на автобусе в Подольске был дешевле, чем в Москве?

Решение.

1) $4 - 3 = 1$ (р.)

2) 3 р. —— 100%

1 р. —— $33\frac{1}{3}\%$

3) 4 р. —— 100%

1 р. —— 25%

Ответ: проезд на автобусе в Москве дороже, чем в Подольске, на $33\frac{1}{3}\%$; проезд на автобусе в Подольске дешевле, чем в Москве на 25%.

591 (609). В результате дефолта (так называется экономический кризис, который случился в России в 1998 г.) цены на импортные товары выросли примерно в 5 раз. До дефолта кроссовки стоили 200 р. На сколько процентов новая цена кроссовок выше старой? На сколько процентов старая цена кроссовок ниже новой? Закончите предложение: «В результате дефолта цены в среднем выросли на ...%».

Решение.

1) $200 \cdot 5 = 1000$ (р.) — новая цена кроссовок;

2) 1000 – 200 = 800 (р.) — на столько подорожали кроссовки;
3) 200 р. —— 100%
   800 р. —— 400%
4) 1000 р. —— 100%
   800 р. —— 80%

Ответ: новая цена выше старой на 400%; старая цена ниже новой на 80%; «В результате дефолта цены в среднем выросли на 400%».

592 (610). В городе N численность населения на 20% превышает численность населения в городе M. На сколько процентов число жителей города M меньше числа жителей города N?

Решение.

Пусть в городе M живет 100 человек. Тогда в городе N живет 120 человек. Требуется сравнить число жителей города M с числом жителей города N. За 100% принимают ту величину, с которой сравнивают. Поэтому за 100% принимаем число жителей города N — 120 человек.

120 —— 100%
1,2 —— 1%

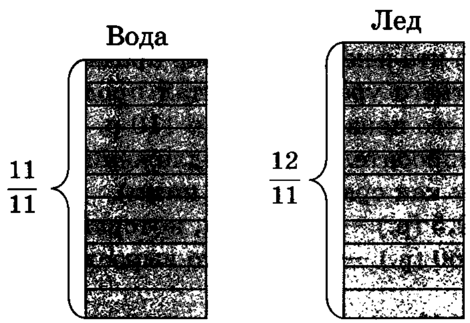
Определим, сколько процентов приходится на 20 человек:
20 : 1,2 ≈ 16,67(%).

Ответ: численность населения в городе M примерно на 16,67% меньше, чем в городе N.

688 (709). Вода при замерзании увеличивается в объеме на $\frac{1}{11}$ часть. На какую часть своего объема уменьшается лед при превращении в воду?

Решение.

I способ. Рассмотрим рисунок:



Из него видно, что при таянии лед уменьшается на $\frac{1}{12}$ своего объема.

II способ. Примем объем воды за 1. Тогда объем льда, полученного при ее замерзании, будет равен $1\frac{1}{11}$. Теперь возьмем лед в объеме 1. Определим объем воды, которая получится, когда этот лед растает. Объемы льда и воды — пропорциональные величины:

Вода		Лед
1	—	$1\frac{1}{11}$
x	—	1

$$x = \frac{1 \cdot 1}{1\frac{1}{11}} = 1 : \frac{12}{11} = \frac{11}{12}$$

Итак, если взять лед, объем которого составляет 1, то объем воды, полученной при его таянии, будет равен $\frac{11}{12}$. Значит, при таянии лед уменьшается в объеме на $1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$.

Ответ: на $\frac{1}{12}$ часть своего объема уменьшается лед при превращении в воду.

689 (710). В урожайное время года (осенью) цены на овощи понизились в среднем на 50%, а к зиме они повысились на 10% по сравнению с прошлогодними ценами. На сколько процентов подорожали овощи по сравнению с осенью?

Решение.

И в первой и во второй частях первого предложения за 100% приняты цены прошлого года, так как в каждом случае сравнение делается именно с этими ценами.

Предположим, что некоторый товар продавался по 100 р. Тогда осенью (после летнего урожая) он стал продаваться по 50 р. На следующую зиму его цена выросла до 110 р.

Во втором (вопросительном) предложении за 100% приняты осенние цены (так как сравниваем с ними).

1) 50 : 100 = 0,5 (р.) — величина, которая приходится на 1%;

2) 110 – 50 = 60 (р.) — на столько выросла цена по сравнению с осенью;

3) 60 : 0,5 = 120 (%) — на столько процентов зимняя цена выше осенней.

Ответ: по сравнению с осенью овощи подорожали на 120%.

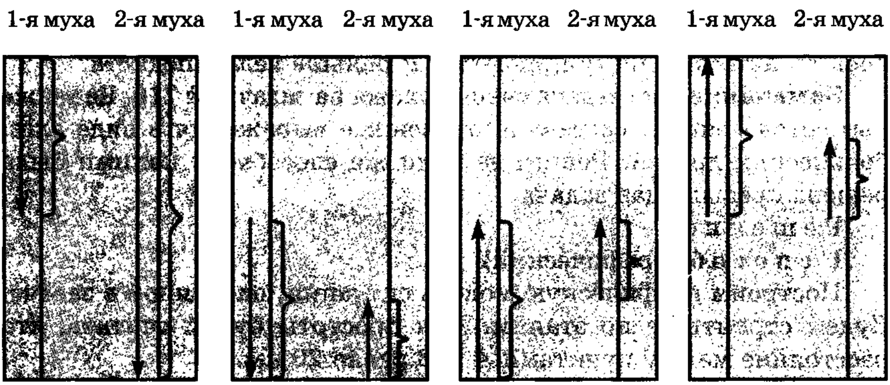
695 (716). От потолка комнаты вертикально вниз по стене одновременно поползли две мухи. Спустившись до пола, каждая из них поползла обратно. Первая муха ползла все время с постоянной скоростью, а вторая поднималась вдвое медленнее, а спускалась вдвое быстрее первой. Какая муха быстрее приползла обратно?

Замечание. Чаще всего учителя решают эту задачу, обозначив скорость одной из мух x, а расстояние от пола до потолка — S (или принимают его за 1). В этом случае в ходе решения задачи требуется производить действия с алгебраическими дробями, т. е. с дробями, содержащими переменную в знаменателе. Ясно, что этот путь не для 6-го класса.

Решение.

I способ (графический).

Построим графическую модель ситуации, описанной в задаче. Будем строить ее по этапам, выделяя расстояние, пройденное каждой мухой на этом этапе (за один и тот же промежуток времени).



I этап. Когда 2-я муха доползет до пола, 1-я муха будет только на полпути.

II этап. К тому моменту, когда 1-я муха доползет до пола, 2-я муха проползет четверть пути к потолку.

III этап. К тому моменту, когда 2-я муха доползет до середины, 1-я муха догонит ее.

IV этап. Когда 1-я муха приползет обратно, 2-й мухе останется преодолеть еще четверть пути.

II способ (аналитический).

Обозначим время, затраченное первой мухой на путь от потолка до пола, буквой t. Тогда $2t$ — время, которое она затратила на весь путь.

Вторая муха вниз двигалась вдвое быстрее, поэтому время, которое у нее ушло на путь от потолка до пола, равно $\frac{t}{2}$. Обратно она двигалась вдвое медленнее, поэтому время, которое она потратила на путь от пола до потолка, составляет $2t$, а на весь путь — $2t + \frac{t}{2}$.

Сравнивая выражения $2t$ и $2t + \frac{t}{2}$, видим, что первая муха приползет быстрее.

Ответ: первая муха приползет быстрее.

III способ (логический).

Вторая муха от пола до потолка ползет вдвое медленнее первой. Пока она ползет, первая муха успеет проделать путь вдвое больший, т. е. от потолка до пола и обратно. А второй мухе предстоит еще ползти (хотя и быстро) от потолка до пола.

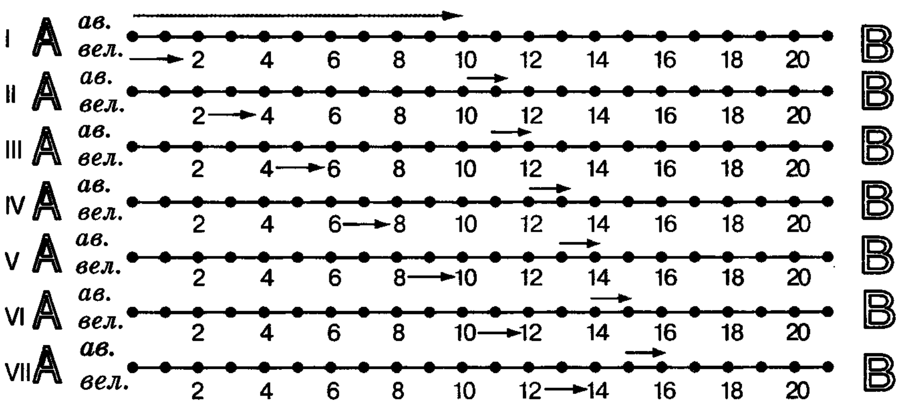
1049 (1074). Из пункта A в пункт B одновременно выехали автомобилист и велосипедист, причем скорость автомобилиста в 5 раз превышала скорость велосипедиста. Однако на полпути автомобиль сломался, и далее автомобилист до пункта B добирался пешком со скоростью, вдвое меньшей скорости велосипедиста. Удалось ли автомобилисту прибыть в B раньше велосипедиста?

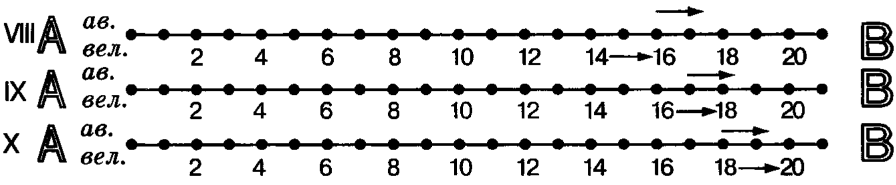
Замечание. Эта задача очень похожа на задачу № 716. Ее также пытаются решать, составляя буквенные выражения в виде алгебраических дробей. Решим ее теми же способами, какими была решена предыдущая задача.

Решение.

I способ (графический).

Построим графическую модель ситуации, описанной в задаче. Будем строить ее по этапам. Для простоты будем считать, что расстояние между пунктами A и B равно 20 км.





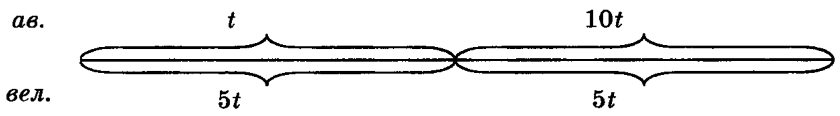
I этап. Полпути — это 10 км. Поскольку скорость велосипедиста в 5 раз меньше, он и проехать успел в 5 раз меньше, т. е. 2 км.

II — X этапы. На каждом из этих этапов за то время, пока автомобилист проходил 1 км, велосипедист успевал проехать 2 км. Поэтому расстояние между ними постоянно сокращалось, и на IX этапе велосипедист догнал автомобилиста, а на X — обогнал его.

Заметим, что при разборе этой задачи в классе, конечно, не следует делать 10 рисунков. Все этапы можно показать на одном рисунке, используя для стрелок, обозначающих передвижение велосипедиста и автомобилиста, мел разных цветов. Еще лучше, если у учителя имеется возможность использовать компьютер, а именно слайды, изготовленные в программе Microsoft Power Point.

II способ (аналитический).

Здесь также целесообразно использовать рисунок:



Обозначим время, которое понадобилось автомобилисту на преодоление первой половины пути, буквой t. Поскольку велосипедист ехал в 5 раз медленнее, ему понадобилось на этот же путь в 5 раз больше времени, т. е. $5t$. На вторую половину пути велосипедисту понадобилось столько же времени, сколько на первую, так как он ехал с постоянной скоростью $5t$. Что же касается автомобилиста, то он вторую половину пути двигался в 2 раза медленнее велосипедиста, значит, и времени ему понадобилось в 2 раза больше, т. е. $10t$.

Итак, на весь путь велосипедисту понадобилось $5t + 5t = 10t$, а автомобилисту понадобилось $t + 10t = 11t$.

$11t > 10t$, значит, автомобилист добирался до B дольше, чем велосипедист.

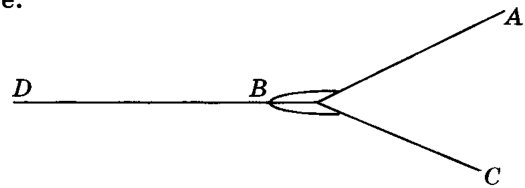
Ответ: автомобилисту не удалось прибыть в B раньше велосипедиста.

Замечание. Здесь также можно применить логический способ рассуждений, как в предыдущей задаче. Советуем вам не форсировать события, не навязывать учащимся III способ решения уже в задаче о мухах, а показать его (если никто из детей не додумается самостоятельно) после решения второй задачи — для обеих задач сразу.

1051 (1076). Сделайте рисунок, опровергающий утверждение:

а) если луч образует со сторонами угла равные углы, то он является биссектрисой этого угла.

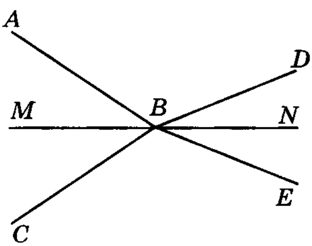
Решение.



Луч BD образует со сторонами угла ABC равные углы, но он не является биссектрисой этого угла.

б) если два угла имеют общую вершину, а их биссектрисы вместе составляют прямую, то эти углы вертикальные.

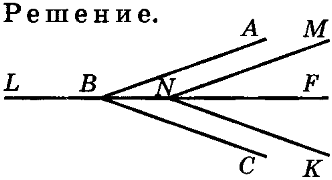
Решение.



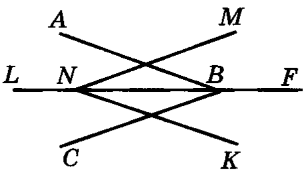
Углы ABC и DBE имеют общую вершину, а их биссектрисы BM и BN вместе составляют прямую, но эти углы не являются вертикальными.

в) если биссектрисы двух равных углов лежат на одной прямой, то эти углы вертикальные.

Решение.



I способ



II способ

В обоих случаях биссектрисы двух равных углов ABC и MNK лежат на одной прямой LF, но эти углы не вертикальные.

Задачи стохастической линии

(ответы, указания, решения)

§ 16. Правило умножения для комбинаторных задач

495 (510). Несколько стран решили использовать для своего государственного флага символику в виде трех горизонтальных полос одинаковой ширины разных цветов — белого, синего, красного. Сколько стран могут использовать такую символику при условии, что у каждой страны — свой флаг? Верно ли, что одной из этих стран является Россия?

Решение. Решим задачу, применяя правило умножения.

Для выбора цвета верхней полосы имеется три варианта: белый, синий, красный. Для каждого из этих трех вариантов существует по два варианта выбора цвета средней полосы, всего $3 \cdot 2 = 6$ вариантов. И наконец, для цвета третьей полосы остается только один вариант. Таким образом, получаем $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ вариантов.

Ответ: 6 стран, одна из которых Россия (белый, синий, красный).

496 (511). Несколько стран решили использовать для своего государственного флага символику в виде четырех вертикальных полос одинаковой ширины разных цветов — желтого, синего, красного, зеленого. Сколько стран могут использовать такую символику при условии, что у каждой страны — свой флаг?

Решение. Решим задачу, применяя правило умножения. Будем считать, что левая полоса — первая, следующая за ней — вторая, затем третья и правая — четвертая.

Для выбора цвета первой полосы есть 4 варианта: желтый, синий, красный, зеленый. Для каждого из этих четырех вариантов имеется по три варианта выбора цвета второй полосы, всего $4 \cdot 3 = 12$ вариантов. Для каждого из этих 12 вариантов существует по два варианта выбора третьей полосы, всего $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ варианта. И наконец, для цвета четвертой полосы остается только один вариант. Таким образом, получаем $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ варианта.

Ответ: 24 страны.

497 (512). Руководство некоторой страны решило сделать свой государственный флаг таким: на одноцветном прямоугольном фоне в одном из углов помещается квадратик другого цвета. Цвета решено выбрать из трех возможных: красный, белый, зеленый. Сколько вариантов такого флага существует?

Решение. Для выбора цвета фона есть 3 варианта. Для каждого из них имеется по два варианта выбора цвета квадратика, всего $3 \cdot 2 = 6$ вариантов. Для каждого из этих 6 вариантов существует по 4 способа расположения квадратика (по числу углов прямоугольника), всего $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ варианта.

Ответ: 24 варианта.

498 (513). В списке учеников 6-го класса 15 девочек и 13 мальчиков. Нужно выбрать двух дежурных по классу. Сколькими способами это можно сделать: а) при условии, что пару дежурных обязательно должны составить мальчик и девочка; б) без указанного условия?

Решение.

а) Для выбора девочки в качестве дежурной есть 15 вариантов. Если девочка дежурной назначена, то имеется 13 вариантов выбора мальчика в качестве второго дежурного. Всего $15 \cdot 13 = 195$ способов.

Ответ: 195 способов.

б) Для выбора первого дежурного имеется 28 вариантов. Для каждого их них существует 27 способов выбора второго дежурного. Всего $28 \cdot 27 = 756$ способов. Но среди этих 756 пар есть одинаковые. Для простоты рассуждений перенумеруем учеников (в списке каждому ученику присваивается номер). Тогда ясно, что, например, пара «ученик № 1, ученик № 12» и пара «ученик № 12, ученик № 1» — это одна и та же пара. То есть, рассуждая таким образом, мы каждую пару посчитали дважды. Значит, полученный результат надо уменьшить вдвое: $756 : 2 = 378$.

Ответ: 378 способов.

499 (514). В списке учеников 6-го класса 15 девочек и 13 мальчиков. Нужно выделить группу из трех человек для посещения заболевшего ученика этого класса. Сколькими способами это можно сделать, если:

а) все члены этой группы — девочки;

б) все члены этой группы — мальчики;

в) в группе 1 девочка и 2 мальчика;

г) в группе 2 девочки и 1 мальчик?

Решение. В задаче говорится, что заболел ученик, т. е. мальчик. Значит, девочек по-прежнему 15, а мальчиков осталось только 12.

а) Для выбора первой девочки существует 15 способов. Для каждого из них имеется по 14 способов выбора второй девочки, всего $15 \cdot 14 = 210$ способов. Для каждого их этих 210 способов остается по 13 способов выбора третьей девочки. Всего $15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730$ способов. Очевидно, что среди этих 2730 троек есть одинаковые. Выясним, сколько раз повторяется каждая тройка. Для этого перенумеруем девочек и рассмотрим тройку «1, 2, 3», где 1 — девочка, которая в этом списке стоит под номером 1, 2 — девочка № 2 и 3 — девочка № 3. При нашем способе рассуждений в число 2730 троек вошли все тройки типа «1, 2, 3», «2, 1, 3», «3, 2, 1» и т. д. Всего их будет столько же, сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3 при условии, что цифры не должны повторяться. Сосчитать, сколько будет таких троек, можно тем же способом, каким мы определяли количество трехзначных чисел. Первое место в такой тройке можно занять тремя способами, второе — двумя, третье — одним. Значит, всего будет $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ различных способов. Для нашей ситуации это означает, что каждая тройка девочек посчитана нами 6 раз. В итоге получаем $2730 : 6 = 455$.

Ответ: 455 способов.

б) Рассуждая аналогично, получаем $12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$, $1320 : 6 = 220$.

Ответ: 220 способов.

в) Первого мальчика можно выбрать 12 способами, а второго — 11. Всего $12 \cdot 11 = 132$, $132 : 2 = 66$ способов (поскольку каждую пару посчитали дважды). Для каждой из этих 66 пар мальчиков имеется 15 вариантов выбора девочки, всего $66 \cdot 15 = 990$ способов.

Ответ: 990 способов.

г) Для выбора первой девочки есть 15 вариантов, для выбора второй — 14, всего $15 \cdot 14 = 210$, $210 : 2 = 105$ вариантов выбора двух девочек. Для каждого из этих вариантов имеется по 12 способов выбора мальчика, всего $105 \cdot 12 = 1260$ способов.

Ответ: 1260 способов.

500 (515). В списке учеников 6-го класса 15 девочек и 13 мальчиков. Нужно выделить группу из трех человек для посещения заболевшей ученицы этого класса. Сколькими способами это можно сделать, если:

а) все члены группы — девочки;

б) все члены группы — мальчики;

в) в группе 1 девочка и 2 мальчика;

г) в группе 2 девочки и 1 мальчик?

Решение. Поскольку заболела ученица, девочек осталось 14, а мальчиков — по-прежнему 13. Рассуждая так же, как при решении задачи № 499 (516), получаем:

а) $14 \cdot 13 \cdot 12 = 2184$, $2184 : 6 = 364$.

Ответ: 364 способа.

б) $13 \cdot 12 \cdot 11 = 1716$, $1716 : 6 = 286$.

Ответ: 286 способов.

в) $(13 \cdot 12) : 2 = 78$, $78 \cdot 14 = 1092$.

Ответ: 1092 способа.

г) $((14 \cdot 13) : 2) \cdot 13 = 1183$.

Ответ: 1183 способа.

501 (516). а) Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5?

Решение. Для выбора цифры десятков имеется 5 вариантов. Для каждого из них существует по 5 вариантов выбора цифры единиц, всего $5 \cdot 5 = 25$ вариантов.

Ответ: 25 чисел.

б) Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии, что цифры не должны повторяться?

Решение. Для выбора цифры десятков есть 5 вариантов. Для каждого из них имеется по 4 варианта выбора цифры единиц, всего $5 \cdot 4 = 20$ вариантов.

Ответ: 20 чисел.

502 (517). а) Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 2, 4, 5?

Решение. Для выбора цифры сотен возможны 3 варианта. Для каждого из них имеется по 3 варианта выбора цифры десятков, всего $3 \cdot 3 = 9$ вариантов. Для каждого из этих девяти вариантов существует по 3 варианта выбора цифры единиц. Таким образом, всего получаем $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ вариантов.

Ответ: 27 чисел.

б) Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 2, 4, 5 при условии, что цифры не должны повторяться?

Решение. Для выбора цифры сотен имеется 3 варианта. Для каждого из них существует по 2 варианта выбора цифры десятков, всего $3 \cdot 2 = 6$ вариантов. Для каждого из этих шести вариантов остается единственный вариант выбора цифры единиц. Таким образом, всего получаем $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ вариантов.

Ответ: 6 чисел.

503 (518). а) Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 7, 9?

Решение. Для выбора цифры сотен есть 2 варианта — 7 или 9. Для каждого из них имеется по 3 варианта выбора цифры десятков, всего $2 \cdot 3 = 6$ вариантов. Для каждого из этих шести вариантов существует по 3 варианта выбора цифры единиц. Таким образом, всего получаем $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ вариантов.

Ответ: 18 чисел.

б) Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 7, 9 при условии, что цифры не должны повторяться?

Решение. Для выбора цифры сотен существует 2 варианта.

Для каждого из них имеется по 2 варианта выбора цифры десятков, всего $2 \cdot 2 = 4$ варианта. Для каждого из этих четырех вариантов остается единственный вариант выбора цифры единиц. Таким образом, всего получаем $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ варианта.

Ответ: 4 числа.

504 (519). а) Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 6, 9?

Решение. Для выбора цифры сотен есть 4 варианта. Для каждого из них имеется по 4 варианта выбора цифры десятков, всего $4 \cdot 4 = 16$ вариантов. Для каждого из этих 16 вариантов существует по 4 варианта выбора цифры единиц. Таким образом, всего получаем $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ варианта.

Ответ: 64 числа.

б) Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 6, 9 при условии, что цифры не должны повторяться?

Решение. Для выбора цифры сотен имеется 4 варианта. Для каждого из них существует по 3 варианта выбора цифры десятков, всего $4 \cdot 3 = 12$ вариантов. Для каждого из этих 12 вариантов остается по 2 варианта выбора цифры единиц. Таким образом, всего получаем $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ варианта.

Ответ: 24 числа.

505 (520). а) Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 4, 6?

Решение. Для выбора цифры сотен возможны 3 варианта — 2, 4, 6. Для каждого из них имеется по 4 варианта выбора цифры десятков, всего $3 \cdot 4 = 12$ вариантов. Для каждого из этих 12 вариантов существует по 4 варианта выбора цифры единиц. Таким образом, всего получаем $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$ вариантов.

Ответ: 48 чисел.

б) Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 4, 6 при условии, что цифры не должны повторяться?

Решение. Для выбора цифры сотен есть 3 варианта — 2, 4, 6. Для каждого из них имеется по 3 варианта выбора цифры десятков, всего $3 \cdot 3 = 9$ вариантов. Для каждого из этих 9 вариантов существует по 2 варианта выбора цифры единиц. Таким образом, всего получаем $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ вариантов.

Ответ: 18 чисел.

506 (521). В 6 «А» классе в четверг 5 уроков: математика, информатика, русский язык, английский язык, физкультура. Сколько всего можно составить вариантов расписания на четверг? Сколько имеется вариантов расписания при условии, что физкультура —

последний урок? Сколько будет вариантов расписания при условии, что физкультура — последний урок, а математика — первый?

Решение. Для выбора первого урока имеется 5 вариантов (М, И, Р, А, Ф). Для каждого из этих пяти вариантов существует по 4 варианта выбора второго урока, всего $5 \cdot 4 = 20$ вариантов. Далее, рассуждая аналогично, получаем всего $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ вариантов.

Если последний урок — физкультура, то число вариантов выбора каждого из первых четырех уроков уменьшается на 1. Так, первым уроком может быть один из четырех: М, И, Р, А, вторым — один из трех и т. д. Всего имеем $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ варианта.

Если первый урок — математика, а последний — физкультура, то число вариантов расписания будем находить исходя из числа вариантов выбора предметов на 2-й, 3-й и 4-й уроки. Для второго урока имеется три варианта (И, Р, А), для третьего — по 2 варианта на каждый из трех вариантов для второго урока, для четвертого остается один вариант, всего $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ вариантов.

Ответ: 120, 24, 6 вариантов.

507 (522). В 6 «А» классе в пятницу 6 уроков: математика, информатика, русский язык, английский язык, история, физкультура. Сколько всего можно составить вариантов расписания на пятницу? Сколько времени потратит завуч на запись всех вариантов, если известно, что на запись одного варианта у него уходит 30 секунд?

Решение. Рассуждаем так же, как при ответе на первый вопрос предыдущей задачи. В итоге получаем $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ вариантов. Завуч потратит $720 \cdot 0,5 = 360$ (мин.) = 6 ч.

Ответ: 720 вариантов; 6 ч.

508 (523). В чемпионате России по футболу в высшей лиге участвуют 16 команд. Перед началом чемпионата газета «Спорт» провела интернет-опрос читателей, задав им два вопроса: 1) какие три команды станут призерами чемпионата, т. е. займут первое, второе или третье место; 2) какие две команды по итогам чемпионата должны будут покинуть высшую лигу, т. е. займут два последних места? Читатели в своих ответах указали все возможные варианты при ответе и на первый, и на второй вопрос.

а) Сколько вариантов состава призеров чемпионата указали участники опроса?

Решение. Для первого места имеется 16 вариантов выбора команды, для второго — 15 и для третьего — 14, всего $16 \cdot 15 \cdot 14 = 3360$ вариантов.

Ответ: 3360 вариантов.

б) Сколько вариантов состава неудачников чемпионата указали участники опроса?

Решение. Для выбора последнего места имеется 16 вариантов, а для предпоследнего — 15, всего $16 \cdot 15 = 240$ вариантов.

Ответ: 240 вариантов.

509 (524). В двух урнах имеется по семь шаров, в каждой — семи различных цветов: красного, оранжевого, желтого, зеленого, голубого, синего, фиолетового. Из каждой урны одновременно вынимается по одному шару.

а) Сколько существует комбинаций, при которых вынутые шары одного цвета?

Решение. Комбинаций, при которых вынутые шары одного цвета, столько же, сколько всего разных цветов, — 7.

Ответ: 7.

б) Сколько возможно комбинаций, при которых вынутые шары разных цветов?

Решение. Для выбора первого шара имеется 7 вариантов, для второго — 6, всего $7 \cdot 6 = 42$ варианта. Однако комбинации типа «белый — красный» и «красный — белый» считаются одинаковыми, поэтому число всех полученных комбинаций надо разделить пополам: $42 : 2 = 21$.

Ответ: 21 комбинация.

в) Сколько всего существует различных комбинаций вынутых шаров (комбинации типа «белый — красный» и «красный — белый» считаются одинаковыми)?

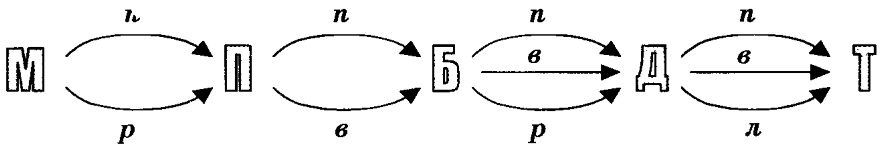
Решение. Воспользуемся результатами предыдущих задач: $21 + 7 = 28$.

Ответ: 28 комбинаций.

510 (525). Группа туристов планирует осуществить поход по маршруту Мамино — Папино — Бабушкино — Дедушкино — Тетино.

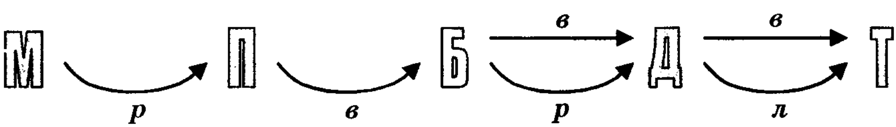
Из Мамино в Папино можно сплавиться по реке или дойти пешком. Из Папино в Бабушкино можно пройти пешком или доехать на велосипедах. Из Бабушкино в Дедушкино можно доплыть по реке, доехать на велосипедах или пройти пешком. Из Дедушкино в Тетино можно пройти пешком, доехать на велосипедах или на лошадях. Сколько всего вариантов похода могут выбрать туристы? Сколько вариантов похода могут выбрать туристы при условии, что хотя бы один из участков маршрута они должны пройти пешком?

Р е ш е н и е. Сделаем рисунок к задаче:



Для выбора способа передвижения от Мамино к Папино возможны 2 варианта. Для каждого из них имеется по 2 варианта способа передвижения от Папино к Бабушкино, всего $2 \cdot 2 = 4$ варианта. Для каждого из этих четырех вариантов существует по 3 способа передвижения от Бабушкино к Дедушкино, всего $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ вариантов. И наконец, для каждого из этих 12 вариантов имеется по 3 варианта передвижения от Дедушкино к Тетино, всего $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ вариантов.

Теперь найдем, сколько вариантов похода могут выбрать туристы при условии, что хотя бы один из участков маршрута они должны пройти пешком. Для этого посчитаем число вариантов маршрута при условии, что они **нигде** не идут пешком. В этом случае рисунок к задаче будет выглядеть таким образом:



Найдем число вариантов маршрута, используя правило умножения: $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$.

Искомую величину находим вычитанием: $36 - 4 = 32$.

О т в е т: всего 36 вариантов похода; 32 варианта похода при условии, что хотя бы один из участков маршрута туристы должны пройти пешком.

Контрольные задания

Используя правило умножения, вычислите, сколько существует различных трехзначных чисел, составленных из цифр 3, 5, 7, в случае если:

а) в числе могут быть одинаковые цифры.

О т в е т: 27 чисел;

б) в числе нет одинаковых цифр.

О т в е т: 6 чисел.

§ 38. Первое знакомство с понятием «вероятность»

Охарактеризуйте событие, о котором идет речь, как достоверное, невозможное или случайное. Оцените событие словами «стопроцентная вероятность», «нулевая вероятность», «мало вероятно», «достаточно вероятно». Если речь идет о двух похожих случайных событиях, попробуйте сравнить, какое из них более вероятно, какое — менее вероятно, какие — равновероятны.

1097 (1122). а) «25 апреля в Москве будет дождь».

Решение. Это случайное событие. По результатам многолетних наблюдений можно утверждать, что дождь в конце апреля событие достаточно вероятное.

б) «25 апреля в Москве будет снег».

Решение. Это случайное событие. По результатам многолетних наблюдений можно утверждать, что снег в конце апреля событие достаточно вероятное. Однако, сравнивая его с предыдущим событием, следует признать, что оно менее вероятно.

в) «25 апреля в Москве день будет длиннее ночи».

Решение. Это достоверное событие, оно произойдет со стопроцентной вероятностью.

г) «25 апреля в Москве день будет короче ночи».

Решение. Это невозможное событие. Его вероятность равна нулю.

1098 (1123). Вы берете наугад любое слово с этой страницы учебника. Событие состоит в следующем:

а) «В выбранном слове есть буква *о*».

Решение. Это случайное событие. Буква *о* довольно часто встречается в написании слов, поэтому данное событие следует оценить как достаточно вероятное.

б) «В выбранном слове есть буква *ф*».

Решение. Это случайное событие. Буква *ф* в написании слов встречается редко, поэтому данное событие оцениваем как маловероятное, и уж во всяком случае менее вероятное, чем предыдущее.

в) «В выбранном слове есть гласная».

Решение. Гласных букв нет только в некоторых предлогах, это событие оцениваем как достаточно вероятное.

г) «В выбранном слове есть китайский иероглиф».

Решение. Это невозможное событие, так как на этой странице учебника нет китайских иероглифов. Вероятность этого события нулевая.

1099 (1124). Петя задумал натуральное число. Событие состоит в следующем:

а) «Задумано четное число».

Решение. Это случайное событие, достаточно вероятное.

б) «Задумано нечетное число».

Решение. Это тоже случайное, достаточно вероятное событие. Если сравнить его с предыдущим, то следует отметить, что эти события равновероятны.

в) «Задумано число, не являющееся ни четным, ни нечетным».

Решение. Это событие, вероятность которого рана нулю, так как не существует натуральных чисел, которые не являются ни четными, ни нечетными.

г) «Задумано число, являющееся четным или нечетным».

Решение. Это событие, которое в данной ситуации произойдет со стопроцентной вероятностью, так как любое натуральное число является либо четным, либо нечетным.

1100 (1125). Петя задумал натуральное число. Событие состоит в следующем:

а) «Задумано простое число».

Решение. Это случайное событие. Поскольку простых чисел гораздо меньше, чем составных, оцениваем это событие как маловероятное.

б) «Задумано составное число».

Решение. Это случайное событие. Большинство чисел — составные, поэтому оцениваем это событие как достаточно вероятное.

в) «Задумано число, кратное 2».

г) «Задумано число, дающее при делении на 2 остаток 1».

В случаях в) и г) рассуждаем так же, как при решении заданий а) и б) из № 1099 (1124), заметив, что числа, кратные 2, — четные, а дающие при делении на 2 в остатке 1 — нечетные.

1101 (1126). Петя перемножил два рациональных числа — a и b. Событие состоит в следующем:

а) «ab — положительное число».

Решение. Это случайное событие. Оно происходит в случаях, когда перемножаются два положительных или два отрицательных числа. Следует считать это событие достаточно вероятным.

б) «ab — отрицательное число».

Решение. Это случайное событие. Оно происходит тогда, когда перемножаются два числа, одно из которых положительное, а другое — отрицательное. Оно, так же как и предыдущее, достаточно вероятно.

Попытаемся сравнить вероятности двух последних событий. Они равносильны таким событиям:

первое — «выбраны два числа с одинаковыми знаками»;

второе — «выбраны два числа с разными знаками». Заметим, что, поскольку речь идет о числах со знаками, ни одно из этих чисел не может быть нулем.

Скорее всего, эти события равновероятны, однако утверждать это наверняка мы не можем.

в) «$ab = 0$».

Решение. Это случайное событие. Оно происходит только тогда, когда одно из выбранных чисел — 0. Это событие можно оценить как менее вероятное, чем предыдущие.

г) «ab отлично от 0».

Решение. Это случайное событие. Оно происходит тогда, когда ни одно из выбранных чисел не равно нулю. Это событие оцениваем как достаточно вероятное.

1102 (1127). Даны два интервала: (0; 1) и (5; 10); из первого выбирается число a, из второго — число c. Событие состоит в следующем:

а) «Число a меньше числа c».

Решение. Достоверное событие, его вероятность — 100%.

б) «Число a больше числа c».

Решение. Невозможное событие, его вероятность нулевая.

в) «Число $a + c$ принадлежит интервалу (5; 10)».

Решение. Это случайное событие. Если, например, $a = 0{,}5$, а $c = 7$, то $a + c$ принадлежит интервалу (5; 10). А если взять $a = 0{,}1$, $c = 9{,}9$, то $a + c = 10$, это число не принадлежит интервалу (5; 10). Интуиция подсказывает, что указанное событие достаточно вероятно.

г) «Число $a + c$ не принадлежит интервалу (5; 10)».

Решение. Это случайное событие. Основываясь, как и в предыдущем случае, на интуиции, можно предположить, что вероятность этого события меньше, чем предыдущего.

Замечание. При выполнении некоторых заданий этого параграфа учащиеся могут не сойтись в оценке степени вероятности случайного события (одни могут считать его маловероятным, другие — достаточно вероятным и т. п.). В таком случае не следует настаивать на каком-либо одном варианте, но надо сказать, что в дальнейшем они познакомятся с более точными методами оценки степени вероятности события, вот тогда-то их спор и будет решен.

§ 39. Первое знакомство с подсчетом вероятности

Решение задач на подсчет вероятности следует начинать с вопросов:

1) Какие имеются варианты (возможности) исходов того или иного события?

2) Являются ли эти исходы равновероятными?

3) Сколько существует равновероятных возможностей?

4) Сколько из них благоприятных?

1104 (1129). В колоде 36 карт, из них наугад вынимают одну карту. Какова вероятность того, что вынутая карта:

а) король?

Решение. В колоде 4 короля. Возможности вытащить карту определенного наименования равновероятны. Поскольку возможностей всего 36, вероятность вытащить короля равна $\frac{4}{36}$, т. е. $\frac{1}{9}$.

Ответ: $\frac{1}{9}$.

б) масти пики?

Решение. В колоде 9 карт масти пики. Возможности вытащить карту определенной масти равновероятны. Вероятность вытащить карту масти пики — $\frac{9}{36}$, т. е. $\frac{1}{4}$.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

в) красной масти?

Решение. В колоде 18 карт красной масти (бубны, черви). Вероятность наступления этого события — $\frac{18}{36}$, т. е. $\frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

г) «картинка», т. е. валет, дама, король или туз?

Решение. В каждой масти по 4 «картинки», т. е. всего 16 «картинок». Возможности вытащить ту или иную карту (любую) равновероятны, вероятность вытаскивания одной из них — $\frac{1}{36}$. Поскольку «картинок» 16, вероятность вытаскивания «картинки»:

$$P = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}.$$

Ответ: $\frac{4}{9}$.

Замечание. Возможно, у кого-то из учащихся возникнет желание рассмотреть два варианта события: «картинка» и «не картинка» — и сделать неверный вывод о том, что вероятность каждого из них — 50%. В этом случае следует убедиться в том, что эти события не являются равновероятными, поскольку «картинок» меньше, чем «не картинок».

Если этого не произойдет, следует все же обсудить с учащимися, почему нельзя рассматривать эти два варианта событий.

1105 (1130). В школьной лотерее распространили 400 билетов, из которых выигрышными являются 50.

а) Какова вероятность выигрыша при покупке одного билета?

Решение. Зачастую учащиеся здесь дают ошибочный ответ: $\frac{1}{400}$. В этом случае следует предложить им изменить условие: «Среди 400 билетов один выигрышный. Какова вероятность приобретения выигрышного билета? А если два выигрышных, три и т. д.?» В итоге приходим к правильному результату: $P=\frac{50}{400}=\frac{1}{8}$.

Правильные рассуждения такие.

Всего имеется 400 равновероятных исходов, 50 из них благоприятные, значит, вероятность купить выигрышный билет:

$$P=\frac{50}{400}=\frac{1}{8}.$$

Ответ: $\frac{1}{8}$.

б) Сколько следует приобрести билетов, чтобы вероятность того, что хотя бы один билет выигрышный, была бы равна 100%?

Решение. 100% — это вероятность достоверного события, т. е. мы должны быть уверены в том, что это событие обязательно произойдет, т. е. среди купленных билетов хотя бы один будет выигрышным. Из 400 билетов 50 выигрышных. Представим, что мы купили 350 билетов и среди них не оказалось ни одного выигрышного. Покупка следующего, 351-го, билета гарантирует, что нам попался выигрышный билет, так как невыигрышных билетов больше не осталось.

Ответ: 351 билет.

1107 (1132). Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4? Какова вероятность того, что составленное число:

а) четное?

Р е ш е н и е. Всего из этих цифр можно составить $4 \cdot 5 = 20$ чисел. Значит, всего имеется 20 исходов. Заметим, что все они равновероятны.

Благоприятный исход — это выбор числа, у которого цифра единиц или 0, или 2, или 4. Всего таких чисел $4 \cdot 3 = 12$ (первую цифру можем выбрать четырьмя способами, а вторую — тремя).

Вероятность того, что составленное число четное:

$$P = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

О т в е т: $\frac{3}{5}$.

б) нечетное?

Р е ш е н и е. Всего чисел 20. Из них нечетных $4 \cdot 2 = 8$. Вероятность того, что составленное число нечетное:

$$P = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$$

О т в е т: $\frac{2}{5}$.

в) делится на 5?

Р е ш е н и е. Всего чисел 20. Из них 4 числа (с последней цифрой 0) делятся на 5. Вероятность того, что составленное число делится на 5:

$$P = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$

О т в е т: $\frac{1}{5}$.

г) делится на 4?

Р е ш е н и е. Всего чисел 20. Вряд ли здесь нужно использовать признак делимости на 4, чтобы найти количество чисел, делящихся на 4. Можно воспользоваться простым перебором: 12, 20, 24, 32, 40, 44.

Итак, имеем 6 благоприятных исходов.

Вероятность того, что составленное число делится на 4:

$$P = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}.$$

О т в е т: $\frac{3}{10}$.

1108 (1133). Собрание для проведения тайного голосования по важному вопросу избрало счетную комиссию в составе: Антонов, Борисова и Ващенко. Члены счетной комиссии должны распределить обязанности: председатель, заместитель, секретарь. Какова вероятность, что председателем счетной комиссии будет Борисова?

Решение.

1) $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ — число всех равновероятных исходов;

2) $2 \cdot 1 = 2$ — число благоприятных исходов;

3) $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ — искомая вероятность.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

1109 (1134). В списке учеников 6-го класса 15 девочек и 13 мальчиков. Учитель собирается назначить двух дежурных: мальчика и девочку.

Тане Петровой сегодня некогда, она не может дежурить по классу. Какова вероятность того, что она не будет назначена учителем и ей не придется отпрашиваться?

Решение.

1) $15 \cdot 13$ — число всех равновероятных исходов;

2) $14 \cdot 13$ — число благоприятных (для Тани) исходов;

3) $P = \frac{14 \cdot 13}{15 \cdot 13} = \frac{14}{15}$ — искомая вероятность.

Ответ: $\frac{14}{15}$.

1110 (1135). В списке учеников 6-го класса 15 девочек и 13 мальчиков. Нужно выделить трех человек: одну девочку и двух мальчиков — для посещения заболевшего ученика этого класса. Тане Петровой очень хочется попасть в число посетителей. Какова вероятность того, что Таню включат в тройку?

Решение.

1) $15 \cdot (12 \cdot 11) : 2$ — число всех равновероятных исходов;

2) $1 \cdot (12 \cdot 11) : 2$ — число благоприятных исходов;

3) $P = \frac{1 \cdot (12 \cdot 11) : 2}{15 \cdot (12 \cdot 11) : 2} = \frac{1}{15}$ — искомая вероятность.

Ответ: $\frac{1}{15}$.

1111 (1136). В списке учеников 6-го класса 15 девочек и 13 мальчиков. Нужно выделить трех человек, одну девочку и двух мальчиков, для посещения заболевшей ученицы этого класса. Коле Иванову очень хочется попасть в число посетителей. Какова вероятность того, что Колю включат в тройку?

Решение.

1) $14 \cdot (13 \cdot 12) : 2$ — число всех равновероятных исходов;

2) $(14 \cdot 1 \cdot 12) : 2$ — число благоприятных исходов;

3) $P = \dfrac{(14 \cdot 1 \cdot 12) : 2}{14 \cdot (13 \cdot 12) : 2} = \dfrac{1}{13}$ — искомая вероятность.

Ответ: $\dfrac{1}{13}$.

1112 (1137). В двух урнах имеется по семь шаров, в каждой — семи различных цветов: красного, оранжевого, желтого, зеленого, голубого, синего, фиолетового. Из каждой урны одновременно вынимается по одному шару.

а) Сколько всего существует различных комбинаций вынутых шаров (комбинации типа «синий — красный» и «красный — синий» считаются одинаковыми)?

Решение. $(7 \cdot 6) : 2 + 7 = 28$.

Ответ: 28.

б) Какова вероятность того, что вынутые шары окажутся одного цвета?

Решение.

1) 28 — число всех равновероятных исходов;

2) 7 — число благоприятных исходов;

3) $P = \dfrac{7}{28} = \dfrac{1}{4}$ — искомая вероятность.

Ответ: $\dfrac{1}{4}$.

в) Какова вероятность того, что вынутые шары окажутся разных цветов?

Решение.

1) 28 — число всех равновероятных исходов;

2) 21 — число благоприятных исходов;

3) $P = \dfrac{21}{28} = \dfrac{3}{4}$ — искомая вероятность.

Ответ: $\dfrac{3}{4}$.

1113 (1138). В коробке «Ассорти» 20 конфет, из которых 10 с шоколадной начинкой и 10 с пралиновой начинкой, каждая конфета находится в своей ячейке. Тане разрешили взять две конфеты. Сколькими способами она может это сделать? Какова вероятность того, что обе конфеты окажутся с любимой Таниной начинкой — шоколадной?

Решение.

Присвоим конфетам с шоколадной начинкой номера с 1-го по 10-й, а с пралиновой — с 11-го по 20-й. Выбрать две конфеты из 20 можно $20 \cdot 19 = 380$ способами. Но при этом некоторые варианты, например (1, 19) и (19, 1), одинаковы: неважно, какая конфета взята первой, а какая — второй. Значит, на самом деле число всех исходов события $380 : 2 = 190$. Аналогично, выбрать 2 шоколадные конфеты из 10 можно $(10 \cdot 9) : 2 = 45$ способами.

Искомая вероятность $P = \frac{45}{190} = \frac{9}{38}$.

Ответ: $\frac{9}{38}$.

1114 (1139). Какова вероятность выигрыша в спортивной лотерее 3 из 16 (в лотерее участвует 16 номеров с 1-го до 16-го, выигрыш выпадает на 3 номера)?

Решение. Найдем число всех возможных вариантов.

1) $16 \cdot 15 \cdot 14 = 3360$ — число упорядоченных троек номеров.

2) Нас не интересует, в каком порядке записаны (выпали) выигрышные номера. Посчитаем, сколько троек, в которых одни и те же номера, например: (1, 15, 8), (1, 8, 15), (15, 8, 1) и т. д. $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ — число троек, состоящих из одних и тех же номеров.

3) $3360 : 6 = 560$ — число всех возможных вариантов.

4) 1 — число благоприятных вариантов.

5) $P = \frac{1}{560}$ — искомая вероятность.

Ответ: $\frac{1}{560}$.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Зубарева Ирина Ивановна,
Мордкович Александр Григорьевич

МАТЕМАТИКА
5—6 классы

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
для учителя

Генеральный директор издательства *М. И. Безвиконная*
Главный редактор *К. И. Куровский*
Редактор *Н. И. Никитина*
Оформление и художественное редактирование: *Т. С. Богданова*
Технический редактор *И. Л. Ткаченко*
Корректоры *Т. А. Юдичева, Л. С. Щербакова*
Компьютерная верстка: *А. М. Репкин, А. А. Горкин*

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.001815.02.07 от 22.02.2007.

Формат 60×90 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Школьная».
Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,5. Тираж 5000 экз. Заказ № 899

Издательство «Мнемозина». 105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел.: (495) 367-54-18, 367-56-27, 367-67-81; факс: (495) 165-92-18.
E-mail: ioc@mnemozina.ru
www.mnemozina.ru

Магазин «Мнемозина» (розничная и мелкооптовая продажа книг).
105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел.: (495) 783-82-84, 783-82-85, 783-82-86.

Торговый дом «Мнемозина» (оптовая продажа книг).
Тел./факс: (495) 657-98-98 (многоканальный).
E-mail: td@mnemozina.ru

Отпечатано в ООО «Финтрекс».
115477, Москва, ул. Кантемировская, 60.